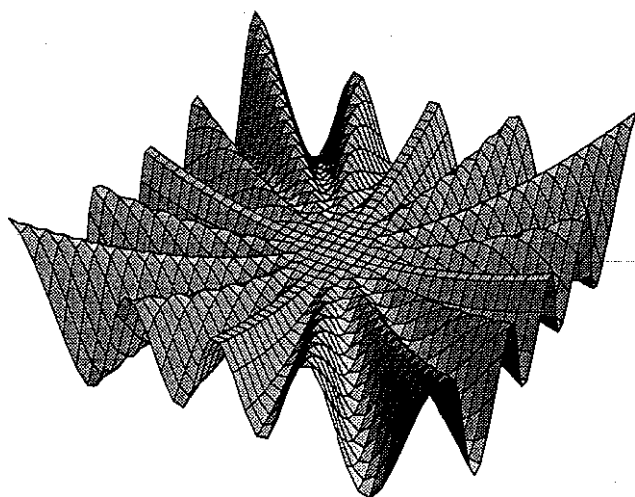


Karsai János

Matematika

gyógyszerészhallgatók számára



Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem
Orvosi Informatikai Intézet
SZEGED
1996.

Differenciálási és integrálási szabályok

$$(cf)' = c \cdot f'$$

$$\int cf = c \cdot \int f$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\int f'g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy \quad (y = g(x))$$

$$(\bar{f}(x))' = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$$

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1) \cdot x^{\alpha}$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Határozott integrál kiszámítása

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (F(x) \text{ egy primitív függvény})$$

A legfontosabb Taylor sorok

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (|x| < 1)$$

Jelölések

$\{a, \dots, b\}$	halmaz	∞	végtelen
$\emptyset$	üres halmaz	$-\infty$	mínusz végtelen
U	alaphalmaz, univerzum	$ a $	abszolút érték
$\in$	halmaz eleme	$\sum$	összegzés
$\cup$	halmazok egyesítése	$\prod$	szorzás
$\cap$	halmazok metszete	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$	n-faktoriális
A^c	halmaz komplementere	$\min$	minimum
$\setminus$	halmazok különbsége	$\max$	maximum
Δ	szimmetrikus különbség	$\bar{f}$	inverz függvény
$\subset, \subseteq$	részhalmaz	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	sorozat
$\wedge$	logikai "és"	$\lim$	határérték
$\vee$	logikai "vagy"	$a_n \rightarrow a$	a_n tart a -hoz
$\Rightarrow$	következik (ha, akkor)	$f', \frac{df}{dx}$	derivált
$\Leftrightarrow$	akkor, és csakis akkor	$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	parciális deriváltak
$\exists$	van olyan	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \dots$	második parc. deriváltak
$\forall$	minden	$\int f(x) dx$	határozatlan integrál
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	valós számok, szám n-esek	$\int_a^b f(x) dx$	határozott integrál
$\mathbb{N}$	természetes számok	$\pi \approx$	3,141592
$\mathbb{I}$	egész számok	$e \approx$	2.718281
$\mathbb{Q}$	racióális számok		a term. log. alapszáma
$<, \leq$	kisebb, kisebb vagy egyenlő	$\ln x$	természetes logaritmus
$>, \geq$	nagyobb, nagyobb vagy egyenlő		
$[a, b], (a, b),$			
$[a, b), (a, b]$	intervallumok ([-zárt, (- nyitott)		
$< a, b >$	tetszőleges intervallum		

Előszó

Ez a jegyzet Győri István professzor korábbi előadásai és a saját mostani, a Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem Gyógyszerésztudományi Karán az első éves gyógyszerészhallgatók számára tartott előadásaim alapján készült. A tantárgy céljának megfelelően, a jegyzet tartalmazza azokat a matematikai alapfogalmakat és módszereket, amelyekre a hallgatóknak munkájuk során várhatóan szükségük lesz. Igyekeztem az absztrakt eljárásokat minél érthetőbben megfogalmazni, alkalmazásokkal illusztrálni. A jegyzet 180 ábrát tartalmaz, és 103 példa segíti az elmélet megértését, utal a lehetséges általánosításokra és nehézségekre.

A jegyzet lényegében két fő részre tagolódik. Az első rész (1. fejezet) tartalma néhány pont kivételével a középiskolai tananyagból ismert. Az alapismeretek tömör összefoglalásával el kívánjuk kerülni a középiskolás tankönyvekre való állandó hivatkozást. Áttekintjük a valós számok, a halmazok legfontosabb tulajdonságait, a függvényelmélet alapfogalmait, a legfontosabb elemi függvényeket és néhány grafikus eljárást.

A második részben (2–8. fejezetek) a differenciál- és integrálszámítás elemeivel, azok legfontosabb alkalmazásaival foglalkozunk. Majd a többváltozós függvények fogalmát és néhány tulajdonságát tárgyaljuk. Végül a differenciálegyenletek elméletébe nyújtunk betekintést. Megismertetjük az olvasót néhány alapvető differenciálegyenlettel.

Az olvasó későbbi munkáját szeretném segíteni azzal, hogy a jegyzet bővebb, mint az előadásokon elhangzott és a vizsgán számonkért anyag. Az A. Függelékben található néhány mélyebb ismeretet adó alapkönyv. A C. függelékben egy előzetes vizsgatematikát bocsátunk a hallgatók rendelkezésére.

A jegyzet elektronikus függeléke a több mint száz számítógépes oktatási segédlet és mintafeladat (~~Mathematica-ban írva~~), amelyek folyamatosan a hallgatóság rendelkezésére állnak. A jegyzet ábrái a World Wide Web-n a <http://www.dmi.szote.u-szeged.hu> címen is megtalálhatók.

A jegyzet Latex rendszerrel, az ábrák és grafikonok a Mathematica¹ és IRIS Explorer² rendszerekkel Silicon Graphics munkaállomáson készültek. Az ábrák és kiegészítő számítógépes anyagok az Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért 776/94 sz. projekt és a FEFA 1608/4 sz. projekt által támogatott munka eredményei.

Szeretnék köszönetet mondani Győri István professzornak az alaptermatika kifejlesztéséért és javaslataiért, az oktatásban résztvevő munkatársaknak és hallgatóimnak az ötletekért és a hibavadászatért. Végül szeretném megköszönni Dr. László Zoltán és Dr. Hajtmann Béla gyors, igen alapos szaklektori munkáját valamint támogató és elgondolkodtató megjegyzéseit.

Szeged, 1996 október

Dr. Karsai János

¹A Mathematica a Wolfram Research védjegye.

²Az IRIS Explorer a Silicon Graphics védjegye.

Tartalom

1. Függvénytani alapfogalmak	1
1.1. Halmazok és tulajdonságaik	1
1.1.1. Műveletek halmazokkal	2
1.2. A valós számok	4
1.3. Koordinátarendszerek, halmazok Descartes-szorzata	6
1.4. Függvények	7
1.4.1. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények és ábrázolásuk	8
1.5. Összetett függvények	9
1.6. Kölcsönösen egyértelmű függvények	10
1.6.1. Kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények grafikonja	10
1.7. Inverz függvény	10
1.8. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények inverze	11
1.9. Monoton függvények	13
1.10. Néhány fontos tulajdonság	14
1.11. Egyenesek	15
1.12. Hatványfüggvények	17
1.12.1. Nemnegatív egész kitevő	17
1.12.2. Az $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ függvények, negatív kitevőjű hatványok ($n \in \mathbf{N}$)	18
1.12.3. Gyökfüggvények	18
1.12.4. Hatványfüggvények tetszőleges valós kitevővel	19
1.13. Függvénytranszformációk	20
1.13.1. A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció	20
1.13.2. A $g(x) = f(x) + c$ transzformáció	21
1.13.3. A $g(x) = f(x - p)$ transzformáció	21
1.13.4. A $g(x) = f(-x)$ transzformáció	21
1.14. Másodfokú függvények	22
1.15. Polinomok	23
1.16. Racionális törtfüggvények	23
1.17. Az $f(x) = x $ függvény	23
1.18. Trigonometrikus függvények	24
1.19. Függvénytranszformációk, folytatás: a $g(x) = f(cx)$, ($c > 0$) transzformáció	27
1.20. Az exponenciális függvény	28
1.21. A logaritmus függvény	29
1.22. Logaritmikus függvénytranszformációk, logaritmikus skálák	29
2. Határérték, folytonosság	32
2.1. Határértékproblémára vezető feladatok	32
2.1.1. A függvény érintője, mint határhelyezet	32
2.1.2. A terület, mint határérték	33
2.1.3. Függvények viselkedése a végtelen közelében	34
2.1.4. Függvények határértékének intuitív fogalma	35
2.2. Sorozatok határértéke	35
2.3. Kamatos kamat, az $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, az "e" szám	37
2.4. Függvény határértéke véges pontban	39
2.5. Féloldali határértékek	40
2.6. Folytonos függvények	41
2.7. Végtelen határérték véges helyen	42
2.8. Határértékek a végtelenben	44
2.9. Függvények összehasonlítása	45
2.9.1. Határértékek összehasonlítása	45
2.9.2. "Érintő a végtelenben": aszimptota	46
2.9.3. A $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték vizsgálata, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékek	47

TARTALOM

2.9.4.	Racionális törtfüggvények határértéke véges helyen	47
2.9.5.	Racionális függvények határértéke a végtelenben	48
2.9.6.	$A \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték	49
3.	A differenciálszámítás elemei	50
3.1.	Bevezetés	50
3.2.	A differenciálhányados definíciója	51
3.3.	A deriválható függvény folytonossága	54
3.4.	Féloldali deriváltak	54
3.5.	Differenciálási szabályok	55
3.5.1.	A hatványfüggvények differenciálhányadosa	56
3.5.2.	A $\sin x$ és $\cos x$ deriváltja	56
3.5.3.	Összeg, szorzat és hányados deriváltja	57
3.5.4.	Az összetett függvény deriváltja	59
3.5.5.	Az inverz függvény deriváltja	60
3.5.6.	A logaritmus függvény deriváltja, az $\ln x$ definíciója	60
3.5.7.	Az exponenciális függvény deriváltja, e^x , exponenciális növekedés	61
3.6.	Lineáris közelítések	61
3.7.	Magasabb rendű deriváltak	63
3.8.	A derivált fizikai jelentése, sebesség, gyorsulás	63
4.	A differenciálszámítás alkalmazásai	64
4.1.	Monotonitás és szélsőértékek	64
4.1.1.	Monotonitás	65
4.1.2.	Lokális szélsőértékek	66
4.1.3.	Differenciálható függvény szélsőértéke	67
4.1.4.	Szélsőérték töréspontban	69
4.1.5.	Globális szélsőértékek	70
4.2.	A konvexitás és a deriváltak kapcsolata	71
4.3.	Függvények menetének összehasonlítása, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ alakú határértékek, L'Hospital szabály	74
4.4.	Függvények grafikonjának rajzolása, a függvényvizsgálat lépései	75
4.5.	Függvények közelítése, Taylor polinomok, Taylor sorok	76
4.5.1.	Az e^x Taylor polinonjai az $x_0 = 0$ körül	80
4.5.2.	A $\sin x$ és $\cos x$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül	81
4.5.3.	Az $1/(1 \pm x)$, $\ln(1 \pm x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül	82
5.	A határozatlan integrál: a deriválás megfordítása	84
5.1.	A primitív függvény, a határozatlan integrál definíciója	84
5.2.	Egyszerű integrálási szabályok	86
5.3.	A parciális integrálás szabálya	87
5.4.	A helyettesítéses integrálás szabálya	88
6.	A határozott integrál	89
6.1.	A függvény változásának előállítása deriváltjából	89
6.2.	A határozott integrál definíciója	91
6.3.	A határozott integrál tulajdonságai	92
6.4.	A határozott integrál becslése, integrálközép	93
6.5.	A területfüggvény és tulajdonságai, az integrálszámítás alaptétele	94
6.6.	Az integrál alkalmazásai	98
6.6.1.	Területszámítási feladatok	98
6.6.2.	Test mozgása	99
6.6.3.	Munka kiszámítása	100
6.6.4.	Vonal ívhosszának kiszámítása	100

TARTALOM

6.6.5. Forgástestek térfogatának kiszámítása	101
6.7. Közelítő integrálási formulák	102
7. Többváltozós függvények	104
7.1. Definíció, ábrázolás	104
7.1.1. Ábrázolás grafikonnal	104
7.1.2. Ábrázolás szintvonalakkal, szintfelületekkel	105
7.2. Szélsőértékek, parciális deriváltak	106
7.3. A legkisebb négyzetes közelítés	109
8. Közönséges differenciálegyenletek	112
8.1. A differenciálegyenletek definíciója, geometriai jelentése	112
8.2. A kezdetiérték probléma és megoldása	114
8.3. Egyensúlyi helyzetek	115
8.4. Autonóm differenciálegyenletek	116
8.5. Az $x' = ax$ egyenlet	116
8.5.1. Egyszerű szaporodási folyamat	117
8.5.2. Születési-halálozási folyamat	117
8.6. Az $x' = ax + b$ differenciálegyenlet	118
8.6.1. Korlátozott növekedés	119
8.6.2. Születési folyamat lehalászással	120
8.6.3. Születési és bevándorlási folyamat	120
8.7. Az $x' = a(A - x)(B - x)$ differenciálegyenlet	121
8.7.1. Korlátozott növekedési folyamat	122
8.7.2. Korlátozott növekedés lehalászással	122
8.7.3. Kémiai reakciók	123
8.8. Az $x' = a(A - x)^2$ egyenlet	124
8.9. Általánosítások, nemautonóm egyenletek, szétválasztható egyenletek	125
8.10. Magasabb rendű egyenletek, lineáris egyenletek megoldása	126
8.11. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek	128
8.11.1. Egy gyógyszerfelszívódási modell	131
A. Függelék. További irodalom	132
B. Függelék. Függvények tanulmányozása számítógéppel	132
C. Függelék. A vizsga témakörei 1996-ban	133

1. Alapismeretek Áttekintése

1.1. Halmazok és tulajdonságaik

A nyelvek számos szót használnak csoportok, azonos vagy hasonló tulajdonságú egyedek sokaságának jelölésére. A nép azonos nyelvet beszélő, azonos kultúrájú, többnyire egy területen élő népcsoport. Az iskolai osztály azokat a tanulókat jelöli, akik egy csoportban, együtt járnak órákra.

A matematikában pontos meghatározás szükséges. *Dolgok, objektumok egyértelműen meghatározott összességét, sokaságát halmazoknak* nevezzük. Az egyértelműség azt jelenti, hogy egy objektumról eldönthető, hogy az adott halmazhoz tartozik-e.

Egy halmaz adott, ha megadjuk azt a szabályt, eljárást, amely eldönti, hogy egy adott egyed a halmaz eleme-e. Egy halmazt meghatározó szabály lehet az elemek felsorolása (ha lehetséges), az elemeket megadó eljárás leírása képlettel, vagy tetszőleges más (pl. grafikus) eljárás, ami az elemek azonosítását biztosítja.

A halmazokat általában nyomtatott nagybetűvel jelöljük pl. A, B, C , vagy az elemeket ill. a szabályt kapcsos zárójelek között adjuk meg. *A halmazhoz tartozó egyedeket, objektumokat a halmaz elemeinek* nevezzük. *Ha a eleme az A halmaznak, akkor azt $a \in A$ jelöli.*

1.1. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ az egy, kettő, három és négy számokból álló halmaz.

1.2. Példa. $B = \{\text{piros, zöld, kék}\}$ színek halmaza, de nem az összes szín halmaza.

1.3. Példa. $C = \{x : x^2 > 2\}$ azon számok halmaza, amelyek négyzete 2-nél nagyobb.

1.4. Példa. A barna hajú nők sokasága pontosabb meghatározás hiányában nem halmaz, mert például a szőkésbarna szín megítélése igen szubjektív lehet.

1.5. Példa. A 200 éves élő emberek sokasága halmaz, a tulajdonság meghatározása egyértelmű. Legfeljebb a halmaznak nincs egy eleme sem, mert valószínűleg nem találunk ilyen idős élő embert.

Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük. Jelölése: $\emptyset$.

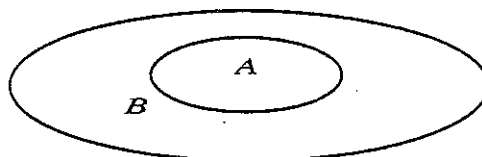
" U " az összes objektum halmaza, az **alaphalmaz, univerzum**. Ennek megválasztása függ természetesen attól, hogy objektumoknak mely körét vizsgáljuk. Emberek esetén az összes ember (élő) halmaza, számok esetén az egész számok, valós számok vagy a komplex számok halmaza is lehet univerzum az alkalmazástól függően.

A halmazok jelölésére igen jól beváltak a Venn-diagrammok, ahol egy amorf alakú zárt görbe (lehet szabályos is) által körbezárt tartomány egy halmazt jelent.



Ha az A és B halmaz elemei azonosak, akkor a két halmaz egyenlő $A = B$.

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha az A minden eleme a B halmaznak is eleme. Ennek jelölése: $A \subseteq B$. Ha $A \subseteq B$, és B halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme az A halmaznak, akkor A valódi része B -nek, formálisan $A \subset B$.



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

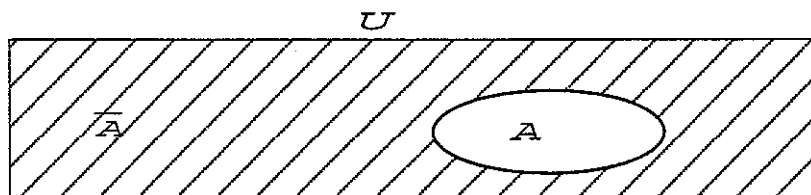
1.6. Példa. A nők halmaza valódi része az emberek halmazának.

1.7. Példa. A baktériumok halmaza valódi része az élőlények halmazának.

1.8. Példa. $\{x : x \neq 0\} = \{x : x^3 \neq 0\}$

Legyen U az alaphalmaz, és legyen A egy valódi részhalmaza. Az alaphalmaz elemei két csoportra oszthatók: amelyek elemei A -nak és amelyek nem elemei A -nak.

Azon objektumok halmazát, amelyek nem tartoznak A -hoz, az A **komplementerének** nevezzük. Jelölése $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$. Általában elfogadott a A^c jelölés is.



1.9. Példa. A pozitív számok halmazának ($\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$) komplementere az a nempozitív számok halmaza ($\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$).

1.10. Példa. Ha $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $A = \{2, 4\}$, akkor $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

1.11. Példa. Az influenzás emberek halmazának nem komplementere az egészséges emberek (tünetmentes?) halmaza.

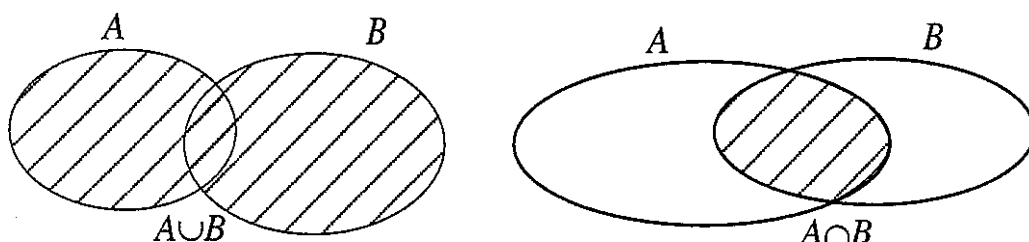
1.1.1. Műveletek halmazokkal

Legyenek A és B adott halmazok. Az A és B **egyesítése (uniója)** tartalmazza azokat az objektumokat, amelyek az A vagy B halmazok legalább egyikének elemei. Jelölése

$$A \cup B = \{a : a \in A \text{ vagy } a \in B\}.$$

Az A és B halmazok **metszete, közös része** azon objektumok halmaza, amelyek A -nak és B -nek is elemei. Formálisan:

$$A \cap B = \{a : (a \in A) \text{ és } (a \in B)\}.$$



1.12. Példa. Ha A a 10 éves fiúk, B a 10 éves lányok halmaza, akkor $A \cup B$ a 10 éves gyerekek halmaza.

1.13. Példa. Ha $A = \{x : 1 < x < 2\}$ és $B = \{x : 1.5 \leq x \leq 3\}$ akkor $A \cup B = \{x : 1 < x \leq 3\}$ és $A \cap B = \{x : 1.5 \leq x < 2\}$.

1.14. Példa. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 6\} = \{3\}$.

1.15. Példa. $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$.

Ha $A \cap B = \emptyset$, (A és B metszete üres halmaz), akkor az A és B halmazokat **diszjunkt halmazoknak** nevezzük.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

A fentiekhez hasonlóan definiálhatjuk tetszőleges számú halmaz egyesítését és metszetét:

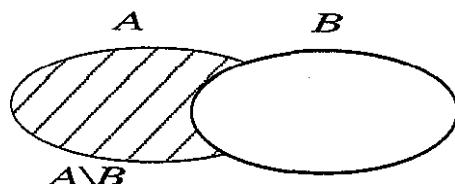
$$\bigcup_i A_i = \{a : a \in A_i : \text{legalább egy } i\text{-re}\},$$

$$\bigcap_i A_i = \{a : a \in A_i : \text{minden } i \text{ esetén}\}.$$

A két halmaz különbségét az

$$A \setminus B = \{a : a \in A \text{ és } a \notin B\}$$

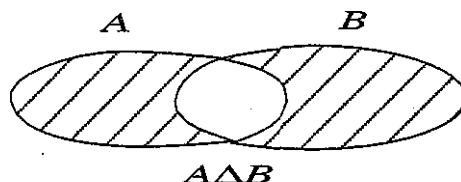
összefüggéssel definiáljuk, azaz $A \setminus B$ halmaz A azon elemeit tartalmazza, melyek nem elemei B -nek.



Gyakran összetévesztik az $A \cup B$ halmazt a

$$A \Delta B = \{a : \text{vagy } a \in A \text{ vagy } a \in B, \text{ de } a \notin A \cap B\}$$

halmazzal, amelyet az A és B halmazok szimmetrikus különbségének nevezünk.



Az alábbiakban felsorolunk néhány tulajdonságot, melyek vagy nyilvánvalók, vagy a Venn-diagramok felhasználásával szemléletesen beláthatók:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap U = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup U = U.$$

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$ és $A \cup B = B$.

Továbbá

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \setminus (A \cap B), & A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \\ A \cap B &\subset A, & A &\subset A \cup B. \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan $A \setminus B$ és $A \cap B$ diszjunktak, és

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

Az egyesítés és metszet disztributivak egymásra nézve:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

és

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

A komplementer halmazokra néhány érdekesség:

$$\bar{\emptyset} = U, \quad \bar{U} = \emptyset, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

1.2. A valós számok

A halmazok között a számhalmazoknak kiemelt szerepük van. Az

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

halmaz a természetes számok, pozitív egész számok halmaza. Az egész számok halmaza

$$I = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

és racionális számoknak nevezzük a p/q törtet, ahol p, q egész számok. A p a tört számlálója, q a nevezője:

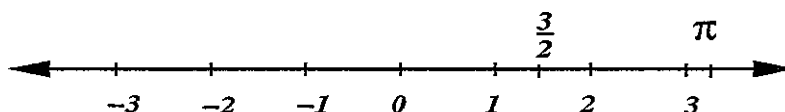
$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in I, q \neq 0 \right\}.$$

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyek nem állíthatók elő egész számok hányadosaként. Ilyen például a $\sqrt{2}$.

1.1. Megjegyzés. Tizedes tört alakban a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek, az irracionális számok a végtelen nem szakaszos tizedes törtek. A tizedes törtes értelmezésből adódik, hogy minden irracionális szám tetszőleges pontossággal megközelíthető racionális számokkal, azaz racionális számok határértékeként állnak elő (lásd a 2. fejezetet). Például a π -t közelíthetjük a 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, ... számokkal.

A számegyenes

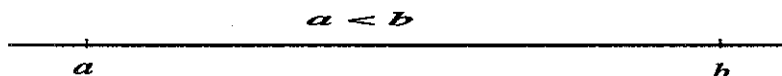
A valós számok és az egyenes pontjai egyértelműen megfeleltethetők. Tekintsünk egy egyenest, amelyen rögzítjük a 0 pontot. Innen jobbra felmérve egy adott (egység) távolságot kapjuk az 1 pontot. Ezt a távolságot végtelenszer jobbra felmérve kapjuk a pozitív egész, balra felmérve a negatív egész számokat. A q nevezőjű törtet kapjuk ($q \in N$), ha az egészek közti távolságot q egyenlő részre osztjuk. Ezt minden q természetes számra megtéve, egy "végtelen sűrű szítát" kapunk. A kimaradt pontok felelnek meg az irracionális számoknak. Az így kapott egyenletesen, lineárisan skálázott egyenes a számegyenes.



Egyenlőtlenségek és tulajdonságaik

Azt mondjuk, hogy az a valós szám kisebb, mint b ($a, b \in \mathbf{R}$), azaz $a < b$, ha $b - a$ pozitív. Az a szám kisebb, mint b vagy egyenlő b -vel, $a \leq b$, ha $b - a = 0$ vagy $b - a$ pozitív.

Nyilvánvaló, ha a pozitív, akkor $a > 0$, és ha a negatív, akkor $a < 0$. A számegyenesen ábrázolva, b nagyobb a -nál, ha a b pont a -tól jobbra helyezkedik el.



Az egyenlőtlenségek legfontosabb tulajdonságai az alábbiak.

Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$ (transzitivitás).

Ha $a < b$, akkor nem igaz hogy $b < a$.

Ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$.

Ha $a < b$, akkor $c + a < c + b$ (minden c valós számra).

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor $ab > 0$. Ha $a < 0$ és $b < 0$, akkor $ab > 0$.

Ha $a > 0$, akkor $-a < 0$.

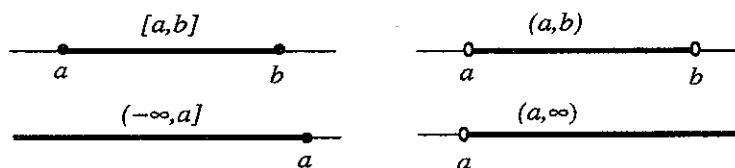
Ha $c > 0$ és $a < b$, akkor $ca < cb$.

Ha $c < 0$ és $a < b$, akkor $ca > cb$.

Ha $0 < a < b$, akkor $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Egyenlőtlenségekkel definiáljuk az intervallumokat:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\} && \text{zárt intervallum,} \\ [a, b) &= \{x : a \leq x < b\} && \text{balról zárt, jobbról nyitott intervallum,} \\ (a, b] &= \{x : a < x \leq b\} && \text{balról nyitott, jobbról zárt intervallum,} \\ (a, b) &= \{x : a < x < b\} && \text{nyitott intervallum,} \\ < a, b > && \text{nyílt vagy zárt intervallum} \\ (-\infty, b] &= \{x : x \leq b\} \\ (-\infty, b) &= \{x : x < b\} \\ [a, \infty) &= \{x : a \leq x\} \\ (a, \infty) &= \{x : a < x\} \\ (-\infty, \infty) &= \mathbf{R}. \end{aligned}$$



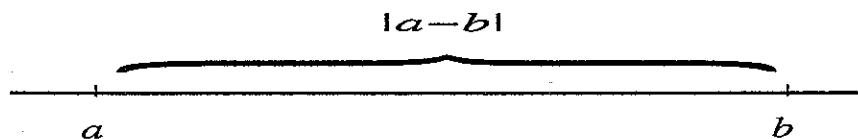
Az a valós szám **környezeteinek** az a -t tartalmazó nyitott intervallumokat nevezzük. Az a baloldali környezetei a $(b, a]$ ($b < a$) intervallumok. Az a jobboldali környezetei az $[a, b)$ ($b > a$) intervallumok. A ∞ környezetei a (b, ∞) intervallumok. A $-\infty$ környezetei a $(-\infty, b)$ intervallumok.

Az abszolút érték

Egy valós szám abszolút értékét az alábbi formula definiálja:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

A számegyenesen tekintve egy szám abszolút értéke az origótól való távolsága. Az a és b pontok távolsága pedig $|a - b|$.

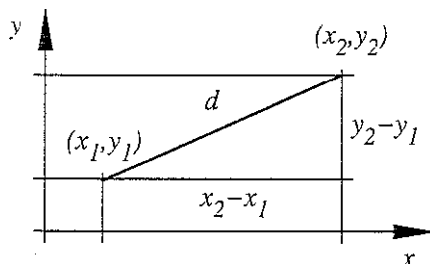
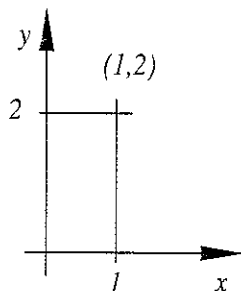


A legfontosabb tulajdonságok ellenőrzését az olvasóra bizzuk:

$$\begin{aligned} |a| &\geq 0 \quad (|a| = 0 \Rightarrow a = 0) \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b| \\ |a - b| &\leq |a - c| + |c - b| \quad (\text{háromszög egyenlőtlenség}). \end{aligned}$$

1.3. Koordinátarendszerek, halmazok Descartes-szorzata

Rajzoljunk a síkon két, egymásra merőleges számegyeneset (x - és y -tengelyek), úgy hogy a 0 pontjukban messék egymást (baloldali ábra). A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert kapjuk. A tengelyek metszéspontja a koordinátarendszer origója. A sík valamely pontján keresztül rajzoljunk a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket. Az x -tengellyel való metszéspont az adott pont x -koordinátája, az y -tengelyen levő pedig az y -koordináta. Fordítva, ha a koordináták adottak, akkor a megadott koordinátákat jelöljük be a megfelelő tengelyen. A kapott pontokon keresztül húzzunk párhuzamost a másik tengellyel. Ezen egyenesek metszéspontja lesz a keresett pont. A sík pontjainak megadása tehát ekvivalens a koordináták, azaz egy (x, y) rendezett számpár megadásával, ahol az első szám az x -koordináta, a második pedig az y -koordináta. Az origó a $(0, 0)$ pont.



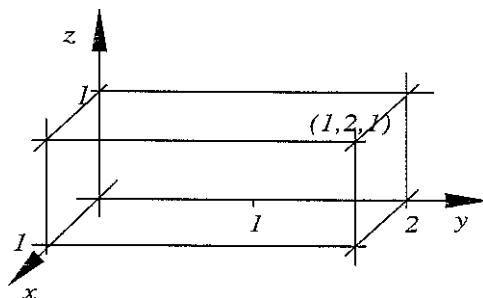
A síkbeli koordinátarendszerben a pontok távolságát a Pithagorasz tétellel számítjuk ki (jobboldali ábra). Legyenek (x_1, y_1) és (x_2, y_2) a sík pontjai. Ekkor

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

A térben is hasonlóan kapunk koordinátarendszert. Itt három egymásra merőleges tengelyre (x, y, z) van szükségünk, és a tér pontjait számhármassokkal azonosítjuk. A tér (x_1, y_1, z_1) és (x_2, y_2, z_2) pontjainak távolságát a Pithagorasz tétel kétszeri alkalmazásával a

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

formula adja.



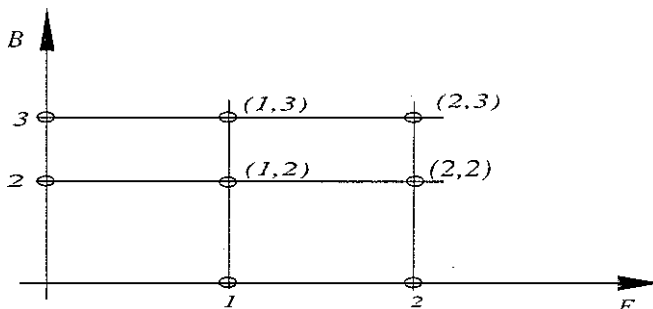
Adatpárok számos más területen is képezhetők. A térképen való tájékozódáshoz is két adatot, a hosszúsági és szélességi koordinátákat kell megadnunk.



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Így pl. Szeged az északi szélesség 46.2° és a keleti hosszúság 20.1° mentén található. A pontos helymegadáshoz tehát a $(46.2^\circ, 20.1^\circ)$ számpár megadása szükséges. Ez minden földrajzi hely esetén igaz, ha a déli szélességi és nyugati hosszúsági köröket negatív számmal jelöljük.

Egy ember betegségének megadásához a betegre és a betegségekre is szükség van. Ha E az emberek és B a betegségek halmaza, akkor egy kóresetet egy (e, b) pár azonosít, ahol $e \in E$, $b \in B$. A koordinátarendszerhez hasonló ábrázolás alkalmazható az ilyen általános esetekben is. Csak tudni kell, hogy az egyes "tengelyeken" mit és hogyan jelölünk. Például, az $E = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok esetén ez az alábbi:



Általában, bármely két A és B halmaz elemeiből képezhetünk (a, b) rendezett párokat.

1.1. Definíció. Az A és B halmazok Descartes-szorzatának az összes lehetséges $a \in A$, $b \in B$ elemre képzett (a, b) pár halmazát nevezzük, és ezt $A \times B$ jelöli. Ha $A = B$, használjuk az $A \times A = A^2$ jelölést is. Formálisan:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Láttuk, hogy a sík pontjait az

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

halmazzal azonosíthatjuk, ahol $\mathbf{R}$ a valós számok halmaza. A térképen A a szélességi, B a hosszúsági adatok halmaza, $\{(a, b)\}$ az összes pont a földgömbön. $F \times N$ az összes férfi-nő rendezett párok halmaza.

Képezhetjük az elemhármassok, elem n -esek halmazát is. A tér pontjait (x, y, z) hármassokkal azonosíthatjuk, ahol x, y, z a megfelelő tengelyek mentén mért koordináták:

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}$$

Megjegyezzük, hogy ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$. A párokból a komponensek sorrendje lényeges. Ezért használjuk a rendezett pár kifejezést.

1.4. Függvények

A valós életben található objektumok között összefüggéseket találunk, a folyamatok időben, térben változhatnak. Ezek a kapcsolatok matematikailag halmazok elemei közti megfeleltetések, speciálisan függvények.

Adott A és B halmazok elemei között megfeleltetéseket definiálhatunk. Például minden emberhez hozzárendelhetjük a rokonait vagy a betegségeit. Az első megfeleltetés emberek közötti, a második pedig emberek és betegségek közötti megfeleltetés. De szintén megfeleltetéseket kapunk, ha minden egyes emberhez hozzárendeljük a nem rokon embereket vagy azokat a betegségeket, amelyeken még nem esett át az illető.

Most tekintsük azt a megfeleltetést, amely minden személyhez hozzárendeli az anyját. Ez speciális, mivel mindenkinek csak egy anyja van. Hasonlóan, ha egy mozgó test helyzetét az

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

adott pillanatban hozzárendeljük a pillanathoz, ugyanilyen tulajdonságú megfeleltetést kapunk az időpillanat és a pont helyzete között, mivel a test egyszerre csak egy helyen lehet. Ezekben a példákban a megfeleltetés egyértelmű.

1.2. Definíció. Azokat az A és B halmazok közötti f megfeleltetéseket, amelyek minden $a \in A$ elemhez egyértelműen hozzárendelik a B halmaz legfeljebb egy b elemét, A -ból B -be képező ($f : A \rightarrow B$) függvényeknek nevezzük. A függvénykapcsolatra a $b = f(a)$ jelölést használjuk. Az f szabály leírására használatos az $f : A \rightarrow B$ jelölés is.

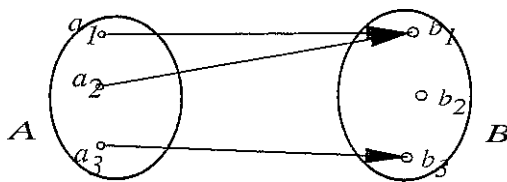
$A \ D_f \subseteq A$ halmaz, ahol az f szabály értelmezve van, a függvény értelmezési tartománya.

$A \ R_f = \{f(a) \in B\}$ halmaz a függvény értékkészlete.

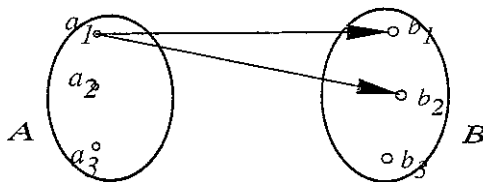
$A \ G_f = \{(a, f(a)) : a \in D_f\} \subseteq A \times B$ halmaz a függvény grafikonja.

A függvényt definiáltuk, ha megadtuk a $D_f \subseteq A$ és $R_f \subseteq B$ halmazokat és az f hozzárendelési szabályt.

Megjegyezzük, hogy ha $a_1 \neq a_2$, akkor nem kizárt, hogy $f(a_1) = f(a_2)$. A fentiek miatt az



típusú megfeleltetések megengedettek, de nem megengedett a



típusú megfeleltetés. Az $y = f(x)$ egyenlőségben x a független változó, amely az értelmezési tartomány elemeit veheti fel. y a függő változó, a függvényérték, amely az értékkészletnek eleme.

A szabály megadása többféle módon történhet. Például, a grafikon egyértelműen megadja a függvényt. Egy tetszőleges $G \subseteq A \times B$ halmaz akkor és csak akkor grafikonja valamely függvénynek, ha bármely $a \in A$ -ra legfeljebb egy $(a, b) \in G$.

A továbbiakban főként $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényekkel és tulajdonságaikkal foglalkozunk, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számok halmazai. Ilyen függvény például a testhőmérséklet, az oldódási folyamat során feloldódott anyag mennyiségének időbeli változása.

A 7. fejezetben többváltozós, $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvényekkel foglalkozunk. Többváltozós függvényekkel írhatók le a tér pontjainak tulajdonságai, például hőmérséklete, színe (megfelelően kódolva) stb.

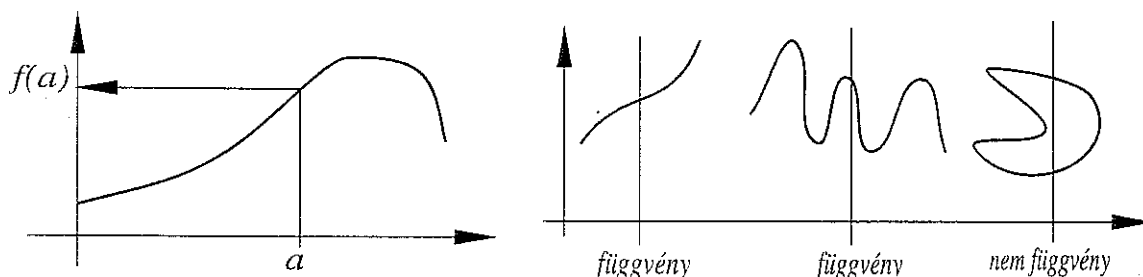
1.4.1. Az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények és ábrázolásuk

Tekintsünk egy $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, és legyen $D_f, R_f \subseteq \mathbf{R}$. Grafikonja egy halmaz a síkon, a Descartes-féle koordinátarendszerben ($G_f \subseteq \mathbf{R}^2$). A vízszintes x -tengelyen mérjük a független változót, a függőleges y -tengelyen pedig a függvényértékeket.

Ha ismerjük az $f(x)$ függvény grafikonját, akkor az $a \in D_f$ helyhez tartozó $f(a)$ függvényértéket megkapjuk, ha vesszük a grafikon és az x -tengely a pontján át húzott függőleges egyenes metszéspontjának y -koordinátáját.

Egy $G \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmaz akkor és csak akkor függvény grafikonja, ha bármely y -tengellyel párhuzamos egyenes a G halmazt legfeljebb egy pontban metszi.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



Ha valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén nincs metszéspont, akkor az nem eleme az értelmezési tartománynak. Ha van metszéspont, akkor azt az y -tengelyre vetítve kapjuk az $f(a)$ függvényértéket.

1.5. Összetett függvények

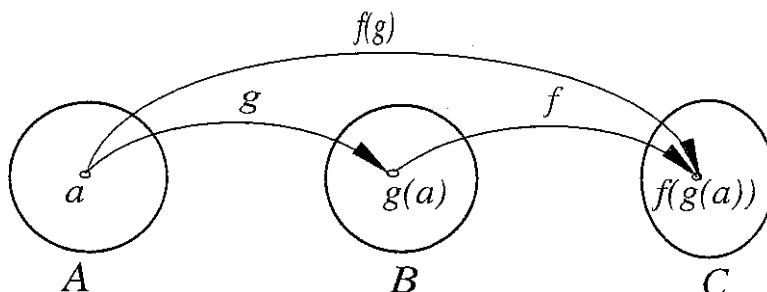
Rendelje g minden emberhez az anyját, f pedig az apját. Legyen egy ember adott. Legyen a neve a . Ekkor $g(a)$ az anyja. Alkalmazzuk f -t az anyára. Az anya apját, azaz az anyai nagyapát kapjuk. Formálisan,

$$f(g(a)) = h(a)$$

minden emberhez az anyai nagyapját rendeli.

Az $f(g(a))$ jelölés azt jelenti, hogy a -ra alkalmazzuk a g függvényt, majd az így kapott elemre (ha lehet!) alkalmazzuk az f függvényt. Az $f(g(a))$ -hoz hasonlóan, képezhetjük a $g(f(a))$, $f(f(a))$, $g(g(a))$ függvényeket. Példánkbeli jelentésük kitalálását az olvasóra bízunk.

1.3. Definíció. Legyenek adottak az A, B, C halmazok és a $g : A \rightarrow B$ és $f : B \rightarrow C$ függvények. Legyen $a \in D_g \subseteq A$. A $b = g(a) \in D_f \subseteq B$ elemekre alkalmazható az f függvény: $f(b) = f(g(a))$. A g és f egymás utáni végrehajtásával kapott függvényt az $f(g(a))$ összetett függvénynek nevezzük.



Nyilvánvaló, hogy a végrehajtás sorrendje lényeges. A g -t belső, f -t pedig külső függvénynek nevezzük. Mivel $f(g(x))$ akkor képezhető, ha $x \in D_g$ és $g(x) \in D_f$, ezért az $f(g(x))$ értelmezési tartományát az alábbi formula adja:

$$D_{f(g)} = \{a \in D_g : g(a) \in D_f\}.$$

1.16. Példa. Tekintsük a következő példát. Legyen $A = B = C = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza és legyen $g(x) = -x$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor $f(g(x)) = \sqrt{-x}$ és $g(f(x)) = -\sqrt{x}$. Az $f(g(x))$ függvény értelmezési tartománya az $\{x \leq 0\} = (-\infty, 0]$, míg a $g(f(x))$ függvény értelmezési tartománya az $\{x \geq 0\} = [0, \infty)$ halmaz.

1.17. Példa. Legyen $g(x) = x - 1$ és $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor $f(g(x)) = \sqrt{x-1}$. Az értelmezési tartományon teljesülnie kell az $x - 1 \geq 0$ egyenlőtlenségnek. Innen $D = [1, \infty)$.

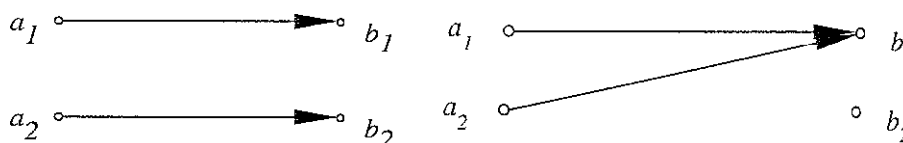
1.6. Kölcsönösen egyértelmű függvények

Az előző pont példájában minden emberhez hozzárendeltük az anyját. Ez a hozzárendelés egyértelmű. Ha a kapcsolatot megfordítjuk, azaz minden nőhöz hozzárendeljük a gyerekeit, a kapott megfeleltetés nem lesz függvény, hiszen egy anyának több gyermeke is lehet.

Az $\text{ember} \rightarrow \text{ujjlenyomat}$ megfeleltetés esetén azonban más a helyzet. Itt a személy és ujjlenyomata kölcsönösen meghatározzák egymást.

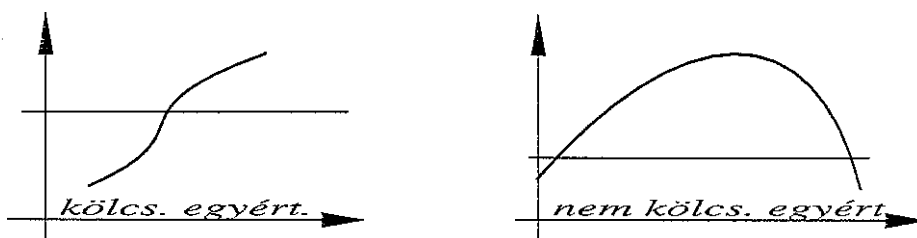
1.4. Definíció. Az $f : A \rightarrow B$ függvényt kölcsönösen egyértelműnek nevezzük, ha $a_1 \neq a_2$, akkor $f(a_1) \neq f(a_2)$. A függvény grafikonját tekintve ez azt jelenti, hogy adott $b \in B$ esetén legfeljebb egy (a, b) lehet eleme a $G = \{(a, f(a))\}$ halmaznak.

Az ábrán a baloldali hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, de nem az a jobboldali.



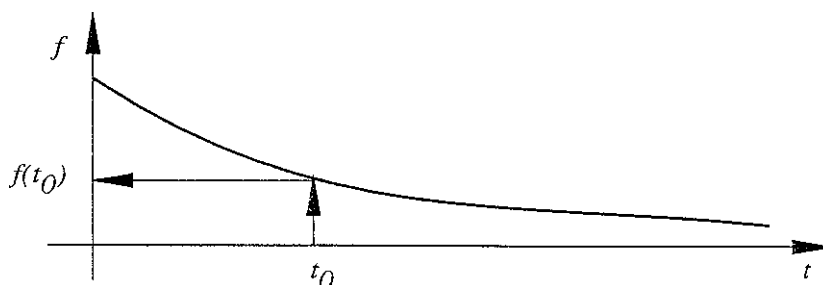
1.6.1. Kölcsönösen egyértelmű $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények grafikonja

A definíció miatt egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha a $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ grafikon bármely x -tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb egy pontban metszi.



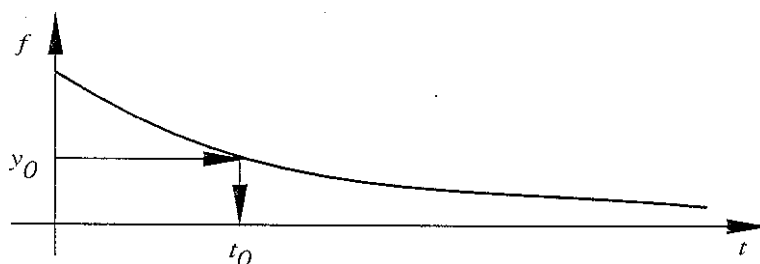
1.7. Inverz függvény

1.18. Példa. A szervezetben a gyógyszer felszívódását az $f(t)$ függvény írja le. Ha kíváncsiak vagyunk a gyógyszer szintre adott t_0 pillanatban, akkor az alábbi ábrán látható módon járunk el:



A kérdés gyakran fordított. Mikor adjuk be a következő tablettát? Akkor, ha a szint egy minimális hatásos értéket, mondjuk y_0 -t elér. Azt a t_0 pillanatot keressük, melyre $f(t_0) = y_0$.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



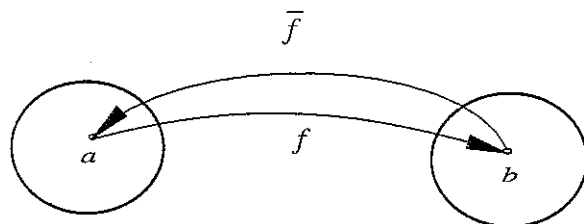
A fenti példában a t_0 és y_0 közötti hozzárendelés irányát megfordítottuk. Ezt csak kölcsönösen egyértelmű függvények esetén tehetjük meg.

Kölcsönösen egyértelmű függvények esetén a hozzárendelés irányát megfordítva szintén függvényt kapunk.

1.5. Definíció. Ha f kölcsönösen egyértelmű, akkor a fordított $b = f(a) \rightarrow a$ hozzárendelés is függvényt definiál. Ha $b \in R_f$ adott, azt az $a \in D_f$ elemet keressük, amelyre $f(a) = b$. Azt a függvényt, amely az $f(a) \in B$ függvényértékhez rendeli az $a \in A$ elemet az f **inverzének** nevezzük és $\bar{f}$ -val jelöljük. Néha használatos az f^{-1} jelölés is. Formálisan, ha $b = f(a)$, akkor $\bar{f}(b) = a$, azaz

$$\bar{f}(f(a)) = a \quad \text{és} \quad f(\bar{f}(b)) = b.$$

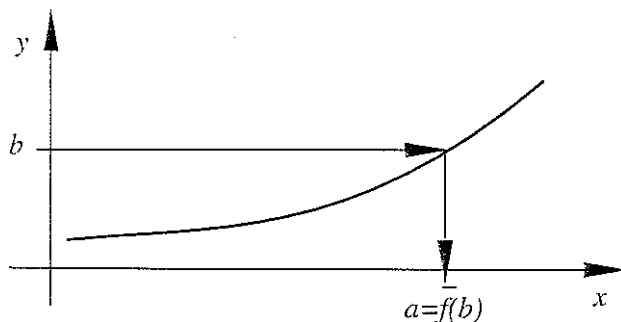
Nyilvánvaló, hogy $D_f = R_{\bar{f}}$, $R_f = D_{\bar{f}}$ és a grafikon $G_{\bar{f}} = \{(f(a), a) : a \in D_f\}$.



Példánkban a $t_0 = \bar{f}(y_0)$ időpontot keressük.

1.8. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények inverze

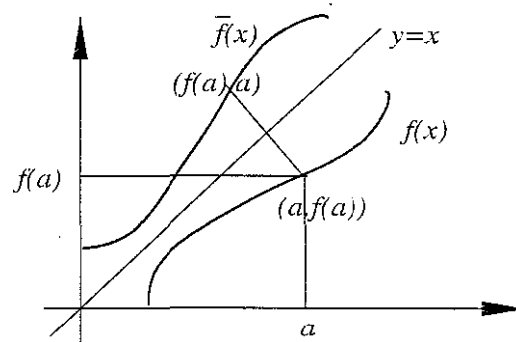
Legyen adott $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kölcsönösen egyértelmű függvény grafikonja, és legyen $b \in \mathbf{R}$. Keressük az $\bar{f}(b)$ értéket, azaz azt az a számot, melyre $f(a) = b$. Az a hely grafikus megtalálásához a gyógyszer felszívódásánál a fenti példában használt eljárást követjük. Húzzuk meg az $y = b$ egyenest. A grafikonnal való metszéspont (ha van, akkor egyetlen egy) x-koordinátája a keresett a szám.



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Az inverz függvény grafikonja

Ha $y = f(x)$, akkor $\bar{f}(y) = x$, ezért az $(x, f(x))$ pont az $f(x)$ grafikonjának, $(f(x), x)$ pedig az $\bar{f}(x)$ grafikonjának eleme. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az f és $\bar{f}$ grafikonja egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.



Az inverz függvény megadása

Az inverz függvény megtalálásához az analitikusan (képlettel megadott) $f(x)$ függvény esetén az

$$f(x) = y$$

egyenletet kell x -re megoldani. Ekkor

$$x = \bar{f}(y)$$

Mivel szokásosan x jelöli a független változót, ezért végrehajtva az $y \leftrightarrow x$ cserét, kapjuk az $y = \bar{f}(x)$ függvényt.

1.19. Példa. Legyen $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$. Az inverz meghatározásához oldjuk meg az

$$y = \frac{x+2}{2x-3}$$

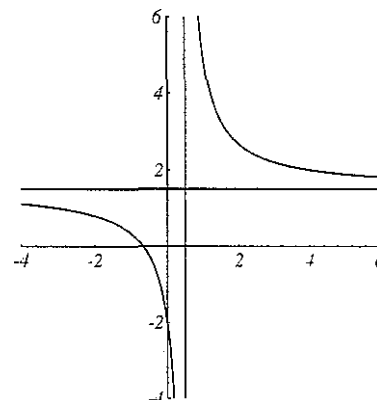
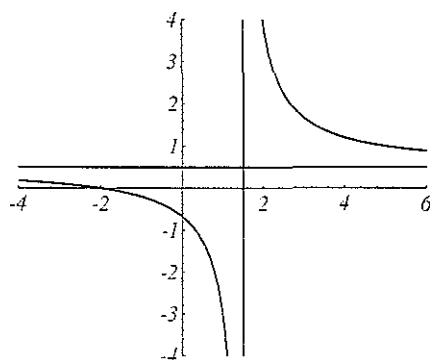
egyenletet:

$$x+2 = y(2x-3) = 2x \cdot y - 3y$$

$$(2y-1)x = 3y+2$$

$$x = \frac{3y+2}{2y-1}$$

Tehát $\bar{f}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$. Az $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ grafikonját az alábbi ábrán láthatjuk:



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

1.20. Példa. Tekintsük az $f(x) = (x-2)^2 + 3$ a csúcsponti képlettel megadott parabolát. Oldjuk meg az

$$y = (x-2)^2 + 3$$

egyenletet x -re:

$$(x-2)^2 = y-3$$

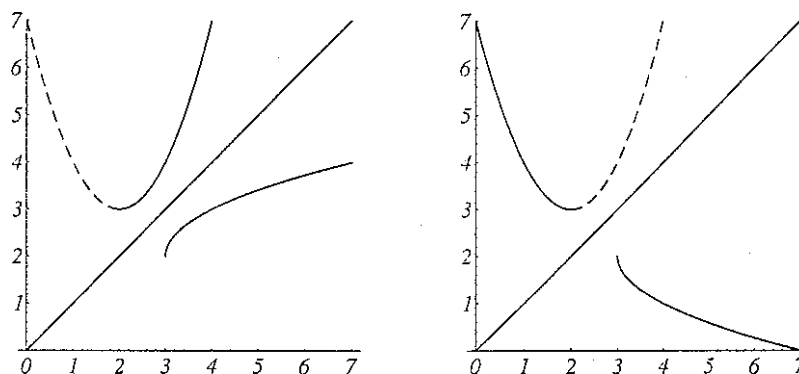
$$x-2 = \pm\sqrt{y-3}$$

$$x = \pm\sqrt{y-3} + 2.$$

A parabola csak az $x \geq 2$ vagy az $x \leq 2$ feltétel mellett kölcsönösen egyértelmű (részletesen lásd a 1.14. fejezetet). Ezért két eset van.

a.) Ha $f_1(x) = (x-2)^2 + 3$ ($x \geq 2$), akkor $\bar{f}_1(x) = \sqrt{x-3} + 2$ ($x \geq 3$) (baloldali ábra).

b.) Ha pedig $f_2(x) = (x-2)^2 + 3$ ($x \leq 2$), akkor $\bar{f}_2(x) = -\sqrt{x-3} + 2$ ($x \geq 3$) (jobboldali ábra).

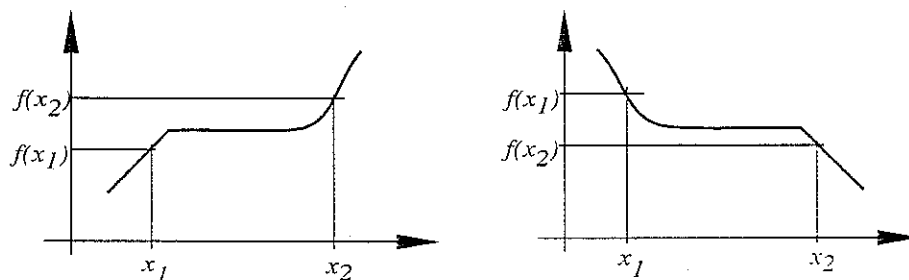


A fenti példák a következő általánosabb eljárásnak speciális esetei. Legyen $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, és legyen inverze $\bar{f}(x)$. Ekkor a $g(x) = f(x-p) + q$ is invertálható, és inverze $\bar{g}(x) = \bar{f}(x-q) + p$. Az ilyen alakú függvények ábrázolásával részletesen a 1.13. fejezetben foglalkozunk.

1.9. Monoton függvények

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **nemcsökkenő (nemnöve)** az (a, b) intervallumon, ha minden $x_1 < x_2$ esetén

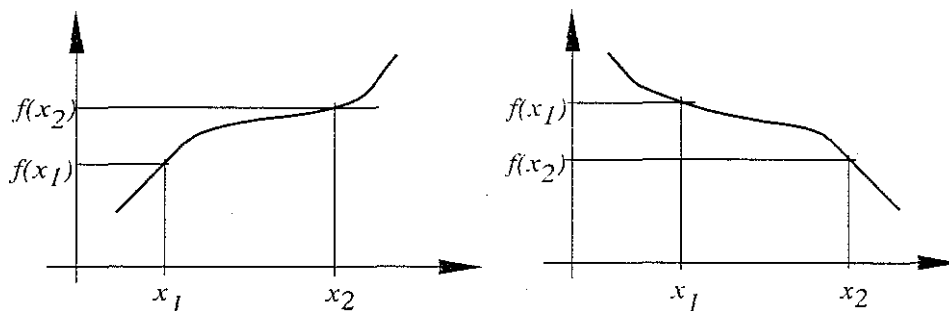
$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$



Az $f(x)$ **szigorúan monoton növe** (szigorúan monoton csökkenő) (a, b) -n, ha minden $x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



Nyilvánvaló az alábbi fontos tétel:

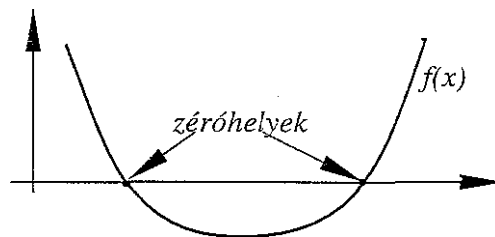
1.1. Tétel. Az (a, b) intervallumon szigorúan monoton növe (csökkenő) $f(x)$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért létezik az inverze.

A 1.12.1. pontban megmutatjuk, hogy az x^3 függvény szigorúan monoton növe $\mathbf{R}$ -n, az x^2 függvény csökkenő $(-\infty, 0]$ -n, és növe az $[0, \infty)$ félegyenesen.

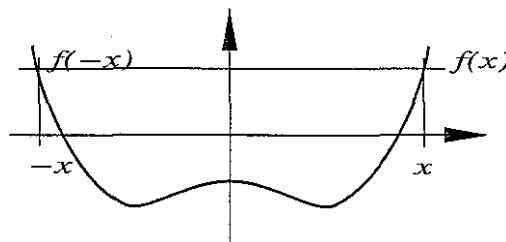
1.10. Néhány fontos tulajdonság

Tekintsük az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt. Az alábbiakban definiáljuk a legfontosabb tulajdonságokat. A következő fejezetek során az egyes függvények tárgyalásánál ezen tulajdonságokra részletesen kitérünk.

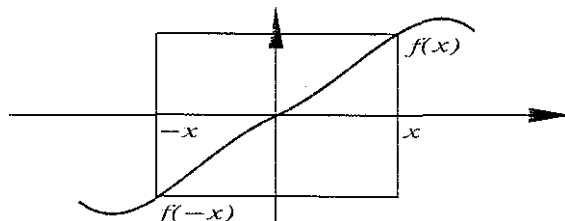
Azt mondjuk hogy x_0 zéróhelye $f(x)$ -nek, ha x_0 gyöke az $f(x_0) = 0$ egyenletnek. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldási módszere az $f(x)$ függvénytől függ.



Az $f(x)$ függvény páros, ha $f(x) = f(-x)$. Az $f(x)$ grafikonja az y -tengelyre szimmetrikus.



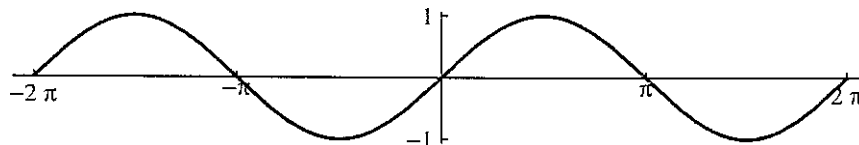
Az $f(x)$ páratlan, ha $f(x) = -f(-x)$. Ekkor az $f(x)$ grafikonja az origóra középpontosan szimmetrikus.



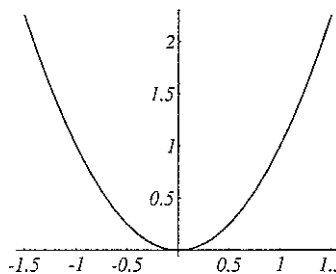
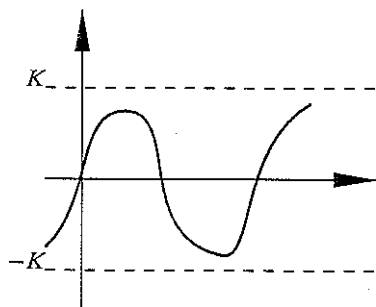
1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Az x^2 függvény páros, az x^3 pedig páratlan.

Az $f(x)$ függvény **periodikus** $p > 0$ periódussal, ha minden $x \in D_f$ -re $f(x+p) = f(x)$. Ha p periódus, akkor bármely egész többszöröse is az. Elegendő a függvényt valamely $[x_0, x_0 + p)$ intervallumon megadni, ekkor a teljes értelmezési tartományon ismerjük. A $\sin x$ függvény periódusa 2π .



Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **korlátos** valamely $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha van olyan K szám, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in H$ esetén.



Az $f(x) = x^2$ függvény nem korlátos a valós számok halmazán, de korlátos bármely $[a, b]$ véges intervallumon.

1.11. Egyenesek

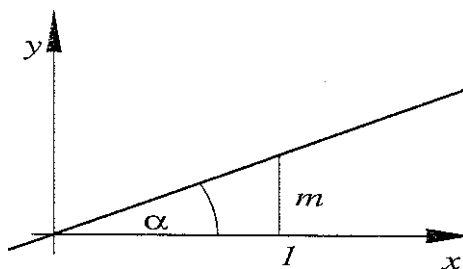
Két változó mennyiség egyenesen arányos egymással, ha hányadosuk állandó:

$$m = \frac{y}{x}.$$

Innen

$$y = m \cdot x,$$

azaz a kapcsolatot leíró függvény origón átmenő egyenes. Az m konstanst az egyenes meredekségének nevezzük, az y változó és az x változó viszonyát adja meg. Látható, hogy $m = \operatorname{tg} \alpha$, ahol α az x -tengely és az egyenes által bezárt szög.



Gyakori, hogy két változó mennyiség megváltozása egyenesen arányos egymással. Azt mond-

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

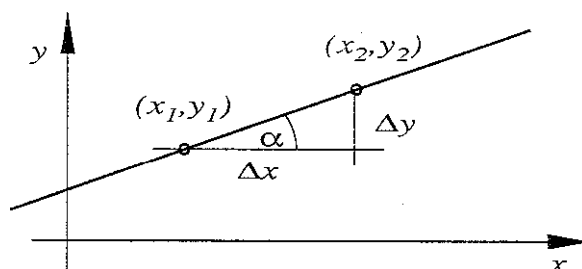
juk, hogy két változó között lineáris (egyenes) kapcsolat van, ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

azaz az y és x megváltozásának a hányadosa konstans. Másképpen fogalmazva, bármely két (x_1, y_1) , (x_2, y_2) pontra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \text{konstans.}$$

Az ilyen törvénynek eleget tevő folyamatok képe egyenes.



Az egyenesek egyenletei

Legyen (x, y) az egyenes általános pontja (futópont). Mivel a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ összefüggés bármely két pontra teljesül, az alábbi egyenleteket kapjuk.

1. Ha (x_1, y_1) , (x_2, y_2) pontok adottak, akkor

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

ahonnan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenlete.

2. Ha m és (x_0, y_0) adott, akkor

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

az (x_0, y_0) ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete. Speciálisan, ha m és a $(0, b)$ pont (az egyenes és az y -tengely metszéspontja) adott, akkor kapjuk az ismert

$$y = mx + b$$

egyenletet.

Egyenesek helyzete, metszéspontja

Tekintsük az

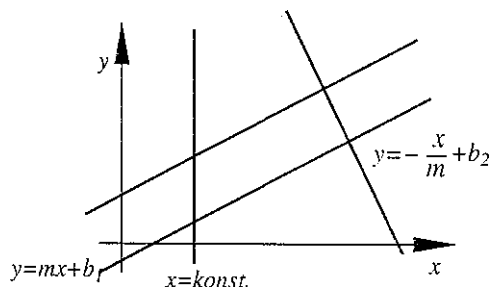
$$y = m_1x + b_1, \quad y = m_2x + b_2$$

egyeneseket. Az egyenesek párhuzamosak, ha $m_1 = m_2$ és merőlegesek, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Két egyenes metszéspontját az egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Nincs megoldás, ha az egyenesek párhuzamosak.

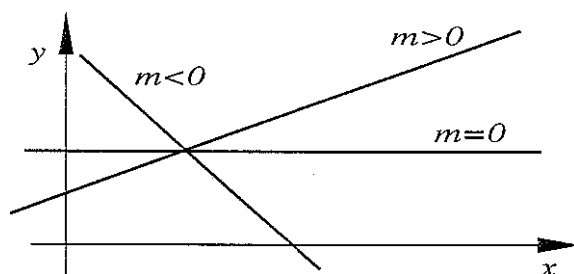
Vegyük észre, hogy az y tengellyel párhuzamos egyenesek, amelyek egyenlete $x = \text{konstans}$, nem írhatók le a fenti módon a meredekség fogalmával. Ezek nem is függvények.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



Míg a meredekség nagysága az y megváltozásának a gyorsaságát jellemzi, meredekség előjele jellemzi a változás irányát. Ha $m > 0$, akkor $\Delta y = m\Delta x > 0$, ha $\Delta x > 0$, y az x -szel együtt változik, azaz az $y = mx + b$ egyenes monoton nő. Ha $m < 0$, akkor az egyenes monoton csökken, az x növekedése az y csökkenését vonja maga után.

Ha $m = 0$, akkor az egyenes párhuzamos az x tengellyel, y konstans, függetlenül az x változásától.



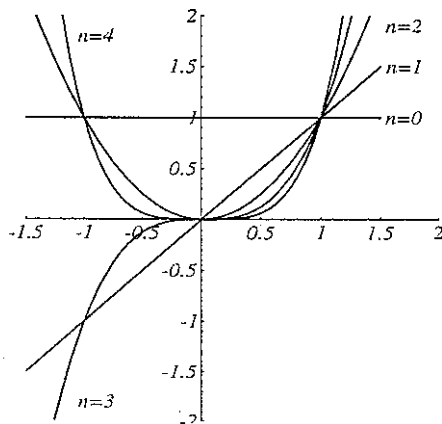
1.21. Példa. Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a kezdőponttól való távolságot az $s = v \cdot t + s_0$ összefüggés írja le.

1.22. Példa. Valamely test lassú melegítése során a felvett hőmennyiséget a $\Delta Q = mc\Delta T$ képlettel számoljuk ki, ahol m a test tömege, c a fajhő, ΔT a hőmérsékletváltozás.

1.12. Hatványfüggvények

1.12.1. Nemnegatív egész kitevő

Legyen n nemnegatív egész szám. Ekkor az $f_n(x) = x^n$ függvényt n -ed fokú hatványfüggvénynek nevezzük. Speciálisan, $f_0(x) = x^0 = 1$ konstans, $f_1(x) = x$ pedig lineáris függvény. Könnyen belátható, hogy ha $n = 2k$ páros, akkor $(-x)^{2k} = x^{2k} \geq 0$, azaz a függvény páros. Ha $n = 2k + 1$, páratlan, akkor $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, azaz a függvény páratlan. Az egyetlen zéróhely az $x = 0$, és minden függvény grafikonja átmegy a koordinátarendszer $(1, 1)$ pontján. Az ábrán az x^0, x, x^2, x^3, x^4 függvények grafikonja látható.



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Mivel az $0 \leq x_1 < x_2$ egyenlőtlenségből $x_1^n < x_2^n$ következik (bizonyítás!), a függvény szigorúan növe minden $n > 0$ esetén. A párosság ill. páratlanság miatt azonnal adódik, hogy az x^n függvény negatív x értékekre páros n esetén szigorúan csökkenő, páratlan n esetén szigorúan növe. Összehasonlítva az egyes hatványfüggvényeket, kapjuk, hogy ha $0 < x < 1$ és $n < m$, akkor

$$x^m = x^{n+m-n} = x^n \cdot x^{m-n} < x^n,$$

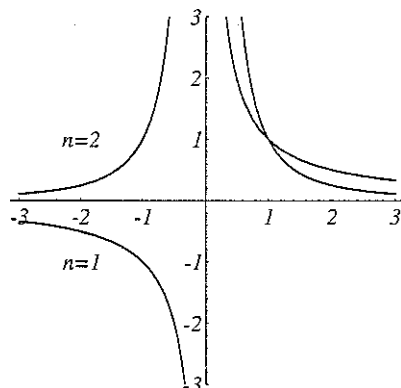
mivel $x^{m-n} < 1$. Ha pedig $x > 1$, akkor

$$x^m = x^{n+m-n} = x^n \cdot x^{m-n} > x^n.$$

1.23. Példa. Legyen m egy felnőtt ember testmagassága. Ekkor az F testfelszín és V testtérfogat kiszámítására használatosak az $F \approx k_1 m^2$ és $V \approx k_2 m^3$ közelítő formulák. Ezeknek a laboratóriumi gyakorlatban és gyógyszerek adagolásának meghatározásánál van haszna. A k_1, k_2 konstansok életkoronként és nemekenként statisztikusan meghatározottak, de esetenként (kövér, sovány beteg) el lehet tőlük térni.

1.12.2. Az $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ függvények, negatív kitevőjű hatványok ($n \in \mathbb{N}$)

Az $1/x^n = x^{-n}$ negatív kitevőjű hatványfüggvények az $x = 0$ -ban nincsenek értelmezve. Az $1/x$ és $1/x^2$ függvények grafikonját az alábbi ábra tartalmazza.



Az előző pont egyenlőtlenségeiből adódik, hogy ha $x > 0$, akkor az x^{-n} függvény szigorúan monoton csökkenő. Ha $x > 1$ és $n > m$, akkor $x^{-n} < x^{-m}$. Ha pedig $0 < x < 1$ és $n > m$, akkor $x^{-n} > x^{-m}$.

Ezek a függvények az ismert fordított arányosságot ill. a magasabb rendű fordított arányosságot írják le.

1.24. Példa. Tekintsünk egy oldatot, legyen m az oldat tömege, m_o a benne oldott anyag tömege és c a töménység. Ha m_o adott és az oldószer mennyisége változhat, akkor a teljes tömeg és a koncentráció között az $m = 100m_o/c$ összefüggés áll fenn.

1.12.3. Gyökfüggvények

Tekintsük az $f(x) = y = x^{2k}$ függvényt (k pozitív egész). Mivel x^{2k} csak az $x \geq 0$ vagy az $x \leq 0$ félegyenesen szigorúan monoton, ezen félegyeneseken képezhetjük inverzét. Definíció szerint, ha $x \geq 0$, az $f(x) = y = x^{2k}$ inverze

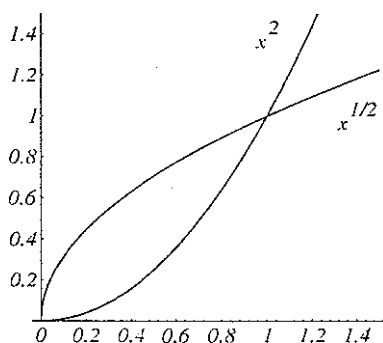
$$\bar{f}(x) = \sqrt[2k]{x} = x^{1/(2k)}$$

az a nemnegatív szám, melyre $(\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$. A függvények értelmezési tartománya a $[0, \infty)$ intervallum. Megjegyezzük, hogy a $\sqrt[2k]{x^{2k}}$ és $(\sqrt[2k]{x})^{2k}$ függvények nem azonosak. Speciálisan, az $f(x) = x^2$ inverze a $\sqrt{x}$ függvény ($x \geq 0$), és

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (\sqrt{x})^2 = x \quad (x \geq 0).$$

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

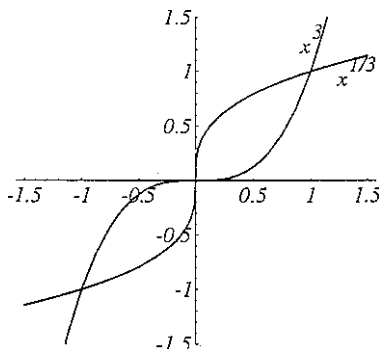
Az x^2 és $\sqrt{x}$ grafikonját az alábbi ábrán láthatjuk.



Most legyen $n = 2k + 1$, páratlan. Ekkor az $f(x) = x^{2k+1}$ függvény az egész számegyenesen monoton növekvő, tehát invertálható. Inverze az

$$\bar{f}(x) = \sqrt[2k+1]{x} = x^{1/(2k+1)}$$

jelenti azt a számot ($x < 0$ esetén negatív), amelyre $(\sqrt[2k+1]{x})^{2k+1} = x$. Az $f(x) = x^3$ és $\bar{f}(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikonját láthatjuk az alábbi ábrán.



Hasonlítsuk össze az egyes $\sqrt[n]{x}$ függvényeket, ha $x \geq 0$. Az inverzképzés miatt (grafikusan az $y = x$ egyenesre való tükrözés), ha $0 < x < 1$ és $n < m$, akkor $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$. Ha $1 < x$, akkor $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$.

1.12.4. Hatványfüggvények tetszőleges valós kitevővel

Hasonlóan az irracionális számok bevezetéséhez, az irracionális kitevőjű hatvány fogalmát is bevezethetjük. Legyen $x \geq 0$. Legyen α irracionális szám. Tekintsük az $\alpha = \sqrt{2}$ speciális esetet! Ismert, hogy az

$$a_1 = 1.4, \quad a_2 = 1.41, \quad a_3 = 1.414, \quad a_4 = 1.4142, \dots$$

számok tetszőleges pontossággal megközelítik $\sqrt{2}$ -t. Képezve az

$$x^{a_1}, \quad x^{a_2}, \quad x^{a_3}, \dots, x^{a_n}, \dots$$

racionális kitevőjű hatványokat (definiálva vannak!), bizonyítható, hogy tetszőleges pontossággal megközelítenek egy bizonyos A számot. Ezt nevezzük az $x^{\sqrt{2}}$ hatványnak. Ezt az eljárást minden $x \geq 0$ esetén elvégezve kapjuk az $x^{\sqrt{2}}$, minden irracionális α esetén elvégezve pedig x^α függvényt. A határérték tárgyalásánál (2. fejezet) látni fogjuk, hogy nem tettünk mást, mint képeztük a

$$x^{\sqrt{2}} := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}$$

határértéket.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

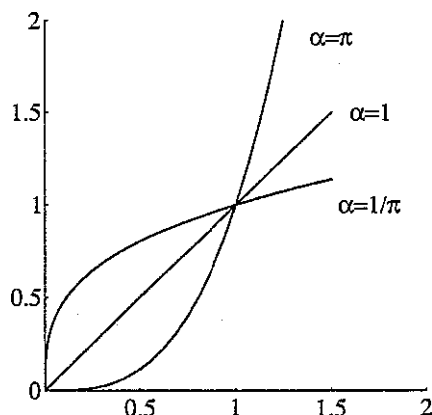
A hatvány fogalmát immár irracionális kitevőre is kiterjesztettük. A hatványozás azonosságai és a hatványokra vonatkozó egyenlőtlenségek a hatványozás negatív és törtkitevőre való kiterjesztése során végig érvényben maradtak. Ezeket ott elemi úton tudtuk bizonyítani. Az azonosságok és egyenlőtlenségek az irracionális kitevőre is érvényesek. Ez következik a "tetszőleges pontossággal való közelítés technikájából". A pontos bizonyítást mellőzzük.

Ha $x \geq 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, igazak az alábbi tulajdonságok:

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 < \alpha < \beta$, akkor $x^\alpha \geq x^\beta$. Ha pedig $1 \leq x$ és $0 < \alpha < \beta$, akkor $x^\alpha \leq x^\beta$.

Az $x^{1/\pi}$, $x^{1/\sqrt{2}}$, x , $x^{\sqrt{2}}$, x^π függvények grafikonját az ábrán láthatjuk:

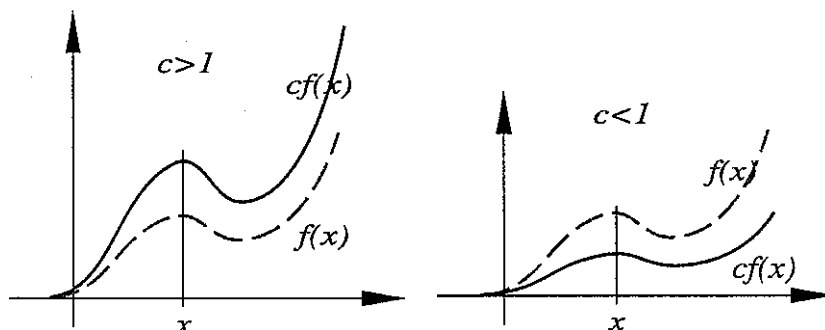


1.13. Függvénytranszformációk

Ebben a pontban feltételezzük, hogy ismert az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és grafikonja. Megvizsgáljuk, hogy a függvényen történt átalakítások hogyan hatnak az értelmezési tartományra, értékkészletre, grafikonra. Valamely transzformáció során keletkezett függvény vizsgálatát az eredeti $f(x)$ függvény vizsgálatára vezethetjük vissza. Fordítva, a transzformáció megkönnyítheti az eredeti függvény tanulmányozását, ábrázolását.

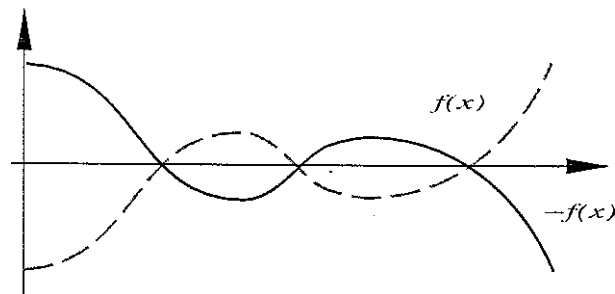
1.13.1. A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció

A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció adott c szám esetén az $x \rightarrow f(x) \rightarrow c \cdot f(x)$ hozzárendelést valósítja meg. Nyilvánvalóan $D_{c \cdot f} = D_f$. Legyen $c > 0$. Ha $c > 1$, akkor a grafikont megnyújtja, ha $c < 1$ akkor összenyomja az y -irányban. A $c = 1$ eset nem csinál semmit.



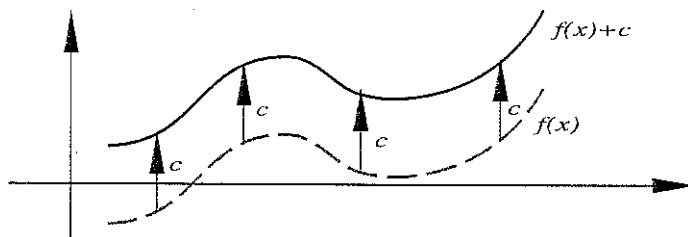
Ha $c < 0$, akkor a fentiekhez még egy x -tengelyre való tükrözés is járul. A $c = -1$ eset pedig ($g(x) = -f(x)$) az x -tengelyre való tükrözést jelenti.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



1.13.2. A $g(x) = f(x) + c$ transzformáció

Most az $x \rightarrow f(x) \rightarrow f(x) + c$ hozzárendelést hajtjuk végre, ahol c tetszőleges konstans. Minden pontban az $f(x)$ értékekhez hozzáadjuk ugyanazt a számot, ami a grafikonon y -irányú eltolást jelent. $D_{f+c} = D_f$.

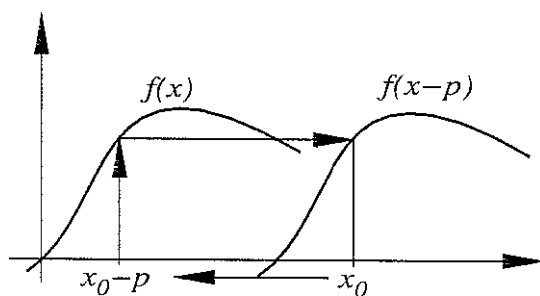


1.13.3. A $g(x) = f(x - p)$ transzformáció

Az $x \rightarrow x - p \rightarrow f(x - p)$ hozzárendelések végrehajtásával kapjuk a $g(x) = f(x - p)$ függvényt.

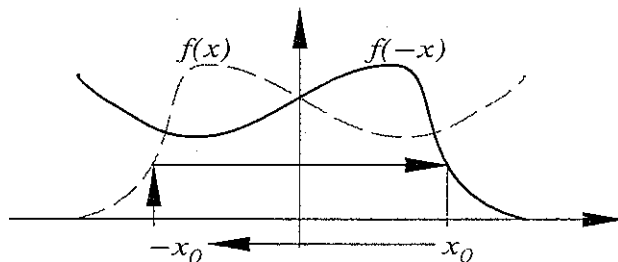
$$D_{f(x-p)} = \{x : x - p \in D_f\}.$$

Innen adódik, hogy az $f(x)$ grafikonját ismerve, az $f(x - p)$ grafikonját az x tengely mentén p értékekkel eltolva kapjuk meg. Ha $p > 0$ ez jobbra, ha $p < 0$, akkor balra történő eltolást jelent.



1.13.4. A $g(x) = f(-x)$ transzformáció

Ez a transzformáció az $f(x)$ grafikonját tükrözi az y -tengelye. Könnyű látni, hogy $D_{f(-x)} = \{x : -x \in D_f\}$.



1.14. Másodfokú függvények

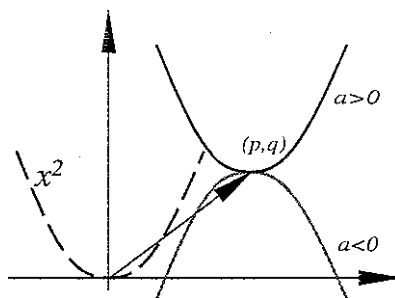
Az x^2 függvényre alkalmazva az x és y -irányú eltolást és a konstanssal való szorzást:

$$x \rightarrow (x - p) \rightarrow (x - p)^2 \rightarrow a(x - p)^2 \rightarrow a(x - p)^2 + q,$$

az

$$y = a(x - p)^2 + q$$

parabolát kapjuk. Ennek csúcspontja a (p, q) pont. Ha $a > 0$, akkor a parabola szárai felfelé, ha $a < 0$ lefelé állnak.



Mivel a parabola fenti képletétől a csúcspont koordinátáit közvetlenül leolvashatjuk, ezt *csúcsponti egyenletnek* nevezzük.

A parabola zéróhelyeinek (gyökeinek) kereséséhez megoldjuk az $a(x - p)^2 + q = 0$ egyenletet:

$$(x - p)^2 = -\frac{q}{a},$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{q}{a}} + p.$$

Nincs gyök, ha $q/a > 0$; egy gyök van, ha $q/a = 0$.

Ha a parabola a kanonikus

$$y = ax^2 + bx + c$$

alakban adott, akkor teljes négyzetté alakítással kaphatjuk a csúcsponti egyenletet. A gyökök ekkor:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ha $D = b^2 - 4ac > 0$, két gyök van; $D = 0$ esetben egy gyök van; $D < 0$ esetben nincs gyök. A kanonikus alakból könnyű megkapni a csúcspont koordinátáit (p, q) , ha észrevesszük, *hogya a parabola szimmetrikus a tengelyére*, az $\{x = p\}$ egyenesre nézve. Ezért

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = ap^2 + bp + c.$$

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Ha x_1 és x_2 gyökök, akkor a parabola egyenlete

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

alakban is írható (gyöktényezős alak). A tényezőket összeszorozva, és a kapott formulát a kanonikus alakkal összehasonlítva kapjuk a gyökök és együtthatók összefüggéseit leíró Viete-képleteket:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2),$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

1.15. Polinomok

Ha adottak az $a_0, a_1, \dots, a_n$ számok, akkor a

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

alakú függvényeket n -ed fokú polinomoknak nevezzük. $P_n(x)$ minden valós x -re képezhető. A másodfokú függvényekhez hasonlóan, ha x_0 a $P_n(x)$ zéróhelye, akkor igaz a

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$$

összefüggés, ahol $Q_{n-1}(x)$ egy $(n-1)$ -ed fokú polinom. A zéróhelyek keresésére azonban $n > 4$ esetén már nincs formula.

1.16. Racionális törtfüggvények

Legyenek $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ polinomok. A

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

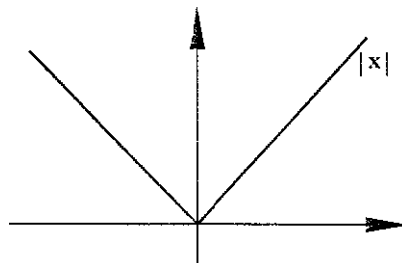
függvényt, a két polinom hányadosát, racionális törtfüggvénynek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a függvény nincs értelmezve a $Q_m(x)$ polinom zéróhelyeiben, és így a tört zéróhelyei megegyeznek a számláló $P_n(x)$ azon zéróhelyeivel, ahol a nevező nem nulla.

1.17. Az $f(x) = |x|$ függvény

Az

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

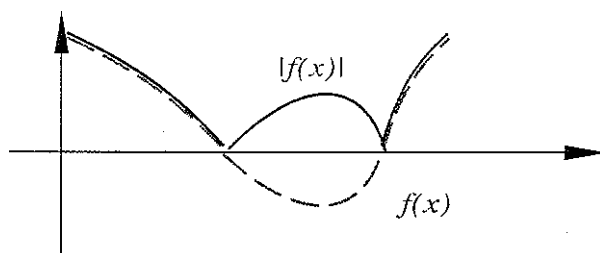
függvény minden valós számra képezhető, és grafikonja két egymáshoz illesztett, egymásra merőleges és az x -tengellyel $\pi/4$ szöget bezáró félegyenes.



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Most képezzük az $|f(x)|$ összetett függvényt:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

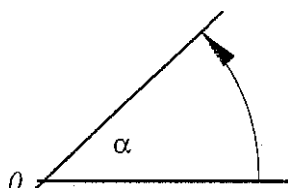


A grafikon x -tengely alatti részét tükrözzük az x -tengelyre. Nyilván $D_{|f|} = D_f$.

1.18. Trigonometrikus függvények

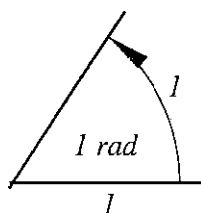
A szögmérés

Tekintsünk két, egy közös pontból induló félegyenest.

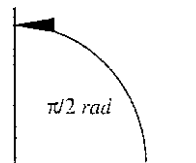
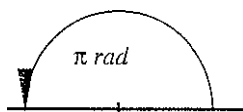
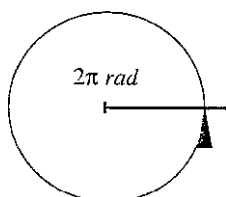


A két félegyenes által bezárt szöget az óramutató járásával ellenkező irányban mérjük fel. A mérésre két módszer ismert, mindkettő a O középpontú körök íveinek mérésén alapul. Először az O középpontú, tetszőleges kör kerületét 360 egyenlő részre, fokra osztjuk fel. A szöget a szög szárai közé eső fokok száma méri.

Bár a fokokkal való mérés eléggé egyszerű, sokkal természetesebb az ívmértékkel való szögmérés. Rajzoljunk az O pont köré egységsugarú kört. A szöget a szögcsárak által kimetszett ív hosszával mérjük. 1 radián az 1 hosszú ívhez tartozó szög ($\approx 57^\circ$).

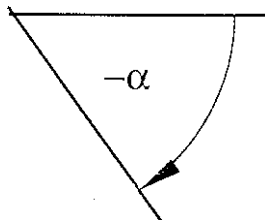


A teljes körhöz tartozó szög $360^\circ = 2\pi$ rad, az egyenesszög $180^\circ = \pi$ rad, és a derékszög $90^\circ = \pi/2$ rad:



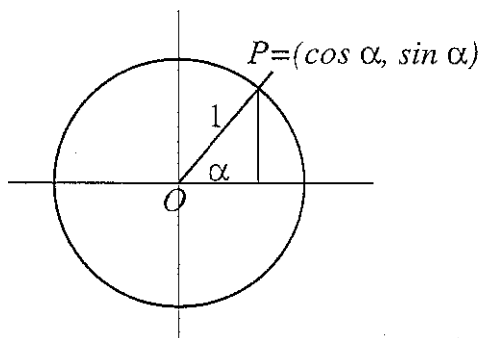
1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Negatív irányban mérve a szöget $-\alpha$ -t kapunk.



A trigonometrikus függvények definíciója

Tekintsük az origó középpontú, egységsugarú kört az alábbi ábra szerint. Mérjük fel az α szöget az x -tengelyről pozitív irányban, legyen a szög szárának és a körvonalnak a metszéspontja P . Definíció szerint $\cos \alpha$ a P pont x -koordinátája, $\sin \alpha$ pedig a pont y -koordinátája.



Ez a definíció érvényes a 2π -nél nagyobb forgásszögekre is. Bevezetünk két újabb szögfüggvényt:

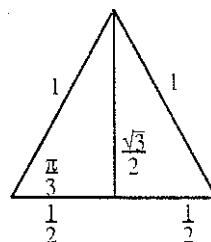
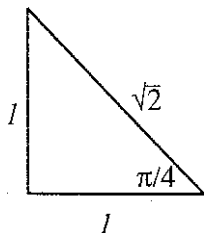
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_1 O}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pm k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

Néhány nevezetes értéket azonnal kapunk a definíció alapján.

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1, & \operatorname{tg} 0 &= 0, & \operatorname{ctg} 0 &\text{ nem def.-t,} \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1, & \cos \frac{\pi}{2} &= 0, & \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} &\text{ nem def.-t,} & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} &= 0, \\ \sin \pi &= 0, & \cos \pi &= -1, \\ \sin \frac{3\pi}{2} &= -1, & \cos \frac{3\pi}{2} &= 0, \\ \sin 2\pi &= 0, & \cos 2\pi &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenlő szárú derékszögű háromszög vizsgálatával, kapjuk hogy

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Az egyenlő oldalú háromszögből pedig

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A definícióból a Pithagorasz tétellel azonnal kapjuk a $\sin x$ és $\cos x$ közötti alapvető összefüggést:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

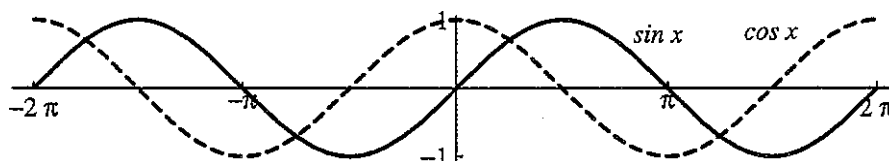
Az egységsugarú körre pillantva azonnal adódnak további fontos összefüggések:

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha & \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \quad (\text{A periódus } 2\pi) \\ \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (\text{A periódus } \pi) \\ \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), & \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array}$$

Az addíciós tételek igazolása a középiskolás tankönyvekben megtalálható:

$$\begin{array}{lll} \sin(\alpha + \beta) & = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, & \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) & = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, & \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, & \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{array}$$

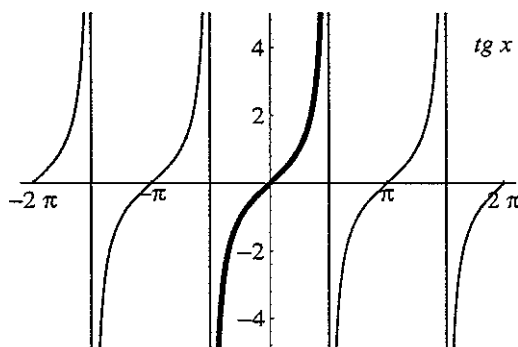
A függvények grafikonjai



A $\sin x$ és $\cos x$ grafikonja

A $\sin x$ monoton növekvő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ szakaszon. Itt invertálható. Inverze az $\arcsin x$. A $\sin x$ maximumát az $x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), minimumát az $x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) helyeken veszi fel, zéróhelyei $x = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

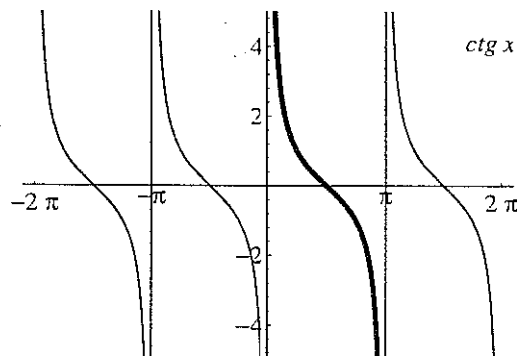
A $\cos x$ nevezetes pontjainak keresését a $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ azonosságot felhasználva az olvasóra bízunk. A $[0, \pi)$ szakaszon szigorúan monoton csökkenő, inverze itt $\arccos x$.



A $\operatorname{tg} x$ grafikonja

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

A $\operatorname{tg} x$ értelmezési tartománya az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi; k = 0, 1, 2, \dots\}$ halmaz. Monoton növekvő a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ és minden $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ szakaszon. A $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon vett inverze $\operatorname{arctg} x$.

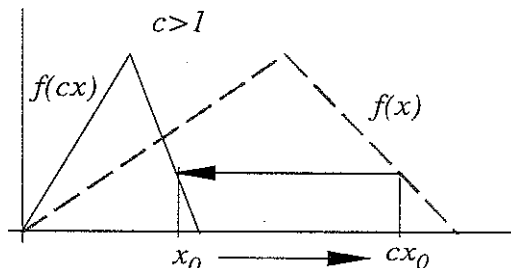


A $\operatorname{ctg} x$ grafikonja

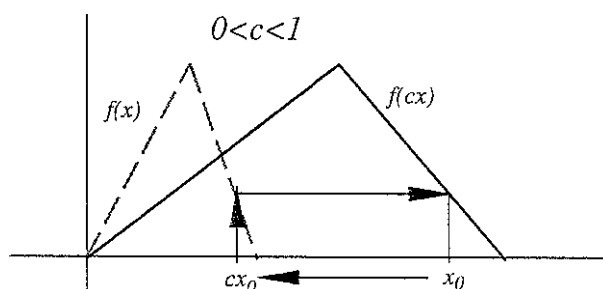
A $\operatorname{ctg} x$ értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi; k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Nevezetes pontjainak keresését az olvasóra bízjuk. Monoton csökkenő a $(0, \pi)$ és minden $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon. A $(0, \pi)$ intervallumon vett inverze az $\operatorname{arccotg} x$ függvény.

1.19. Függvénytranszformációk, folytatás: a $g(x) = f(cx)$, ($c > 0$) transzformáció

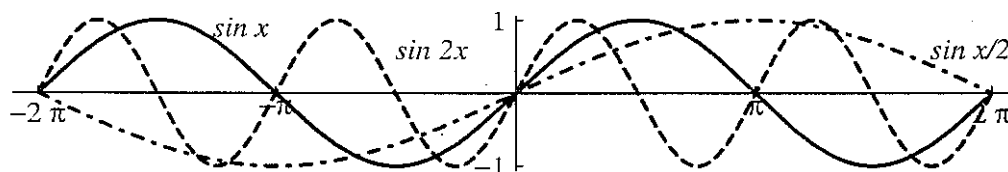
Legyen $c > 1$. Ekkor $cx > x$, a transzformált függvény az x helyen az f függvény cx helyen felvett értékét kapja. A grafikon az x tengely mentén "c-ed" részére zsugorodik.



Ha $0 < c < 1$, akkor, éppen fordítva, az x -tengely mentén történő nyújtásról beszélünk. Ugyanis ekkor $cx < x$, és a transzformáció a cx helyen felvett értéket "húzza ki" az x helyre.

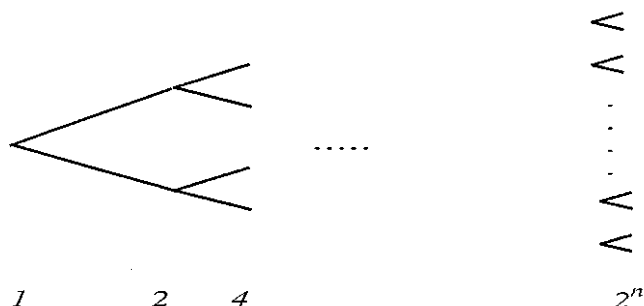


1.25. Példa. A periódikus folyamatok leírásánál hasznosak a $\sin cx$ és $\cos cx$ függvények, amelyek periódusa $2\pi/c$. A $\sin 2x$, $\sin x$ és $\sin x/2$ grafikonja látható az alábbi ábrán.



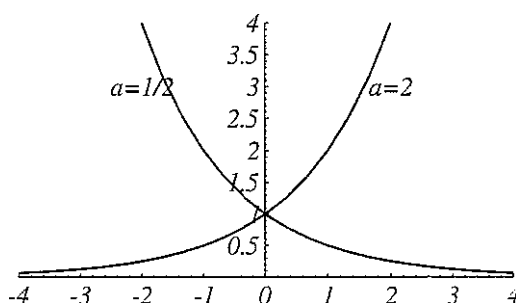
1.20. Az exponenciális függvény

Tekintsük a sejtosztódás folyamatát. Tegyük fel, hogy minden sejt másodpercenként osztódik, és a 0-ik másodpercben 1 sejt van. Az első másodpercben 2, a 2-ikban 4, a harmadikban 8, és így tovább,



az n -ik másodpercben pedig 2^n sejt van. Itt a hatványfüggvényekkel ellentétben nem az alap, hanem a kitevő változik.

Általában, ha hatványozásnál az $a > 0$ ($a \neq 1$) alap rögzített, és az $x \in \mathbb{R}$ kitevő a változó, akkor az a^x exponenciális függvényt kapjuk. Mivel a hatványt minden valós x kitevőre definiáltuk, az a^x függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza ($D = \mathbb{R}$). Nyilvánvalóan $a^x > 0$ minden x esetén, vagyis az értékkészlet $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. A hatványokra vonatkozó egyenlőtlenségek miatt, ha $a > 1$, akkor a^x növekvő ($x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$), és ha $0 < a < 1$, akkor csökkenő ($x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$). A 2^x és $(1/2)^x$ grafikonját láthatjuk az alábbi ábrán:



Mivel $(1/a)^x = a^{-x}$, ezért az $(1/a)^x$ és a^x függvények grafikonja egymás tükörképei az y -tengelyre vonatkozóan.

A hatványozás azonosságai miatt

$$a^0 = 1, \quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}.$$

Könnyen látható, hogy $a^x \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow \infty$, és $a^x \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow -\infty$ ($a > 1$ -esetén). A " $\rightarrow \infty$ ", " $\rightarrow 0$ " jelölések azt jelentik, hogy a nyíl előtt levő kifejezés minden határon túl közeledik a végtelenhez illetve nullához. Ezt a fogalmat pontosan a határértékekről szóló 2. fejezetben tárgyaljuk.

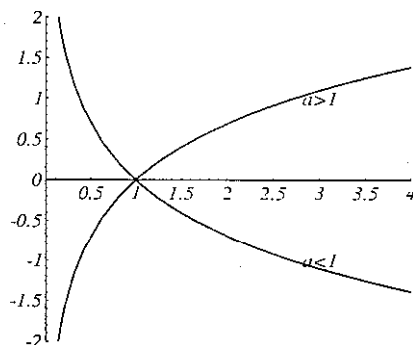
1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

1.21. A logaritmus függvény

Mivel az $f(x) = a^x$ kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton), ezért invertálható. Inverze

$$\bar{f}(x) = \log_a x$$

azt a számot jelenti, amelyre mint kitevőre, a -t emelve x -t kapunk. Az $\log_a x$ grafikonját mutatja a következő ábra $a > 1$ és $0 < a < 1$ esetén



Nyilvánvaló, hogy az értelmezési tartomány $D_{\log} = (0, \infty)$, az értékkészlet $R_{\log} = \mathbf{R}$, és a $\log_a x = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$. A logaritmusra vonatkozó legfontosabb azonosságok:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Megjegyezzük, hogy

$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{ha } x > 0,$$

és

$$\log_a a^x = x, \quad \text{ha } x \in \mathbf{R},$$

a két függvény tehát nem azonos.

1.22. Logaritmikus függvénytranszformációk, logaritmikus skálák

Az exponenciális függvények vizsgálatát és ezáltal számos gyakorlati probléma megoldását nagymértékben megkönnyíti az alábbiakban vázolandó transzformáció, melynek segítségével az exponenciális függvények grafikonját egyenesként rajzolhatjuk meg. Az eljárást példákon keresztül mutatjuk be.

Tekintsük az

$$f(x) = 10^{3x}$$

függvényt. Ennek grafikonját ismerjük, de nyilvánvaló, hogy a megközelítően pontos ábrázolás is nehézségekbe ütközik.

Vegyük az

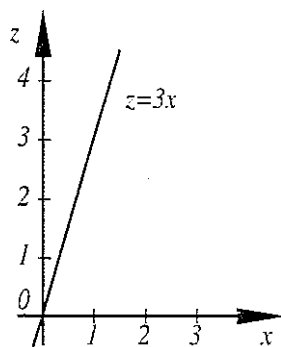
$$y = 10^{3x}$$

egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:

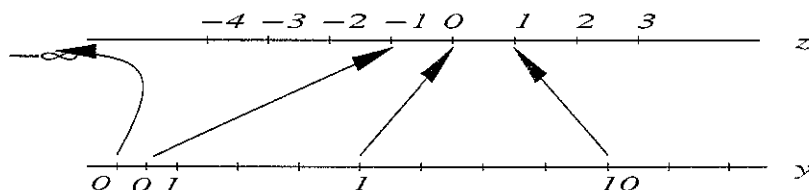
$$z = \lg y = 3x.$$

A kapott z változó lineárisan függ x -től, ezért grafikonja egyenes az (x, z) koordinátarendszerben.

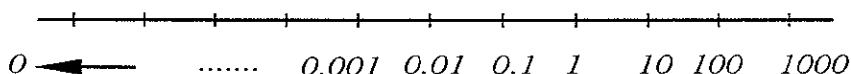
1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK



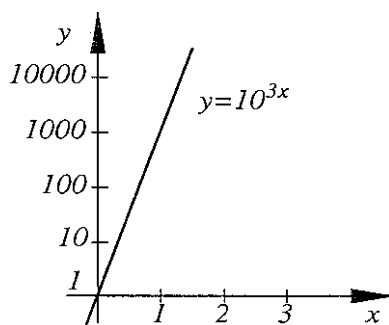
A $z = \lg y$ kölcsönösen egyértelmű, ezért az egyenletes z -beosztást megcímkézhjük a megfelelő $y = 10^z$ értékekkel, azaz a $\lg y$ helyhez y -t írunk.



A transzformált z tengelyt a megfelelő y -értékekkel megcímkézve, egy úgynevezett logaritmikus skálát kapunk, ahol a skála $-\infty$ helyett 0-val kezdődik és a nulla helyett 1 van.



Látható, hogy 10^n és 10^{n+1} között ugyanakkora a távolság minden n esetén. Az $y = 10^{3x}$ függvényre kapjuk az alábbi grafikont:



Természetesen más alapú logaritmus is használható. A logaritmus azonosságai miatt a különböző alapú logaritmusok alapján készült skálák csak egy konstans szorzóban térnek el egymástól, ezért az egyenes meredeksége lesz más.

Az orvostudományban és a gyógyszerésztudományban ennek az ábrázolásnak rendkívüli szerepe van, hiszen számos folyamat exponenciális csökkenést vagy növekedést mutat. A kísérletek eredményeinek ábrázolását gyakran előre gyártott "logaritmikus mm-papír" segíti, amely bármilyen alapú logaritmus szerinti ábrázoláshoz megfelel, figyelembe véve az átíráshoz szükséges összefüggést. Manapság papír helyett inkább számítógépeket használunk.

A fenti esetben és általában az exponenciális függvények esetén az y -tengelyt transzformáljuk.

1. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

Más esetekben az x -tengely logaritmikus transzformációjára is szükség lehet.

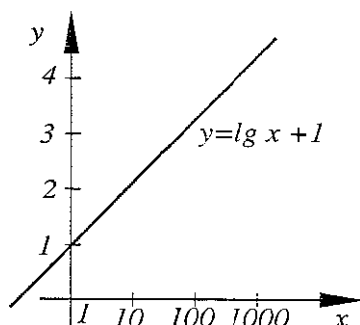
Tekintsük az

$$y = \lg x + 1$$

függvényt. Ha bevezetjük az $u = \lg x$ helyettesítést, akkor az

$$y = u + 1$$

egyenest kapjuk, amelynek képe az (u, y) rendszerben egyenes. Mivel az $x \rightarrow u$ kapcsolat kölcsönösen egyértelmű, az u -tengelyt címkézhettük a megfelelő x értékekkel. Ez hasonló az előbbiekhez, de most az x -tengelyt torzítjuk logaritmikusan.



Az $y = (\lg x)^3 + 1$ függvényt pedig ebben a koordináta-rendszerben ábrázolva az $y = u^3 + 1$ görbét kapnánk.

A fenti ábrázolásokat **szemilogaritmikusnak** nevezzük, mivel csak az egyik koordinátatengelyt transzformáljuk.

Mindkét tengely transzformációjára szükség van, ha valamely hatványfüggvényt, például a

$$y = 100 \cdot x^{-2}$$

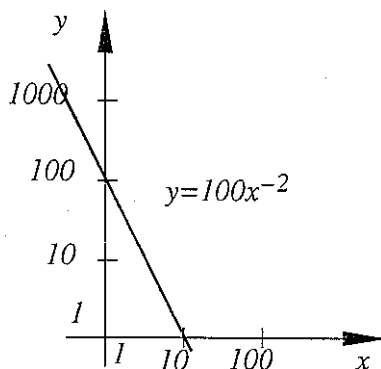
függvényt szeretnénk egyenessé transzformálni. Mindkét oldal logaritmusát (pl. $\lg$) véve

$$\lg y = -2 \lg x + 2$$

Bevezetve a $z = \lg y$ és $u = \lg x$ változókat, a

$$z = 2 - 2u$$

egyenest kapjuk az (u, z) rendszerben. Mindkét tengelyt az eredeti x, y -értékekkel megcímkézve kapjuk a függvény **logaritmikus** ábrázolását.



2. Határérték, folytonosság

2.1. Határértékproblémára vezető feladatok

A határérték a matematikai analízis alapvető fogalma. Most néhány olyan határértékre vezető matematikai és alkalmazásokból származó példát, problémát tekintünk, amelyek a következő fejezetekben kiemelten fontosak lesznek.

- Az $f(x)$ függvény grafikonjához húzott érintő meredekségének, a függvény változásának a vizsgálata a differenciálszámítás alapfeladata.
- Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x -tengely közti terület kiszámítása, illetve területszámításra visszavezethető problémák vizsgálata az integrálszámítás körébe tartoznak.
- Valamely valós folyamat jövőbeli viselkedésének "megjósáláskor" a folyamatot leíró $f(x)$ függvény *aszimptotikus tulajdonságainak*, a függvény végtelen közelében való viselkedésének vizsgálata szükséges.

2.1.1. A függvény érintője, mint határhelyezet

Tekintsük az $f(x)$ függvényt, amely értelmezve van valamely x_0 pontban és annak egy környezetében. Próbáljunk érintőt húzni a függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Először pontosan meg kell mondanunk, mit értünk az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő alatt. Ha az érintő fogalmát meghatároztuk, felrajzolásához a meredekségét kell még megkeresnünk. Ezután az

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

képlet megadja az érintő egyenletét.

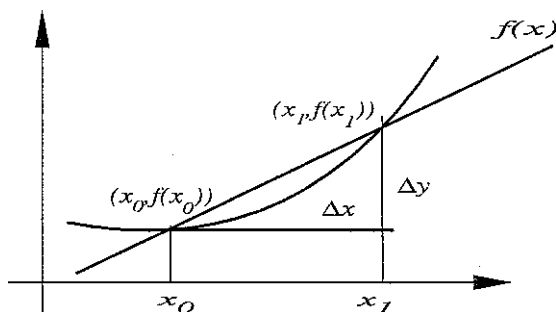
Az alábbi gondolatmenet az érintő fogalmát is megvilágítja, és a meredekség meghatározásának módszerét is megadja.

Legyen $x_1 \neq x_0$ adott. Az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő egyenes (szelő) meredeksége

$$m(x_0, x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

amely függ az x_0, x_1 pontok megválasztásától. A szelő egyenlete

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$



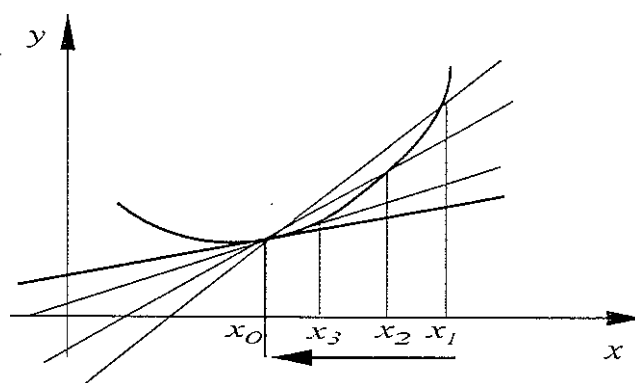
Vegyük az x_0 -hoz egyre közelebb levő, $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokat (pl. $x_0 + \frac{1}{n}$ vagy $x_0 - \frac{1}{n}$ választások megfelelők lehetnek). A szelők meredekségei rendre

$$m(x_0, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

egyenleteik

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)}(x - x_0).$$

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG



Ha a függvény grafikonja eléggé "szép", akkor az $(x_n, f(x_n))$ metszéspontok egyre közelebb kerülnek az $(x_0, f(x_0))$ ponthoz, a szelők pedig hozzáasimulnak egy egyeneshez, amely "simán" érintkezik a függvény grafikonjával. Ez a grafikon érintője az $(x_0, f(x_0))$ pontban. A szelők meredeksége pedig egyre jobban megközelít egy számot, egy határértéket, amely csak az x_0 -tól függ. Ez a szám az érintő meredeksége.

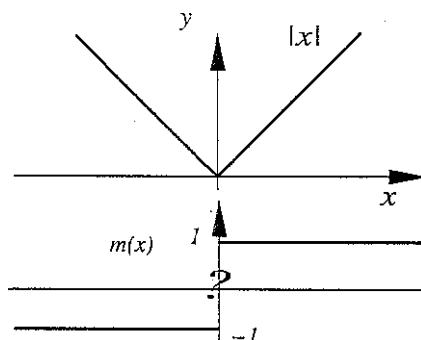
Összefoglalóul azt mondhatjuk, hogy az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelők **határhelyzete** az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő, midőn $x \rightarrow x_0$. Az érintő meredeksége pedig a szelők meredekségének a **határértéke** ha x minden határon túl közeledik x_0 -hoz. Ez utóbbira a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m(x_0)$$

jelölést alkalmazhatjuk. Az érintő egyenlete

$$y - f(x_0) = m(x_0)(x - x_0).$$

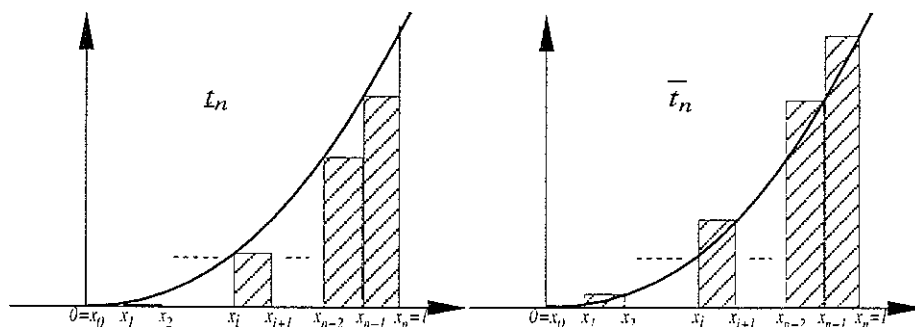
Megjegyezzük, hogy egyáltalán nem biztos hogy létezik az érintő. Legyen például $f(x) = |x|$ és $x_0 = 0$. Azt találjuk, hogy a szelőknek **nem létezik határhelyzete**, ha $x \rightarrow x_0$ és **nem létezik a szelők meredekségének a határértéke sem**. A grafikon "szépsége" tehát az érintő létezésének feltételezését jelenti.



2.1.2. A terület, mint határérték

Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon. Számítsuk ki a függvény grafikonja és az x -tengely közti területet 0 és 1 között. Mivel a téglalapok területét könnyen ki tudjuk számítani, ezért próbáljuk a kérdéses tartományt minél pontosabban egymást át nem fedő téglalapokkal kitölteni vagy lefedni. Olyan téglalapokat veszünk, amelyek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre, és az i -ik osztópontot jelöljük x_i -vel: $x_i = i/n$. Ekkor $x_0 = 0$, és $x_n = 1$. Ekkor a vizsgált tartomány területét alulról, illetve felülről becsüljük az ábrán látható téglalapok területének összegével.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG



Mivel $x_{i+1} - x_i = 1/n$, $f(x_i) = (i/n)^2$ és $f(x_{i+1}) = ((i+1)/n)^2$, ezért az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon alulról becsülő téglalap területe i^2/n^3 , a felülről becsülő téglalapé $(i+1)^2/n^3$. Így a terület alsó becslése:

$$\underline{t}_n = \frac{0}{n^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

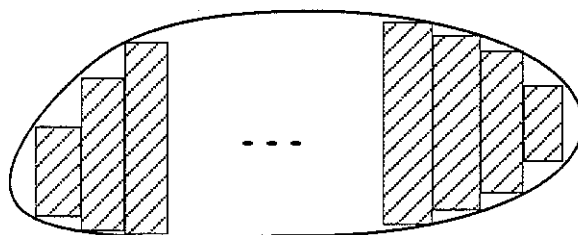
A felső becslés:

$$\overline{t}_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ha a beosztásokat minden határon túl finomítjuk ($n \rightarrow \infty$), $\underline{t}_n$ és $\overline{t}_n$ egyre közelebb kerülnek az $1/3$ értékhez, ezért azt mondhatjuk, hogy a vizsgált tartomány területe $1/3$. A $\underline{t}_n$ és $\overline{t}_n$ közelítő területeknek ezt a tulajonságát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy **határértékük $1/3$, ha n tart végtelenhez**. Ezt így jelöljük:

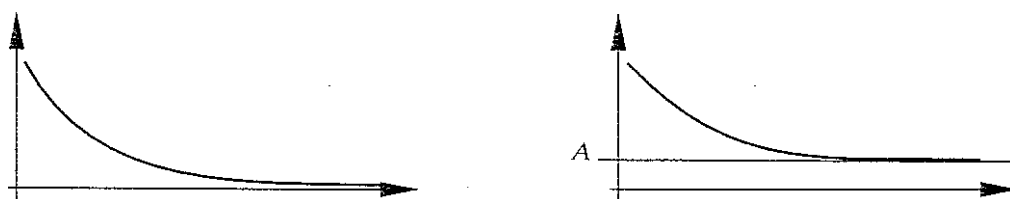
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{t}_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{t}_n = \frac{1}{3}.$$

Hasonló gondolatmenetet követhetünk más síkidomok területének kiszámításakor. A területet egymást nem átfedő téglalapok vagy más egyszerű idomok területe összegének a határértékeként kapjuk.



2.1.3. Függvények viselkedése a végtelen közelében

Tekintsük valamely gyógyszer felszívódását a szervezetben. A gyógyszer mennyiségét a t időpillanatban az $f(t)$ függvény írja le. Az $f(t)$ két lehetséges grafikonja látható az alábbi ábrákon.



2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Szeretnénk tudni, hogy tetszőleges idő múlva is marad-e a szervezetben hatásos mennyiségű gyógyszer, vagy a gyógyszer gyakorlatilag eltűnik a szervezetből. Azt vizsgáljuk, hogy ha t minden határon túl nagyra válik, mi történik a megfelelő $f(t)$ függvényértékekkel. Ha az $f(t)$ értékek egyre közelebb kerülnek nullához a t idő növekedésével, akkor azt mondhatjuk, hogy az $f(t)$ függvény határértéke a végtelenben nulla, amire a $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ jelölést alkalmazhatjuk. A második grafikon esetén pedig $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = A$.

2.1.4. Függvények határértékének intuitív fogalma

A bevezető példák mind speciális esetei a határérték általános fogalmának. A bevezetett speciális jelöléseket egységesíthetjük:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Ezt a jelölést úgy olvassuk, hogy $f(x)$ tart A -hoz, ha x tart a -hoz, vagy az $f(x)$ határértéke A , midőn x tart a -hoz. Ez azt jelenti, hogy, ha az x minden határon túl megközelíti a -t, akkor $f(x)$ A -hoz közeledik minden határon túl. Ez nem pontos definíció, adósak maradtunk "x tart a-hoz" egzakt meghatározásával. Látni fogjuk, hogy a véges számhoz és a végtelenhez való közeledés fogalmai különböznek egymástól.

A továbbiakban, ha a vizsgált hely lehet véges vagy végtelen, akkor az "a" jelölést használjuk. Ha hangsúlyozzuk a hely végességét, akkor a kérdéses helyet x_0 jelöli.

Először egy speciális esetet, a sorozatok határértékét tekintjük. Utána foglalkozunk az általános esetekkel.

2.2. Sorozatok határértéke

Soroljunk fel végtelen sok valós számot egymás után. A számok sorrendje lényeges. Ezeket a felsorolásokat végtelen sorozatoknak nevezzük. Ilyen sorozat például a természetes számokból álló

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

vagy a négyzetszámokból álló

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

sorozat és az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

sorozat. Általában

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}; \quad \{a_n\}$$

jelöli számok végtelen sorozatát, amelynek n -ik eleme a_n . Sorozatok például a különböző pillanatokban mért kísérleti eredmények, ahol az n index az n -ik pillanatot jelöli. A sorozatok $N \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények, melyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Az indexes jelölés itt célravezetőbb az $f(n)$ jelölésnél.

Sorozat véges határértéke

Tekintsük a fent említett $a_n = 1/n$ sorozatot. Látjuk, hogy az n növekedésével a sorozat elemei bármilyen kicsiny megadott távolságnál közelebb kerülnek a nullához. Például, $a_n \leq 0.1$ ha $n \geq 10$. Az $a_n \leq 0.01$ egyenlőtlenség pedig $n \geq 100$ -ra teljesül. És így tovább, még kisebb, bármilyen kicsi pozitív számot megadva, a sorozat elemei nála kisebbek valamely elemtől kezdődően.



2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.1. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat nullához tart, a határértéke nulla, midőn $n \rightarrow \infty$, ha bármely, tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon)$ ε -tól függő küszöbindex, hogy $|a_n| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén. Ezt a tulajdonságot kétféleképpen is jelölhetjük:

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az "a" véges szám, azaz

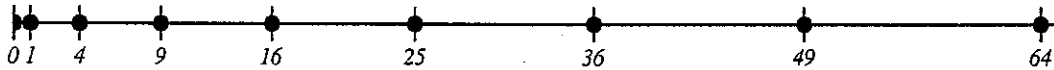
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ ha } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0.$$

Sorozat végtelen határértéke

Tekintsük az

$$a_n = n^2$$

sorozatot. A számegyenesen ábrázolva, láthatjuk, hogy



az a_n értékek egyre nagyobbak az n növekedésével, és bármilyen nagy előre adott K számnál nagyobbá válnak. Ha $K = 10$, akkor $a_4, a_5 \dots$ már nagyobb, mint K , ha $K = 10000$, akkor $a_{101}, a_{102}, \dots$ nagyobbak K -nál. Hasonló igaz minden adott K szám esetén.

2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat tart ∞ -be, határértéke végtelen, midőn n végtelenbe tart, ha bármilyen nagy K számhoz van olyan $N(K)$ K -tól függő küszöbindex, hogy $a_n > K$ minden $n > N$ index esetén. A sorozat végtelen határértékére az

$$a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

jelöléseket használjuk.

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke $-\infty$, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = \infty.$$

2.1. Példa. Tekintsük az $a_n = q^n$ mértani sorozatot.

Ha $q > 1$, akkor $a_{n+1} = q^{n+1} = q^n \cdot q > q^n = a_n$, a sorozat monoton növekvő. Legyen $K > 0$ adott. Ekkor $q^n > K$, ha $n > \log_q K$. Tehát a $q > 1$ esetben $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Ha $q = 1$, akkor $a_n \equiv 1$, és nyilvánvalóan $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

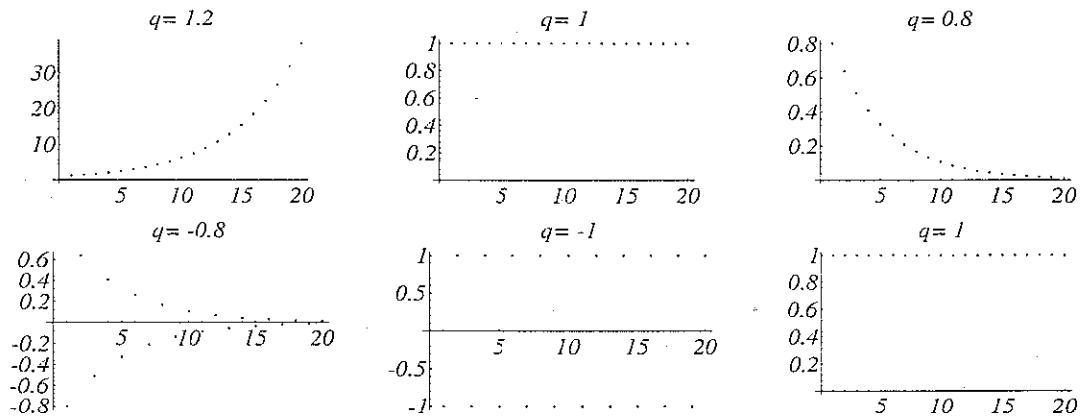
Ha $q = -1$, akkor a sorozat elemei $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$ a sorozat oszcillál, nem létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ határérték, a sorozat elemei nem közelednek egyetlen értékhez sem.

Legyen $-1 < q < 1$. Belátjuk, hogy $q^n \rightarrow 0$ midőn $n \rightarrow \infty$. Meg kell mutatni, hogy a $|q|^n$ értékek tetszőlegesen kicsinnyé válnak. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akármilyen kicsiny szám, például $0.1, 0.01, 0.001$ vagy kisebb. A logaritmus definíciójából adódik, hogy $|q|^n < \varepsilon$ lesz, hacsak $n > \log_{1/|q|} 1/\varepsilon$.

Ha $q < -1$, akkor a q^n sorozatnak nincs határértéke, ugyanis páros n -re az elemek (q^{2k}) pozitívak és végtelenbe tartanak, a páratlan n -re pedig (q^{2k+1}) negatívak, és $-\infty$ -be tartanak.

Ábrázoljuk a különböző eseteket koordinátarendszerben:

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG



Befejezésül tekintsük a mértani sorozat első n elemének összegét. A középiskolás tanulmányokból is ismert, hogy

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

A fentiek miatt, ha $|q| < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Egyéb esetekben nincs véges határérték.

2.2. Példa. Legyen $a_n = a_0 + nd$, egy ($d > 0$) differenciájú számtani sorozat. Legyen $K > 0$ adott szám. Mivel

$$a_0 + nd > K, \quad \text{ha} \quad n > \frac{K - a_0}{d}.$$

ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + nd) = \infty$. Ha $d < 0$, akkor pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + nd = -\infty$.

2.3. Példa. Az $a_n = 2^n$ sorozat határértéke végtelen. Ugyanis legyen K tetszőlegesen nagy pozitív szám. Ekkor $2^n > K$, hacsak $n > \log_2 K$.

2.4. Példa. Az $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ sorozat egyik végtelenhez sem tart, mert a páros indexű elemek végtelenhez, míg a páratlanok mínusz végtelenhez közelednek.

2.3. Kamatos kamat, az $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, az "e" szám

Tegyük be a bankba " A_0 " forint összeget évi P % kamatra. Legyen $p = P/100$. Ekkor egy év után a követelésünk

$$A_1 = A_0(1 + p),$$

két év után

$$A_2 = A_1(1 + p) = A_0(1 + p)^2,$$

a k -ik év után pedig

$$A_k = A_{k-1}(1 + p) = A_{k-2}(1 + p)^2 = \dots = A_0(1 + p)^k$$

forint lesz.

A pontosabb elszámolás érdekében számoljuk a kamatot félévenként. A félévi kamatláb $P/2$ %. Ekkor az első év végén követelhető B_2 összeget a

$$B_2 = A_0 \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

formulával számíthatjuk ki. Hasonlóan, a kamatot harmadévenként számolva, (a harmadévi kamatláb $P/3$ %):

$$B_3 = A_0 \left(1 + \frac{p}{3}\right)^3$$

Növeljük az osztópontok számát. Egyre gyakrabban számolunk kamatot. Évente 4-szer, 5-ször, n -szer, rendre az időarányos $P/4$ %, $P/5$ % illetve P/n % kamatlábakkal. Ekkor

$$B_4 = A_0 \left(1 + \frac{p}{4}\right)^4, B_5 = A_0 \left(1 + \frac{p}{5}\right)^5, \dots, B_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n, \dots$$

Ez a sorozat speciális. Az alap és a kitevő együtt változnak. Igaz általában, hogy

$$B_1 < B_2 < \dots < B_{n-1} < B_n \dots$$

Ez jó, mert követelésünk a kamatszámítás gyakoriságának növelésével emelkedik. Miért ne számítanánk a kamatot naponta, óránként? Ez azonban már célszerűtlen, mert a növekedés mértéke egyre kisebb. Tekintsük a speciális $p = 1$ esetet, azaz az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozatot. A sorozat néhány eleme:

$$a_1 = 2, \quad a_{10} = 2.59374, \quad a_{100} = 2.70481, \quad a_{1000} = 2.71692, \quad a_{10000} = 2.71815.$$

Bebizonyítható, hogy

$$2 = a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 3.$$

Belátható továbbá, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték. Ezt a határértéket "e"-vel jelöljük és alapvető szerepe van a matematikában. Mindenütt találkozunk vele, ahol az exponenciális és logaritmusfüggvényekkel dolgozunk. Az e szám irracionális, és egy közelítő értéke

$$e \approx 2.718281828459\dots$$

Továbbá, ha $b \neq 0$, akkor szintén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{bn}\right)^{bn} = e,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right]^p = e^p$$

A fentiek miatt betétünk az alábbiak szerint alakul évi egyre többszöri kamatszámítás esetén

$$B_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = A_0 \left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p \rightarrow A_0 \cdot e^p \quad (n \rightarrow \infty).$$

2.1. Megjegyzés. A kamatos kamat problémájának biológiai alkalmazásai is vannak. Ha egy populáció népessége évenként P %-kal nő, akkor a népesség számítását a kamatos kamat képletével végezzük.

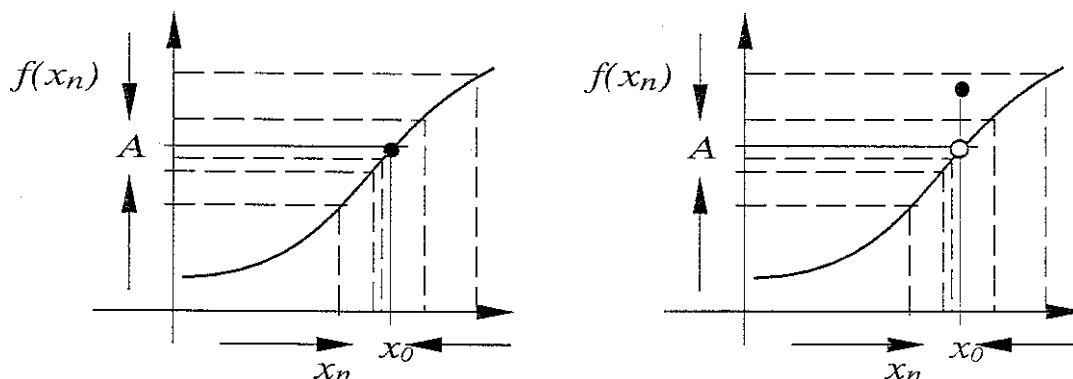
2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.4. Függvény határértéke véges pontban

A sorozatok határértékének felhasználásával az intuitív definíció teljesen egzaktta válik.

2.3. Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az x_0 véges hely egy környezetében, kivéve esetleg x_0 -t. Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen az A szám, ha a független változó tetszőleges x_0 -hoz tartó $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) sorozata esetén a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke A . E tulajdonság jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ vagy } f(x) \rightarrow A \text{ ha } x \rightarrow x_0.$$



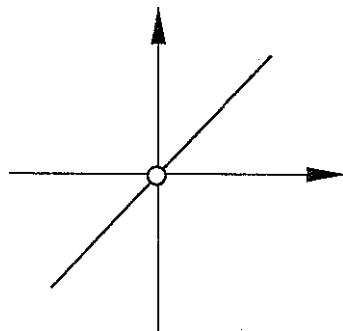
2.2. Megjegyzés. A határérték lokális tulajdonság, a függvény egy adott x_0 hely közelében való viselkedését jellemzi.

2.3. Megjegyzés. Nem tételeztük fel, hogy az " x_0 " helyen a függvény értelmezve legyen, csupán azt, hogy határértéke legyen az értelmezési tartományhoz tartozó helyek sorozatainak. A fenti ábrák mutatják, hogy ha x_0 az értelmezési tartományhoz tartozik, a határérték nem függ $f(x_0)$ -tól.

A határérték fontos tulajdonsága, hogy egyértelműen meghatározott. Szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy egy függvénynek egy adott helyen nem lehet két különböző határértéke. Igaz az alábbi tétel.

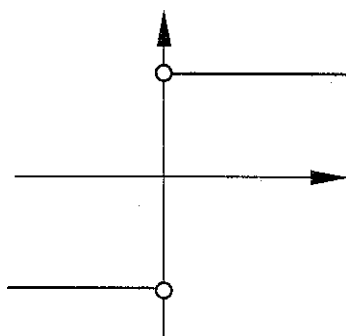
2.1. Tétel. A határérték egyértelmű. Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ egyidejűleg fennáll, akkor $A = B$.

2.5. Példa. Legyen $f(x) = x^2/x$, amely nincs értelmezve az $x_0 = 0$ helyen. Mivel $f(x) = x$, ha $x \neq 0$ ezért $\lim_{x \rightarrow 0} x^2/x = 0$.



2.6. Példa. Legyen $f(x) = |x|/x$, amely nincs értelmezve az $x_0 = 0$ helyen. Mivel $f(x) = 1$, ha $x > 0$, és $f(x) = -1$, ha $x < 0$ ezért $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ nem létezik, hiszen például ha $x_n = 1/n$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$. Ha pedig $x_n = -1/n$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG



A határértékek kiszámítását néhány szabály megkönnyíti. A függvények közötti műveleteket a határértékek is "öröklük". Ezek a szabályok már a sorozat határértékére is érvényesek.

2.2. Tétel. Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, ahol A, B és x_0 valós számok. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot A,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = A \cdot B$$

Ha $B \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

2.7. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt valamely x_0 hely közelében: $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = \lim_{x \rightarrow x_0} x \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \cdot x_0 = x_0^2$.

2.8. Példa. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + x) = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x = 3 \cdot 4 + 2 = 14$.

2.5. Féloldali határértékek

Az előző pontban a példák között láttuk, hogy az $f(x) = |x|/x$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen nincs határértéke. Azonban, ha $x_n > 0$, és $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$. Ha pedig $x_n < 0$, és $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$.

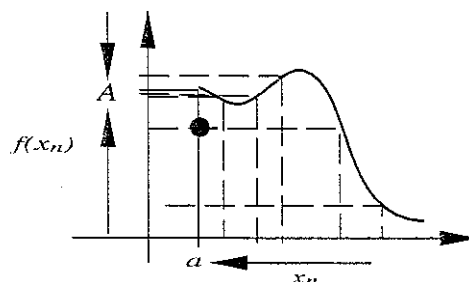
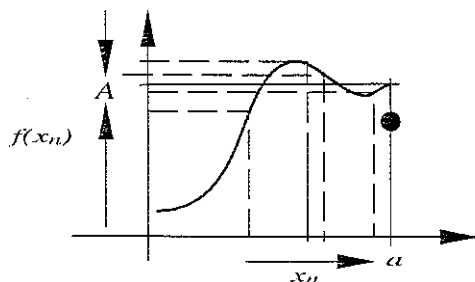
Általánosan is bevezethetjük az alábbi fogalmakat:

2.4. Definíció. Az $f(x)$ baloldali határértéke az x_0 helyen az A szám, ha a határérték definíciójában csak $x_n < x_0$, vagyis az $x < x_0$ értékeken keresztül közelítünk x_0 -hoz. Ennek jelölése

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x).$$

A határérték jobboldali, ha a határérték definíciójában $x_n > x_0$, vagyis csak az $x > x_0$ értékeken keresztül közelítünk x_0 -hoz. Jelölése

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$



2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.9. Példa. Az $f(x) = \sqrt{x}$ esetén $a = 0$ -ban csak a jobboldali határértéknek van értelme, és $\lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0$.

Gyakran hasznos az alábbi állítás.

2.3. Tétel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A,$$

akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, azaz a határérték létezik és A -val egyenlő.

2.4. Megjegyzés. A határértékek kiszámításának szabályai (2.2 tétel) a féloldali határértékekre is érvényesek.

2.6. Folytonos függvények

A gyakorlatban folyamatok folytonos illetve ugrásszerű változásának jelentése szemléletes. Infúzió esetén a gyógyszer "folytonosan" jut a szervezetbe. A szervezetben levő gyógyszer mennyisége rövid idő alatt keveset változik. Ugyanakkor a gyógyszer tablettánkénti adagolása a gyógyszer szint "ugrásszerű" változását eredményezi. A folytonos és ugrásszerű változás pontos fogalmát a határérték segítségével definiálhatjuk.

2.5. Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az x_0 véges pontban és egy környezetében. Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük az x_0 pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

azaz a határérték létezik, és egyenlő a függvényértékkel.

2.6. Definíció. Ha $f(x)$ értelmezve van valamely $[x_0, x_0 + h)$ intervallumon és

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

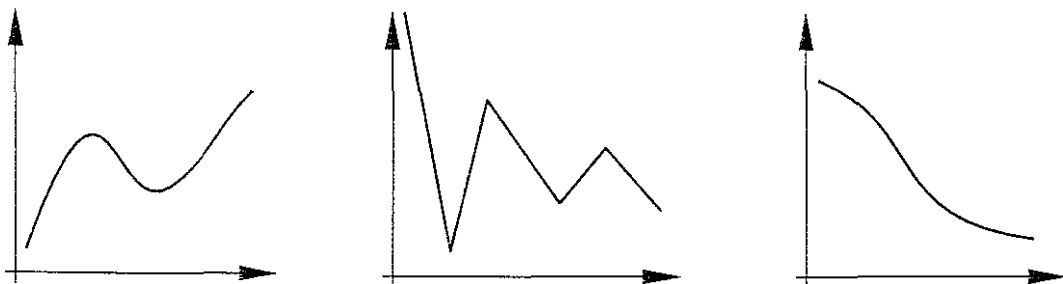
akkor a függvény jobbról folytonos x_0 -ban. Ha $f(x)$ értelmezve van valamely $(x_0 - h, x_0]$ intervallumon és

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

akkor a függvény balról folytonos x_0 -ban.

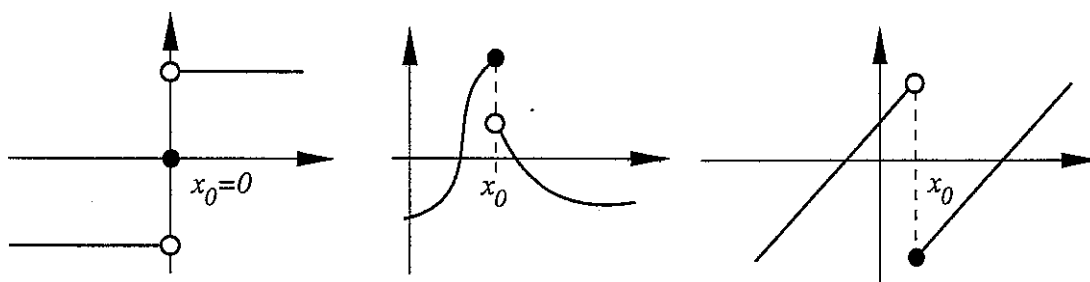
Ha a függvény egy $< a, b >$ (nyitott vagy zárt) intervallum minden pontjában folytonos (a végpontokban balról ill. jobbról), akkor azt az $< a, b >$ -n folytonosnak nevezzük.

A folytonosság fogalma nagyon szemléletes. Próbáljuk felrajzolni egy folytonos függvény grafikonját. Ha két hely közel van, akkor a függvényértékek távolsága is kicsiny. A grafikon megfelelő pontjai is közel vannak, ezért az egyik pontból a másikba nagyon rövid ceruzamozgással jutunk el. Mivel ugyanez a megfontolás a közbülső pontokra is igaz, azt kapjuk, hogy egy folytonos függvény grafikonját a ceruza felemelése nélkül meg tudjuk rajzolni, azaz a grafikon egy "folytonos" görbe. Az alábbi függvények folytonosak.



2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

A következő grafikonokhoz tartozó függvények az x_0 helyen nem folytonosak.



Mindhárom esetben a szakadási helyeken a féloldali határértékek léteznek. A második függvény balról, a harmadik pedig jobbról folytonos.

A leggyakrabban használt függvények, az elemi függvények kellemes tulajdonsága folytonosságuk. Pontosabban, igazak az alábbi tételek.

2.4. Tétel. *A hatványfüggvények, a trigonometrikus függvények, továbbá az exponenciális és logaritmus függvények folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában.*

A tétel a függvényekről kialakult szemléletes elképzelés alapján elfogadható. A bizonyítást az erősen technikai jelleg miatt nem végezzük el. Az olvasó gyakorlás gyanánt megteheti.

A határértékek definícióját alkalmazva és a műveleti szabályok segítségével belátható a

2.5. Tétel.

a) Legyen $f(x)$ és $g(x)$ folytonos x_0 -ban. Ekkor $c \cdot f(x)$; $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ is folytonos x_0 -ban. Ha továbbá $g(x_0) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$ folytonos x_0 -ban.

b) Ha $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, és folytonos x_0 -ban, akkor inverze $\bar{f}(x)$ folytonos $f(x_0)$ -ban, azaz folytonos függvény inverze is folytonos.

c) Ha $g(x)$ folytonos x_0 -ban és $f(x)$ folytonos $g(x_0)$ -ban, akkor $f(g(x))$ folytonos x_0 -ban, azaz a folytonos függvényekből képzett összetett függvény a folytonos.

2.10. Példa. A fenti tétel miatt például folytonos az $f(x) = 1/x$, ha $x \neq 0$, de nem folytonos az $x_0 = 0$ -ban, hiszen ott még értelmezve sincs.

2.11. Példa. Folytonosak továbbá a $\operatorname{tg} x$ ($x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$)) és a $\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) függvények.

2.12. Példa. Mivel 2^x és x^2 folytonosak, ezért $\lim_{x \rightarrow 0}(2^x + x^2) = 1$, és $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 2^x = 0$.

2.5. Megjegyzés. Folytonos függvények esetén a határértékek kiszámítása egyszerű behelyettesítési probléma. Az igazi gondot a szakadási helyeken vagy az értelmezési tartomány határán vett határértékek kiszámítása jelenti.

2.7. Végtelen határérték véges helyen

Tekintsük az $f(x) = 1/x^2$ függvényt az $x_0 = 0$ hely közelében. Tartson az $\{x_n\}$ sorozat ($x_n \neq 0$) nullához ha $n \rightarrow \infty$. A sorozat határértékének definíciójából azonnal adódik, hogy $1/x_n^2 \rightarrow \infty$ ha $n \rightarrow \infty$.

2.7. Definíció. Legyen $f(x)$ értelmezve az x_0 véges hely egy környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyet. Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen végtelen, ha a független változó tetszőleges x_0 -hoz tartó $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) sorozatára a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke végtelen. Formálisan jelölve:

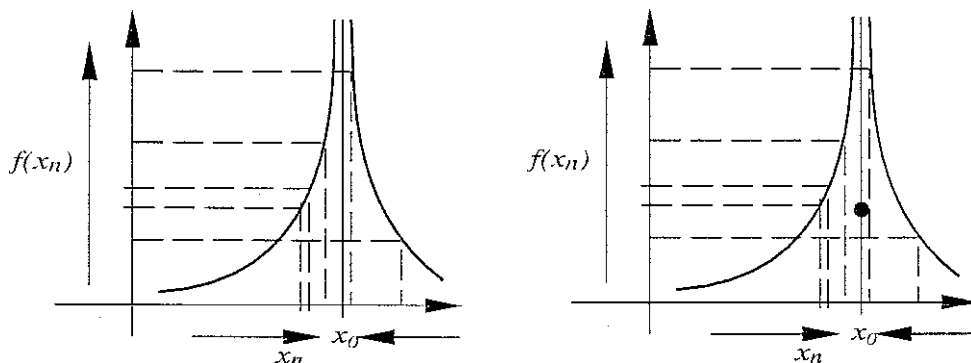
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ vagy } f(x) \rightarrow \infty \text{ ha } x \rightarrow x_0.$$

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

A 2.5. fejezethez hasonlóan definiálhatjuk a féloldali

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$$

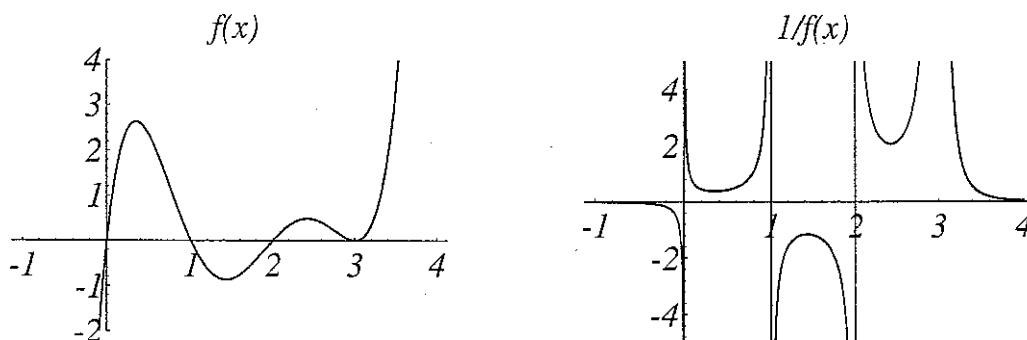
végtelen határértékeket. Továbbá, analóg módon definiálható a $-\infty$ határérték is.



A baloldali ábrán a függvény nincs értelmezve az x_0 pontban, míg a jobboldali ábrán a függvényértéket a fekete pont mutatja. Látható, hogy a határérték és a függvényérték egymástól függetlenek.

2.13. Példa. Tekintsük az $f(x) = 1/x$ függvényt és az $x_0 = 0$ helyet. Könnyen látható, hogy $\lim_{x \rightarrow 0+0} 1/x = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow 0-0} 1/x = -\infty$.

2.14. Példa. A jellemző esetek láthatók az alábbi ábrán, amely az $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)^2$ függvény és reciprokának a grafikonját tartalmazza:



A fenti példánál tapasztaltakat általánosan is megfogalmazhatjuk.

2.6. Tétel. Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Ha $f(x) > 0$ az " x_0 " hely környezetében, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Ha $f(x) < 0$ az " x_0 " hely környezetében, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Ha $f(x)$ nem szigorúan pozitív vagy negatív, előjelet vált az x_0 hely bármely környezetében, akkor nem létezik határérték.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.7. Tétel. Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$$

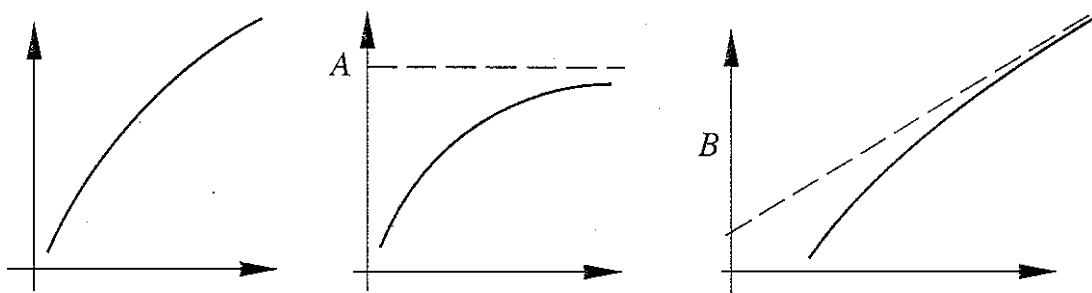
Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty.$$

A fenti szabályok nagymértékben megkönnyítik a végtelen határértékek kiszámítását. Van azonban néhány eset, amelyekre nem fogalmaztunk meg szabályokat. Ilyenek a ∞/∞ , $0/0$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ típusú határértékek. Ezek határozatlanok. Kiszámításukra nincs általános szabály. Vagy közvetlenül próbáljuk a határértéket meghatározni, vagy a speciális esetek egyenként vizsgálhatók (lásd a 2.9.3. pontot). Általánosabb esetekben használható az ún. L'Hospital szabály (4.3. fejezet).

2.8. Határértékek a végtelenben

A függvények végtelen közelében való viselkedésének tanulmányozása a végtelenben vett határérték fogalmához vezet. Az alábbi három görbe alakja hasonló, mégis lényeges különbség van közöttük a végtelen közelében.

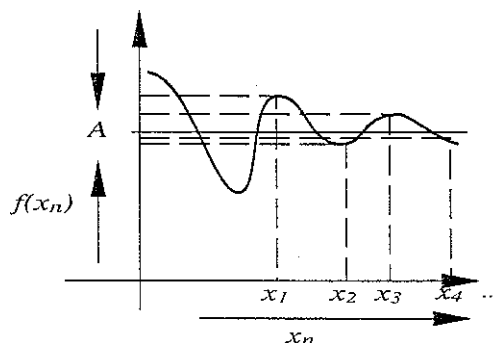


A különbséget a végtelenben vett határérték fogalma írja le.

2.8. Definíció. Legyen $f(x)$ értelmezve valamely (a, ∞) intervallumon. Az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben az A szám, ha a független változó tetszőleges, végtelenhez tartó $\{x_n\}$ sorozatára a megfelelő $\{f(x_n)\}$ sorozat határértéke A . A végtelenbeli határérték szimbólikus jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ vagy } f(x) \rightarrow A \text{ ha } x \rightarrow \infty.$$

A definíció hasonló a $-\infty$ -beli határérték esetén.



2.15. Példa. Legyen $f(x) = 1/x$, és legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 0$, ezért $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.16. Példa. Tekintsük a $\sin x$ függvényt. Legyen $x_n = n\pi$. Ekkor $\sin x_n = 0$. Ha $x_n = \pi/2 + 2n\pi$, akkor $\sin x_n = 1$. Ezért nem létezik a $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ határérték.

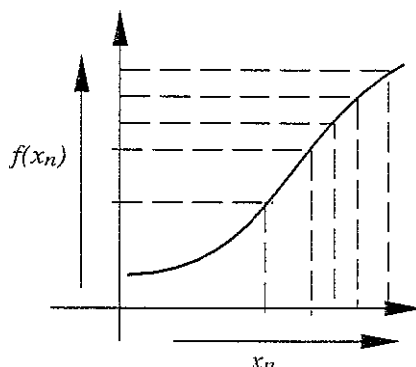
2.17. Példa. Legyen $f(x) = x^2$. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \infty$.

Az utolsó példa alapján bevezethetjük a végtelenben vett végtelen határérték fogalmát.

2.9. Definíció. Legyen $f(x)$ értelmezve valamely (a, ∞) intervallumon. Az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben végtelen, ha a független változó tetszőleges, végtelenhez tartó $\{x_n\}$ sorozatra a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke végtelen. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ vagy } f(x) \rightarrow \infty \text{ ha } x \rightarrow \infty.$$

A definíció analóg a $-\infty$ határérték esetén.



2.6. Megjegyzés. A véges helyen vett véges illetve végtelen határértékek kiszámítására vonatkozó szabályok végtelenben vett határértékekre is érvényesek.

2.7. Megjegyzés. A végtelenben (mínusz végtelenben) vett határértékek féloldaliak.

2.8. Megjegyzés. A határértékre vonatkozó szabályokat a sorozatokra külön nem fogalmaztuk meg, bár az általános határérték-fogalom bevezetésénél a sorozatokból indultunk ki. Az általános esetre megfogalmazott szabályok a sorozatok határértékére változatlan formában alkalmazhatók, mivel a sorozatok speciális $N \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, és a sorozatok határértéke a függvények végtelenbeli határértékének a speciális esetének is tekinthető.

2.18. Példa. Grafikus ismereteink alátámasztják az alábbi tulajdonságokat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha &= \infty \quad (\alpha > 0), & \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha &= 0 \quad (\alpha < 0), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= \infty \quad (a > 1), & \lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= 0 \quad (0 < a < 1), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x &= \infty \quad (a > 1), & \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x &= -\infty \quad (0 < a < 1). \end{aligned}$$

2.9. Függvények összehasonlítása

Mindennapos gyakorlati probléma két függvény viselkedésének az összehasonlítása valamely véges vagy végtelen hely közelében. Véges hely esetén "lokális", végtelen esetén pedig aszimptotikus összehasonlításról beszélünk.

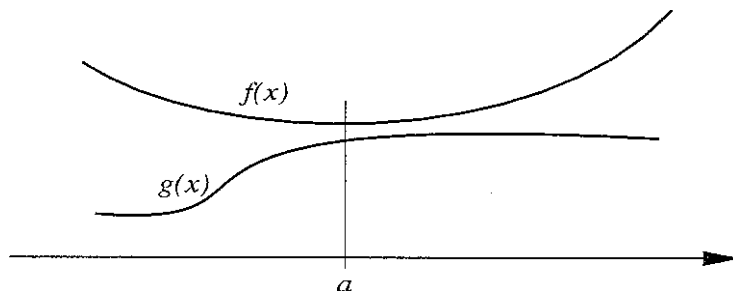
A legegyszerűbb módszer a határértékek összehasonlítása. Ha azonban mindkét határérték nulla vagy végtelen, akkor felmerül a kérdés, hogy melyikük közeledik gyorsabban a kérdéses határértékhez. Ekkor a függvények különbségének vagy hányadosának a határértékét vizsgáljuk. Néhány fontos esetet tárgyalunk az alábbiakban.

2.9.1. Határértékek összehasonlítása

2.8. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(x) \geq g(x)$ az " a " véges vagy végtelen hely közelében. Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, feltéve, hogy a határértékek léteznek.

Speciálisan, ha $f(x) \geq 0$ az " a " hely közelében, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG



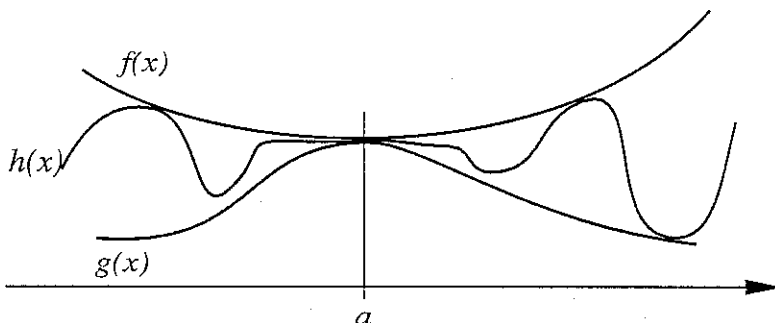
Megjegyezzük, hogy $f(x) > 0$ -ból ($x \neq a$) nem következik hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$. Ezt igazolja a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ példa is.

Sok esetben nem tudjuk magát a határértéket meghatározni. Ezért megpróbálunk becsléseket adni. A *rendőrelv* a határértéket a függvény kétoldali becslése segítségével határozza meg. A későbbiekben ezt a szabályt több helyen is alkalmazni fogjuk.

2.9. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ az " a " véges vagy végtelen hely egy környezétében. Ekkor, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, akkor létezik a $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ határérték és

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Ha az alsó és felső becslések határértékei nem egyenlőek, akkor a $h(x)$ függvény határértékének létezését nem garantálhatjuk.



A fenti állítások féloldali határértékekre is igazak.

2.19. Példa. A $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x / x$ határérték kiszámítására nem tudjuk alkalmazni a szorzatszabályt, mert a $\sin x$ határértéke nem létezik. De

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

ezért a rendőrelvet alkalmazva, a határérték nulla.

2.9.2. "Érintő a végtelenben": aszimptota

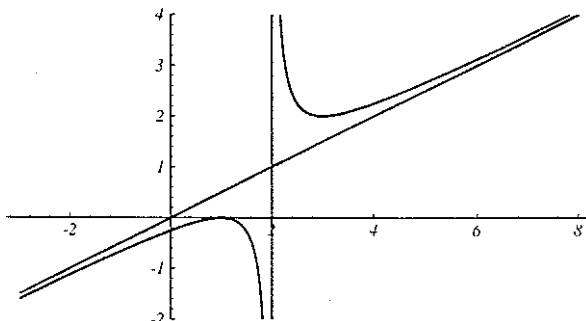
A 2.1.1. pontban láttuk az érintő kitüntetett szerepét. Most egy példán megmutatjuk, hogy a "végtelenbeli érintőnek" hasonló jelentősége van.

2.20. Példa. Tekintsük az $(x^2 - 2x + 1)/(x - 2)$ függvényt. Mivel

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2(x - 2)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2(x - 2)}$$

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

és $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-2) = 0$, a függvény és az $y = x/2$ egyenes távolsága nullához tart, ha $x \rightarrow \infty$. Az $f(x)$ függvényt a végtelen közelében az $y = x/2$ egyenessel közelíthetjük.



Általában az $y = mx + b$ egyenest az $f(x)$ függvény aszimptotájának nevezzük a végtelenben, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0.$$

Speciális eset, ha az aszimptota valamely $y = \text{konstans}$ egyenes. A konstans meghatározása nem más, mint a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ határérték kiszámítása.

2.9.3. A $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték vizsgálata, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékek

Most hasonlítsuk össze két tetszőleges függvény viselkedését. Kérdés, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények közül melyik növekedése illetve csökkenése gyorsabb, vagy változásuk összemérhető valamely "a" véges vagy végtelen hely közelében. A választ a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték vizsgálatával adjuk meg.

Legyen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \infty$ azt jelenti, hogy $f(x)$ "gyorsabban" tart végtelenbe, mint $g(x)$. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = \text{konstans} \neq 0$, akkor növekedésük hasonló. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 0$, akkor $f(x)$ "lassabban" tart végtelenbe, mint $g(x)$. Végül, ha nincs határérték, akkor a két folyamat nem hasonlítható össze.

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 0$ azt jelenti, hogy $f(x)$ "gyorsabban" tart nullához, mint $g(x)$. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = \text{konstans} \neq 0$ esetén növekedésük hasonló. Ha pedig $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \infty$, akkor $f(x)$ "lassabban" tart nullához, mint $g(x)$.

Nehézséget okoz, hogy a vizsgált hányados határértéke határozatlan ∞/∞ vagy $0/0$ alakú. Most csupán néhány fontos speciális eset vizsgálatát tudjuk elvégezni. Később a L'Hospital szabály általánosabb esetekben is alkalmazható lesz.

2.9.4. Racionális törtfüggvények határértéke véges helyen

Hasonlítsuk össze két polinom, $P(x)$ és $Q(x)$ viselkedését valamely véges x_0 hely közelében. Az eljárást példákon keresztül mutatjuk be.

Számítsuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

határértéket.

2.21. Példa. Számítsuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

határértéket. Mivel az $x_0 = 1$ helyen a függvény nincs értelmezve, ezért nem folytonos. A határérték behelyettesítéssel nem határozható meg. Mivel azonban

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1),$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

2.22. Példa. A

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1}$$

esetben a tört nem egyszerűsíthető,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}.$$

A második határérték nem létezik, csak a megfelelő bal- és jobboldali határértékek. Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x - 1} = \infty.$$

2.23. Példa. Végül tekintsük a legegyszerűbben kezelhető esetet:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + 2}.$$

Az $x/(x^2 + 2)$ függvény nevezője nem nulla az $x_0 = 1$ pontban, itt a függvény folytonos.

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + 2} = \frac{1}{3}.$$

Az általános esetekben az eljárás a fentiekkel analóg. A megfogalmazást gyakorlatként az olvasóra bízunk.

2.9.5. Racionális függvények határértéke a végtelenben

Most két polinom növekedését a végtelen közelében hasonlítjuk össze. Kezdjük néhány példával.

2.24. Példa.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2}.$$

2.25. Példa.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

2.26. Példa. Végül pedig

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Mindhárom esetben ugyanazt a módszert alkalmaztuk. A számlálót és nevezőt elosztottuk a legmagasabb hatványok kisebbikével, így a határérték már nem $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, alkalmazhatók a határértékekre vonatkozó tételeink. Ezzel a módszerrel kapjuk az alábbi tételt.

2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.10. Tétel. Legyen $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ n -ed fokú, $Q_m(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ m -ed fokú polinom. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \infty & (n > m) \\ \frac{a_n}{b_m} & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases}$$

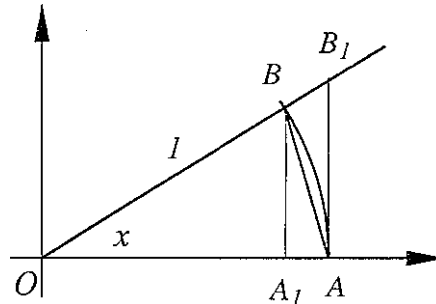
A $-\infty$ -ben vett határértékeknel figyelembe kell venni, hogy páratlan kitevő esetén $x^n < 0$, ha $x < 0$. A módszer a fentivel azonos.

2.9.6. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték

A határozatlan határértékek között igen fontos a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

határérték, amelynek jelentése, hogy a $\sin x$ függvény az origó közelében a $y = x$ függvényhez hasonlóan viselkedik. Bizonyítsuk be állításunkat! A határérték $0/0$ alakú, ezért behelyettesítéssel nem számítható ki. Tekintsük az egységsugarú kört és jelöljük be az x szöget az ábrán látható módon. A szöget radiánban mérjük, ezért a szöghöz tartozó ív hossza x .



Nyilván $\overline{A_1 B} = \sin x$, $\overline{AB_1} = \operatorname{tg} x$. Az ábráról leolvasható, hogy az OAB háromszög területe kisebb az OAB körcikk területénél, ami kisebb, mint az OAB_1 háromszög területe. Formálisan

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Innen

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

ahonnan

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

A $\cos x$ függvény folytonos a nullában, ezért $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. A fenti egyenlőtlenségben a határátmenetet végrehajtva az egyenlőtlenségek a rendőrelv (2.9 tétel) szerint megmaradnak, ezért

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Mivel az egyenlőtlenség bal- és jobboldala egyaránt egy, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. A differenciálszámítás elemei

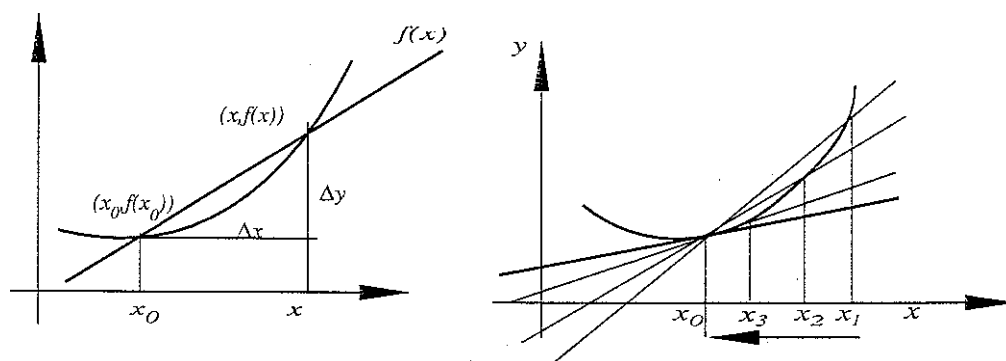
3.1. Bevezetés

A határértékek bevezetésénél a 2. fejezetben az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintőjét az ezen a ponton átmenő szelők határhelyzeteként definiáltuk. Az érintő $m(x_0)$ meredeksége pedig az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelők

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

meredekségének a határértéke ha $x \rightarrow x_0$:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Azt is láttuk, hogy ha $f(x)$ lineáris függvény, annak meredekségét kapjuk. Az $m(x_0)$ határérték tehát az egyenes meredeksége általánosításának tekinthető. A Δy az y változó megváltozása a Δx hosszúságú intervallumon. A $\Delta y / \Delta x$ hányados a függvény átlagos változási sebessége, változási rátája az adott szakaszon. A

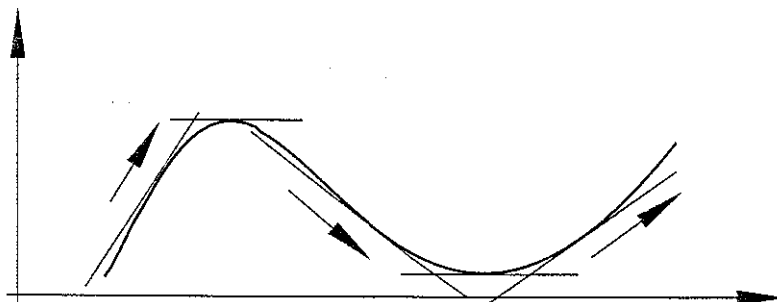
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

határérték a függvény pillanatnyi változási rátája, amely a függvény megváltozásának mértéke az adott pillanat közelében. Az egyenes esetén ez a mérték, a meredekség, konstans.

Ebben a fejezetben az *általánosított meredekség elméletének*, a *differenciálszámításnak* alapjaival foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy ez az elmélet alapvető eszköz a függvények viselkedésének tanulmányozásához.

A számos alkalmazás közül két igen fontosat vázolunk. A tárgyalás során ezeket matematikai pontossággal is megfogalmazzuk.

Tudjuk, hogy ha az egyenes meredeksége pozitív, akkor az egyenes növekvő, ha a meredekség negatív, akkor csökkenő. Hasonlóan tapasztalunk általános esetben is az érintő meredekségét és a függvény monotonitását figyelve. Ezt illusztrálандó, tekintsük az alábbi ábrát:



Végül, felhívjuk a figyelmet az érintő kitüntetett tulajdonságára. Az $f(x)$ függvény gra-

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

fikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő minden más, ezen a ponton átmenő egyenesnél pontosabban közelíti a függvényt az x_0 hely közelében. Ezért a függvény megváltozását az érintő megváltozásával becsülhetjük az x_0 környezetében:

$$\Delta y \approx m(x_0)\Delta x, \quad f(x) - f(x_0) \approx m(x_0)(x - x_0),$$

Ennek számos alkalmazásával fogunk találkozni az elméleti és a gyakorlati (pl. fizikai problémák) során.

3.2. A differenciálhányados definíciója

3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely (a, b) intervallumon. Legyen $x_0 \in (a, b)$.

Ha a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

véges határérték létezik, akkor ezt a határértéket a függvény x_0 -beli **differenciálhányadosának (deriváltjának)** nevezzük, és $f'(x_0)$ -al jelöljük. Ha a differenciálhányados az (a, b) intervallum minden pontjában létezik, akkor $f(x)$ az (a, b) intervallumon deriválható és deriváltfüggvénye $f'(x)$.

Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kifejezést, minthogy a differenciák hányadosa, **differenciahányadosnak** hívjuk. A differenciahányadosra használatos a korábbiakban is alkalmazott

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

jelölés. A differenciálhányadost pedig gyakran

$$\frac{dy}{dx}$$

jelöli, ami igen jól utal a differencia- és differenciálhányados közötti szoros rokonságra és a formális okoskodásoknál is hasznos lesz.

A derivált határértékként való definíciójából azonnal adódik, hogy ha létezik, akkor egyértelmű. Ugyanakkor nem biztos, hogy a derivált létezik.

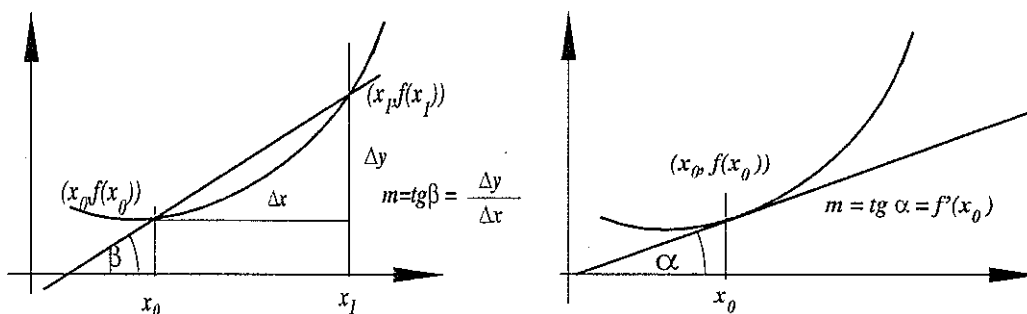
A geometriai értelmezés a bevezetés alapján nyilvánvaló. Foglaljuk össze eddigi geometriai megfontolásainkat. A differenciahányados bármely két $x_0, x_1 \in D_f$ pontra képezhető, és az $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő iránytangense. Az ezen két ponton átmenő szelő egyenlete

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható, "sima" x_0 -ban, ha létezik a grafikonjának érintője az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Az $f'(x_0)$ derivált értéke az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő meredeksége. Az érintő egyenlete pedig

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI



3.1. Példa. Tekintsük az $f(x) = ax + b$ egyenest.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a \frac{x - x_0}{x - x_0} = a.$$

Formálisan is visszakaptuk az ismert meredekség fogalmát. Az érintő az egyenes maga.

3.2. Példa. Legyen $f(x) = x^2$. Ekkor $f'(x) = 2x$.

Rögzítsük az x_0 helyet.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

A függvény meredeksége nem konstans.

3.3. Példa. Legyen $f(x) = x^3$ és $x_0 = 1, x_1 = 2$. Határozzuk meg az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő valamint az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő érintő egyenletét.

A szelő kérdése gyorsan elintézhető, $f(1) = 1, f(2) = 8$, tehát az $(1, 1)$ és $(2, 8)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét keressük. A meredekség $m = (8 - 1)/(2 - 1) = 7$, az egyenlet pedig

$$y - 1 = 7(x - 1).$$

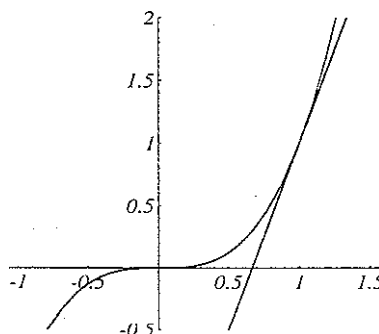
Az érintőhöz szükségünk van a deriváltra. Mivel a derivált kiszámítására vonatkozó szabályokkal később foglalkozunk, ezért használjuk a definíciót. Legyen x_0 adott.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

A derivált értéke az $x_0 = 1$ pontban $f'(1) = 3$. Az érintő egyenlete ezek után

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1);$$

$$y - 1 = 3(x - 1).$$



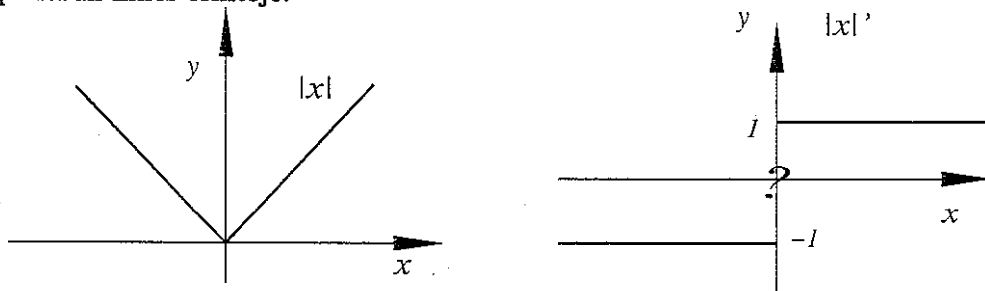
3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

3.4. Példa. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{-x^2}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $\{0\}$ halmaz. Nincs értelme a deriválnak, hiszen már a differenciáhányadosok keresése is értelmetlen.

3.5. Példa. Tekintsük most az

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

függvényt az $x_0 = 0$ pontban. A függvény grafikonja az $x_0 = 0$ -ban megtörik. A görbének a $(0,0)$ pontban nincs érintője.



Nézzük meg, mi történik a differenciáhányadossal. Ha $x < 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = -1;$$

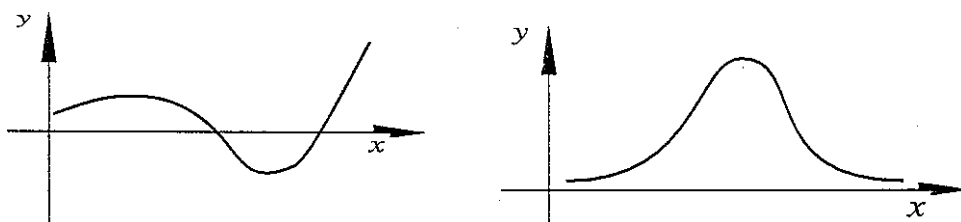
ha viszont $x > 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

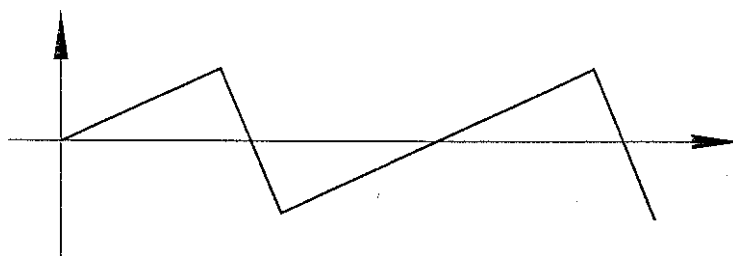
Következésképpen, a differenciáhányadosnak nincs határértéke, midőn $x \rightarrow 0$, nem létezik differenciáhányadosa az $x_0 = 0$ pontban. Léteznek ugyanakkor az $x < 0$, illetve az $x > 0$ megszorítással a jobb és baloldali határértékek.

Az $|x|$ függvénynél tapasztaltakat általánosíthatjuk. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ha a grafikon nem "sima", az x_0 pontban megtörik vagy szakadása van, akkor abban a pontban nem differenciálható.

3.6. Példa. Sima görbék például az alábbiak:

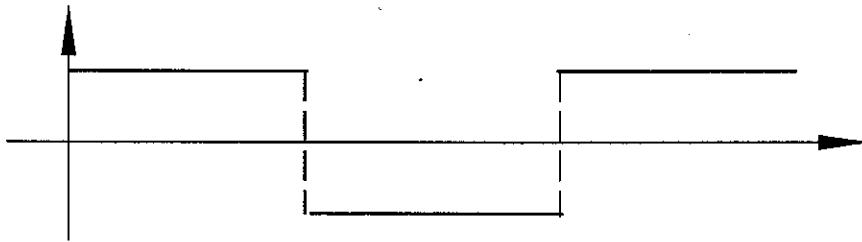


Töréspontjai vannak az alábbi fűrészfogas függvénynek, amely az elektronikában gyakori:



3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

Szakadásai vannak a következő grafikonnak (lásd a folytonosságról szóló 2.6. fejezetet), amely a számítástechnikában alapvető:



3.3. A deriválható függvény folytonossága

Láttuk, hogy valamely folytonos függvény nem feltétlenül deriválható. Ugyanakkor a deriválhatóságból következik a függvény folytonossága.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely (a, b) intervallumon, és $f(x)$ differenciálható az $x_0 \in (a, b)$ pontban. Ekkor $f(x)$ folytonos is x_0 -ban.*

Az állítást nagyon könnyen igazolhatjuk. Mivel $f(x)$ deriválható és

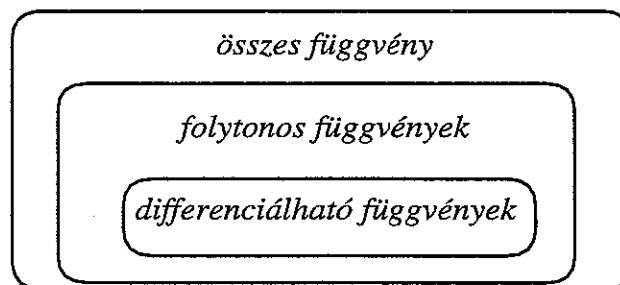
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

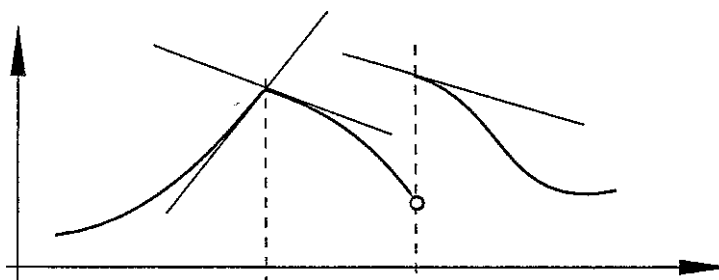
azaz az $f(x)$ függvény folytonos x_0 -ban.

Tételünkéből kapjuk a függvények különböző osztályainak kapcsolatát.



3.4. Féloldali deriváltak

Az $|x|$ esetén a féloldali határértékek létezése azt jelenti, hogy léteznek a bal- és jobboldali érintők. Különös jelentőségük van a töréspontok (esetleg szakadások!) esetén.



3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

3.2. Definíció. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely $(a, x_0]$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ baloldali deriváltjának nevezzük x_0 -ban a

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

értéket.

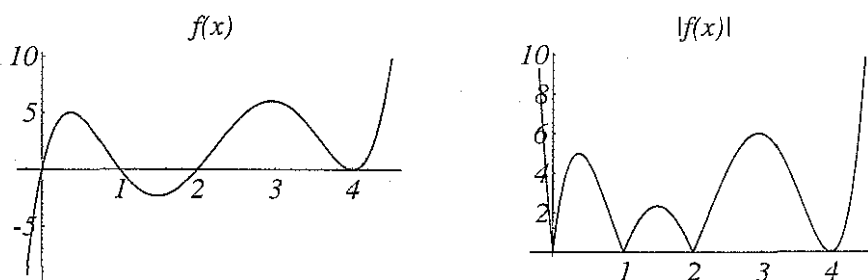
3.3. Definíció. Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely $[x_0, b)$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ jobboldali deriváltjának nevezzük x_0 -ban a

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

értéket.

Nilvánvaló, hogy ha $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0)$ léteznek és $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, akkor $f'(x)$ is létezik, és a féloldali deriváltak közös értékével egyezik meg.

3.7. Példa. Legyen $f(x)$ differenciálható. Az $|f(x)|$ függvénynek csak a féloldali deriváltjai léteznek az $f(x)$ zéróhelyeiben, ha ott $f'(x) \neq 0$.

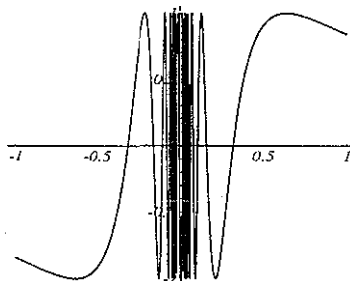


Felmerülhet a kérdés, hogy vajon minden függvényre legalább a féloldali deriváltak léteznek-e. Szerencsére a bennünket körülvevő világ, és ezért a függvények világa is sokkal gazdagabb annál, hogy erre a válasz igenlő legyen.

3.8. Példa. Az

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

függvény nem folytonos és nem differenciálható se jobbról, se balról az $x=0$ helyen.



3.5. Differenciálási szabályok

Már sok mindent tudunk a differenciálhányadosról, de az alkalmazások során az első lépésnél megakadnánk. Ugyanis igen nehéz lenne minden függvény deriváltját a definíció alapján közvetlenül kiszámolni. Ebben a pontban a legfontosabb differenciálási szabályokat tekintjük át.

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

3.5.1. A hatványfüggvények differenciálhányadosa

1. $f(x) = \text{konstans} \Rightarrow f'(x) = 0.$

Az állítás nyilvánvaló, ui.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv 0.$$

2. $(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$

A bizonyítást elvégeztük a 3.2. pont példái között.

3. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Ekkor

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \\ &= (x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \dots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}, \end{aligned}$$

mivel az első sor jobboldalán összesen n tag szerepel és mindegyikre igaz, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^i x_0^{n-1-i} = x_0^{n-1}.$$

Később be fogjuk bizonyítani, hogy ez az állítás igaz tetszőleges hatványkitevő (negatív, tört és irracionális) esetén is. Pontosabban:

4. Ha $\alpha \neq 0$, akkor

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

3.9. Példa.

$$\begin{aligned} (x^{10})' &= 10x^9, \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}, \\ (\sqrt{x})' &= (x^{1/2})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (x^\pi)' &= \pi \cdot x^{\pi-1}. \end{aligned}$$

3.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ deriváltja

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények deriválhatók, és

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Először tekintsük a $\sin x$ függvényt, legyen x_0 adott. Képezzük a differenciahányadost:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \cos \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\cos \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}.$$

Az első egyenlőségénél felhasználtuk az

$$\sin \alpha - \sin \beta \equiv 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

azonosságot. Mivel $\cos x$ folytonos,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0.$$

A szorzat második tényezőjére pedig kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Itt az $u = (x - x_0)/2$ helyettesítést és a $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)/2 = 0$ összefüggést használtuk. A $\lim_{u \rightarrow 0} (\sin u)/u = 1$ állítást a 2.9.6. pontban bebizonyítottuk.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0,$$

ami az állítást bizonyítja. A $\sin x$ és $\cos x$ grafikonját tekintve ez nem meglepő. Írjuk fel a $\sin x$ érintőjének egyenletét az $x_0 = 0$ -ban:

$$y - \sin 0 = \cos 0(x - 0),$$

$$y = x.$$

A $\cos x$ deriváltját hasonlóan kaphatjuk meg, de most a

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

azonosságot használjuk:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\sin \frac{x + x_0}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin x_0.$$

3.5.3. Összeg, szorzat és hányados deriváltja

Függvény konstansszorosának deriváltja

Ha $f(x)$ deriválható, akkor $cf(x)$ is deriválható és

$$(cf(x))' = c \cdot f'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0).$$

Összeg deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x) + g(x)$ is deriválható és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3.10. Példa. $(x^3 + x^2 + x)' = 3x^2 + 2x + 1.$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

Szorzat deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x) \cdot g(x)$ is deriválható és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Itt $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, mert $g(x)$ differenciálhatósága miatt $g(x)$ folytonos is (3.1 tétel). A másik két határérték egyenlő rendre $f'(x_0)$ -al illetve $g'(x_0)$ -al f és g differenciálhatóságának feltételezése miatt.

3.11. Példa. $(x^4 \sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$.

Az $f(x)$ reciprokának deriváltja

Legyen $f(x)$ deriválható, és $f(x) \neq 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x) \cdot f(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{1}{f^2(x_0)} (-f'(x_0)) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Az első határérték az $f(x)$ differenciálhatóságából adódó folytonossága miatt igaz.

3.12. Példa. Bizonyítsuk be a hatvány deriválási szabályát negatív kitevő esetén:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

A hányados deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválhatóak és $g(x) \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ugyanis, a szorzat és reciprok szabályok szerint

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

3.13. Példa. A $\operatorname{tg} x$ deriváltja $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \dots$)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3.14. Példa. A $\operatorname{ctg} x$ deriváltja $x \neq k\pi$ ($k = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \dots$)

Hasonlóan kaphatjuk a $\operatorname{ctg} x$ függvény deriváltját.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

3.5.4. Az összetett függvény deriváltja

Tekintsük az $f(g(x))$ összetett függvényt. Tegyük fel, hogy a g differenciálható az x helyen, és f differenciálható a $g(x)$ helyen. Ekkor

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ezt a szabályt láncszabálynak is nevezzük, mert az összetett függvényt láncszerűen haladva a külső függvénytől a belsőig differenciáljuk, minden függvényt a saját argumentuma szerint.

Az igazoláshoz írjuk fel a differenciahányadost:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ahol $y = g(x)$ és $y_0 = g(x_0)$. Az első tényező az $f(y)$ differenciahányadosa y szerint, a második a $g(x)$ differenciahányadosa x -szerint. Mivel $g(x)$ differenciálható, ezért egyrészt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

másrészt $g(x)$ folytonos is x_0 -ban. Ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - g(x_0)) = \lim_{y \rightarrow y_0} (y - y_0) = 0.$$

Az első tényezőben kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$$

az f differenciálhatósága miatt. Összegzésképpen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

3.15. Példa. A $\sin x^2$ függvény esetén a belső függvény $y = x^2$, a külső pedig $\sin y$, ezért

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x.$$

3.16. Példa. A végrehajtás sorrendjét megcserélve kapjuk a $\sin^2 x$ függvényt. Ekkor $y = \sin x$ a belső és y^2 a külső függvény. Ennek deriváltja

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

ahol $2y = 2 \sin x$ a külső függvény (y^2) deriváltja.

3.17. Példa. $((x^3 + 1)^{10})' = 10(x^3 + 1)^9(3x^2)$.

3.18. Példa. Tekintsük a $(\sqrt{x})^2$ függvényt. Mechanikusan számolva kapjuk, hogy

$$((\sqrt{x})^2)' = 2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'.$$

Mivel x^2 és $\sqrt{x}$ egymás inverzei, $(\sqrt{x})^2 = x$. Ezért $((\sqrt{x})^2)' \equiv 1$. A két eredményt összevetve, kapjuk $2\sqrt{x}(\sqrt{x})' = 1$, azaz

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Megkaptuk a hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt az $1/2$ kitevő esetén. A fenti gondolatmenetet általánosíthatjuk tetszőleges inverz függvényre.

3.5.5. Az inverz függvény deriváltja

A $\sqrt{x}$ deriválásának módszerét általánosan is alkalmazhatjuk az inverz deriváltjának kiszámítására.

Legyen az f függvény differenciálható az $y = \bar{f}(x)$ helyen és $f'(\bar{f}(x)) \neq 0$. Ekkor az $\bar{f}(x)$ inverz függvény is differenciálható az x helyen és

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Csak az utóbbi állítást igazoljuk. Minthogy f és $\bar{f}$ egymás inverzei, ezért

$$f(\bar{f}(x)) = x.$$

Ezt az egyenlőséget deriválva kapjuk, hogy

$$f'(\bar{f}(x)) \cdot \bar{f}'(x) = 1.$$

Innen

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Példaként már tekintettük a $\sqrt{x}$ esetét. Egy igen fontos alkalmazás lesz az exponenciális függvény deriváltjának kiszámítása.

3.5.6. A logaritmus függvény deriváltja, az $\ln x$ definíciója

Legyen $a > 0, a \neq 1$, és tekintsük az $\log_a x$ függvényt. Legyen $x_0 > 0$ és $x = x_0 + \frac{1}{n}$. Írjuk fel a differenciahányadost az x_0 és $x_0 + \frac{1}{n}$ helyekkel.

$$\frac{\log_a(x_0 + \frac{1}{n}) - \log_a x_0}{\frac{1}{n}} = n \log_a \left(1 + \frac{1}{n \cdot x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \log_a \left(1 + \frac{1}{n \cdot x_0}\right)^{n \cdot x_0}.$$

A határértékekről szóló 2.3. részben szemléletes jelentését adtuk az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n \cdot b}\right)^{n \cdot b} \quad (b > 0)$$

sorozatoknak.

Ott megállapítottuk, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n \cdot b}\right)^{n \cdot b} = e$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

határérték. Az "e" szám irracionális, és egy közelítő értéke $e \approx 2.7182$.

Ezt a tényt és az $\log_a x$ folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{x_0 n}\right)^{x_0 n} = \log_a e.$$

Vezessük be az "e" alapú logaritmust. Ezt a $\log_e x$ helyett $\ln x$ vagy $\log x$ jelöli, és természetes logaritmusnak nevezzük. A logaritmus azonosságai miatt

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Beláttuk tehát, hogy

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

speciálisan

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Ez a hiányzó láncszem a hatványok deriváltjai között, ugyanis az $1/x$ függvény nem deriváltja egyetlen hatványfüggvénynek sem.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a differenciahányadosban $x_0 + \frac{1}{n}$ helyett tetszőleges $x = x_0 + h$ helyet kellene vennünk. Ebben az esetben is ugyanazt az eredményt kapnánk.

3.5.7. Az exponenciális függvény deriváltja, e^x , exponenciális növekedés

Az a^x exponenciális függvény minden $a > 0$ esetén értelmezve van, most legyen $a = e$. Tekintsük az e^x függvényt. e^x az $\ln x$ inverze, ezért

$$1 = \left(\ln e^x\right)' = \frac{1}{e^x} (e^x)'$$

ahonnan

$$(e^x)' = e^x.$$

Hasonlóan

$$\left(\log_a a^x\right)' = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} (a^x)' = 1$$

miatt

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Nagyon érdekes összefüggéseket kaptunk. Az *exponenciális függvények változásának mértéke egyenesen arányos magával a függvény értékével*. Később látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság általános a populációk növekedésénél, nukleáris robbanásnál, lebomlásnál és sok más alkalmazásban.

Általában az olyan függvények, amelyek változási sebessége egyenesen arányos a függvény értékével, exponenciálisan növekednek ha $k > 0$, illetve csökkennek ha $k < 0$ (8. fejezet).

3.6. Lineáris közelítések

Most pontosan megfogalmazzuk az érintőnek és a szelőknek az $f(x)$ -től való távolságára a bevezetőkben (3.1. pont) vázolt észrevételt. Megmutatjuk, hogy az $f(x)$ függvényérték és az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő x -beli értékének különbsége sokkal gyorsabban tart nullához, mint minden más $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő egyenes esetén, ha $x \rightarrow x_0$. Ezért az x_0 hely közelében az $f(x)$ függvényt az érintőjével közelíthetjük:

$$\Delta y \approx f'(x_0) \Delta x, \quad (f(x) - f(x_0)) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

Tekintsünk egy tetszőleges, az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő m meredekségű egyenesre az $f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$ különbséget. Mivel $f(x)$ folytonos, ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))) = 0.$$

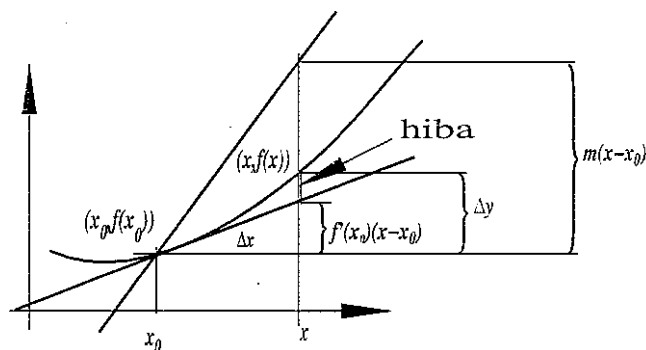
A fenti kifejezésből emeljük ki $(x - x_0)$ -t:

$$f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) (x - x_0).$$

Ha $x \rightarrow x_0$, akkor az első tényező határértéke $f'(x_0) - m$. Ezért ha $m \neq f'(x_0)$, akkor a távolság csökkenése az $x - x_0$ csökkenésével arányos. Ha azonban $m = f'(x_0)$, akkor a távolság

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0),$$

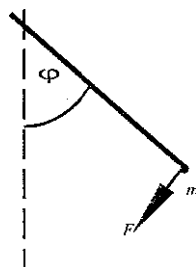
ahol mindkét tényező nullához tart, ha $x \rightarrow x_0$. Következésképpen, az érintő esetén a távolság csökkenése sokkal gyorsabb, mint más egyenesek esetén.



Megjegyezzük, hogy jó becslés adható a függvény és az érintő $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ eltérésére. Ezzel a Taylor polinomokról szóló 4.5. fejezetben foglalkozunk.

A tétel gyakorlati alkalmazásokban igen hasznos. A valós folyamatok általában bonyolult nemlineáris (nem $y = ax + b$ alakú) függvényekkel írhatók le. Ezek matematikai vizsgálata gyakran igen nehéz. Nagyon kiterjedt matematikai elmélete van ezen függvények érintővel való helyettesítésével történő vizsgálatoknak, az úgynevezett lineáris közelítéseknek.

3.19. Példa. Tekintsük a matematikai ingát.



Azt tanultuk, hogy a lengő tömegpontra ható érintő-irányú erő kis kitérés esetén egyenesen arányos a φ kitérés szöggel, az erő a kitéréssel ellentétes irányú. Valójában az erő $\sin \varphi$ -vel arányos, de ennek vizsgálata igen bonyolult. A $\sin x$ függvény érintője az $x_0 = 0$ pontban az $y = x$ egyenes. Tételünk felhasználásával kapjuk, hogy ha x kicsi, akkor $\sin x \approx x$.

Ezért mondhatjuk a matematikai inga esetén, hogy *kis kitérések* esetén a visszatérítő erő közel egyenesen arányos a kitérés szögével.

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEI

3.20. Példa. Adjunk lineáris közelítést a $\sin 46^\circ$ értékére. A legközelebbi szög, amelynek szinuszt ismerjük a $45^\circ = \pi/4$. A $\sin x$ érintője a $\pi/4$ helyen

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(x - \pi/4)}{\sqrt{2}}$$

Ebbe behelyettesítve az $x = 46^\circ \approx 0.802851 \text{ rad}$ értéket, kapjuk az $y_0 = 0.719448$ lineáris közelítést. Ellenőrizhető, hogy $\sin 46^\circ - y_0 \approx -0.000108$.

3.7. Magasabb rendű deriváltak

Általában, ha egy $f(x)$ deriválható függvény deriváltja $f'(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f'(x))' = f''(x)$ -t a függvény második deriváltjának nevezzük. A függvényt ekkor kétszer deriválhatónak mondjuk.

Ha a második derivált is deriválható, akkor azt mondjuk, hogy a függvény háromszor deriválható, és a harmadik deriváltja $f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))'$.

Továbbá, ha egy $f(x)$ függvény deriváltjai léteznek az $1, 2, 3, \dots, n$ esetben, azaz az $f^{(n-1)}(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f^{(n-1)}(x))'$ -t a függvény n -ik deriváltjának nevezzük. Ennek jelölése $f^{(n)}(x)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény n -szer deriválható.

Ha a függvény akárhányadik deriváltja is létezik, akkor azt mondjuk, hogy a függvény végtelenszer deriválható. Ilyen például az e^x . A magasabb rendű deriváltak hasznát a későbbiekben látni fogjuk.

3.21. Példa. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$. Továbbá, $(x^3)^{(4)} = 0$. Általában minden $P_n(x)$ polinom végtelen sokszor deriválható, de az $(n+1)$ -ik derivált már azonosan nulla.

3.22. Példa. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$ és $(\sin x)^{(4)} = \sin x$.

3.8. A derivált fizikai jelentése, sebesség, gyorsulás

Tekintsük az $s(t)$ útfüggvény által leírt mozgást. Valamely $t_0 < t_1$ időpillanatok között a test által megtett út $s(t_1) - s(t_0)$. A test átlagsebessége a t_0 és t_1 időpillanatok között

$$v(t_0, t_1) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A test mozgásának pillanatnyi változásának jellemzésére bevezetjük a t_0 -beli pillanatnyi sebesség fogalmát, amit a

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} v(t_0, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határértékkel definiálunk. A pillanatnyi sebesség $v(t)$ függvénye az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa.

Ha például $s(t) = gt^2/2$ szabadeséssel van dolgunk, akkor $v(t) = gt$, ami a kísérleti eredményekkel megegyezik.

Hasonló eredményt kapunk a $v(t)$ sebesség változásának mértékét, a gyorsulást vizsgálva is. A t_0, t_1 pillanatok közötti átlagos gyorsulás

$$a(t_0, t_1) = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás pedig

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás tehát a sebességfüggvény differenciálhányadosa, az útfüggvény második deriváltja. Példánkban $a(t) = (gt)' = g$. Ha a mozgó test m tömege nem változik, akkor Newton második törvénye

$$m \cdot s''(t) = F(t)$$

alakban írható, ahol F a ható erő.

4. A differenciálszámítás alkalmazásai

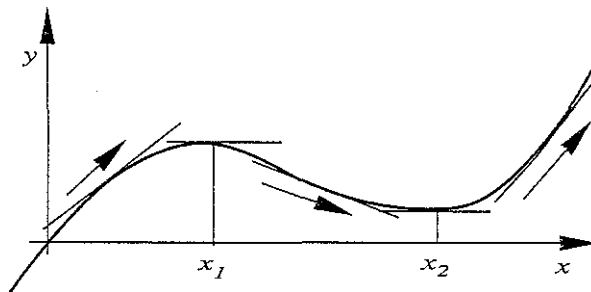
Az előző fejezetben a differenciálhányadost, mint a függvény változásának mértékét, a függvény meredekségét definiáltuk. Ebben a fejezetben az $f(x)$ és deriváltja közti mélyebb összefüggéseket vizsgálunk. Először a deriváltat az $f(x)$ szélsőértékeinek keresésére és a növekedés vizsgálatára használjuk, majd a függvény konvexitását jellemezzük a derivált segítségével. Ezután határozatlan ∞/∞ és $0/0$ alakú határértékekkel foglalkozunk. Végül pedig pontosítjuk a 3.6. fejezetben vázolt lineáris közelítés technikáját.

4.1. Monotonitás és szélsőértékek

A vegyész a kémiai reakció vizsgálatánál keresi azt a hőmérsékletet, amelynél a reakció a leggyorsabb. A gyógyszerész a gyógyszer hatásának vizsgálatánál azt az adagolást keresi, amely mellett a gyógyhatás-mellékhatás viszony maximális, illetve a költségek minimálisak. A "cost-benefit" (ráfordítás-nyereség) viszony minimalizálása mindennapi életünk része. Ezek a problémák matematikailag függvények szélsőértékeinek keresésére vezethetők vissza.

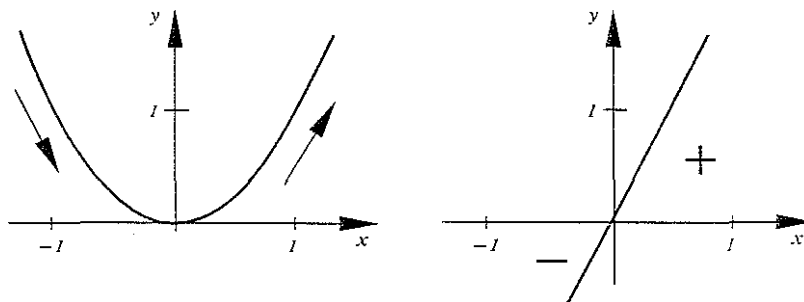
Az orvost influenzajárvány esetén érdekli, hogy növekszik vagy csökken a betegek száma, a járvány terjed vagy visszaszorulóban van. A bankár igencsak fontosnak tartja, hogy bevételei növekednek vagy csökkennek. Ezek a problémák függvények monotonitási tulajdonságainak vizsgálatát igénylik.

A derivált fogalma alapvető eszköz a fenti gyakorlati problémák vizsgálatában. Az $y = mx + b$ egyenes $m > 0$ esetén monoton növekvő, $m < 0$ esetén csökkenő, $m = 0$ esetén pedig konstans. Az $f(x)$ differenciálható függvényre hasonlóan állíthatunk. Tekintsük az alábbi függvényt és érintőjét néhány pontban:



Vegyük észre, hogy az x_1 pont előtt és x_2 után a függvény növekvő, és az érintők meredeksége pozitív. Az x_1 és x_2 pontok között a függvény csökken, az érintők meredeksége negatív. Az x_1 pontban maximum, az x_2 pontban minimum van, az érintők itt párhuzamosak az x -tengellyel.

A grafikus példa mellett tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt. Ennek deriváltja $f'(x) = 2x$.



A grafikonról leolvasható, hogy x^2 csökkenő, ha $x < 0$. Itt $f'(x) = 2x < 0$. Ugyanakkor x^2 növekvő, ha $x > 0$ ($f'(x) = 2x > 0$). Az $x = 0$ -ban minimum van ($f'(x) = 0$). Ezek után már egyáltalán nem lesznek meglepőek tételeink. Észrevételeink általános érvényűek lesznek.

4.1.1. Monotonitás

Ismételjük át a monotonitás definícióit.

Az $< a, b >$ intervallumon a $f(x)$ függvény nemcsökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in < a, b >$ esetén $x_1 < x_2$ egyenlőtlenségből $f(x_1) \leq f(x_2)$ következik.

Az $f(x)$ függvény nemnövekvő, ha bármely $x_1 < x_2 (\in < a, b >)$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Az $< a, b >$ intervallumon a $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha bármely $x_1, x_2 \in < a, b >$ esetén $x_1 < x_2$ egyenlőtlenségből $f(x_1) < f(x_2)$ következik.

Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1 < x_2 (\in < a, b >)$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Most fogalmazzuk meg pontosan a monotonitás és a derivált kapcsolatát.

4.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(x)$ differenciálható az (a, b) véges vagy végtelen intervallumon.

1. Az $f(x)$ függvény nemcsökkenő az (a, b) intervallumon akkor és csakis akkor, ha $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon.

2. Az $f(x)$ függvény nemnövekvő az (a, b) intervallumon akkor és csakis akkor, ha $f'(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon.

3. Az $f(x)$ függvény konstans az (a, b) intervallumon akkor és csakis akkor, ha $f'(x) = 0$ az (a, b) intervallum minden pontjában.

Ha az intervallum zárt, akkor a végpontokban a féloldali deriváltakat tekintjük.

4.1. Megjegyzés. A derivált akkor is lehet nulla, ha a függvény szigorúan monoton (lásd az $f(x) = x^3$ függvényt).

Ugyanakkor, az alábbi bizonyítást követve belátható, hogy ha $f'(x) > 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ szigorúan monoton növekvő. Ha $f'(x) < 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítsuk be a tételt.

Először megmutatjuk, hogy ha $f(x)$ nemcsökkenő (a, b) -n, akkor $f'(x) \geq 0$ az (a, b) minden pontjában. Legyen $x_0 \in (a, b)$. Mivel $f(x)$ nemcsökkenő, ezért $f(x) \leq f(x_0)$ ha $x < x_0$ és $f(x) \geq f(x_0)$ ha $x > x_0$. A differenciahányados nemnegatív az x_0 pontban:

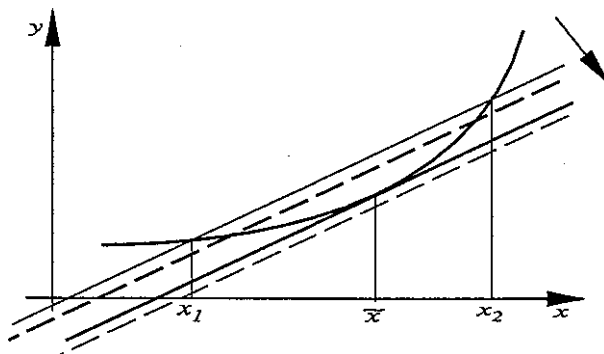
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

mert, ha $x < x_0$, akkor a számláló nempozitív, a nevező negatív. Ha pedig $x > x_0$, akkor a számláló nemnegatív, a nevező pozitív. Ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Ugyanis, ha a határérték negatív lenne, akkor a hozzá közeledő differenciahányados is negatívvá válna, ami ellentmondana a növekedés feltételének.

Fordítva, most belátjuk, hogy ha $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ nemcsökkenő. Legyen $x_1 < x_2$ az (a, b) intervallum tetszőleges két pontja. Szeretnénk belátni, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Tegyük a következőt! Húzzunk szelőt az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon keresztül. Vegyük a szelővel párhuzamos egyeneseket. Ezek között találunk legalább egyet, amelyik érinti a függvény grafikonját, azaz van olyan $\tilde{x}$ pont x_1 és x_2 között, hogy az $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ ponthoz húzott érintő párhuzamos az adott szelővel (A pontos bizonyítást mellőzzük).



Ekkor viszont a szelő és a $\tilde{x}$ -beli érintő meredeksége megegyezik,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\tilde{x}) \geq 0$$

a feltétel miatt. Innen azonnal adódik, hogy $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ha $f'(\tilde{x}) > 0$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$.

A nemnövény esetben a bizonyítás mindkét részében az egyenlőtlenségek iránya megfordul.

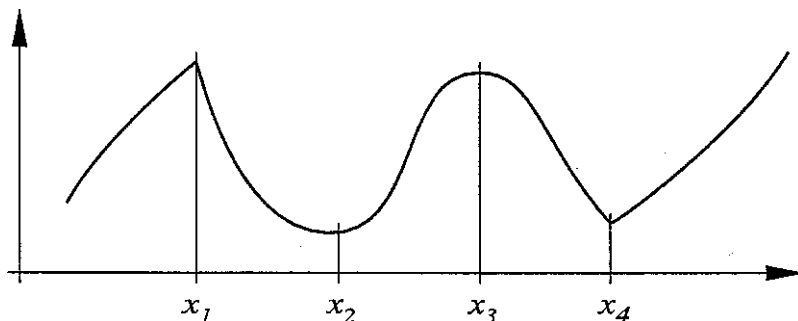
A konstans függvényre vonatkozóan, ha $f(x)$ konstans, deriváltja nyilvánvalóan nulla. Fordítva, ha a derivált azonosan nulla, akkor a függvény konstans. Ugyanis, ha nem így lenne, akkor léteznének $x_1 < x_2$ helyek, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekkor az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon át húzott szelő meredeksége nem nulla. A fenti grafikus eljárást követve találnánk olyan helyet, amelyben a függvény deriváltja nem lenne nulla.

4.1.2. Lokális szélsőértékek

Legyen az $f(x)$ függvény folytonos az (a, b) intervallumon.

Az $x_0 \in (a, b)$ pontban az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van, ha van olyan x_0 -t körülvevő $(c, d) \subset (a, b)$ ($x_0 \in (c, d)$), hogy bármely $x \in (c, d)$ pontra $f(x) \geq f(x_0)$. Az x_0 -t lokális minimumhelynek nevezzük.

Az $x_0 \in (a, b)$ pontban az $f(x)$ függvénynek lokális maximuma van, ha van olyan x_0 -t körülvevő $(c, d) \subset (a, b)$ ($x_0 \in (c, d)$), hogy bármely $x \in (c, d)$ pontra $f(x) \leq f(x_0)$. Az x_0 -t lokális maximumhelynek nevezzük. A jellemző szituációkat mutatja az alábbi ábra.



Látható, hogy lényeges különbség van az x_1 és x_3 maximumhelyek illetve az x_2 és x_4 minimumhelyek között. Az x_1 és x_4 pontokban a függvény nem differenciálható. Mindegyik esetben igaz azonban az alábbi megállapítás.

4.2. Tétel. Ha az $f(x)$ valamely x_0 pontban növekedésből csökkenésbe vált, ott lokális maximuma, ha csökkenésből növekedésbe megy át, akkor lokális minimuma van.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Ugyanis az első esetben, ha $x < x_0$, akkor a növekedés miatt $f(x) \leq f(x_0)$. Ha $x > x_0$, akkor pedig a csökkenés miatt $f(x) \leq f(x_0)$. Hasonlóan érvelhetünk a második esetben is.

Vegyük észre, hogy megfontolásaink során csak a folytonosság fogalmát használtuk. Ha a függvény deriválható is, a monotonitás és a derivált közti összefüggéseket felhasználva, jól használható kritériumot kapunk lokális szélsőérték megkeresésére.

4.1.3. Differenciálható függvény szélsőértéke

Legyen most az $f(x)$ differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, és legyen $x_0 \in (a, b)$. Tegyük fel, hogy x_0 -ban $f(x)$ -nek lokális maximuma van. Ha x elég közel van x_0 -hoz és,

$$\text{ha } x < x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ ha pedig } x > x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

mivel $f(x_0)$ lokális maximum, és ezért $f(x) \leq f(x_0)$. Innen adódik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Mivel $f(x)$ differenciálható x_0 -ban, ez csak úgy lehet, ha $f'(x_0) = 0$.

Beláttuk az alábbi nagyon fontos tételt:

4.3. Tétel. *Ha $f(x)$ differenciálható x_0 -ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor*

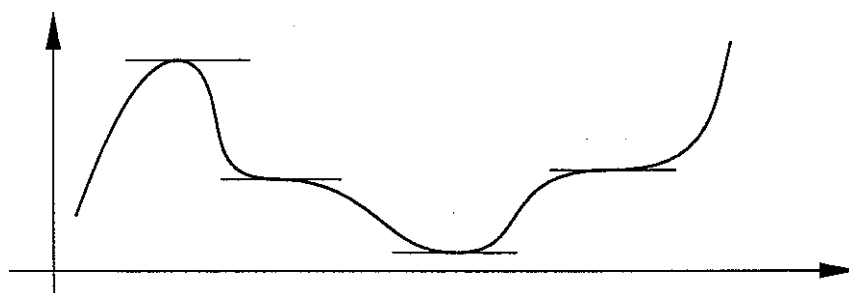
$$f'(x_0) = 0.$$

4.2. Megjegyzés. *A megfordítás nem igaz. $f'(x_0) = 0$ nem vonja maga után, hogy x_0 szélsőérték hely. Ugyanis például az x^3 deriváltja $3x^2$, amely 0 az $x = 0$ pontban, ugyanakkor az x^3 függvénynek a 0-ban nincs se minimuma, se maximuma.*

Az mindenesetre igaz, hogy a szélsőérték helyeket az

$$f'(x) = 0$$

egyenlet megoldásai között kell keresnünk. Ezen egyenlet megoldásait kritikus helyeknek nevezzük. A lehetséges eseteket láthatjuk az alábbi ábrán.



4.3. Megjegyzés. A kritikus helyek közti intervallumokon $f'(x) \neq 0$, ezért ott $f(x)$ monoton.

A 4.2 tételt használva kapjuk az alábbi eredményt.

4.4. Tétel. *Legyen $f(x)$ differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, és legyen $x_0 \in (a, b)$ kritikus hely.*

1. *Ha $f'(x) > 0$ $x < x_0$ esetén, és $f'(x) < 0$ $x > x_0$ esetén, akkor $f(x)$ -nek x_0 -ban lokális maximuma van.*

2. *Ha $f'(x) < 0$ $x < x_0$ esetén, és $f'(x) > 0$ $x > x_0$ esetén, akkor $f(x)$ -nek x_0 -ban lokális minimuma van.*

3. *Ha $f'(x)$ nem vált előjelet, akkor x_0 nem lehet szélsőérték hely.*

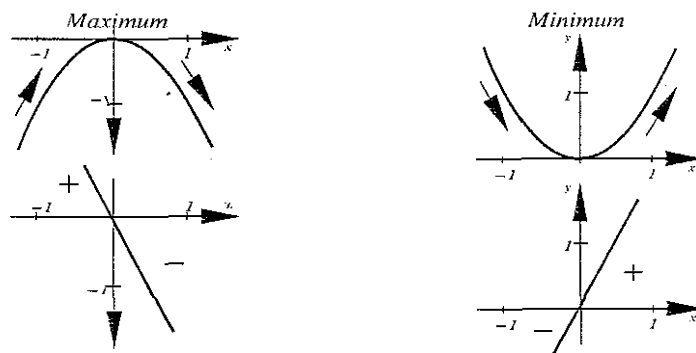
Eljárás a szélsőértékek és monoton szakaszok meghatározására

A fentiek alapján könnyű eljárást adnunk a szélsőértékek és monoton szakaszok megkereséséhez.

1. lépés. Meghatározzuk az $f(x)$ függvény kritikus helyeit az (a, b) intervallumon. Ha $f'(x) = 0$ teljesült egy egész intervallumon, akkor vegyük ennek a végpontjait. Kiszámítjuk a függvényértékeket ezekben a pontokban.

2. lépés. A kritikus helyek az (a, b) szakaszt részintervallumokra osztják. Megállapítjuk a derivált előjelét ezen részintervallumokon grafikusan, vagy mindegyik intervallum egy tetszőleges pontjában (tesztpontban) a derivált képletébe való behelyettesítéssel. Ezen részintervallumokon a derivált előjele nem változik. A függvény monotonitását a 4.1 tétel szerint állapítjuk meg.

3. lépés. Ha a derivált előjele vált valamely kritikus helyen, ott lokális szélsőérték van (4.4 tétel).



Annak az esetnek a megfontolását, amikor $f'(x) = 0$ teljesül egy egész intervallumon, az olvasóra bízunk.

Következtetéseink áttekinthetőbbek, ha adatainkat és következtetéseinket táblázatos formában kezeljük. A táblázat használatát a példák során mutatjuk be.

4.1. Példa. Legyen $f(x) = e^{-x^2}$. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Az $f'(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x_0 = 0$. Könnyen látható, hogy ha $x < 0$, akkor $f'(x) > 0$ ($f(x)$ növekvő) és ha $x > 0$, akkor $f'(x) < 0$ ($f(x)$ csökkenő).

Készítsünk táblázatot:

	$x < 0$	0	$x > 0$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX=1	$\searrow$
$f'(x)$	+	0	-

A nyert tulajdonságok fontosak, de nem elegendőek ahhoz, hogy a függvény grafikonját felrajzoljuk. Ehhez a következő fejezetek vizsgálatai szükségesek.

4.2. Példa. Klasszikus feladat adott hosszúságú kerítéssel a legnagyobb területű téglalap alakú kertet bekeríteni. Az egyszerűség kedvéért, legyen a kerület 2. A téglalap oldalai nyilván x és $1 - x$. Ekkor

$$T = x(1 - x).$$

A területnek szélsőértéke van, ha

$$T'(x) = 1 - 2x = 0,$$

mivel a derivált előjele is vált. Innen $x = 1/2$, vagyis a kert négyzet alakú. Az eredményt elemi úton az $y = x(1 - x)$ parabola közvetlen felrajzolásával is megkaphatjuk.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

4.3. Példa. Legyen $f(x) = x^3/3 - 2x^2 - 5x + 4$. Keressük a szélsőértékhelyeket és vizsgáljuk meg a monotonitást. A derivált

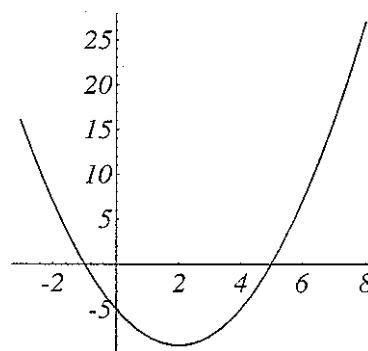
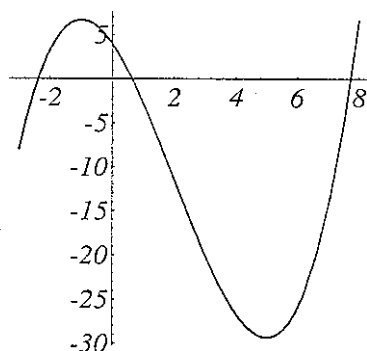
$$f'(x) = x^2 - 4x - 5.$$

Az $x^2 - 4x - 5 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

A kritikus helyek közt a derivált előjele a parabola ismeretében azonnal meghatározható. Észrevételeinket foglaljuk táblázatba!

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$5 < x$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX = $\frac{20}{3}$	$\searrow$	min = $-\frac{88}{3}$	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Tehát $x_1 = -1$ -ben maximum, míg $x_2 = 5$ -ben minimum van. A függvény és a derivált grafikonja:



4.1.4. Szélsőérték töréspontban

Az előző pont megállapításai nem alkalmazhatók, ha az $f(x)$ függvény az x_0 pontban nem deriválható. De ha x_0 előtt és után igen, akkor a függvény monotonitását x_0 előtt és után a derivált előjelével ellenőrizhetjük, és következtethetünk arra, hogy x_0 szélsőértékhely-e. Bővítsük ki a kritikus helyek körét a töréspontokkal. Ekkor a 4.2 tétel továbbra is érvényes marad. A szélsőértékek és monoton szakaszok megtalálására adott eljárás változatlanul alkalmazható. Az eljárást példán keresztül mutatjuk be.

4.4. Példa. Legyen $f(x) = |x^2 - 1|$. Keressük a szélsőértékhelyeket és vizsgáljuk meg a monotonitást. Az abszolút érték definíciója miatt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ -(x^2 - 1), & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

A függvény a $-1, 1$ helyeken nem differenciálható. Egyéb helyeken a deriváltja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \\ 2x, & 1 < x. \end{cases}$$

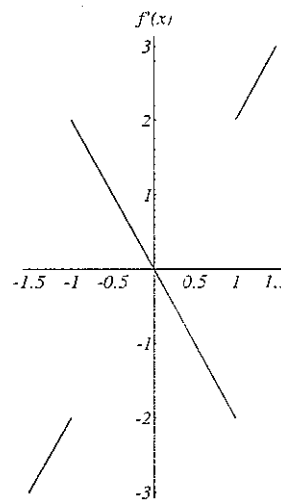
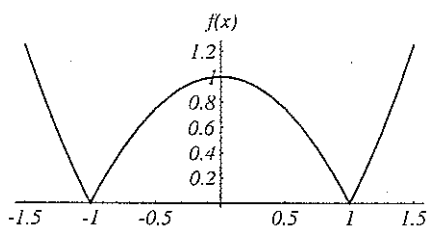
Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása az $x = 0$ pont. A kritikus helyek nagyság szerint rendezve: $-1, 0, 1$.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

A kritikus helyek közt a derivált előjele a parabola ismeretében azonnal meghatározható. Készítsünk táblázatot!

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$0 < x < 1$
$f(x)$	$\searrow$	$\min = 0$	$\nearrow$	$\text{MAX} = 1$	$\searrow$	$\min = 0$	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	$\otimes$	$+$	0	$-$	$\otimes$	$+$

A függvény és a derivált grafikonja:



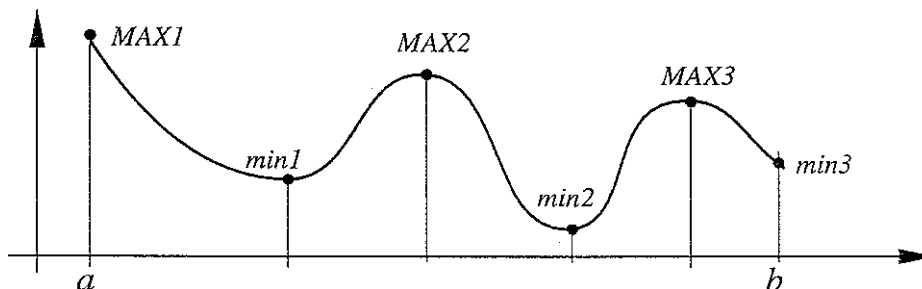
4.1.5. Globális szélsőértékek

Legyen $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

Az $x_0 \in [a, b]$ pontban az $f(x)$ függvénynek globális minimuma van, ha minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $x_0 \in [a, b]$ pontban az $f(x)$ függvénynek globális maximuma van, ha minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

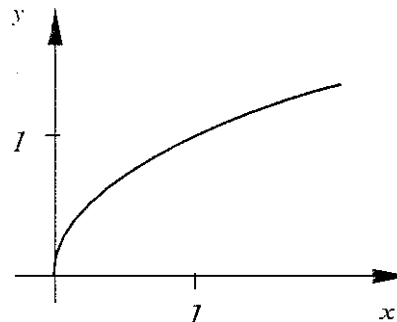
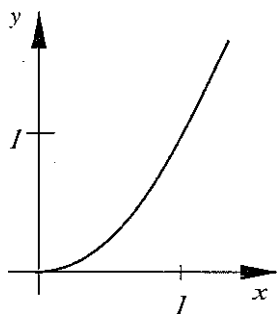
Könnyű belátni, hogy az $f(x)$ függvény globális maximuma az $[a, b]$ intervallumon a lokális maximumok és az $f(a), f(b)$ értékek maximuma. Hasonlóan, az $f(x)$ függvény globális minimuma az $[a, b]$ intervallumon a lokális minimumok és az $f(a), f(b)$ értékek minimuma.



Az ábrán MAX1 globális maximum és min2 globális minimum. Az előző pont példájában vizsgált $f(x)$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ helyeken lokális minimuma van, amelynek értéke 0. Ezek a függvény globális minimumhelyei az egész $\mathbb{R}$ halmazon. Az $x = 0$ -ban lokális maximum van, ennek értéke 1. De például a $[-1.5, 1.5]$ intervallumon a függvény globális maximuma 1.25 és azt az intervallum végpontjaiban veszi fel.

4.2. A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

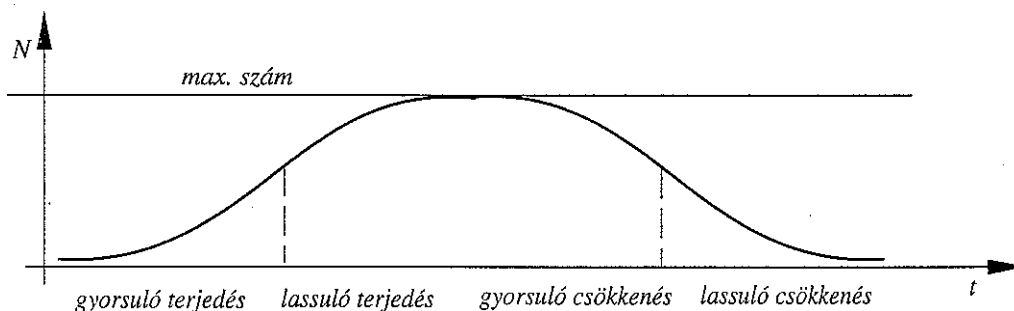
Tekintsük most az x^2 és a $\sqrt{x}$ függvényeket, ha $x > 0$. Bár mindkettő monoton növekvő, növekedésük jellege teljesen különbözik.



Ugyanis, az x^2 esetén az x növekedésével a függvény meredeksége egyre nagyobb, a függvény egyre gyorsabban nő, a derivált $(x^2)' = 2x$ monoton növekszik. Éppen fordított a helyzet a $\sqrt{x}$ esetén. Itt a növekedés mértéke egyre kisebb, a függvény egyre lassabban nő. A derivált $(1/(2\sqrt{x}))$ csökken az x növekedésével.

Tekintsünk egy gyakorlati példát, egy járvány lefolyásának folyamatát. A kezdeti szakaszban könnyen találni nem fertőzött egyedet, ezért a terjedés egyre gyorsabb (agresszív növekedés!). Egy idő után, már (majdnem mindenki fertőzött), a fertőzöttek számának növekedése lelassul, és ez nem haladhatja meg az összes egyed számát. A járvány megszűnése hasonlóképpen játszódik le. A betegek száma először lassan de egyre gyorsabban csökken. Végül a csökkenés újra lelassul.

Egy ilyen folyamatot láthatunk az alábbi ábrán.



A járvány mértékének és terjedésének az elemzéséhez igen fontos a gyorsuló növekedésű és lassuló növekedésű szakaszok megkülönböztetése.

Írjuk le a tekintett tulajdonságokat matematikai szabatossággal.

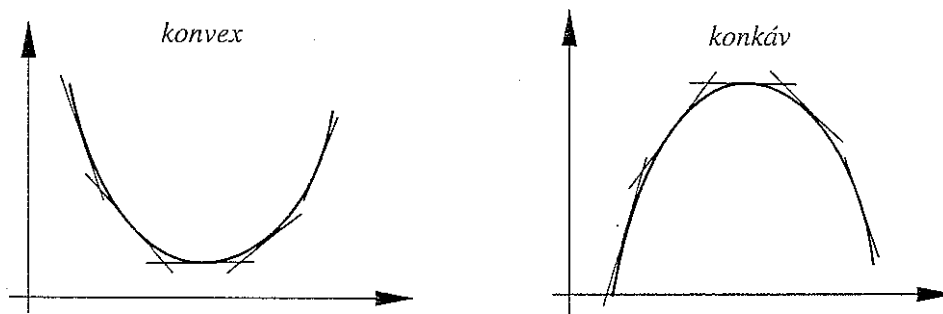
4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény konvex az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, ha differenciáhányadosa, $f'(x)$, monoton nemcsökkenő.

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ konkáv, ha a deriváltja monoton nemnövekvő $\langle a, b \rangle$ -n.

Bebizonyítható, hogy a definíció ekvivalens az alábbi grafikus definícióval.

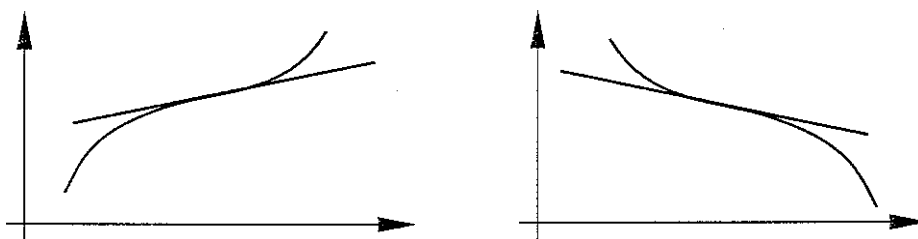
4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény konvex az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, ha grafikonjának bármely pontban húzott érintője a grafikon alatt helyezkedik el. A differenciálható $f(x)$ függvény konkáv az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, ha grafikonjának bármely pontban húzott érintője a grafikon felett helyezkedik el.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI



Fontos megjegyeznünk, hogy a monotonitás és konvexitás egymástól független tulajdonságok. A járványterjedést mutató ábrán konvex-növő, konkáv-növő, konkáv-csökkenő és konvex-csökkenő szakaszok követik egymást. Ezen szakaszok találkozási pontjainak fontos szerepe van.

4.3. Definíció. Azokat a helyeket, ahol $f(x)$ konvexből konkávba vált, vagy fordítva, inflexiós pontoknak nevezzük.



A konvexitás második definíciója alapján az inflexiós pontban húzott érintő ebben a pontban metszi a függvény grafikonját.

A konvexitás problémáját a derivált monotonitásának vizsgálatával oldhatjuk meg. Szükségünk lesz a derivált deriváltjára, azaz $f(x)$ második deriváltjára $(f'(x))' = f''(x)$ (Lásd a 3.7. fejezetet!).

A monotonitásra vonatkozó tételek felhasználásával kapjuk az alábbi állításokat.

4.5. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n. Ha az intervallum zárt, a végpontokban a féloldali deriváltakat vesszük.

Ha $f(x)$ konvex, akkor $f''(x) \geq 0$ $\langle a, b \rangle$ -n. Ha $f''(x) \geq 0$, akkor $f(x)$ konvex $\langle a, b \rangle$ -n.

Ha $f(x)$ konkáv, akkor $f''(x) \leq 0$ $\langle a, b \rangle$ -n. Ha $f''(x) \leq 0$, akkor $f(x)$ konkáv $\langle a, b \rangle$ -n.

Ha x_0 az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(x_0) = 0$. Ha $f''(x_0) = 0$, és $f''(x)$ előjelet vált x_0 -ban, akkor ott inflexiós pont van.

Eljárás konvex és konkáv szakaszok meghatározására

1. lépés. Meghatározzuk az $f''(x) = 0$ egyenlet gyökeit.

2. lépés. A gyökök az $\langle a, b \rangle$ szakaszt részintervallumokra osztják. Ha $f''(x) = 0$ teljesül valamely intervallumon, akkor vegyük osztópontnak a végpontokat. Megállapítjuk $f''(x)$ előjelét ezen részintervallumokon.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

3. lépés. Ha $f''(x)$ előjelet vált valamely pontban, ott inflexiós pont van. Azokon az intervallumokon, ahol $f''(x)$ pozitív, a függvény konvex, ahol negatív, ott konkáv. Ha $f''(x) = 0$ teljesül valamely intervallumon, ott a függvény egyenes.

Komplex problémák esetén összekapcsoljuk a monotonitás és a konvexitás vizsgálatát. Ekkor az $[a, b]$ intervallum osztópontjai a kritikus helyek és az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai lesznek.

4.5. Példa. Alkalmazzuk eredményeinket az $f(x) = e^{-x^2}$ függvényre. Egészítsük ki az előző pontban kapott eredményeket:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bővítsük ki a táblázatot az $f''(x)$ sorával.

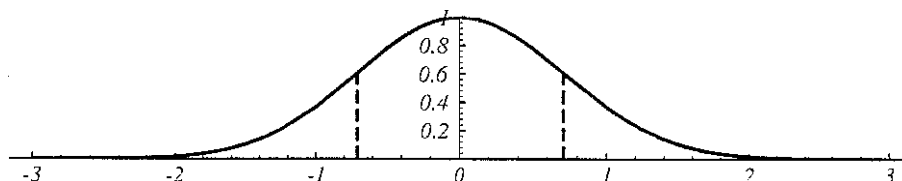
	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x$
$f(x)$	$\nearrow$	Infl.p.	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	Infl.p.	$\searrow$
$f'(x)$	$\nearrow, +$	MAX	$\searrow, +$	0	$\searrow, -$	min	$\nearrow, -$
$f''(x)$	+	0	-		-	0	+

Tételeinket felhasználva, ha $x < -\sqrt{2}/2$, akkor $f'(x)$ pozitív és növekvő, ezért $f(x)$ konvex növekvő. Ha $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$, $f'(x)$ csökkenő ezért $f(x)$ konkáv. Ezen belül, ha $x < 0$, akkor konkáv növekvő, $x > 0$ esetén konkáv csökkenő. Ha $x > \sqrt{2}/2$, akkor $f(x)$ konvex csökkenő.

Általában is érdemes megjegyezni az alábbi kis táblázatot:

$f(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$		
$f''(x) < 0$		

A rácsoiban $f(x)$ képe található. Táblázatunk alapján már könnyű felrajzolni az e^{-x^2} függvény grafikonját. Csupán azt kell észrevennünk, hogy $e^{-x^2} > 0$ és $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$. A $\pm\sqrt{2}/2$ pontok a függvény inflexiós pontjai. Ezért a grafikon az alábbi:



4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

4.3. Függvények menetének összehasonlítása, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ alakú határértékek, L'Hospital szabály

A 2.9.3. fejezetben foglalkoztunk függvények menetének összehasonlításával és határozatlan határértékek kiszámításával. Ott még csak a racionális törtfüggvényekkel tudtunk foglalkozni, és meghatároztuk a $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ határértéket. A bonyolultabb esetek vizsgálatához még nem állt rendelkezésünkre a szükséges matematikai apparátus. A L'Hospital szabály segít az általánosabb esetekben.

4.6. Tétel. (L'Hospital szabály) Legyenek f és g differenciálhatók x_0 -ban és környezetében (egy intervallumon, amely belsejében tartalmazza x_0 -t).

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ (}\infty\text{)}; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (}\infty\text{)},$$

és $g'(x) \neq 0$ az x_0 közelében. Ekkor, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ létezik,}$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

is létezik, és a két határérték megegyezik.

Az állítás akkor is igaz, ha $x_0 = \pm\infty$ vagy féloldali határértékek esetén. Ekkor a függvények differenciálhatóságának valamely megfelelő féloldali környezetben kell teljesülni.

4.6. Példa. A L'Hospital szabállyal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Általában igaz, hogy ha $P(x)$ tetszőleges polinom, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{P(x)} &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} &= 0, \end{aligned}$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^n \ln x = 0.$$

Ezen állítások igazolását az olvasóra bizzuk.

4.7. Példa. A 2.9.1. pontban a rendőrelvet alkalmazva megmutattuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Erre az esetre azonban nem alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt, mert a számláló határértéke $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nem is létezik.

4.4. Függvények grafikonjának rajzolása, a függvényvizsgálat lépései

Függvényvizsgálat alatt mindazon módszerek, eljárások alkalmazását értjük, amelyekkel a függvény viselkedése, tulajdonságai meghatározhatók, grafikonja felrajzolható. Az eddigiekben számos módszert ismertettünk a különböző tulajdonságok vizsgálatára. Most ezeket összefoglaljuk és egy példán bemutatjuk.

1. lépés. Az értelmezési tartomány meghatározása.
2. lépés. Zéróhelyek keresése, a függvény előjelének meghatározása.
3. lépés. Speciális tulajdonságok, pl. szimmetrikusság, periodicitás, tengelymetszetek keresése. Ezek sokat segítenek a grafikon pontosabb megrajolásában és a függvény által leírt folyamat megismerésében.
4. lépés. Folytonosság, szakadási helyek, határértékek az értelmezési tartomány határainál, differenciálhatóság, töréspontok vizsgálata.
5. lépés. Monotonitás, szélsőérték helyek: $f'(x)$ meghatározása, $f'(x) = 0$ megoldása, $f'(x)$ előjelének vizsgálata, a 4.1.3. pontban leírt eljárás szerint.
6. lépés. Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = 0$ megoldása, $f''(x)$ előjele, konvex, konkáv szakaszok keresése a 4.2. pontban leírt eljárás szerint.
7. lépés. Összefoglaló táblázat készítése a 4.1. és 4.2. pontok példái során megismert formában. A táblázat sorai legyenek: f, f', f'' . Az oszlopok pedig nagyság szerint rendezve minden spec. hely: szakadások, töréspontok, az $f'(x) = 0, f''(x) = 0$ egyenletek megoldásai és a köztük levő intervallumok.
8. lépés. A táblázat alapján a függvény grafikonjának felvázolása.

4.8. Példa. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}e^{x^2}$ függvényt. Vizsgáljuk meg a függvény viselkedését a fenti séma szerint.

1. lépés. Az értelmezési tartomány a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz.
2. lépés. Az $f(x)$ függvénynek nincs zéróhelye. A számláló mindig pozitív. A nevező negatív, ha $x < 0$ és pozitív, ha $x > 0$.
3. lépés. A számláló páros, a nevező páratlan, így $f(x)$ páratlan (szimmetrikus az origóra nézve).
4. lépés. $f(x)$ folytonos az értelmezési tartományán (lásd a 2.6. pont megállapításait). A határértékek pedig:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = 1 \cdot \infty = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(e^{x^2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2xe^{x^2} = \pm\infty\end{aligned}$$

Az utolsó határértéknél a L'Hospital szabályt használtuk.

5. lépés. Az első derivált:

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$$

és az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$. A derivált negatív a két zéróhely között és pozitív kívül, mivel a deriváltban csak a $2x^2 - 1$ tényező vált előjelet.

6. lépés. A második derivált egyszerűsítések után:

$$f''(x) = \frac{2e^{x^2}(2x^4 - x^2 + 1)}{x^3}.$$

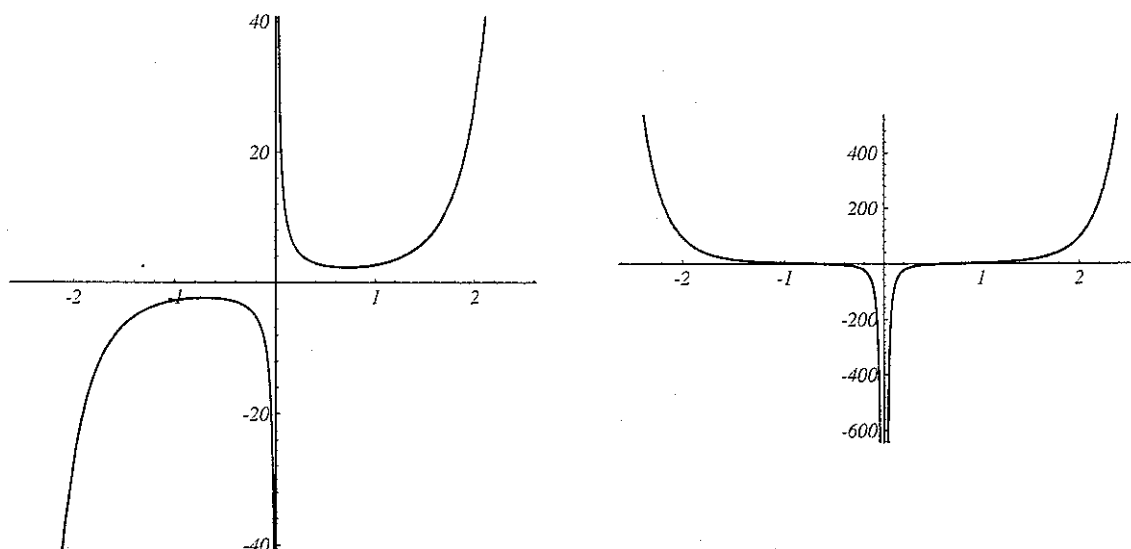
4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

A számlálónak nincs zéróhelye, mindenütt pozitív. A nevező negatív, ha $x < 0$ és pozitív, ha $x > 0$.

7. lépés. Összefoglaló táblázat az adatokról:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
$f(x)$	$\nearrow$	$\text{MAX} = -\sqrt{2}e$	$\searrow$	$\otimes$	$\searrow$	$\text{min} = \sqrt{2}e$	$\nearrow$
$f'(x)$	$\searrow, +$	0	$\searrow, -$	$\otimes$	$\nearrow, -$	0	$\nearrow, +$
$f''(x)$	-	-	-	$\otimes$	+	+	+

8. lépés. Befejezésül, a függvény és deriváltjának grafikonja:



4.5. Függvények közelítése, Taylor polinomok, Taylor sorok

A derivált egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő egyenesek $(y - y_0 = m(x - x_0))$ közül a differenciálható $f(x)$ függvényt az $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ egyenletű érintő közelíti legpontosabban az x_0 közelében (3.6. pont). Ezért itt az $f(x)$ függvényt kis hibával helyettesíthetjük az érintővel (3.6. fejezet). Ez különösen hasznos az olyan nehezen kiszámítható függvények esetén, mint például az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények.

A bonyolult számításokat igénylő függvények egyszerűbb függvényekkel való minél pontosabb közelítése fontos probléma. Erre a célra a polinomok kiválóan megfelelnek, mert kiszámításukhoz csak az alpműveletek szükségesek.

Ebben a pontban az érintővel való közelítés technikáját finomítjuk. *Keressük azokat a polinomokat, amelyek az $f(x)$ függvényt az x_0 pont környezetében a lehető legkisebb hibával közelítik.* Megvizsgáljuk, hogy a közelítés pontossága tetszés szerint javítható-e. Végül a legfontosabb példákat, az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények esetét tekintjük.

Vegyük észre, hogy az érintővel való közelítés is már pontosítása egy sokkal durvább közelítésnek, ahol csak azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény értéke legyen azonos $f(x_0)$ -val x_0 -ban. A legegyszerűbb ilyen függvény az $y = f(x_0)$. Ezt nulladrendű közelítésnek nevezzük. Az érintővel való közelítésnél megköveteltük, hogy a közelítő függvény és $f(x)$ megváltozása x_0 körül ugyanolyan mértékű legyen, vagyis deriváltja x_0 -ban legyen azonos az $f(x)$ deriváltjával.

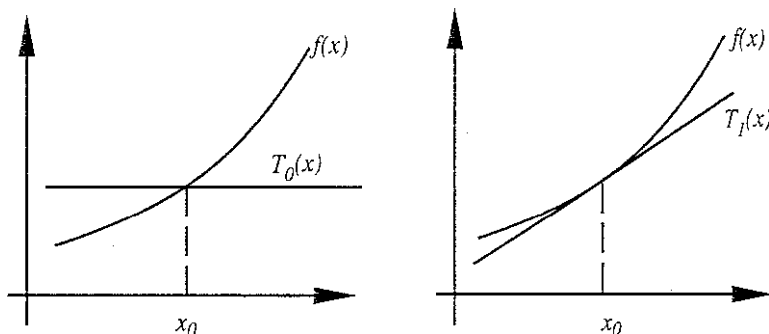
4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Az érintővel való közelítést elsőrendű közelítésnek nevezzük, mert bennük a független változó első hatványa szerepel.

A közelítés rendjének megfelelően jelölje a közelítő függvényeket $T_0(x)$, $T_1(x)$, ahol

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(x_0), \\ T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Az alábbi ábrák már ismertek.

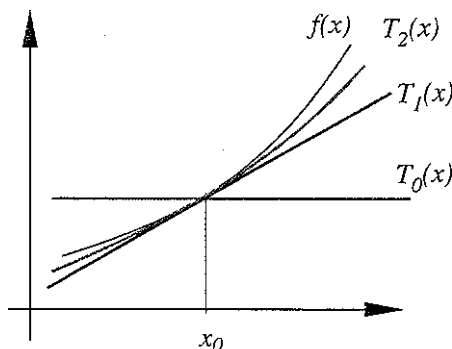


A $T_0(x)$ és $T_1(x)$ függvényekre igaz, hogy $T_0(x_0) = f(x_0)$, $T_1(x_0) = f(x_0)$, $T_1'(x_0) = f'(x_0)$. Az $f(x)$ és érintője közé más függvény grafikonja is "befér", pontosabb közelítés is adható. Ha $f''(x_0)$ létezik, akkor finomíthatjuk a $T_1(x)$ által adott közelítést másodfokú függvénnyel oly módon hogy a közelítő polinom *konvexitási tulajdonságai* is egyezzenek meg az $f(x)$ függvényével, azaz a második deriváltak legyenek egyenlők az x_0 helyen. Keressük a polinomot

$$T_2(x) = T_1(x) + a_2(x - x_0)^2$$

alakban, ahol az a_2 együtthatót a $T_2''(x_0) = f''(x_0)$ feltétel szerint határozzuk meg (konvexitás). Mivel $T_1''(x) \equiv 0$ és $T_2''(x_0) = 2a_2$, ezért $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$, tehát

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$



Az eljárást folytathatjuk. Keressük a legpontosabban közelítő harmadfokú polinomot, amelyet

$$T_3(x) = T_2(x) + a_3(x - x_0)^3$$

alakban írunk fel. Ennek ki kell elégítenie a $T_3'''(x_0) = f'''(x_0)$ feltételt, feltéve hogy $f(x)$ háromszor differenciálható x_0 -ban és környezetében. A magasabb rendű deriváltak definícióját lásd a 3.7. fejezetben. Ez a feltétel a deriváltak növekedési illetve konvexitási tulajdonságainak azonosságát jelenti. Mivel $T_2'''(x_0) = (3!)a_3$, ezért

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Innen

$$\begin{aligned} T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \end{aligned}$$

A közelítés pontosságát fokozhatjuk, ha az $f(x)$ magasabb rendű deriváltjai is léteznek. Igaz az alábbi tétel.

4.7. Tétel. Legyen $f(x)$ n -szer differenciálható az x_0 pontban és környezetében. Az $f(x)$ függvényt az x_0 környezetében legnagyobb pontossággal közelítő n -edfokú polinom, vagyis amely kielégíti az

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) \\ T'_n(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

feltételeket, az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i. \end{aligned}$$

Definíció szerint $f^{(0)}(x) = f(x)$. Nyilvánvalóan

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

A $T_n(x)$ polinomokat az $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor polinomjainak nevezzük.

A Tétel bizonyításában a $T_2(x)$ és $T_3(x)$ esetén elmondottakat kell megismételni. Írjuk fel a $T_n(x)$ polinomot

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

alakban.

A deriváltakat felírva, a legjobb közelítés feltételei szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_n^{(0)}(x_0) &= a_0 = f(x_0), \\ T_n^{(1)}(x_0) &= a_1 = f'(x_0), \\ T_n^{(2)}(x_0) &= 2a_2 = f''(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(i)}(x_0) &= i!a_i = f^{(i)}(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= n!a_n = f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Innen az együtthatókat kifejezve kapjuk az állítást.

A közelítés pontosságát javítandó, a $T_{n-1}(x)$ -ről $T_n(x)$ -re nagyon egyszerűen térhetünk át, csupán a már kiszámolt $f^{(n-1)}(x)$ függvényt kell deriválni az újabb együttható kiszámításához.

Azonnal felmerül a kérdés, mit jelent az, hogy jó a közelítés? Tudjuk-e becsülni az $|f(x) - T_n(x)|$ hibát? Kérdés továbbá, hogy a pontosság tényleg javul-e. A hiba becsléséhez még egy deriváltra van szükségünk, ami nem meglepő, mint azt látni fogjuk.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

4.8. Tétel. Legyen $f(x)$ $(n+1)$ -szer differenciálható az $[x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumon. Ekkor minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ esetén

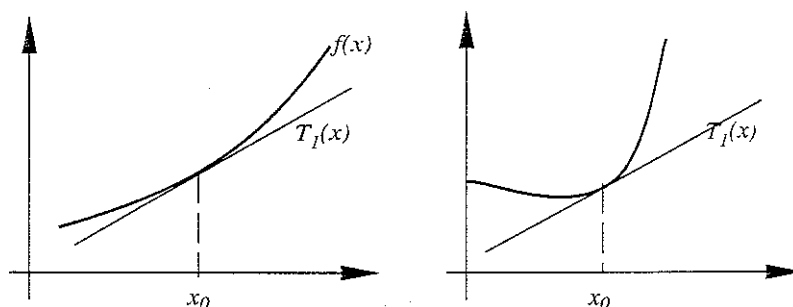
$$|f(x) - T_n(x)| \leq \max_{t \in [x_0 - h, x_0 + h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} |(x - x_0)^{n+1}| \leq \max_{t \in [x_0 - h, x_0 + h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} h^{n+1}$$

A hibát egy a $T_n(x)$ tagjaihoz teljesen hasonló kifejezéssel becsülhetjük. A különbség csupán az, hogy $f^{(n+1)}$ -et nem csak x_0 -ban kell vennünk, hanem az $[x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumban felvett maximumát.

Speciálisan, ha $n = 1$, azaz az érintővel közelítünk, akkor

$$|f(x) - T_1(x)| = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq \max_{t \in [x_0 - h, x_0 + h]} \frac{|f''(t)|}{2} h^2$$

Ez a becslés megadja az érintővel való közelítés pontosságát (3.6. pont). Akkor nem említettük, mert még nem tárgyaltuk a szükséges ismereteket. A becslés jobboldalán a konvexitást jellemző második deriváltat kaptuk. Tekintsük az alábbi ábrákat.



A második esetben a függvény sokkal erősebb konvex, mint az elsőben, azaz a második derivált sokkal nagyobb. Az ábrákról az is leolvasható, hogy az $|f(x) - T_1(x)|$ távolság a második esetben nagyobb, mint az elsőben. Ez az észrevétel teljesen egybeesik azzal, hogy a hibabecslésben a második derivált jelenik meg.

Az alkalmazások előtt vizsgáljuk meg, hogy az " n " növelésével a közelítés pontossága tetszőleges kicsinnyé tehető-e, azaz mindig teljesül-e a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

összefüggés az x_0 közelében levő x helyeken? Ez általában nem igaz. Először is, ennek feltétele, hogy az $f(x)$ függvény végtelen sokszor (akárhányszor) differenciálható legyen. Ekkor bármely n -re létezik a $T_n(x)$ polinom. A fenti tétel szerint pedig, ha $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [x_0 - h, x_0 + h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} h^{n+1},$$

ha a határértékek léteznek. Ha a jobboldalon levő határérték 0, akkor a pontosság tetszőlegesen növelhető.

Könnyen belátható a következő elegendő feltétel.

4.9. Tétel. Legyen az $f(x)$ végtelenszer differenciálható az $[x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy van olyan K szám, hogy minden n -re

$$|f^{(n)}(x)| < K, \quad \text{ha } x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ esetén.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Az állítás könnyen belátható, hiszen $|f^{(n+1)}(x)| < K$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [x_0-h, x_0+h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} h^{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K h^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ez utóbbi határértéket nem bizonyítjuk.

Általában a Taylor polinomokra

$$f(x) \approx T_n(x).$$

Emellett, ha minden $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| = 0,$$

akkor formálisan felírhatjuk az

$$f(x) = T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

egyenlőséget, ahol a jobboldali végtelen összeget az $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor sorának nevezzük. A végtelen összegzést minden egyes x helyen határértékként értelmezzük:

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i.$$

Ha tehát a Taylor polinomok tetszőleges pontossággal megközelítik az $f(x)$ függvényt az x_0 -közeli pontokban, akkor $f(x)$ egy végtelen hosszú polinomként (sorként), polinomok határértékeként állítható elő. A legfontosabb függvényekkel foglalkozunk a továbbiakban. Megjegyezzük, hogy a számológépek is ezeket a közelítéseket használják függvények kiszámítására.

4.5.1. Az e^x Taylor polinonjai az $x_0 = 0$ körül

Legyen $f(x) = e^x$ és $x_0 = 0$. Más x_0 pont esetén a probléma erre a legegyszerűbben kiszámítható esetre visszavezethető, mivel $e^{x_0+h} = e^{x_0} e^h$. Mivel $(e^x)^{(i)} = e^x$ minden i -re,

$$f^{(i)}(0) = 1.$$

Innen

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}.$$

Vizsgáljuk meg a becslés pontosságát! Legyen $h = 1$. Ekkor

$$|e^x - T_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} = H_n.$$

Az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetekben

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{e}{2}, \\ H_2 &= \frac{e}{6}, \\ H_3 &= \frac{e}{24} \approx 0.11, \\ H_4 &= \frac{e}{24 \cdot 5} \approx 0.02, \\ H_5 &= \frac{e}{6!} \approx 0.003, \end{aligned}$$

azaz a konvergencia igen gyors. Igaz továbbá, hogy tetszőleges valós x számra

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!},$$

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

azaz

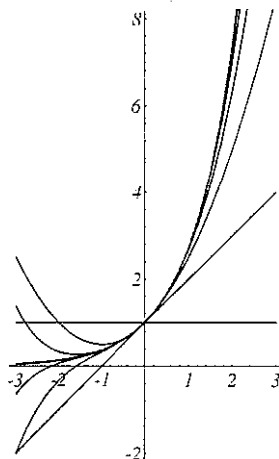
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Speciálisan

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}.$$

Ez a kifejezés az e számot sokkal gyorsabban közelíti, mint a 2.3. pontban adott sorozat.

Az ábrán az e^x függvényt és első néhány Taylor polinomját láthatjuk.



4.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

Legyen $f(x) = \sin x$ és $x_0 = 0$. Más helyek közelében való közelítést rendszerint trigonometrikus azonosságokkal erre az esetre vezetjük vissza.

$$\begin{array}{ll} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0. \end{array}$$

A továbbiakban ez a ciklus ismétlődik. Innen kapjuk, hogy a $\sin x$, az

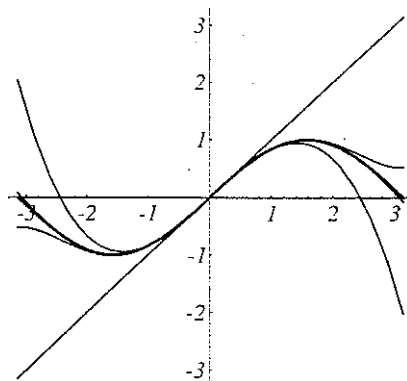
$$\begin{aligned} &x \\ &x - \frac{x^3}{3!} \\ &x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ &x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

polinomokkal közelíthető. A folytatás nyilvánvaló. Bebizonyítható, hogy a hiba nullához tart, ezért $\sin x$ felírható a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{(2i-1)}}{(2i-1)!}$$

alakban. Az ábrán a $\sin x$ és néhány Taylor polinomjának grafikonja látható.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI



A $\cos x$ -re az összefüggéseket hasonlóan kapjuk a fenti számítások alapján. A $\cos x$ Taylor polinomjai a 0 pont körül:

$$\begin{aligned} &1 \\ &1 - \frac{x^2}{2!} \\ &1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ &1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

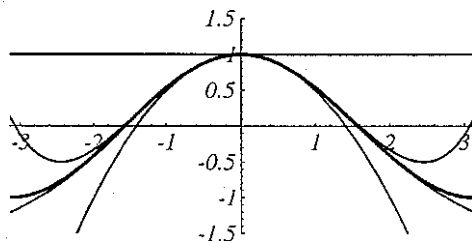
A $\cos x$ is felírható Taylor-sor alakban:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Összefüggéseink valóságát alátámasztja, hogy tagonkénti deriválással (Vigyázat! Ennek jogosságát igazolni kell!) a $\cos x$ sorát kapjuk.

$$(\sin x)' = x' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x.$$

Az alábbi ábrán a $\cos x$ és néhány Taylor polinomjának grafikonját láthatjuk.



4.5.3. Az $1/(1 \pm x)$, $\ln(1 \pm x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

Tekintsük az $\{a_n = x^n\}$ ($a_0 = 1, a_1 = x, \dots, a_n = x^n$) mértani sorozatot.

4. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Ismert, hogy a sorozat első $(n+1)$ elemének összege

$$S_n = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ha $|x| < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

azaz az $1/(1-x)$ függvényre igaz az

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n x^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

egyenlőség, ha $|x| < 1$. Az

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

sor egy *mértani sor*.

A fentiekből adódik, hogy az $f(x) = 1/(1-x)$ függvény Taylor polinomjai a

$$T_n(x) = 1 + x + \dots + x^n$$

polinomok.

Természetesen, ehhez a formulához a Taylor polinomok általános képletéből is eljuthatunk:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f''(0) = 2,$$

$$f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \quad f'''(0) = 3!,$$

és így tovább.

Az $f(x) = 1/(1+x)$ függvényre hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

azaz az $1/(1+x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

alakúak.

Mivel $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$ és $(\ln(1-x))' = -1/(1-x)$, ezért várható, hogy az $\ln(1+x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

míg az $\ln(1-x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} \right)$$

alakúak, ha $|x| < 1$. Pontos indoklást mostani következtetéseinkre az integrálszámítás segítségével adhatunk. Továbbá, ezen függvények végtelen sor alakjában is felírhatók:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

és

$$\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

ha $|x| < 1$.

5. A határozatlan integrál: a deriválás megfordítása

A differenciálszámítás keretén belül azzal foglalkoztunk, hogy az adott $f(x)$ függvény képletének ismeretében hogyan határozhatjuk meg a deriváltakat és a kiszámított deriváltak segítségével következtettünk az $f(x)$ függvény viselkedésére. A gyakorlatban gyakran csak a deriváltat ismerjük. A mozgástörvények a gyorsulást (a mozgás második deriváltja) adják meg ($F = ma$). Problémánk tehát, adott $f'(x)$ esetén keressük meg az $f(x)$ függvényt.

A kérdést kétféle módon közelítjük meg, melyeknek önálló speciális alkalmazásai lesznek, de lényegében ugyanazt az eredményt adják.

Ebben a fejezetben a differenciálási szabályok megfordításával formálisan gondolkodunk. Például, keressük azt a függvényt, amelynek deriváltja $\cos x$. Egy ilyen függvény a $\sin x$. De megfelel az $1 + \sin x$ is. Ezáltal a *primitív függvény és a határozatlan integrál* fogalmához jutunk.

Ez a fajta okoskodás nem minden esetben vezet eredményre. Ekkor egészen rövid intervallumokon közelítjük a függvény változását érintőnek megváltozásával, majd ezeket összegezve kapjuk a függvény változásának becslését. Hasonló technikát alkalmaztunk az $f(x)$ függvény és az x -tengely közti tartomány területének kiszámítása (lásd a 2.1.2. pontot) során. Ekkor rövid intervallumokon becsültük a területet, majd ezeket összegeztük. Ezek a példák a *határozott integrál fogalmához* vezetnek, amellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

5.1. A primitív függvény, a határozatlan integrál definíciója

A bevezetőben vázoltak alapján, adott $f(x)$ függvényhez kell keresnünk olyan $F(x)$ függvényt, mely rendelkezik az $F'(x) = f(x)$ tulajdonsággal. Bevezetjük az alábbi fogalmat.

5.1. Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az $< a, b >$ intervallumon. Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ primitív függvénye az $< a, b >$ intervallumon, ha ott $F(x)$ differenciálható és

$$F'(x) = f(x).$$

5.1. Példa. Az $f(x) = x$ primitív függvénye $x^2/2$, mivel $(x^2/2)' = x$. Az $f(x) = \cos x$ primitív függvénye $\sin x$ és $\sin x + 1$ is, mert $(\sin x)' = \cos x$ és $(\sin x + 1)' = \cos x$.

Kérdés, hogy ha létezik primitív függvény, az mennyire egyértelmű. Láttuk, hogy a konstansban különböző $\sin x$ és $\sin x + 1$ függvények egyaránt primitív függvényei a $\cos x$ függvénynek, mivel a konstans függvények differenciálhányadosa azonosan nulla.

Ugyanezt a megfontolást az általános esetben alkalmazva kapjuk, hogy ha $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye valamely $< a, b >$ intervallumon, akkor tetszőleges c konstans esetén az $F(x) + c$ is primitív függvény ugyanott.

Vajon ezzel kimerítettük az összes lehetőséget? A válasz igenlő. Ugyanis, legyenek $F_1(x)$ és $F_2(x)$ primitív függvények ugyanazon az intervallumon. Ekkor a primitív függvény definíciója miatt

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0.$$

A 4.1 tétel szerint valamely intervallumon csak a konstans függvény deriváltja lehet azonosan nulla. Ezért

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{konstans}.$$

Beláttuk tehát, hogy a *primitív függvény egy konstans hozzáadásától eltekintve egyértelműen meghatározott, vagyis a primitív függvények csak konstansban különbözhetnek egymástól.*

5.2. Definíció. Az $f(x)$ függvény valamely $< a, b >$ intervallumon vett primitív függvényeinek összességét az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük az $< a, b >$ intervallumon. Jelölése:

$$\int f(x) dx.$$

5. A HATÁROZATLAN INTEGRÁL: A DERIVÁLÁS MEGFORDÍTÁSA

Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

ahol c tetszőleges konstans.

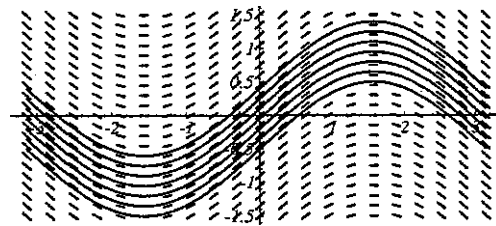
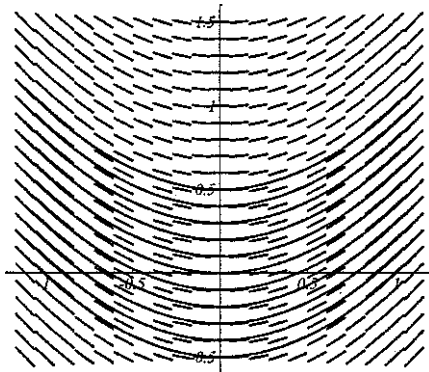
Megjegyezzük, hogy az $\int f(x)dx$ jelölésben az x változó helyett más változó is írható, például $\int f(y)dy = F(y) + c$. Néha használjuk az $\int f$ jelölést is. Az integráljel mögött álló $f(x)$ függvényt **integrandusnak** nevezzük.

Geometriai jelentés

A határozatlan integrál geometriai jelentése igen egyszerű. A keresett $F(x)$ primitív függvény meredeksége, deriváltja ($f(x)$) minden pontban adott. Nem ismerjük az $F(x)$ a grafikonját, de tudjuk, hogy bármely x_0 helyen deriváltja $f(x_0)$, azaz ha a grafikon átmegy valamely (x_0, y_0) ponton, akkor ott érinti az $y = y_0 + f(x_0)(x - x_0)$ egyenest. Ezután a koordináta-rendszer minden (x, y) pontjában rajzoljunk egy $f(x)$ meredekségű egyenesdarabkát. Mármint, ha $F(x)$ primitív függvény, akkor grafikonja minden $(x, F(x))$ pontban érinti az ott felrajzolt egyenest, azaz "simul" a kapott "érintőmezőhöz".

Mivel bármely y -tengellyel párhuzamos egyenes pontjaiból indított érintődarabkák párhuzamosak, ezért egy primitív függvény grafikonját az y -tengely mentén eltolva, a kapott grafikon szintén érinti a megfelelő egyeneseket. Tehát az y -tengely menti eltolással újra primitív függvényt kapunk.

Ezt az $f(x) = x$ és az $f(x) = \cos x$ példáján mutatjuk be.



Kérdés, hogy egy adott folyamat esetén, hogyan válasszuk ki a folyamatot leíró függvényt a primitív függvények sokaságából. Az előbbi ábrák sugallják, hogy a függvény értékét valamely helyen rögzítenünk kell, vagyis meg kell adnunk a grafikon egy $(x_0, F(x_0))$ pontját. Igaz az alábbi állítás.

5.1. Tétel. Legyen $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye az $< a, b >$ intervallumon. Ekkor az (x_0, y_0) ($x_0 \in < a, b >$) ponton átmenő $F_1(x)$ primitív függvényt az

$$F_1(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

képlettel kaphatjuk meg.

5.2. Példa. Tekintsük az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetét. Legyen $v(t) = t$ és $s(0) = 1$. Ekkor

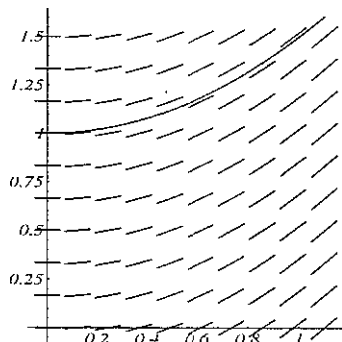
$$\int v(t)dt = \frac{t^2}{2} + c$$

$$1 = s(0) = c \quad \text{vagyis} \quad c = 1.$$

5. A HATÁROZATLAN INTEGRÁL: A DERIVÁLÁS MEGFORDÍTÁSA

tehát

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$$



Ha a gyorsulás adott, pl. $a(t) = 1$, $v(0) = 1$, akkor $v(t) = t + c$. Mivel $v(0) = 1 = c$, ezért $v(t) = t + 1$. Ha $s(t)$ -t keressük, $s(0)$ -t is rögzítenünk kell a fent megadott módon. Ha $s(0) = 1$ ismét, akkor

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + t + c_1, \text{ de } s(0) = 1 \text{ miatt}$$

$$s(0) = 1 = c_1, \text{ ezért}$$

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

Általánosan mondhatjuk, hogy az $s(t)$ útfüggvény a $v(t)$ sebesség primitív függvénye, a sebesség pedig az $a(t)$ gyorsulás primitív függvénye.

Befejezésül jegyezzük meg, hogy a differenciálás és a primitív függvény keresés (integrálás) egymás inverz műveletei. Ezért jogos lehet a félelmünk, hogy integrálni sokkal nehezebb, mint differenciálni, sőt, mint ahogyan az inverz függvény sem mindig létezik, nem létezik mindig primitív függvény sem. Megjegyezzük továbbá, hogy az igen fontos

$$e^{-x^2}$$

függvénynek nem lehet a primitív függvényét formulával felírni.

5.2. Egyszerű integrálási szabályok

Ahhoz, hogy a határozatlan integrál fogalmát a gyakorlatban is használni tudjuk, szükség van a keresést megkönnyítő szabályokra. Előre leszögezzük, speciális esetektől eltekintve, nincs általános szabály egy adott függvény integráljának meghatározására, mert nem is biztos, hogy előállítható formulával!

Mivel az integrálás a deriválás megfordítása, ezért a szabályok a deriválási szabályok megfordításaként állnak elő. Az alábbi szabályok közvetlenül, differenciálással ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned} \int c f(x) dx &= c \int f(x) dx; \\ \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx; \\ \int 0 dx &= \text{konstans}; \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1); \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + c \quad (x \neq 0) \quad (\text{Az abszolút érték az } x < 0 \text{ értékek miatt kell}); \\ \int e^x dx &= e^x + c; \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c; \\ \int \cos x dx &= \sin x + c; \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c \quad (x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi). \end{aligned}$$

5.3. A parciális integrálás szabálya

A szorzat differenciálására vonatkozó szabályt is hasznosíthatjuk. Differenciáljuk az $f(x)g(x)$ szorzatot!

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ha az azonosságot integráljuk, az

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

egyenlőséghez jutunk, amelyet átrendezve kapjuk:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Ez a parciális integrálás szabálya. Nem számolja ki az integrált, de egy másik (remélhetőleg egyszerűbb) integrál kiszámítására vezeti vissza. Ezt a szabályt az alábbi módon értelmezzük:

Egy szorzatot kell integrálnunk, amelynek első tényezője ($f'(x)$) egy $f(x)$ függvény deriváltja. Meg kell keresnünk tehát az első tényező ($f'(x)$) egy primitív függvényét. Ezután a második tényező deriváltját számoljuk ki, és alkalmazzuk a szabályt. A művelet sikere azon múlik, hogy az $f(x)g'(x)$ -t könnyebb-e integrálni, mint $f'(x)g(x)$ -t.

5.3. Példa. Számoljuk ki az $\int xe^x dx$ integrált. Legyen $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$. Ekkor $f(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$. Ezért

$$\int xe^x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + C.$$

Látjuk, hogy a kapott integrált ki tudtuk számítani. Próbáljuk most fordítva: Legyen $f'(x) = x$, $g(x) = e^x$. Ekkor $f(x) = x^2/2$, $g'(x) = e^x$. Innen

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

ahol a kapott integrál nem egyszerűbb, mint az eredeti. Ez rossz választás volt.

5.4. Példa. Most számoljuk ki az $\ln x$ integráltját: Mivel $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$, ezért lehetséges az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ választás. Ekkor

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

5.5. Példa. Befejezésül egy harmadik tipikus példa: $\int e^x \sin x dx$. Most bármelyik választás jó lesz. Legyen $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$. A szabály szerint

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Integráljuk a jobboldal második kifejezését ugyanígy: Itt megint $f'(x) = e^x$.

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

Ezt behelyettesítve az első egyenlőségbe

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,$$

ami egy egyenlet a keresett integrálra nézve. Ezt megoldva kapjuk, hogy

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

5. A HATÁROZATLAN INTEGRÁL: A DERIVÁLÁS MEGFORDÍTÁSA

A fenti tapasztalatok alapján felsoroljuk a parciális integrálás néhány tipikus esetét.

$$\begin{array}{ll} \int x^n e^x dx & (f'(x) = e^x, g(x) = x^n) \\ \int x^n \ln x dx & (f'(x) = x^n, g(x) = \ln x) \\ \int x^n \sin x dx & (f'(x) = \sin x, g(x) = x^n) \\ \int e^x \sin x dx; \quad \int \sin x \cos x dx & \text{mindegyik választás jó} \end{array}$$

5.4. A helyettesítéses integrálás szabálya

Próbáljuk megkeresni az összetett függvény deriválási szabályának, a láncszabálynak a megfordítását. Ismert, hogy

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))g'(x)dx$$

Ha $F'(x) = f(x)$ akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

ahol a jobboldalon $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye. A jobboldal nem más, mint

$$\int f(y)dy = F(y) + c,$$

ha az $y = g(x)$ helyettesítést használjuk. A két egyenlőséget összevetve kapjuk, hogy

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy,$$

ha $y = g(x)$. Emlékezve a derivált dy/dx jelölésére, kapjuk, hogy az $y = g(x)$ helyettesítés mellett a $dy/dx = g'(x)$, vagyis a $dy = g'(x)dx$ helyettesítést is elvégeztük. Ezt most teljesen formálisan tettük. Azonban valóban komoly köze van a derivált segítségével megadott *kis változásokhoz*, a *függvény változásának az érintő megváltozásával való közelítéséhez*. Ez a következő fejezetben világossá válik.

A fent leírt szabályt nevezzük a **helyettesítéses integrálás szabályának**. Akkor használható, ha az integrandus egy összetett függvény és belső függvénye deriváltjának a szorzata.

5.6. Példa. Számoljuk ki az

$$\int (2x+1)^{10} dx$$

integrált. Legyen $y = (2x+1)$ és $dy = 2dx$. Innen

$$\int (2x+1)^{10} dx = \int \frac{y^{10}}{2} dy = \frac{y^{11}}{22} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c.$$

5.7. Példa. Számoljuk ki az

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

integrált. Legyen $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$ ezért

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

5.8. Példa. A $\operatorname{tg} x$ integrálása hasonlóan megy:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{y} dy = - \ln |y| + c = - \ln |\cos x| + c$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

ahol $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$.

5.9. Példa.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

ahol $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$.

5.10. Példa.

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + c = \ln |e^x + 1| + c,$$

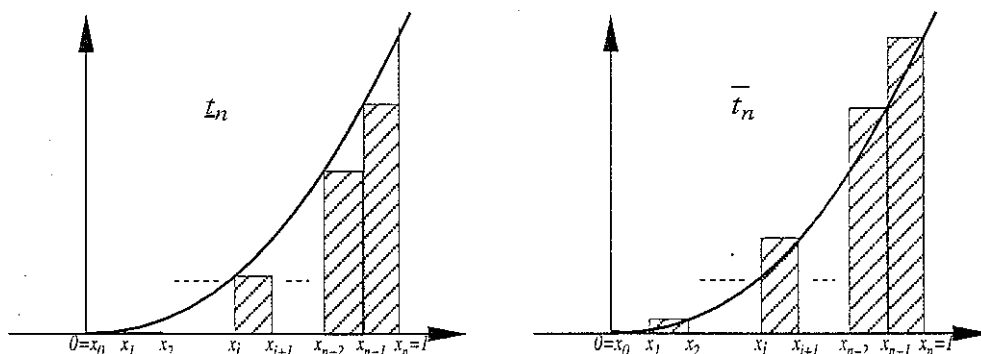
ahol $y = e^x + 1$, $dy = e^x dx$.

A példákban előforduló tipikus eseteket írjuk fel általános formában:

$$\begin{aligned} \int (f(x))^n f'(x) dx &= \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + c \\ \int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \int f(y) dy \quad (y = ax+b, dy = a \cdot dx) \end{aligned}$$

6. A határozott integrál

A határérték fogalmának bevezetésénél a 2.1.2. pontban kiszámítottuk az $f(x) = x^2$ függvény és az x -tengely közti tartomány területét a $[0, 1]$ intervallumon, oly módon, hogy a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre osztottuk, és a vizsgált tartomány területét alulról illetve felülről becsültük az ábrán látható téglalapok területének összegével, majd ezek határértékét vettük.



Hasonló gondolatmenetet követhetünk tetszőleges nemnegatív folytonos $f(x)$ függvény grafikonja és az x -tengely közti terület kiszámítása során is. Ha a függvény negatív, és a terület nagyságára van szükségünk, akkor a függvényértékek abszolút értékét kell vennünk. A következő pontban azonban látni fogjuk, hogy jobban kezelhető fogalomhoz jutunk, ha a területet negatívnak vesszük negatív függvény esetén.

A fogalmak pontos tárgyalása előtt, következő pontban a területszámítástól látszólag független problémát vázolunk. Valamely függvény és deriváltja közti kapcsolatot tekintjük egy új módszerrel. Mint látni fogjuk ez is területszámítási problémára vezet.

6.1. A függvény változásának előállítása deriváltjából

A határozatlan integrált használva formális, technikai okoskodásokkal próbáltunk valamely függvényt deriváltja ismeretében megkeresni. Ez nem mindig lehetséges. Most közelítő eljárásokkal kísérletezünk.

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

Emlékezzünk rá, hogy ha $x_0, F'(x_0)$ adottak, és x elég közel van x_0 -hoz, akkor $F(x) - F(x_0) \approx F'(x_0)(x - x_0)$, ahol a jobboldal az x_0 -beli érintő értéke az x_0 -hoz közeli x -ben. Ezt felhasználva, becsüljük az $F(x)$ függvény változását az $[a, b]$ intervallumon.

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot "elegendően rövid" részintervallumokra, például osszuk fel $[a, b]$ -t n egyenlő részre. A részintervallumokon a függvényt valamely érintőjével fogjuk helyettesíteni. Legyen $h = (b - a)/n$, és vezessük be az

$$\begin{aligned}x_0 &= a \\x_1 &= x_0 + h \\x_i &= x_0 + i \cdot h \\x_n &= x_0 + n \cdot h = b\end{aligned}$$

jelöléseket. Ekkor $F(x_{i+1}) - F(x_i) \approx F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = F'(x_i)h$, és

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= \\&= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)h.\end{aligned}$$

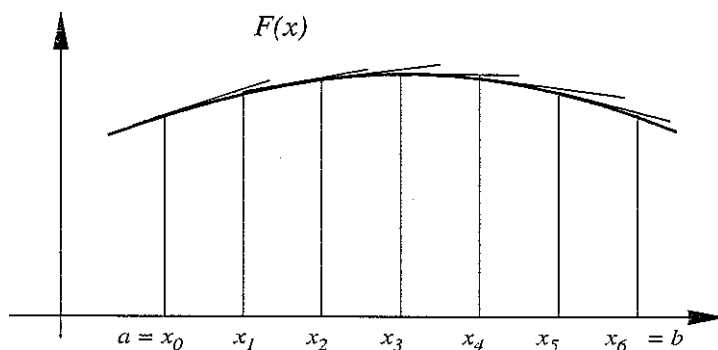
Az összeg minden tagjára alkalmazhatjuk a fenti típusú közelítést. Így

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)h$$

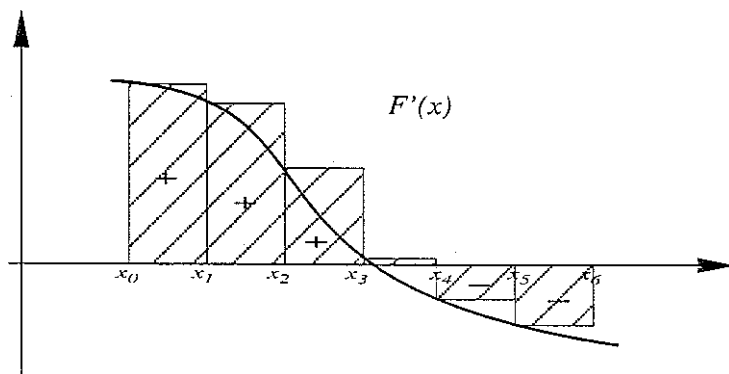
Később be fogjuk látni, hogy ha $F'(x)$ folytonos, akkor n minden határon túli növelésével a közelítés egyenlőségbe megy át, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)h = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

A fenti eljárást nézzük meg grafikusán: Először az $F(x)$ függvény grafikonját képzeljük el:



Ugyanez az $F'(x)$ grafikonján:

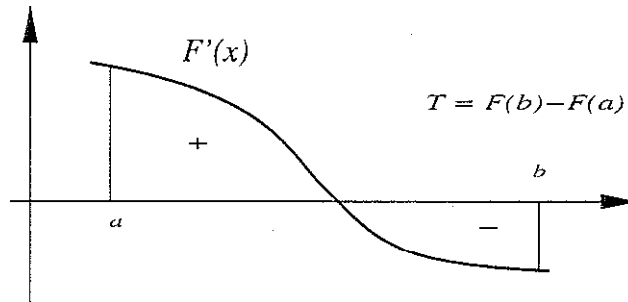


Látható, hogy $|F'(x_i)|h$ pontosan egy téglalap területe. Az összes ilyen téglalap előjeles

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

területét (az abszolút érték nélkül) összeadva kapjuk, hogy $\sum F'(x_i)h$ az $F'(x)$ függvény és az x tengely közti előjeles terület becslése az $[a, b]$ szakaszon, előjelesen véve. U.i. ha $F'(x_i)$ negatív, a $F'(x_i)h$ is negatív előjelű.

A fenti határérték relációt figyelembe véve kapjuk, hogy ha $n \rightarrow \infty$, akkor ez a közelítés az $F'(x)$ és az x tengely közti előjellel vett területet közelíti. Az előjeles terület nagysága $F(b) - F(a)$.

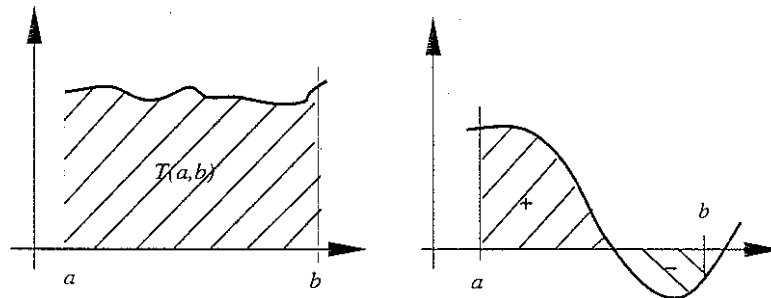


Vegyük észre, hogy eljárásunk alkalmazható akkor is ha a derivált nem formulával, hanem grafikusán adott. Közelítő eredményt kapunk, ha kísérletből származó adatsorozat áll rendelkezésre. Ez a határozatlan integrál technikájával nem volt lehetséges.

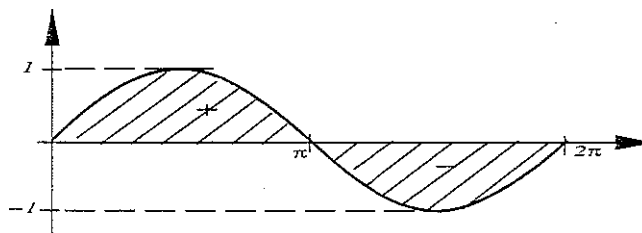
6.2. A határozott integrál definíciója

Bevezető példáink során láttuk, hogy területszámítási problémák és egy differenciálható függvény változásának a derivált ismeretében való előállítása egyaránt valamely függvény grafikonja és az x -tengely közti tartomány területének meghatározásához vezettek. Ebben a pontban matematikailag is megfogalmazzuk a vázolt technikát.

Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon. A bevezető példák során alkalmazott technikát követve, próbáljuk megmérni a kérdéses tartomány $T(a, b)$ előjeles területét, azaz ahol a függvény pozitív, ott a terület is pozitív, ahol a függvény negatív, ott a terület is negatív.



Például, ha $f(x) = \sin x$, akkor $T(0, 2\pi) = 0$.



Legyenek $h = (b - a)/n$ (n adott), $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_i = a + ih$, ..., $x_n = b$, és

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

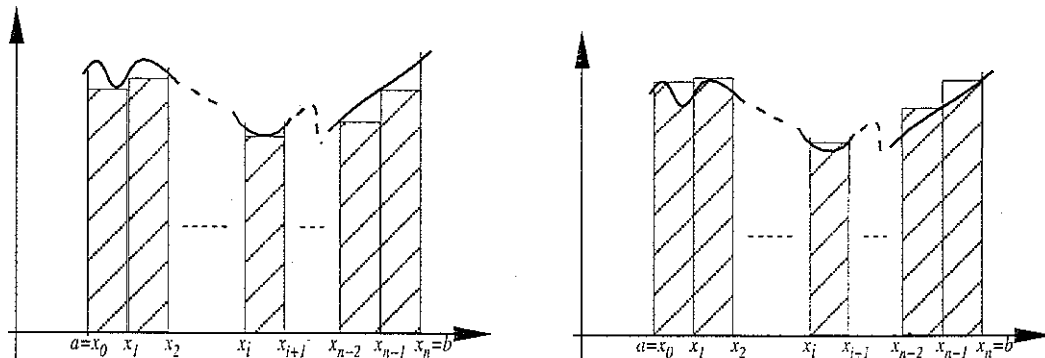
vezessük be az

$$\underline{f}_i = \min_{t \in (x_i, x_{i+1}]} f(t), \quad \overline{f}_i = \max_{t \in (x_i, x_{i+1}]} f(t)$$

jelöléseket. Közelítsük az $f(x)$ grafikonja és az x -tengely közti tartományt az $[x_i, x_{i+1}]$ alapú és $\underline{f}_i$ magasságú, majd az $\overline{f}_i$ magasságú téglalapok egyesítésével. A

$$\underline{t}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}_i \cdot h, \quad \overline{t}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f}_i \cdot h$$

összegek a tartomány előjeles területének alsó illetve felső közelítését adják.



Belátható, hogy ha $f(x)$ folytonos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{t}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{t}_n = T(a, b).$$

Ez az eljárás általánosabb függvényekre is alkalmazható. Ekkor a fenti összefüggést a $T(a, b)$ definiálására használjuk, feltéve, hogy a két határérték létezik és megegyeznek. Most már bevezethetjük a határozott integrál fogalmát:

6.1. Definíció. Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon. Az $f(x)$ $[a, b]$ fölötti határozott integráljának nevezzük a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{t}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{t}_n$$

közös határértéket, az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumon vett grafikonja és az x tengely közötti tartomány előjellel vett területét. Jelölése

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Vegyük észre, hogy a $\underline{t}_n$ összegre a határátmenetet végrehajtva az integrál "végtelen kicsi" téglalapok területének az összege, ahol $f(x)dx$ egy elemi téglalap területe (emlékezzünk a dy/dx jelölésre!!). Az $\int$ -jel (elnyújtott S betű (summa)) pedig ezek összegzését jelenti.

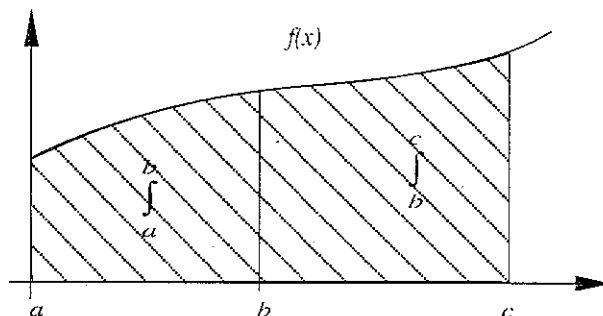
6.3. A határozott integrál tulajdonságai

A határozott integrál szemléletes definíciójából azonnal adódik néhány fontos tulajdonsága.

1. tulajdonság. Legyen $a < b < c$, és $f(x)$ folytonos az $[a, c]$ szakaszon. Az alábbi ábra mutatja, hogy

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL



Ha bevezetjük az

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

(a területösszegzést visszafelé végezzük), akkor a fenti egyenlőség tetszőleges a, b, c esetén érvényes. Ezt a tulajdonságot nevezzük az *integrál intervallum szerinti additivitásának*.

2. tulajdonság. Könnyen látható továbbá, hogy

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Az alsó és felső közelítő összegek vizsgálatával is igazolhatjuk, de később egyszerűbben is megmutatjuk az alábbi összefüggéseket:

3. tulajdonság.

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

4. tulajdonság. A határozott integrál az integrandus szerint is additív.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

6.4. A határozott integrál becslése, integrálközép

Az alkalmazások során a határozott integrál becslésére az alábbi egyenlőtlenségek igen fontosak. A definícióból azonnal adódik az

5. tulajdonság. Ha $f(x) \geq 0$ és $a \leq b$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

és ha $f(x) \leq 0$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0.$$

6. tulajdonság. Legyenek $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ és $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Ekkor

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

Ugyanis bármely alsó és felső közelítő összegre

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \sum \underline{f}_i(x_{i+1} - x_i) = \underline{t}_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{t}_n = \\ &= \sum \overline{f}_i(x_{i+1} - x_i) \leq M \sum (x_{i+1} - x_i) = M(b-a). \end{aligned}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Az

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

értéket az $f(x)$ függvény (a, b) intervallumon vett átlagának, vagy integrálközepének nevezzük.

Ugyanis a $\bar{f}_{[a,b]}$ konstans függvény integrálja $[a, b]$ -n ugyanannyi, mint $f(x)$ -é. Továbbá, van olyan $a < \zeta < b$, melyre

$$f(\zeta) = \bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Megmutatható, hogy ez a fogalom természetes általánosítása a számtani közép fogalmának.

Például, ha $T(t)$ a levegő hőmérsékletét jelenti a t pillanatban, akkor a napi átlaghőmérsékletet a

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt$$

integrálközeggel számolhatjuk ki.

Hasonlóan, ha $v(t)$ a test pillanatnyi sebessége, akkor a t_1, t_2 pillanatok között az átlagsebességet az

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

integrálközep adja meg (részletesen lásd a 6.6.2. pontot).

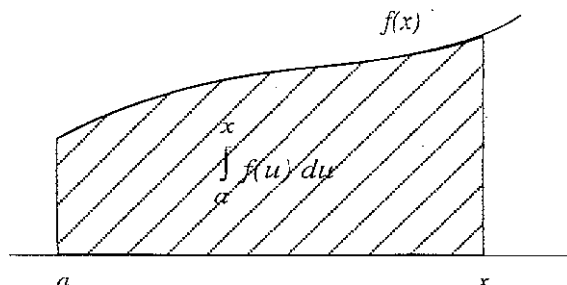
6.5. A területfüggvény és tulajdonságai, az integrálszámítás alaptétele

Most bizonyítjuk a határozott integrál legfontosabb tulajdonságát, melyet az integrálszámítás alaptételének is nevezünk. Ez a tulajdonság kapcsolatot teremt a határozott integrál, a primitív függvény és a differenciálhányados között.

Tekintsük az

$$T(a, x) = \int_a^x f(u) du$$

függvényt. Ezt a függvényt területfüggvénynek, integrálfüggvénynek, vagy felsőhatár függvénynek is szoktuk nevezni, mert az intervallum felső határa változik.



6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

Könnyen látható, hogy

$$T(a, x) = T(a, a_1) + T(a_1, x),$$

vagyis

$$\int_a^x f(u) du = \int_a^{a_1} f(u) du + \int_{a_1}^x f(u) du$$

az integrál intervallum szerinti additivitása miatt. Két területfüggvény csak konstansban különbözik egymástól.

Az előkészületek után bebizonyítjuk az integrálszámítás alaptételét.

6.1. Tétel. Legyen $f(x)$ folytonos az $x_0 \in (a, b)$ pontban. Ekkor a $T(a, x) = \int_a^x f(u) du$ függvény differenciálható, és differenciáhányadosa az x_0 pontban $f(x_0)$. Ha $f(x)$ minden $x \in (a, b)$ -ben folytonos, akkor $T(a, x)$ minden pontban deriválható és

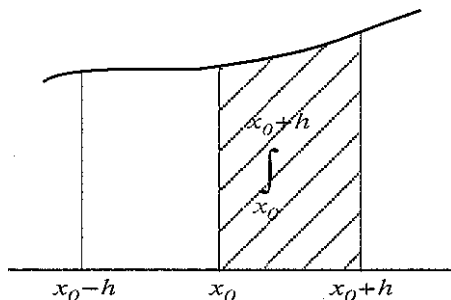
$$\left(T(a, x) \right)' = \left(\int_a^x f(u) du \right)' = f(x)$$

Következésképpen, a $T(a, x)$ területfüggvény az $f(x)$ függvénynek primitív függvénye.

A deriválhatóság bizonyítására írjuk fel a $T(a, x)$ differenciahányadosát x_0 -ban:

$$\frac{T(a, x_0 + h) - T(a, x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx$$

az integrál intervallum szerinti additivitása miatt.



Az integrál becslésére kapott egyenlőtlenségek szerint

$$\min_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \leq \max_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t)$$

ahol a minimum és maximum az $f(x)$ folytonossága miatt létezik (szemlélet alapján elhíhető, nem bizonyítjuk), és ismét a folytonosság miatt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\min_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t) \right) = f(x_0).$$

A fenti egyenlőtlenségek miatt pedig

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\min_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t) \right) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{t \in [x_0-h, x_0+h]} f(t) \right) = f(x_0).$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

A rendőrelvet (2.9 tétel) alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = f(x_0).$$

Bebizonyítottuk tehát a területfüggvény differenciálhatóságát.

Vegyük észre, hogy a területfüggvény differenciahányadosa, átlagos változása nem más, mint az $f(x)$ függvény integrálközepe az $[x_0, x_0 + h]$ intervallumon. Jogos volt tehát, hogy az integrálközepe a függvény átlagának neveztük.

A most alkalmazott bizonyítási eljárást, a rendőrelvet már korábban is alkalmaztuk a $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ határérték kiszámításánál. Egy kifejezés határértékét úgy számoljuk ki, hogy egy őt közrefogó kisebb ill. nagyobb kifejezések határértékét keressük. Ha ezek a határértékek megegyeznek, akkor a közrefogott ("őrizetes") kifejezés határértéke is ugyanaz lesz.

A most bebizonyított tétel egy nagyon egyszerű módszert ad a határozott integrál kiszámítására. Vegyünk egy tetszőleges $T(x)$ területfüggvényt. Az integrál intervallum szerinti additivitása miatt az $f(x)$ valamely $[a, b]$ intervallumon vett integrálja

$$\int_a^b f(x) dx = T(b) - T(a)$$

Mivel tételünk szerint $T(x)$ primitív függvénye $f(x)$ -nek, ezért ha $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvény, akkor $T(x) = F(x) + c$. Innen

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Ezt a szabályt nevezzük **Newton-Leibniz szabálynak**. A határozott integrál kiszámításához az előző fejezet módszereit felhasználva egy primitív függvényt kell keresnünk, és alkalmaznunk a Newton-Leibniz szabályt.

6.1. Példa. Most már könnyedén be tudjuk bizonyítani az

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

egyenlőséget. Legyenek $F(x)$ és $G(x)$ az $f(x)$ és $g(x)$ primitív függvényei. Ekkor nyilvánvalóan $F(x) + G(x)$ az $f(x) + g(x)$ primitív függvénye. Ezért a Newton-Leibniz szabály alkalmazásával

$$\int_a^b (f + g) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

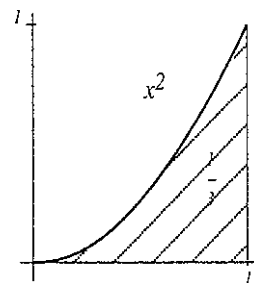
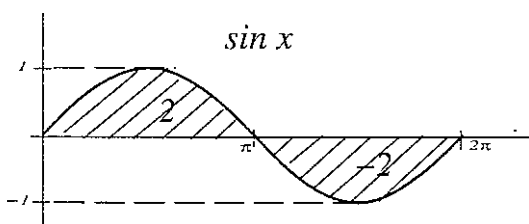
6.2. Példa.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2,$$

de

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0.$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL



6.3. Példa.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ezt az integrált a 2.1.2. pontban közelítő összegek határértékeként már kiszámítottuk.

6.1. Megjegyzés. Állítsuk elő ismét az $F(x)$ függvényt deriváltja segítségével (lásd a 6.1. pontot). Az integrálszámítás alaptétele segítségével kapjuk, hogy ha $F'(x)$ folytonos, akkor

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(u) du$$

és

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx.$$

Megkaptuk tehát pontosan is a közelítések alapján kapott sejtésünket.

6.2. Megjegyzés. Az

$$\left(\int_0^x f(u) du \right)' = f(x)$$

$$\text{és} \quad \int_{a_0}^x f(u) du = \int_{a_1}^x f(u) du + \int_{a_0}^{a_1} f(u) du = \int_{a_1}^x f(u) du + c \quad \left(c = \int_{a_0}^{a_1} f(u) du \right)$$

összefüggések mutatják, hogy a területfüggvények azonosak a primitív függvényekkel. A második sorban levő egyenlőség adja a határozatlan integrálban használt c konstans szemléletes jelentését.

6.3. Megjegyzés. Az előző megjegyzés alapján világossá válik a primitív függvények összességére, a határozatlan integrálra használt

$$\int f(x) dx$$

jelölés. Sőt a helyettesítéssel integrálásnál a dx és dy , akkor még formális, helyettesítései is szemléletes jelentést kapnak.

Tekintsük az $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ integrál egy közelítő összegét. Az alsó és felső összeg közötti értéket kapunk, ha a

$$\tilde{t}_n = \sum_{i=0}^n f(g(x_i))g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n f(g(x_i))g'(x_i)\Delta x_i$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

összeget vesszük. Ha az $y = g(x)$ helyettesítést vesszük, $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Mivel $\Delta y \approx g'(x)\Delta x$, ezért

$$\Delta y_i = g(x_{i+1}) - g(x_i) = y_{i+1} - y_i \approx g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = g'(x_i)\Delta x_i.$$

Innen

$$\tilde{t}_n = \sum_{i=0}^n f(g(x_i))g'(x_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=0}^n f(y_i)\Delta y_i,$$

ami az

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

integrál egy közelítő összege. A pontos számításokat mellőzzük, de megfontolásainkból látható, hogy a $dy = f'(x)dx$ helyettesítés valóságos jelentéssel bír.

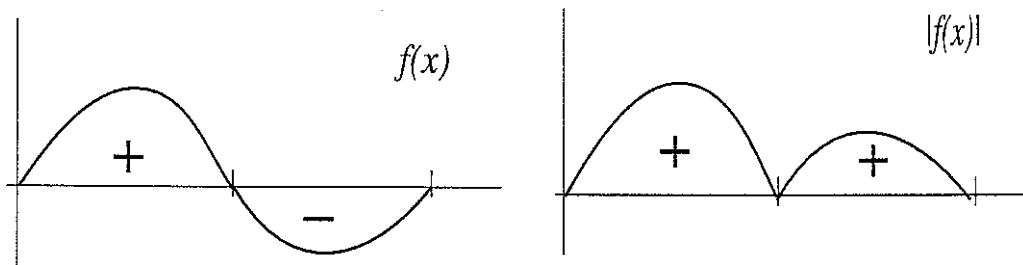
6.6. Az integrál alkalmazásai

Az alábbiakban néhány olyan alkalmazást, példát tekintünk, amelyek illusztrálják az integrálfogalom gyakorlati hasznosságát.

6.6.1. Területszámítási feladatok

Foglaljuk össze eddigi területszámítással kapcsolatos megállapításainkat. Ha $f(x)$ pozitív az $[a, b]$ szakaszon, a terület maga $\int_a^b f(x)dx$. Ha negatív, akkor $-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f(x))dx$. Innen látható, hogy

$$T = \int_a^b |f(x)|dx$$



Megjegyezzük, hogy az $|f(x)|$ függvénynek általában nincs egyetlen formulával megadható primitív függvénye. Ezért az integrálást az a, b és $f(x)$ zéróhelyei által határozott intervallumokon végezzük el.

6.4. Példa. Számoljuk ki az $\ln x$ grafikonja és az x tengely közti területet az $[\frac{1}{e}, e]$ szakaszon.

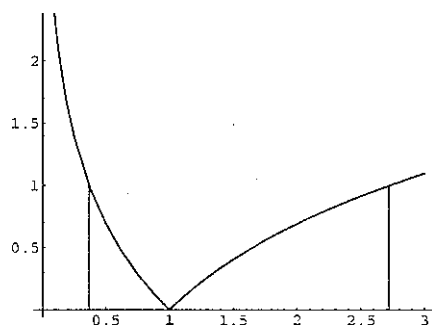
$$\int_{1/e}^e |\ln x|dx = -\int_{1/e}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$$

Mivel $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$, ezért a fenti integrál

$$\int_{1/e}^e |\ln x|dx = [(x - x \ln x)]_{1/e}^1 + [(x \ln x - x)]_1^e = 1 - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) + (e - e) + 1 = 2 - \frac{2}{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

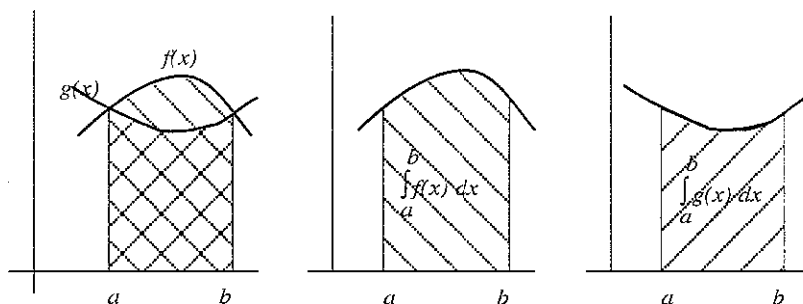
A megmért tartomány az alábbi ábrán látható:



Két függvény grafikonja közti területet az

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

integrál kiszámításával kapjuk meg. Tegyük fel, hogy $f(x) \geq g(x)$ $[a, b]$ -n. Ekkor az alábbi ábra alapján



kapjuk, hogy

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ha $g(x) > f(x)$, akkor a kivonást fordítva végezzük. Összeségében, kapjuk a kérdéses integrált. Ehhez megkeressük az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásait. Az $[a, b]$ intervallumot ezek részintervallumokra osztják. Ezeken az abszolút értéket feloldva, alkalmazhatjuk a Newton-Leibniz szabályt.

6.6.2. Test mozgása

Legyen a test sebessége $v(t)$, a kezdeti pozíció $s(0) = s_0$. Ekkor a Newton-Leibniz tétel alapján

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(u) du.$$

A test által megtett út valamely t_1 és t_2 időpontok között

$$\int_{t_1}^{t_2} v(u) du.$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

Innen kapjuk, hogy a test átlagsebessége

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(u) du,$$

ami a $v(t)$ függvény integrálközepe a $[t_1, t_2]$ intervallumon.

Most tegyük fel, hogy az m tömegű testre $F(t)$ erő hat. Az erő pillanatonként változik. Newton második törvénye szerint $F = m \cdot a$, vagyis $\frac{1}{m} F(t) = s''(t)$. Ha a test az $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ kezdeti értékekkel indul, akkor

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(u) du = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(u) du$$

és

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left(\int_0^u F(v) dv \right) du$$

A jobboldali integrált úgy számítjuk ki, hogy integráljuk az F függvényt a $[0, u]$ szakaszon, így F integrálfüggvényét kapjuk, majd ezt is integráljuk. Ha a mozgás nem a 0 pillanatban, hanem t_0 -ban indul, a formulák hasonlóak. Ezek felírását gyakorlásként az olvasóra hagyjuk.

6.6.3. Munka kiszámítása

Ha a mozgó testre erő hat, a végzett munkát úgy definiáljuk, mint az elmozdulás irányába eső erő és az elmozdulás nagyságának a szorzatát. Ha az erő az elmozdulásra merőlegesen hat, akkor végzett munkája zéró. Az elmozdulás irányába eső erő természetesen változhat. Legyen ez $F(s)$. Ekkor az s_0 pontból s_1 -ig való elmozduláshoz szükséges munka

$$W(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds$$

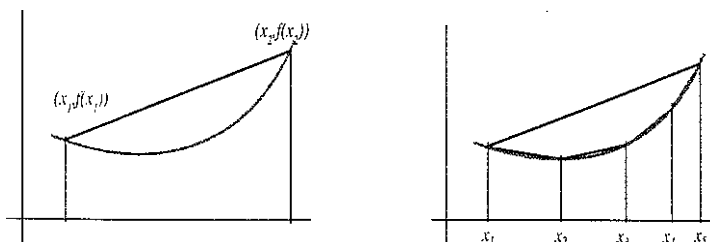
Ugyanis az (s_0, s_1) szakaszon $(s_1 - s_0)/n = h$ (n valamely pozitív egész szám) $(x_0 = s_0, \dots, x_i = x_0 + ih, \dots, x_n = s_1)$ hosszúságú szakaszában az $F(s)$ erőt konstansnak véve ($F(x_i)$ az $[x_i, x_{i+1}]$ szakaszon) már alkalmazhatjuk az "erő $\times$ elmozdulás" formulát. Ekkor

$$W(s_0, s_1) \approx \sum_{i=0}^n F(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ami a fenti integrál közelítő összege.

6.6.4. Vonal ívhosszának kiszámítása

Tekintsük az $f(x)$ függvény grafikonját az $[a, b]$ intervallumon. Kérdés milyen hosszú a grafikont alkotó görbe vonal? Közelítsük két adott $x_1, x_2 \in [a, b]$ pont között a görbe $l(x_1, x_2)$ hosszát az $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz hosszával (lásd a baloldali ábrát).



6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

A Pithagorasz tétel szerint

$$l(x_1, x_2) \approx \sqrt{(f(x_2) - f(x_1))^2 + (x_2 - x_1)^2} = \left(\sqrt{\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right)^2 + 1} \right) (x_2 - x_1)$$

Ha azonban $f(x)$ folytonosan differenciálható és a pontok távolsága kicsiny, akkor a gyökjel alatt levő differenciahányados közel van a függvény x_1 pontbeli deriváltjához. Ezért

$$l(x_1, x_2) \approx \left(\sqrt{(f'(x_1))^2 + 1} \right) (x_2 - x_1)$$

Most tekintsük az $[a, b]$ intervallumot. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre ($h = (b - a)/n$,

$x_i = a + ih$, $x_n = b$). Az (x_i, x_{i+1}) intervallumon közelítsük a görbét az $(x_i, f(x_i))$ pontokat összekötő törtvonallal (fenti, jobboldali ábra), amelynek hosszát a fentiek alapján becsülhetjük. Ezért

$$l(a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} l(x_i, x_{i+1}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{(f'(x_i))^2 + 1} \right) (x_{i+1} - x_i),$$

ami nem más, mint egy integrálközelítő összeg. A beosztás minden határon túli finomításával az

$$l(a, b) = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx$$

integrálhoz jutunk.

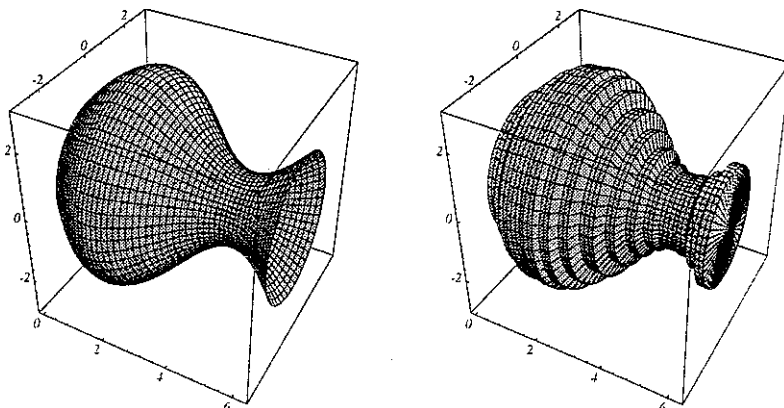
6.5. Példa. Számítsuk ki az $r > 0$ sugarú kör területét. Ez négyszerese az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonja ívhosszának a $[0, r]$ intervallumon. Az ívhosszat megadó integrált az $x = r \sin u$, $dx = r \cos u du$ helyettesítést és a Newton–Leibniz szabályt alkalmazva számíthatjuk ki:

$$K = 4l(0, r) = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = [r \arcsin x]_0^r = 2r\pi.$$

A részletes számolást az olvasóra bizzuk.

6.6.5. Forgástestek térfogatának kiszámítása

Tekintsük az $y = f(x)$ függvényt. Forgassuk meg ennek grafikonját térben az x -tengely körül. Számítsuk ki az így kapott hengersizmetrikus test térfogatát az $[a, b]$ intervallumon!



A kapott testet szabályos hengerekkel (korongokkal) közelítjük. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre ($h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$, $x_n = b$). Az (x_i, x_{i+1}) intervallumon közelítsük a testet egy $f(x_i)$ sugarú hengerrel. Ekkor a test térfogatát a

$$V_n = \sum f^2(x_i)h \cdot \pi = \pi \sum f^2(x_i)h$$

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

összeg közelíti. Természetesen belső és külső közelítéseket is vehetünk.

$$V_{n,belső} = \pi \sum_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \min f^2(t)h; \quad V_{n,külső} = \pi \sum_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \max f^2(t)h$$

Ezek az összegek mind *integrálközelítésnek* tekinthetők. Ha a beosztást minden határon finomítjuk, folytonos $f(x)$ esetén a

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

integrált kapjuk. A kapott képlet konstans $f(x)$ esetén visszaadja a henger térfogatára ismert $r^2 \pi m$ formulát.

6.6. Példa. A kapott képlet segítségével kiszámíthatjuk a gömb térfogatát. Tekintsük az r sugarú origó középpontú felső félkört és ezt forgassuk meg. A felső félkör képlete

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ki kell számítanunk tehát a

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \frac{4r^3 \pi}{3},$$

amint az az elemekből is ismert.

6.7. Közelítő integrálási formulák

Ebben a pontban az integrál kiszámításának közelítő eljárásaival foglalkozunk. Kérdezhetjük, hogy mi szükség erre, hiszen használhatjuk a nagyon kényelmes Newton-Leibniz formulát. Ez igaz, de azt is tudjuk, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek a primitív függvénye nem adható meg formulával. Másrészt, számos függvény kísérleti úton adott és szükség van határozott integráljuk kiszámítására valamely $[a, b]$ intervallumon. Azonban ezekre nem tudjuk alkalmazni a Newton-Leibniz szabályt.

Az integrálközelítés technikája általában ugyanaz: Az $f(x)$ grafikonja és az x -tengely közti tartományt valamilyen síkidomrendszerrel próbáljuk közelíteni, és ennek a területét mérjük.

Legyen tehát adott az $[a, b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvény. Osszuk fel az $[a, b]$ szakaszt n egyenlő részre és legyen $h = (b - a)/n$. A már ismert $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_i = a + ih$, $x_n = a + nh = b$ osztáspontokat kapjuk. A

$$\underline{t}_n = h \sum_{i=0}^{n-1} \min_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \quad \text{alsó közelítést}$$

és a

$$\overline{t}_n = h \sum_{i=0}^{n-1} \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \quad \text{felső közelítést}$$

az integrál definíciójánál használtuk. Numerikusan könnyebben kezelhető a

$$t_{n,bal} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

összeg.

A $\underline{t}_n$ -nél a téglalapok magassága az $f(x)$ minimuma, a $\overline{t}_n$ -nél az $f(x)$ maximuma az egyes részintervallumokon, míg a $t_{n,bal}$ esetén az (x_i, x_{i+1}) szakaszon a közelítő téglalap magassága az $f(x)$ függvénynek a bal oldali végpontban (x_i -ben) felvett értéke.

6. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

Hasonlóan közelíthetünk a jobboldali végpontokban felvett értékekkel. A

$$t_{n,jobb} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

összeget kapjuk.

Általában pontosabb közelítést kapunk, ha a $t_{n,bal}$ és $t_{n,jobb}$ számtani közepét vesszük, azaz az $[x_i, x_{i+1}]$ szakaszon a "függvény alatti területet" az $(x_i, x_{i+1}, f(x_{i+1}), f(x_i))$ csúcsokkal rendelkező trapéz területével közelítjük, mivel

$$\frac{1}{2}(f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

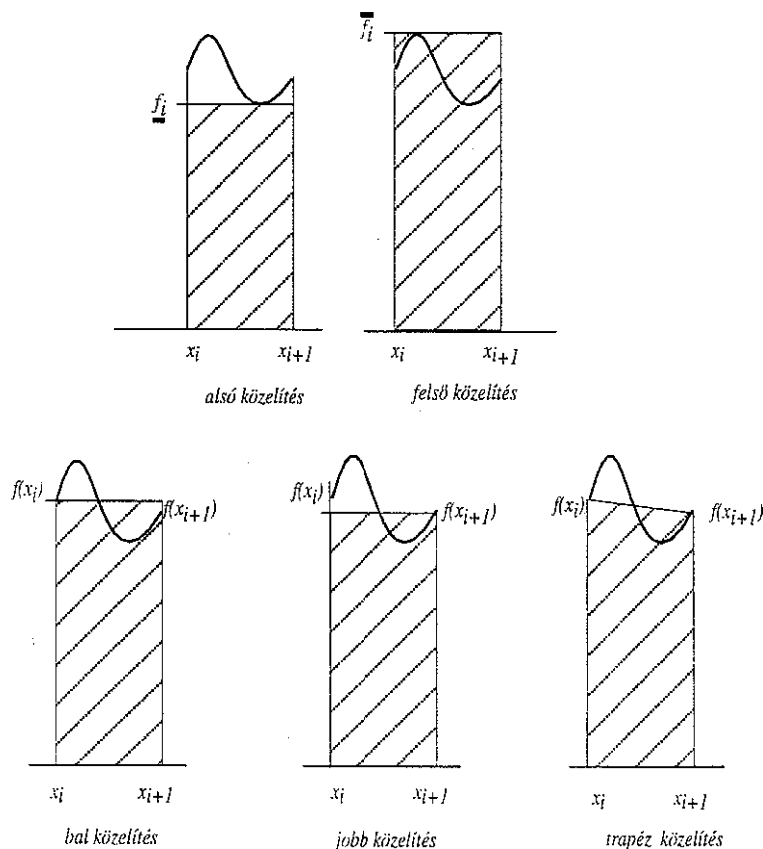
Ezért az így nyert

$$\begin{aligned} T_{n,trapéz} &= \frac{t_{n,bal} + t_{n,jobb}}{2} = \frac{b-a}{n} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \end{aligned}$$

szabályt trapézsabállynak nevezzük. Belátható, hogy folytonos f függvény esetén $\underline{t}_n, \overline{t}_n, t_{n,bal}, t_{n,jobb}$ és $t_{n,trapéz}$ egyaránt tetszőleges pontossággal közelíti az

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, ha $n \rightarrow \infty$. A különbség a közelítés sebességében van. A közelítésekkel kapcsolatban lásd az alábbi ábrát.



7. Többváltozós függvények

7.1. Definíció, ábrázolás

Az előző fejezetekben olyan függvényeket vizsgáltunk, amelyek értelmezési tartománya a valós számok részhalmaza. Ekkor a független változót gyakran az idővel azonosítjuk. A fizikai testek térben helyezkednek el. A tér pontjait az (x, y, z) koordinátahármasokkal azonosítjuk. Ezért egy test hőmérséklete, sűrűsége, egy oldat töménysége $f(x, y, z)$ alakú *háromváltozós függvényekkel* írható le, ahol x, y, z változók egymástól függetlenül változnak. De ha a koncentráció például az időben is változik, akkor a folyamatot, a koncentrációt az adott t pillanatban és (x, y, z) helyen $f(t, x, y, z)$ alakú *négyváltozós függvénnyel* jellemezhetjük.

Az olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya valamely $\mathbf{R}^n$ halmaz részhalmaza, más szavakkal, több egymástól független valós változója van, **többváltozós függvényeknek** nevezzük. Egy kétváltozós függvény értelmezési tartománya a sík $(\mathbf{R}^2)$ részhalmaza, egy háromváltozós függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}^3$ -nak részhalmaza.

7.1. Példa. Az $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ függvénynek a $D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ halmaz, a sík pozitív negyede az értelmezési tartománya. Az $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvénynek az $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmaz, az egységsugarú zárt körlap az értelmezési tartománya.

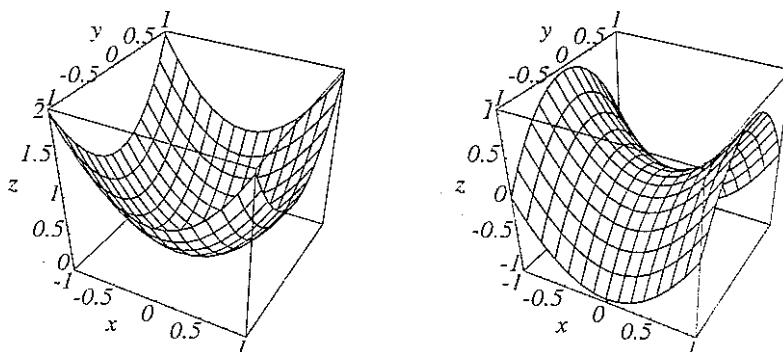
A többváltozós függvények lehetnek szám- és vektorértékűek is (lásd az előző fejezetet). Ebben a fejezetben a számértékű többváltozós függvényekkel foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért főként az $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ függvényeket tekintjük. Meggondolásaink általában érvényesek maradnak $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ és általánosabb $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ függvényekre is értelemszerű módosításokkal. Ezekre a megfelelő helyeken utalni fogunk.

7.1.1. Ábrázolás grafikonnal

A függvények grafikonja definíció szerint az $(a, f(a))$ pontpárok halmaza. Ha $a = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, akkor a grafikon egy $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D_f \subseteq \mathbf{R}^2\}$ az $\mathbf{R}^3$ tér részhalmaza, amely az (x, y, z) koordinátarendszerben ábrázolható. A z koordinátatengely a függvényértékek koordinátája. Ha a függvény három- vagy többváltozós, akkor a grafikon $\mathbf{R}^4$ vagy valamely $\mathbf{R}^n$ ($n > 3$), ezért nem tudjuk ábrázolni. Ezért más megjelenítési ábrázolási módszerekre is szükség lesz.

Kétváltozós függvények grafikonját síkban perspektivikusan ábrázoljuk. Azonban egy térbeli felületet nehéz olyan pontosan ábrázolni, mint például a síkbeli görbéket. Ezért a grafikont ún. vonalhálók segítségével jelenítjük meg.

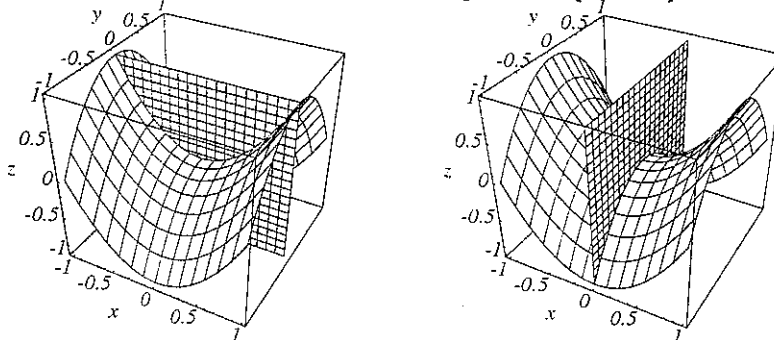
A változók egyikét rögzítjük valamely értéken. A függvényt $y = konstans$ és $x = konstans$ egyenesek mentén számoljuk ki. Ekkor egyváltozós függvényeket kapunk, amelyeket ábrázolni tudunk. Ezt több érték mellett mindkét változó esetén megtesszük. Általában egyenletes beosztásokat választunk. A kapott $(x, c, f(x, c))$ és $(c, y, f(c, y))$ görbéket ábrázoljuk az (x, y, z) koordinátarendszerben. Számítógéppel a vonalak közé felületet feszíthetünk ki, amely közelíti (!) a függvény grafikonját. A közelítés annál pontosabb, minél több $y = konstans$ és $x = konstans$ egyenes mentén számoltunk. Az eredményt az $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvények esetén az alábbi ábra mutatja.



7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Megjegyezzük, hogy valamely változó, vagy változók rögzítése általános eljárás, amely a vizsgált problémát egyszerűsíti különösen a három- és többváltozós esetekben.

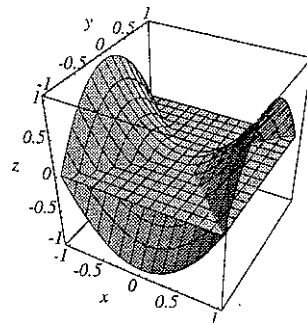
A kétváltozós esetben az y változó y_0 értéknél való rögzítésének grafikus jelentése, hogy a grafikont $\mathbb{R}^3$ -ban az $\{y = y_0\}$ síkkal (az (x, z) síkkal párhuzamos, az y tengelyt y_0 -ban metsző sík) elmetsszük. Az x változó rögzítése x_0 -ban a grafikon $\{x = x_0\}$ síkkal való elmettését jelenti.



7.1.2. Ábrázolás szintvonalakkal, szintfelületekkel

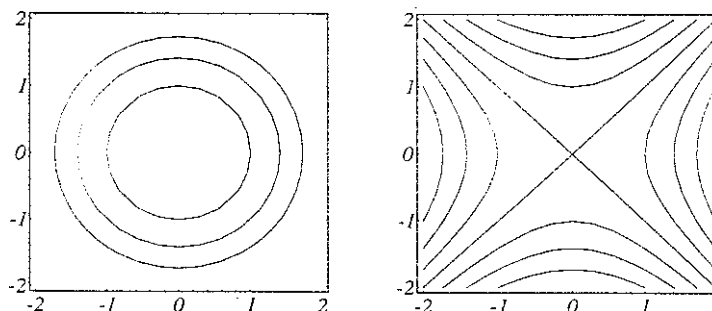
A többváltozós függvények megjelenítése lehetséges az ún. szintvonalak segítségével. Alkalmazzuk a térképek készítésénél a magasságok és mélységek jelzésére bevált technikát. Ott síkban rajzolják meg az azonos magasságokat jelző vonalakat.

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény, és legyen a z_0 érték adott. A függvény $\mathbb{R}^3$ -beli grafikonját metsszük el a $z = z_0$ síkkal, vagyis az (x, y) síkkal párhuzamos, a z -tengelyt a z_0 értéknél metsző síkkal. A metszévonal bármely (x, y, z) pontjára $z = z_0$, és $f(x, y) = z_0$. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény grafikonjának a $z = 0$ síkkal való metszetét láthatjuk az ábrán.



A metszévonalat vetítsük az (x, y) síkra! A kapott görbe az értelmezési tartomány azon pontjainak a halmaza, amelyekre $f(x, y) = z_0$. Az $f(x, y) = z_0$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmazát nevezzük az $f(x, y)$ függvény z_0 -hoz tartozó szintvonalának.

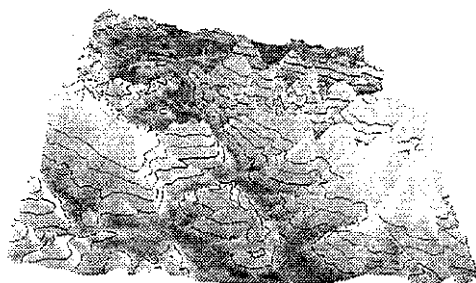
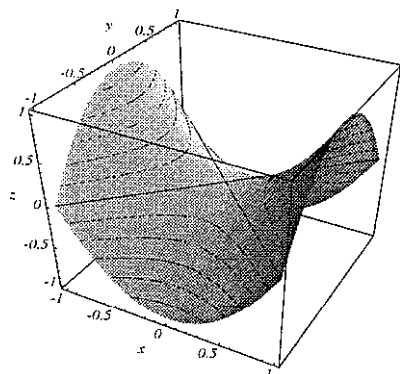
A függvény pontosabb ábrázolásához több szintvonalra van szükség. Ekkor a térképekhez hasonlóan a vonalakhoz írjuk a megfelelő függvényértéket. Az egyes szintek közötti átmeneteket gyakran a szín illetve színrnyalat változása jelzi. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ és a $g(x, y) = x^2 - y^2$ függvények $z_0 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ szintvonalait látjuk a következő ábrákon.



7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

A grafikon és a szintvonalak együttesen adják a térképészetben elterjedt háromdimenziós térképet. Ekkor a grafikonon megjelöljük az (x, y) síkkal párhuzamos síkokkal való metszés során kapott metszésvonalakat.

Az ábrán az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény "szintvonalas grafikonja" és egy valódi háromdimenziós szintvonalas térkép látható.



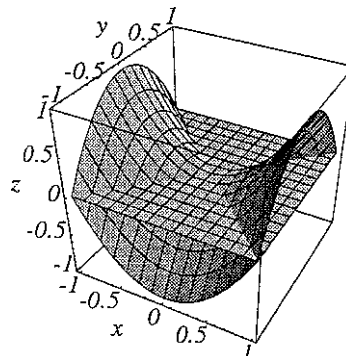
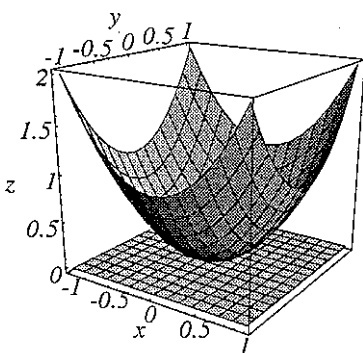
Ha a függvény háromváltozós, akkor az $f(x, y, z) = konstans$ egyenleteket kielégítő halmazok felületek $\mathbb{R}^3$ -ban. Például az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény szintfelületei az origó középpontú gömbök.

7.2. Szélsőértékek, parciális deriváltak

A szélsőértékek keresése a többváltozós függvények esetében is fontos probléma.

Az (x_0, y_0) pont lokális maximumhelye az $f(x, y)$ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek, ha van egy (x_0, y_0) pont körüli körlap, melynek minden pontjában $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Az (x_0, y_0) pont lokális minimumhely, ha $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ az (x_0, y_0) közelében.

A grafikonokat ismerve láthatjuk, hogy az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvénynek a $(0, 0)$ pont lokális minimumhelye (baloldali ábra), de az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvénynek (nyeregfelület) sem minimuma, sem maximuma (jobboldali ábra).



Az egyváltozós esetben a szélsőértékek keresése szoros kapcsolatban van a monotonitással. Mivel a sík és tér pontjai közt nincs értelmezve a klasszikus $a < b$ fogalom, ezért a monotonitás fogalmának a többváltozós függvények esetén nincs értelme. Értelmezhető azonban, ha az $f(x, y)$ függvényt egyváltozóssá egyszerűsítjük az egyik változó rögzítésével, mint ahogyan azt a fentiekben az ábrázolás kapcsán tettük.

Legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ rögzített pontja az értelmezési tartománynak. A $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós függvény monotonitása, szélsőértékei a derivált segítségével vizsgálhatók. Ha $f(x, y)$ -nak (x_0, y_0) -ban szélsőértéke van, akkor $g(x)$ -nek is szélsőértéke van x_0 -ban és

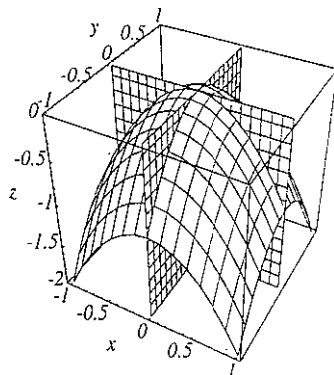
$$g'(x_0) = 0.$$

7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

A $h(y) = f(x_0, y)$ deriváltjára pedig

$$h'(y_0) = 0,$$

ha az $f(x, y)$ -nek szélsőértéke van (x_0, y_0) -ban.



Egy fontos eredményre jutottunk. Az egyik változó rögzítésével kapott egyváltozós függvények deriváltjának speciális szerepe van a többváltozós függvények vizsgálatában.

7.1. Definíció. Az $f(x, y)$ függvény y változóját rögzítve kapott x -től függő egyváltozós függvény deriváltját az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölése

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Az x változót rögzítve az y -től függő egyváltozós függvény deriváltja az $f(x, y)$ függvény y -szerinti parciális deriváltja, melynek jelölése

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Formálisan

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.\end{aligned}$$

A parciális deriváltak kiszámítása a definíció alapján a deriválás ismert szabályai szerint történik. Eszerint

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y$$

A $\partial f / \partial x$ parciális derivált az $f(x, y)$ függvény x -irányú, míg $\partial f / \partial y$ az $f(x, y)$ függvény y irányú változásának mértékét mutatja.

A parciális deriváltak fogalmának felhasználásával megfogalmazhatjuk a fentebb bebizonyított állítást a szélsőértékre vonatkozóan.

7.1. Tétel. Legyen $f(x, y)$ parciálisan differenciálható valamely téglalapon $\mathbb{R}^2$ -ben. Az $f(x, y)$ szélsőértékhelyei kielégítik a

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

egyenletrendszert.

Az egyváltozós függvényeknél tapasztaltak sejtetik, hogy ez nem elegendő. Grafikus tapasztalataink is ezt igazolják. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvényt parciális deriváltjainak zéróhelye az origó, de az nem szélsőérték hely.

A konvexitás valamilyen általánosítására van szükségünk, hogy a tételbeli egyenletrendszer megoldásai közül kiválasszuk a szélsőérték helyeket. A konvexitás többváltozós kiterjesztése nem

7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

tárgya a tananyagnak. Csak a legszükségesebb segédeszközöket tekintjük. Tegyük fel, hogy léteznek és folytonosak a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

második parciális deriváltak is. Belátható, hogy ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Igaz a következő tétel.

7.2. Tétel. Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) megoldása az

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

egyenletnek.

Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ összes második parciális deriváltja folytonos (x_0, y_0) -ban és

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \Big|_{(x, y) = (x_0, y_0)} > 0,$$

Ha $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$, akkor (x_0, y_0) -ban $f(x, y)$ -nak minimuma van.

Ha $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$, akkor maximum van.

Ha

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \Big|_{(x, y) = (x_0, y_0)} < 0,$$

akkor nincs szélsőérték.

Ellenőrizzük a fenti tétel segítségével az elemi megfontolások alapján már ismert tényeket. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Az $2x = 0$; $2y = 0$ rendszer megoldása $(0, 0)$ és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0,$$

tehát a $(0, 0)$ minimum pont.

Ugyanígy belátható, hogy az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvénynek a $(0, 0)$ -ban nincs szélsőértéke. Ez a függvény grafikonjának ismeretében várható volt.

7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

A kettőnél több változó esetén a parciális deriváltak hasonló módon definiálhatók. Az n változós $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény x_i szerinti parciális deriváltja a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

vagyis az x_i kivételével minden változót konstansnak tekintve, a kapott egyváltozós függvényt (x_i -től függ) deriváljuk. $\partial f / \partial x_i$ a függvény x_i irányú változását mutatja. A második parciális deriváltak hasonlóan definiálhatók:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény szélsőérték helyei kielégítik az

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

egyenletrendszer.

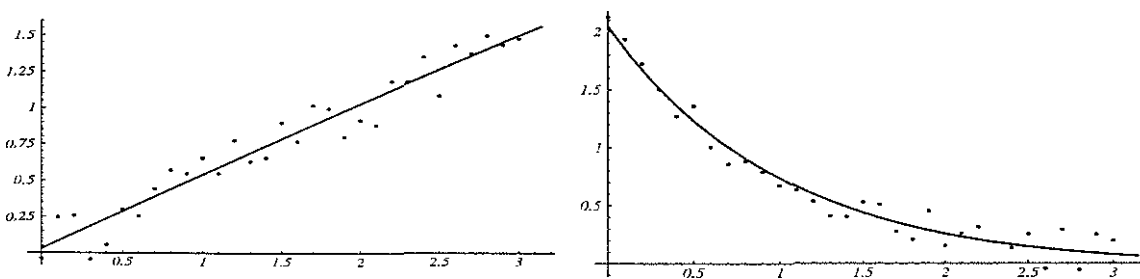
A kétváltozós esethez hasonló elegendő feltétel megfogalmazása túl bonyolult, ezért mellőzzük. Igaz azonban, ha a függvény

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_i x_i + b_i)^2$$

alakú, akkor a függvénynek van szélsőértéke. Ha azonban az összegben valamelyik $(a_i x_i + b_i)^2$ tag előjele negatív, akkor a függvény egy n -dimenziós nyeregfelület, és így nincs szélsőértéke.

7.3. A legkisebb négyzetes közelítés

Tegyük fel, hogy mérések során kaptuk az $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ számpárokat, pontokat az (x, y) koordinátarendszerben. A pontok elhelyezkedése sejteti, hogy az x, y mennyiségek között milyen függvénykapcsolat állhat fenn. A baloldali esetben a pontok valamilyen egyenes mentén, míg a jobboldali ábrán egy csökkenő exponenciális függvény mentén helyezkednek el.



Feladatunk, hogy valamely függvénycsaládból válasszuk ki azt a függvényt, amely az adott ponthalmazt legpontosabban közelíti meg. A legpontosabb közelítés azt jelenti, hogy a pontok és a keresett $h(x)$ függvény közti négyzetes távolság, azaz

$$\sum_{i=1}^n (y_i - h(x_i))^2$$

7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

az adott függvénycsaládhoz tartozó függvények között minimális. A függvénycsalád megadása paraméterekkel történik. Ha a pontpárok egyenes mentén helyezkednek el, akkor a pontokat az

$$y = ax + b$$

alakú, míg az exponenciálisan kapcsolat esetén például $y = b10^{ax}$ alakú függvényekkel közelíthetjük. Bonyolultabb problémáknál több paraméter is szükséges lehet.

A feladat tehát a közelítő függvénycsalád paramétereinek meghatározása. Ez egy többváltozós szélsőértékszámítási feladat.

A probléma megoldását gyakran visszavezetjük a legegyszerűbb esetre, egyenessel való közelítés esetére. Ezért a lineáris közelítés problémáját vizsgáljuk a továbbiakban.

Tekintsük az

$$y = ax + b$$

alakú lineáris közelítést.

Az egyenes értéke az x_i helyen

$$ax_i + b.$$

Az y_i -től való eltérés

$$\delta_i = y_i - (ax_i + b).$$

Az (x_i, y_i) ($i = 1 \dots n$) pontoktól való négyzetes eltérés akkor a legkisebb, ha az

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

függvénynek minimuma van. Képezzük a $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = - \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = - \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b).$$

Oldjuk meg a

$$\sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) = 0$$

egyenletrendszert:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0.$$

Vezessük be az $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$ jelöléseket. Az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ az x_i illetve az y_i számok ($i = 1 \dots n$) átlagai. E jelölésekkel kapjuk, hogy

$$b = -a\bar{x} + \bar{y} \quad (\bar{y} = a\bar{x} + b),$$

$$\sum y_i x_i - a \sum x_i^2 - n\bar{x}(-a\bar{x} + \bar{y}) = 0,$$

$$a(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) = \sum y_i x_i - n\bar{x}\bar{y}.$$

Végül:

$$a = \frac{\sum y_i x_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

A kapott a együtthatót a statisztikában lineáris regressziós együtthatónak, a kapott

$$y = ax + b$$

7. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

egyenest pedig regressziós egyenesnek nevezzük. A b értékre kapott összefüggés azt fejezi ki, hogy az egyenes átmegy az $(\bar{x}, \bar{y})$ ponton. Itt nem foglalkozunk azzal, hogy a közelítés mennyire jó. Csak azt tudjuk, hogy az egyenesek között a legjobb. A közelítés jóságára vonatkozó részletesebb elemzések a statisztika tárgykörébe tartoznak.

Végül ejtsünk néhány szót a lineáris közelítésre való visszavezetésről. Ha exponenciális

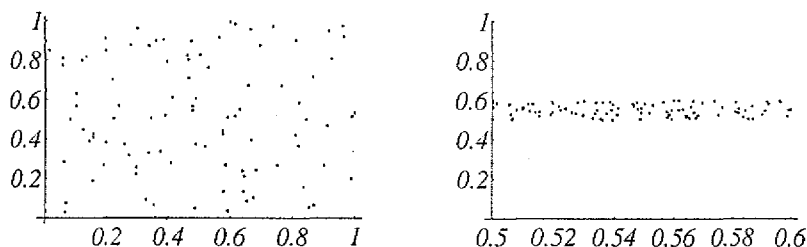
$$y = B10^{ax}$$

alakú összefüggést sejtünk, akkor mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk az

$$\lg y = \lg B + ax$$

egyenlőséget. Ugyanazt tesszük, mint a függvények szemilogaritmikus ábrázolásánál (1.22. fejezet). Az y logaritmusa és x között már lineáris az összefüggés. Ezért az $\{(x_i, \lg y_i)\}$ értékpárookra a fenti lineáris közelítést alkalmazhatjuk. Ha a regressziós egyenes $y = ax + b$, akkor az eredeti pontthalmazt az $f(x) = 10^{ax+b}$ függvény közelíti legjobban. Ugyanezt a függvényt kapnánk, ha az eredeti pontsorozatot közvetlenül a $y = B10^{ax}$ alakú exponenciális függvénnyel közelítenénk.

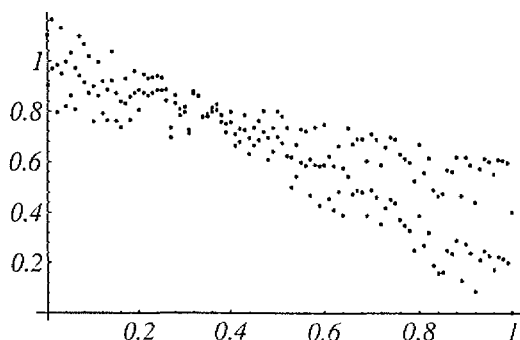
Befejezésül tekintsünk néhány speciális tulajdonságú adathalmazt, melyeknél további vizsgálatok nélkül nincs értelme jól illeszkedő függvényt keresni.



A baloldali ábrán olyan pontthalmazt látunk, ahol az (x_i, y_i) pontok véletlenszerűen helyezkednek el. Láthatóan nincs kapcsolat a két koordináta között.

A jobboldali ábrán az adatok egy $y = konstans$ egyenest követnek. Az x változása esetén y konstans marad, ami arra utal, hogy az y koordináta által leírt tulajdonság nem függ x -től.

Utolsó ábránkon az adathalmaz kettős tulajdonságú. A pontok két egymást metsző egyenest követnek. Ennek több oka lehet, de felmerül a gyanú, hogy két különböző adathalmaz összekeveredett, a mérések körülményei változtak, vagy a mintavétel nem volt megfelelő.



8. Közönséges differenciálegyenletek

8.1. A differenciálegyenletek definíciója, geometriai jelentése

Emlékezzünk vissza a primitív függvény keresésének feladatára (5.1. fejezet). Ha adva van az $f(x)$ függvény, akkor keressük azt az $F(x)$ függvényt, amelynek deriváltja $f(x)$. Más szavakkal, az $f(x)$ függvényt ismerve meg kell oldanunk az

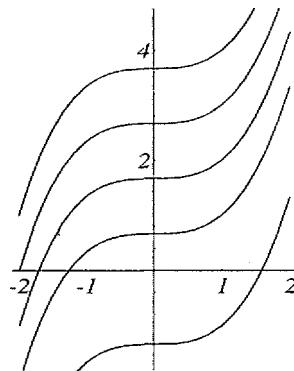
$$F'(x) = f(x)$$

egyenletet. Az egyenlet megoldásai az $f(x)$ primitív függvényei, amelyek egy hozzáadott konstansban különböznek egymástól. Pontosán egy megoldást kapunk, ha az $F(x)$ függvényt valamely x_0 pontban rögzítjük. Ez a megoldás

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(u) du$$

alakú. Ha például $f(x) = x^2$, akkor

$$F(x) = c + \frac{x^3}{3}, \quad F(0) = c.$$



Ebben a fejezetben a primitív függvény keresésének feladatát általánosítjuk.

A primitív függvény keresésének egyféle gyakorlati interpretációjaként idézzük fel a mozgó test példáját. Legyen $x(t)$ a test helyzete a t pillanatban. Feladatunk, hogy az $x'(t)$ pillanatnyi sebesség ismeretében meghatározzuk magát az $x(t)$ függvényt.

A problémák többségében azonban nem ismerjük az $x'(t)$ sebesség explicit képletét, csupán a függvény, a deriváltja és az idő között ismerünk valamilyen összefüggést, törvényt. Például, Newton második törvényében

$$x'' = \frac{F(x, t)}{m},$$

ahol $x''(t)$ a test gyorsulása és az F erő nemcsak időben változhat, hanem a helytől is függ. Ez a helyzet a matematikai inga esetén, ahol az erő a kitérés szögének szinuszával arányos és a kitéréssel ellentétes irányú (3.6. pont). Így egy

$$x'' = -k \sin x$$

alakú egyenlethez jutunk, ahol az $x(t)$ függvényt kell meghatároznunk. Az összefüggés ennél sokkal bonyolultabb is lehet.

A fenti fizikai interpretáció az alapja, hogy a továbbiakban a független változót t -vel jelöljük, a keresett függvényre az $x(t), y(t), z(t)$ jelöléseket használjuk. A jelölést egyszerűsítendő, a függvények argumentumait gyakran nem írjuk ki.

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Általában, az

$$F(t, x, x') = 0$$

egyenletet, amely kapcsolatot teremt egy $x(t)$ függvény, $x'(t)$ deriváltja és a t független változó között, elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük. Ha innen x' kifejezhető, akkor az

$$x' = f(t, x)$$

explicit, elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk.

Számos kémiai, biológiai folyamat változása elsőrendű egyenlet szerint történik. Speciális esetként kapjuk az

$$x' = f(t)$$

differenciálegyenletet, melynek megoldásai, mint tudjuk, az $f(t)$ primitív függvényei.

Ha az egyenletben szerepelnek magasabb rendű deriváltak is, és az előforduló legmagasabb rendű derivált $x^{(n)}(t)$, akkor n -edrendű differenciálegyenletről beszélünk. A matematikai inga egyenlete másodrendű egyenlet. Megjegyezzük, hogy a Newton-törvény szerint a fizikai mozgások mozgástörvényét másodrendű differenciálegyenletek írják le.

A differenciálegyenletek elméletének alapvető fogalmait az elsőrendű egyenleteken keresztül mutatjuk be. Később másodrendű egyenletekkel is foglalkozunk (8.10. pont).

A differenciálegyenlet megoldásakor feladatunk ugyanaz, mint az integrálás esetén. Az egyenletből határozzuk meg az ismeretlen $x(t)$ függvényt. Ezért nevezzük gyakran a differenciálegyenlet megoldásának folyamatát az egyenlet integrálásának.

Az elsőrendű differenciálegyenlet megoldásának nevezzük minden olyan differenciálható függvényt, amely kielégíti az egyenletet.

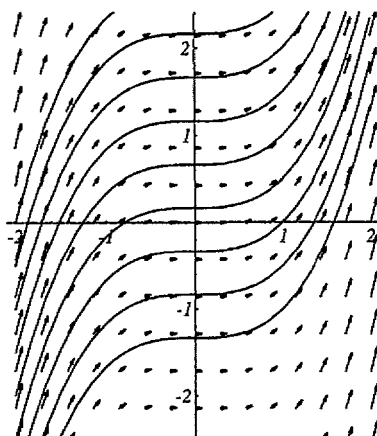
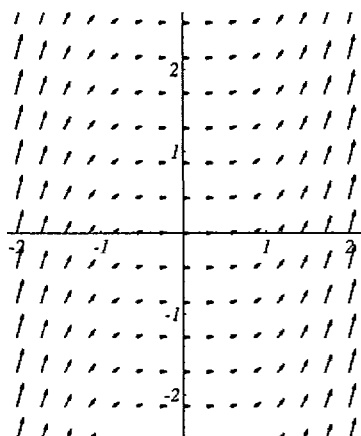
Geometriai jelentés

A differenciálegyenlet geometriai jelentését a határozatlan integrálnál látottakhoz hasonlóan kapjuk.

Tekintsük ismét az

$$x' = t^2$$

egyenletet. Ismételjük el a határozatlan integrál geometriai interpretációjánál elmondottakat (5.1. fejezet). Ha az egyenlet valamely $x(t)$ megoldása átmegy a (t_0, x_0) ponton, akkor ott a grafikon érintőjének meredeksége t_0^2 . Ezért az érintő egy irányvektora $(1, t_0^2)$. Rajzoljuk meg a megfelelő $(1, t^2)$ irányvektort minden (t, x) pontban. Az ábrázolhatóság miatt vehetjük a vektorok valamilyen konstansszorosát is. Az egyenlet megoldásai (a t^2 primitív függvényei) minden pontban simán érintkeznek a megfelelő vektorral. A 5.1. fejezetben nem vektorokat, hanem érintődarabokat rajzoltunk. A vektorok előnye, hogy nem csak az érintkezés tényét, hanem a megoldások változásának irányát is jelzik. Az eredményt láthatjuk az alábbi ábrákon.



8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

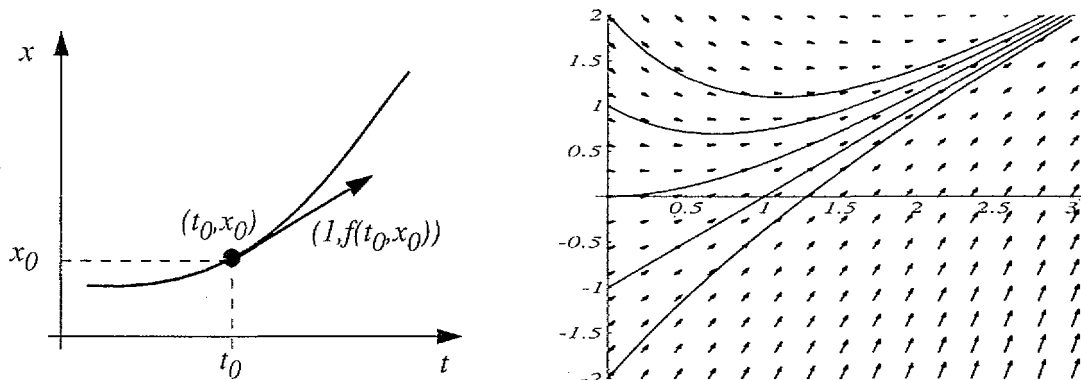
Alkalmazzuk ugyanezt a technikát az általános

$$x' = f(t, x)$$

egyenletre. Ha $x(t)$ az egyenlet egy (t_0, x_0) ponton átmenő megoldása, akkor $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, ezért az érintő irányvektora $(1, f(t_0, x_0))$. Adott (t_0, x_0) pontból indulva rajzoljuk meg az $(1, f(t_0, x_0))$ irányvektort (baloldali ábra). Ezt minden pontra elvégezve a differenciálegyenlethez tartozó **iránymezőt** kapunk. Vegyük észre, hogy az iránymező megrajzolásához nem kell az egyenletet megoldanunk. Az egyenlet bármely $x(t)$ megoldásának $(t, x(t))$ pontbeli érintője az iránymező innen induló vektora. Megjegyezzük, hogy a jobb ábrázolhatóság kedvéért a vektorokat egységesen kicsinyíthetjük, vagy nagyíthatjuk.

A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy a differenciálegyenlet megoldása az iránymezőhöz illeszkedő függvények keresését jelenti.

A jobboldali ábra az $x' = -x + t$ egyenlet iránymezőjét és néhány megoldását tartalmazza.



Ezután a vizsgált egyenletek megoldásait mindig az iránymezővel együtt ábrázoljuk. Az iránymező segít elképzelni a fel nem rajzolt megoldásokat is.

8.2. A kezdetiérték probléma és megoldása

A geometriai értelmezés alapján világos, az egyenlet megoldása nem egyetlen függvény, hanem egy *függvénysereg*.

Az egyenlet megoldásaként kapott függvények seregét a differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük. Speciálisan, az $x' = f(t)$ egyenlet általános megoldása az $f(t)$ függvény határozatlan integrálja.

Ha a keresett megoldás értékét rögzítjük valamely t_0 pillanatban, az

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

kezdetiérték problémát kapjuk. Ennek megoldását a kezdetiérték probléma megoldásának vagy partikuláris megoldásnak nevezzük.

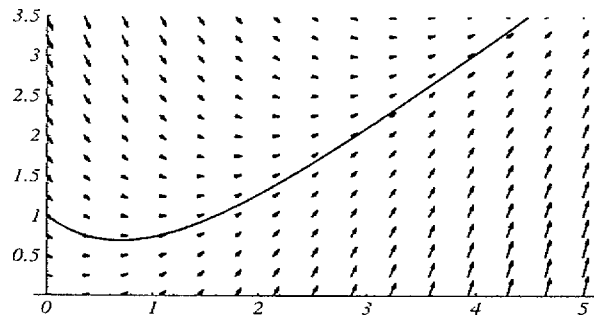
A határozatlan integrál példája alapján sejthetjük, hogy a kezdetiérték problémának egyetlen megoldása van. Azonban az egyenlet jobboldalán álló függvény igen általános lehet, ezért, előfordulhat, hogy nincs az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldás. Máskor a megadott kezdeti feltételt több függvény is kielégíti. Ezeket a szélső eseteket zárja ki az $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás létezését és egyértelműségét biztosító alábbi tétel.

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

8.1. Tétel. Ha az $x' = f(t, x)$ differenciálegyenlet jobboldala (kétváltozós függvény!) folytonos mindkét változója szerint valamely, az (t_0, x_0) pont körüli kör belsejében, akkor az $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték problémának legalább egy megoldása létezik.

Ha a $\partial f(t, x)/\partial x$ parciális derivált létezik és folytonos valamely, a (t_0, x_0) pont körüli kör belsejében, akkor az $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték problémának pontosan egy megoldása létezik.

Az ábrán az $x' = -x + t$, $x(0) = 1$ kezdetiérték probléma megoldását látjuk.



A magasabb rendű egyenletek esetén gyakran előfordul, hogy olyan megoldást keresünk, amelynek az $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$ feltételeket kell kielégíteni. Például a koncentráció kezdeti- és végértéke adott, és az oldódás lefolyása érdekel bennünket. Az ilyen feladatokat **peremérték problémának** nevezzük.

Vannak egyenletek, ahol az egyenlet megoldását nem lehet formulával előállítani, mint például az

$$x'' = -\sin x,$$

másodrendű egyenlet esetén. Ekkor különösen fontosak az olyan módszerek, amelyekkel az eredeti egyenlet megoldásait közelítjük, vagy a megoldásainak tulajdonságait azok ismerete nélkül próbáljuk jellemezni.

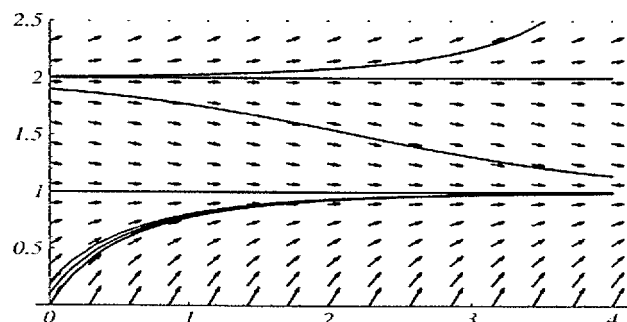
A vázolt problémák, feladatok messze túlmutatnak kereteinken. A továbbiakban a gyógyszerésztudományban, orvostudományban leggyakrabban előforduló egyenletekkel foglalkozunk.

8.3. Egyensúlyi helyzetek

Legyen az x_0 érték olyan, hogy minden t -re $f(t, x_0) = 0$. Ekkor az $x(t) = x_0$ konstans függvény megoldása az $x'(t) = f(t, x)$ differenciálegyenletnek. Fordítva, ha az $x(t) = x_0$ függvény megoldás, akkor $f(t, x_0) = 0$ minden t -re (lásd a 4.1 tételt). Ezekről az értékekről a megoldás nem mozdul el, egyensúlyban van.

A differenciálegyenlet konstans megoldásait az egyenlet **egyensúlyi helyzeteinek** nevezzük. Az egyensúlyi helyzetek az $f(t, x)$ függvény t -től független zéróhelyei.

8.1. Példa. Az $x' = (x - 1)(x - 2)$ egyenlet egyensúlyi helyzetei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.



8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

8.2. Példa. Az $x' = -x + t$ egyenletnek nincs egyensúlyi helyzete, mert a $-x + t = 0$ egyenlet megoldása $x(t) = t$ nem konstans (nem is megoldása az egyenletnek).

8.4. Autonóm differenciálegyenletek

Vegyük észre a 8.1. pontbeli egyenletek ($x' = t^2$, $x' = -x + t$) iránymezői és megoldásai közti különbséget. Az elsőnél adott t_0 esetén az érintővektorok párhuzamosak minden $t = \text{konstans}$ függőleges egyenes mentén, és a megoldásokat függőlegesen eltolva ismét megoldást kapunk (az egyenlet jobboldala csak t -től függött!). Az utóbbi esetben ez nem teljesül. Sőt, éppen fordítva, ha az egyenlet

$$x' = f(x)$$

alakú (az egyenlet jobboldala nem függ t -től!), akkor az érintővektorok az $x = x_0$ egyenesek mentén párhuzamosak, ugyanis az $(1, f(x))$ vektor nem függ a t független változótól. Ezért ha egy megoldást az t -tengely mentén eltolunk, szintén megoldást kapunk. Ez azt jelenti, hogy a folyamat viselkedését nem befolyásolja mikor kezdődik. Ennek nagy gyakorlati jelentősége van. Például a Newton-törvény szerint az inga lengésének lefolyása nem függ attól, hogy reggel vagy délután kezdődik a lengés.

Az olyan egyenleteket, amelyek jobboldala nem függ explicit módon t -től, autonóm egyenleteknek nevezzük. Zárt, a külvilág hatásától független rendszerek viselkedését írják le ilyen egyenletek. A következő fejezetekben főként ilyen egyenleteket vizsgálunk.

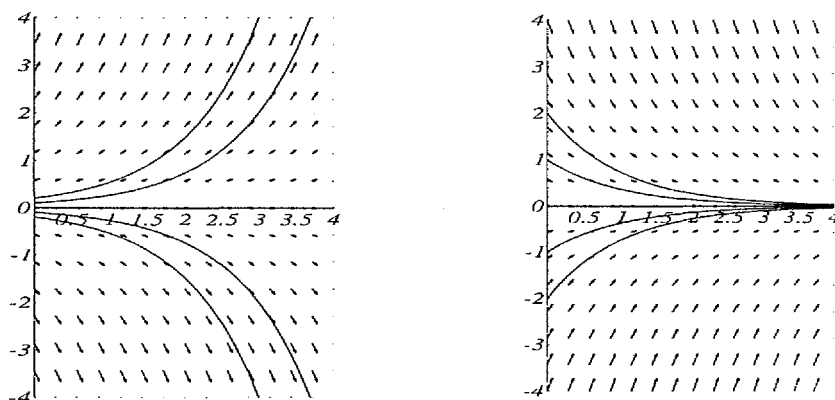
8.5. Az $x' = ax$ egyenlet

Az $x' = -x$ egyenlet speciális esete az egyik legegyszerűbb, de igen fontos

$$x' = ax$$

differenciálegyenletnek, ahol $a \neq 0$ konstans. Itt a változás sebessége arányos a függvény értékével. Ilyen egyenletre vezetnek a nukleáris robbanás ($a > 0$), nukleáris bomlás ($a < 0$) vizsgálata és egyszerű szaporodási problémák. Ezekkel később részletesen vizsgáljuk.

Az $a = \pm 1$ esetekben az iránymezőket és néhány megoldást láthatunk az alábbi ábrán.



Próbáljuk az egyenletet integrálni. Az exponenciális függvények deriváltját ismerve, sejtjük, hogy a megoldás valamilyen exponenciális függvény lesz.

Ha $x \equiv 0$, akkor $x' \equiv 0$, következésképpen az $x \equiv 0$ függvény megoldás. Ha $x \neq 0$, akkor

$$\frac{x'}{x} = a,$$

amit integrálva kapjuk, hogy

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int a dt = a \cdot t + c_1.$$

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A baloldalt helyettesítéssel integrálva

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c_2.$$

Legyen $c = c_1 - c_2$. Innen

$$\begin{aligned} \ln |x| &= at + c, \\ |x| &= e^c \cdot e^{at} \quad (e^c > 0), \end{aligned}$$

továbbá

$$x(t) = Ce^{at},$$

ahol $C = \pm e^c$, már lehet negatív vagy 0. A $t = 0$ behelyettesítéssel adódik, hogy $C = x(0)$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$x(t) = x(0)e^{at}.$$

A kapott eredmény teljesen egybeesik elvárásunkkal, mivel $(e^{at})' = ae^{at}$. Látható, hogy ha $x_0 > 0$, akkor a megoldások $a > 0$ esetén exponenciálisan növekednek, $a < 0$ esetén pedig csökkennek. Alkalmazásként tekintsünk néhány gyakorlati problémát.

8.5.1. Egyszerű szaporodási folyamat

Tekintsünk egy populációt (állat, növény stb.). Jelölje $N(t)$ a populáció egyedeinek számát. *Tegyük fel, hogy a populációt egy egyed sem hagyja el, senki nem hal meg, és a szaporodásnak a környezet sem szab határt.*

Nyilván $N(t)$ értékei egész számok, de nagy elemszámú populációnál folytonosnak, differenciálhatónak tekinthetjük. *Tegyük fel továbbá, hogy a szaporodás egyszerű osztódás, ami egy pillanat alatt végbemegy. Nincs eltolódás a fogamzás és a szaporodás ideje között! Minden egyed azonos időnként osztódik. Ekkor a születések időbeli eloszlása egyenletes.* Egy sejt osztódását az exponenciális függvény definíciójánál már tekintettük. Ezért a népesség számának megváltozása Δt idő alatt

$$\Delta N = \lambda \cdot N \Delta t,$$

ahol λ statisztikusan meghatározott arányossági tényező. Ha $\Delta t \rightarrow 0$, az

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N,$$

egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$, ahol N_0 az egyedek száma a kezdeti pillanatban.

8.5.2. Születési-halálozási folyamat

A populáció létszámának változása egyenlő a születések száma mínusz a halálozások száma, azaz

$$\Delta N = \Delta S - \Delta H.$$

Innen a Δt idő alatti változás

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{\Delta H}{\Delta t}$$

Mint az előző példában, ha a populáció elég nagy, $\Delta t \rightarrow 0$ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dH}{dt}$$

Az előző példa megfontolásaihoz hasonlóan

$$\frac{dS}{dt} = \lambda N, \quad \frac{dH}{dt} = \mu N,$$

ahonnan

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N.$$

Ha a születési ráta nagyobb, mint a halálozási, akkor a populáció nő, az ellenkező esetben pedig a populáció aszimptotikusan kihal.

8.6. Az $x' = ax + b$ differenciálegyenlet

Tekintsük az

$$x' = ax + b$$

egyenletet. A $b = 0$ esetben az $x' = ax$ egyenletet kapjuk vissza.

Az egyenletet az előző pontban alkalmazott módszerrel oldjuk meg. Keressük az $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást. Az egyenlet átalakításával kapjuk

$$x' = a \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

Feltehető, hogy $a \neq 0$, ui. ellenkező esetben az $x' = b$ egyenletet kapnánk, aminek megoldásai triviálisan az $x(t) = bt + c$ függvények. Vegyük észre, hogy ha $x = -\frac{b}{a}$, akkor $x' \equiv 0$, tehát az $x(t) = -\frac{b}{a}$ konstans függvény egyensúlyi helyzete az egyenletnek.

Ha $x \neq -\frac{b}{a}$, akkor

$$\frac{x'}{x + \frac{b}{a}} = a.$$

Innen integrálással kapjuk, hogy

$$\int \frac{x'}{x + \frac{b}{a}} dt = \int a \cdot dt = a \cdot t + c.$$

A baloldalon az $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ helyettesítéssel

$$\int \frac{dx}{x + \frac{b}{a}} = \ln \left| x + \frac{b}{a} \right|,$$

ahonnan

$$\ln \left| x(t) + \frac{b}{a} \right| = at + c$$

$$\left| x(t) + \frac{b}{a} \right| = e^{at+c} = C_0 e^{at} \quad (C_0 > 0).$$

Az abszolút értéket elhagyhatjuk, és nem kell külön kezelnünk az $x(t) = -b/a$ megoldást, ha a $C_0 > 0$ korlátozást feloldjuk. Így $x(t)$ -re általánosan kapjuk, hogy

$$x(t) = C e^{at} - \frac{b}{a}.$$

C jelentése pedig

$$x(0) = x_0 = C - \frac{b}{a}, \quad \text{ezért } C = x_0 + \frac{b}{a}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$x(t, x_0) = \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{b}{a}.$$

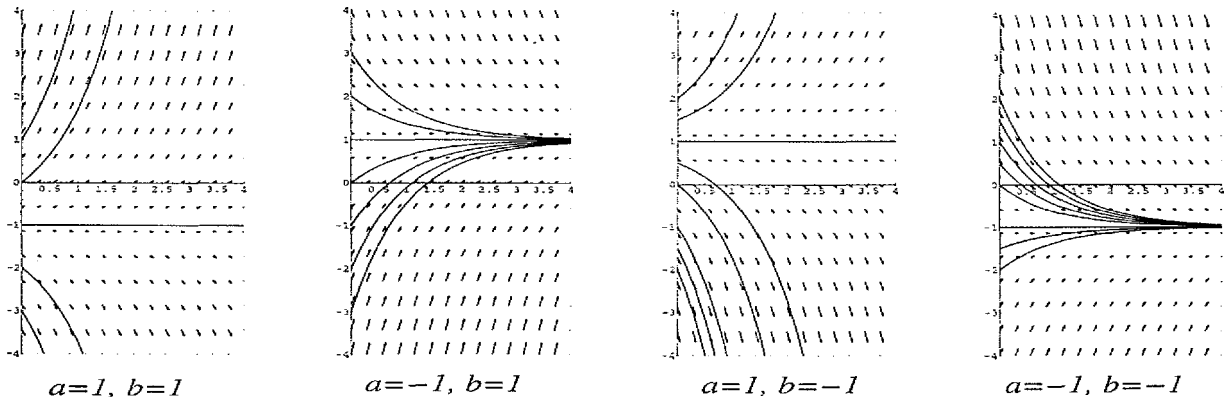
Vizsgáljuk meg, milyenek a megoldások az a és b különböző választásánál. A egyenletben az $a \cdot x$ tag az x értékével arányos változást jelent (pl. születés, nukleáris folyamat stb., lásd az előző pontot!). Ha $a > 0$, az x -szel arányos növekedést, szaporodást jelent (exponenciális

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

növekedés!), $a < 0$ esetén exponenciális csökkenéssel (halálozás, nukleáris lebomlás stb.) van dolgunk. Az egyenletben a b tag időtől, helytől függetlenül konstans mértékben növeli ($b > 0$) illetve csökkenti ($b < 0$) a folyamatot. Ennek jelentése lehet egyenletes sebesség; populációnál állandó, egyenletes bevándorlás ($b > 0$), illetve kivándorlás ($b < 0$), illetve egyenletes sebességű népszámszabályozó folyamat lehet. A szabályozásnál gondolhatunk, a termés betakarítására, a felesleges vadállomány rendszeres kilövésére vagy lehalászásra.

Gyógyszeradagolásnál az $a \cdot x$ tag ($a < 0$) a korábban beadott gyógyszer lebomlását írja le, míg a b tag $b > 0$ esetén folyamatos infúzió hatása, $b < 0$ pedig egyenletes sebességű gyógyszer-szint csökkentést, méregtelenítést (pl. dialízis) jelenthet. Megjegyezzük, hogy az időtől független sebességre vonatkozó feltétel a gyakorlatban nem mindig teljesül.

Az alábbi ábrák az iránymezőt és a megoldásokat mutatják $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ esetén.



A vázolt lehetséges interpretációk után tekintsünk néhány alkalmazást.

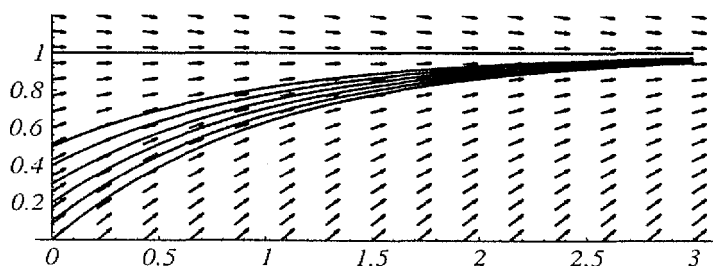
8.6.1. Korlátozott növekedés

Semmilyen organizmus vagy populáció nem növekedhet korlátlanul. Korlátozást jelent az élelem hiánya, a szűk lakóterület stb.

Tegyük fel, hogy az egyedek száma $x(t)$ nem haladhatja meg a B értéket, de $x(t)$ aszimptotikusan megközelítheti B -t. B közelében a növekedés egyre kisebb és kisebb. A növekedés arányos a $(B - x)$ különbséggel. Egy ilyen növekedési folyamatot az

$$x' = k(B - x)$$

egyenlet ír le ($k > 0$), amelynek általános megoldása $x(t, x_0) = (x_0 - B)e^{-kt} + B$. Az alkalmazás szempontjából csak az $0 \leq x(t) \leq B$ és $0 \leq x_0 \leq B$ esetekben van a megoldásoknak értelme. A $B = 1$, $k = 1$ esetet látjuk az alábbi ábrán.



8.6.2. Születési folyamat lehalászással

Tegyük fel, hogy az $x' = \lambda x$ törvény szerint szaporodó népességből μ sebességű kivándorlás vagy lehalászás történik, megakadályozandó a túlnépesedést. Ekkor a populáció létszámát az

$$x' = \lambda x - \mu$$

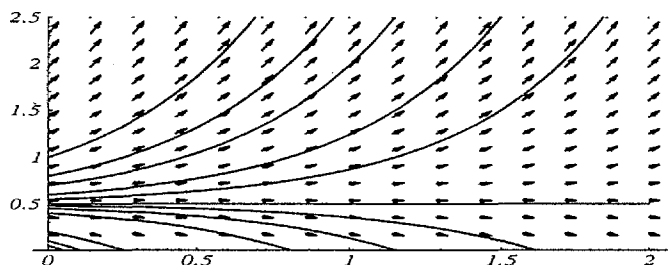
egyenlet írja le, ahol $\lambda > 0$ a szaporodási ráta, $\mu > 0$ a csökkenés sebessége. Az egyenlet egyensúlyi helyzete $\gamma = \mu/\lambda$. Az egyenlet megoldásának elemzésével könnyen látható, hogy ha a populáció kezdeti népessége nagyobb, mint γ , akkor a népesség az egyenletes lehalászás, kivándorlás ellenére növekszik. Azonban, ha a népesség száma kisebb, mint γ , akkor a populáció véges T idő alatt kihal. Ezt az időt könnyen kiszámíthatjuk a megoldások képletének ismeretében. Legyen $0 < x_0 < \gamma$. A 8.6. pontban, az általános megoldásra adott formulát felhasználva az

$$x(T, x_0) = (x_0 - \gamma)e^{aT} + \gamma = 0$$

egyenlőségéből kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\gamma}{\gamma - x_0} \right).$$

Az ábrán az $x' = 2x - 1$ egyenlet megoldásait látjuk.

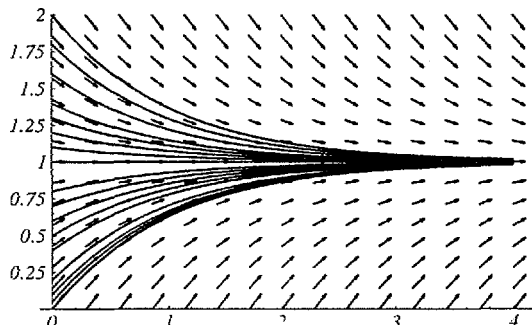
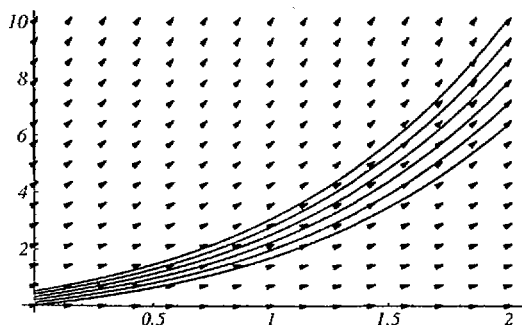


8.6.3. Születési és bevándorlási folyamat

A $x' = \lambda x$ szerint szaporodó populációba érkezzenek bevándorlók állandó sebességgel, (a bevándorlási ráta μ , az egységnyi idő alatt érkezett bevándorlók száma). Ekkor a populáció népességének változása az

$$x' = \lambda x + \mu$$

egyenlettel írható le ($\lambda > 0$, $\mu > 0$). A baloldali ábrán a $\lambda = 1$, $\mu = 1$ eset megoldásait láthatjuk.



Ha $\lambda < 0$, akkor a populáció halálozási rátája nagyobb, mint a születési, akkor a létszámot csak a $-\lambda x$ mértékű csökkenést ellensúlyozó bevándorlás képes fenntartani. Ennek az esetnek a vizsgálatát az előző pont alapján az olvasóra bizzuk. Segítséget adhat a munkához jobboldali ábra, amely a $\lambda = -1$, $\mu = 1$ esetet mutatja.

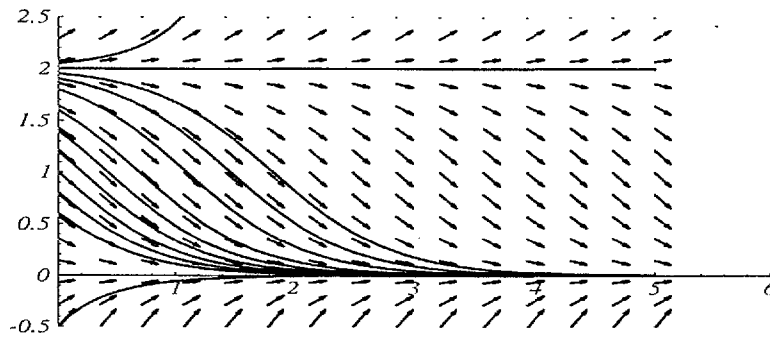
8.7. Az $x' = a(A - x)(B - x)$ differenciálegyenlet

Az előző pontokban vizsgált egyenletben x, x' legfeljebb első hatványon szerepel. Ezek az egyenletek lineárisak. Ezzel szemben az

$$x' = a(A - x)(B - x)$$

egyenletben x második hatványa is szerepel. Ez egy nemlineáris egyenlet.

Ha $A \neq B$, az egyenletnek két egyensúlyi helyzete van: $x(t) = A$, $x(t) = B$. Ezeken a helyeken $x' = 0$. Az alábbi ábra mutatja ($a = 1$, $A = 0$, $B = 2$), hogy a megoldások nem metszhetik át az $x(t) = A$ és $x(t) = B$ egyensúlyi helyzeteket.



Az egyenlet megoldását a korábbiakhoz hasonlóan végezzük:

$$\frac{x'}{(A - x)(B - x)} = a,$$

innen

$$\int \frac{x'}{(A - x)(B - x)} dt = \int a dt = at + c.$$

A baloldal integrálásához némi átalakításra van szükségünk.

$$\frac{1}{(A - x)(B - x)} = \frac{1}{B - A} \left(\frac{1}{x - B} - \frac{1}{x - A} \right)$$

Ezt már tudjuk integrálni. Az $x = x(t)$, $dx = x' dt$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \frac{x'}{(A - x)(B - x)} dt &= \frac{1}{B - A} \left(\int \frac{dx}{x - B} - \int \frac{dx}{x - A} \right) = \\ &= \frac{1}{B - A} \ln \left| \frac{x - B}{x - A} \right|, \end{aligned}$$

ezért

$$\ln \left| \frac{x - B}{x - A} \right| = (B - A)(at + c),$$

és

$$\frac{x - B}{x - A} = C e^{(B - A)at},$$

ahol C -re kapjuk, hogy ($t_0 = 0$, $x(0) = x_0$)

$$C = \frac{x_0 - B}{x_0 - A}.$$

Innen $x(t)$ kifejezhető, és

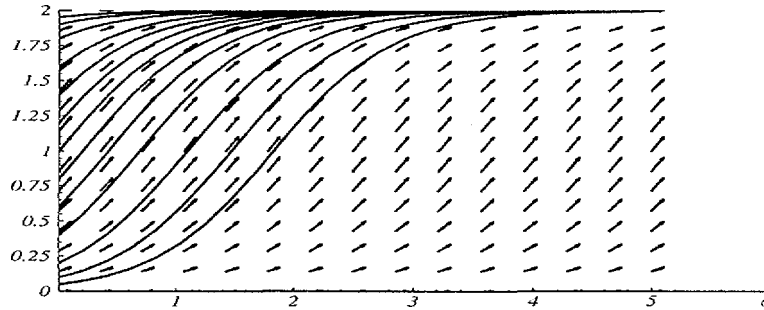
$$x(t, x_0) = A + \frac{B - A}{1 - C e^{(B - A)at}}.$$

8.7.1. Korlátozott növekedési folyamat

Már vizsgáltunk egyszerű szaporodási, növekedési folyamatokat. Tegyük fel most, hogy a létszámarányos (méretarányos) növekedést ($a \cdot x$) korlátozó feltételek is befolyásolják ($(B - x)$, ahol B a maximális létszám vagy méret). Ha a populáció kicsi, és nem tölti ki a teret, a korlátozó feltételek nem hatnak, akkor az $a \cdot x$ rész domináns, ha pedig x közeledik B -hez, akkor az egyedek közül (bár a szaporodás most is létszámarányos) sok elpusztul, mert a környezet nem bírja eltartani a megszáporodott népséget. Ezért ezt a folyamatot az

$$x' = ax(B - x)$$

alakú egyenlettel lehet modellezni. A megoldások menete elképzeléseinkkel összhangban van.



A megoldások képletét az $x' = a(A - x)(B - x)$ egyenlet megoldásaira nyert általános formulából kapjuk:

$$x(t, x_0) = \frac{B}{1 + \frac{B-x_0}{x_0} e^{Bat}},$$

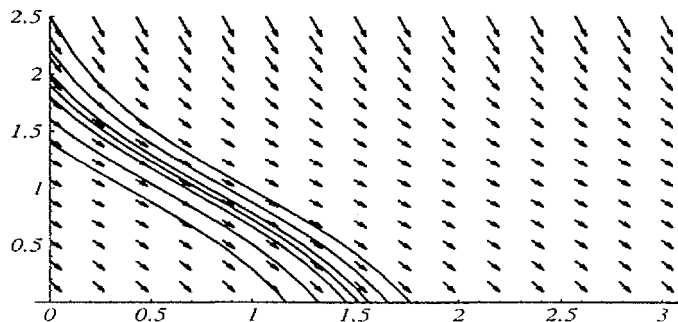
ahol $x(0) = x_0$ a populáció létszáma a $t_0 = 0$ pillanatban.

8.7.2. Korlátozott növekedés lehalázzással

A fenti nemlineáris modellbe is beépíthetünk népségszabályozó mechanizmusokat. Tekintsük a népségcsökkentés, a lehalázzás esetét. Ekkor a folyamatot leíró egyenlet

$$x' = ax(B - x) - b \quad (a, B, b > 0).$$

Keressük meg az egyensúlyi helyzeteket, azaz az $ax(B - x) - b = 0$ egyenlet megoldásait. Az ábra mutatja ($a=1, B=2, b=2$), hogy ha $\sqrt{\frac{B^2}{2} - \frac{b}{a}} \leq 0$, akkor nincs egyensúlyi helyzet, és bármely pozitív kezdeti népség esetén a populáció kihal. A lehalázzás mértéke túl nagy a szaporodási rátához és az ideális maximális népséghez képest.

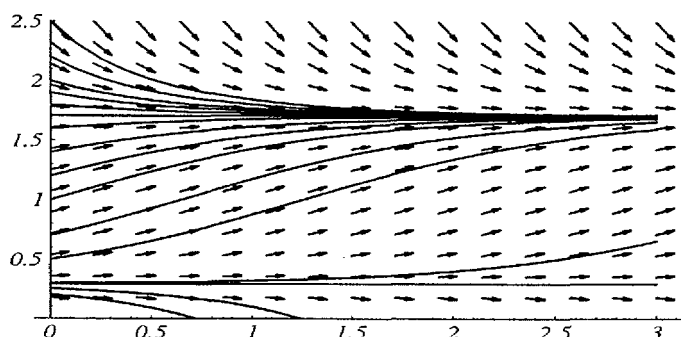


8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha $\sqrt{\frac{B^2}{2} - \frac{b}{a}} \geq 0$, akkor az egyensúlyi helyzetek:

$$\beta_1 = \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{2} - \frac{b}{a}}, \quad \beta_2 = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{2} - \frac{b}{a}}.$$

A lehalászással most is óvatosnak kell lennünk. Ugyanis, ha a népesség száma kisebb, mint β_1 , akkor is kihal a populáció véges idő alatt. Ekkor a szabályozási folyamatot le kell állítani vagy módosítani kell. Az ábrán az $a = 1, B = 2, b = 0.5$ eset megoldásait láthatjuk.



Megjegyezzük, hogy az egyenlet $x' = a(x - \beta_1)(x - \beta_2)$ alakban írható, ezért megoldásait ismerjük. Így a kihalás várható ideje kiszámítható. A $\beta_1 = \beta_2$ eset megoldásával a 8.8. pontban foglalkozunk.

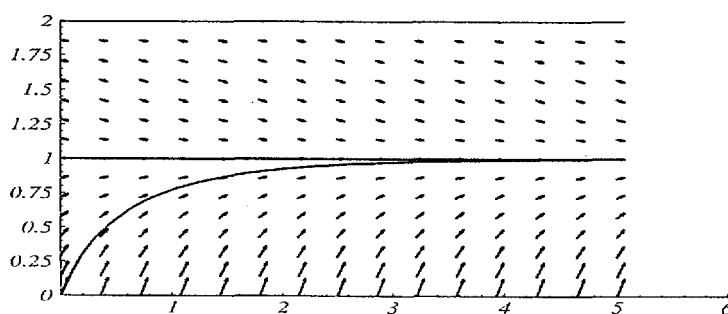
8.7.3. Kémiai reakciók

Tekintsünk két egymással reagáló kémiai anyagot. A reakció során egy harmadik anyag keletkezik. Valamilyen homogén mértékegységet véve legyen az egyik anyag kezdeti mennyisége A , a másiké B . A keletkezett anyag mennyisége a reakció során változik, legyen ez $x(t)$.

A reagáló vegyületek mennyisége a t pillanatban $A - x$, illetve $B - x$ a megfelelő mértékegységeket véve (annyi anyag fogy, amennyi keletkezik). A reakció sebessége $x'(t)$. A kémiában ismert, hogy katalizátor nélkül a reakciósebesség arányos az egymással reagáló anyagok mennyiségével. Ezért az

$$x'(t) = a(A - x)(B - x)$$

egyenlet írja le a vázolt reakciót. Ezt az egyenletet *másodfokú kémiai reakcióegyenletnek* nevezzük. A keletkezett anyag mennyisége $0 \leq x(t) < A, B$. Ha elérné valamelyik reagens mennyiségét, akkor a reakció megállna. Az alábbi ábrán az $x' = (1 - x)(2 - x)$, $x(0) = 0$ kezdetiérték probléma (kezdetben még nincs termék) megoldását láthatjuk:



Ha egyik reagens, például az első, olyan nagy mennyiségben van jelen, hogy csökkenése

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

elhanyagolható (pl. a levegő oxigénje), akkor az $(A - x)$ tényező konstansnak tekinthető, így az egyenlet az előző pontban tárgyalt

$$x' = a(B - x)$$

egyenletre redukálódik, amelyet az *elsőfokú kémiai reakciók egyenletének* is neveznek. Ha a második tényező csökkenése is elhanyagolható, akkor az

$$x' = a$$

egyenlethez jutunk, amely a *nullarendű reakciók egyenlete*.

Az egyenletet továbbfejleszthetjük. Ha a reakciót katalizátor vagy egyéb hatás befolyásolja, akkor a

$$x' = a(A - x)(B - x) + f(x)$$

vagy

$$x' = a(A - x)(B - x) + g(t)$$

egyenleteket kaphatjuk. Az első esetben a külső hatás a keletkezett anyag mennyiségétől függ (pl. növekedés esetén láncszerű gerjesztés). A második esetben a külső hatás az időtől függ, ami lehet melegítés, keverés vagy valamilyen más behatás.

8.8. Az $x' = a(A - x)^2$ egyenlet

Az

$$x' = a(A - x)^2$$

egyenlet az előző pontban tárgyalt eset speciális eseteként tekinthető ($B = A$), azonban látni fogjuk, hogy viselkedése attól teljesen eltér. Az egyetlen konstans megoldás az $x(t) = A$, egyébként $x(t)$ önmaga négyzetével arányosan nő (a derivált pozitív, ezért a megoldások növekednek), ami $x > A$ esetén gyorsabb az exponenciális növekedésnél.

Speciálisan az $A = 0$ esetben az egyenlet

$$x' = ax^2$$

alakú, ami olyan szaporodási folyamatot modellezhet, ahol minden egyed minden egyeddel párosodik, és a szaporodás azonnal be is következik. Meg fogjuk mutatni, hogy ez a szaporodási törvény a populáció véges idő alatti szétrobbanásához vezet. A korábbi modellekben ilyet nem tapasztaltunk.

Ezek után oldjuk meg az

$$x' = a(A - x)^2$$

egyenletet. Ha $x \neq A$, akkor

$$\frac{x'}{(A - x)^2} = a,$$

ahonnan a korábbiakhoz hasonlóan

$$\int \frac{dx}{(A - x)^2} = at + c,$$

$$\frac{1}{A - x} = at + c.$$

Ha $x(0) = x_0$, akkor

$$\frac{1}{A - x_0} = c.$$

Az egyenletből x -et kifejezve kapjuk

$$x - A = -\frac{1}{at + c}$$

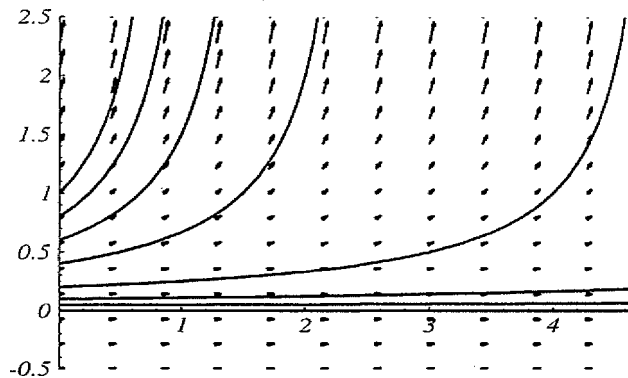
8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

$$x(t) = A - \frac{1}{at + \frac{1}{A-x_0}} = A + \frac{x_0 - A}{a(A - x_0)t + 1}.$$

Látható, hogy $x(t)$ nincs értelmezve a

$$T = \frac{1}{a(x_0 - A)}$$

pillanatban, ami azt jelenti, hogy ha $a > 0$; $x_0 > A$, akkor a populáció tagjainak száma T idő múlva végtelenné válik. Az $a = 1$, $A = 0$ esetben mutatjuk a megoldásokat az alábbi ábrán.



8.9. Általánosítások, nemautonóm egyenletek, szétválasztható egyenletek

Az eddig vizsgált egyenletek jobboldalán a t időváltozó nem szerepelt, autonóm egyenletek voltak. Előfordul azonban, hogy a rendszer nem autonóm. Ekkor az együtthatók nem konstansok, az egyenlet jobboldala explicit módon függ az időtől. Például az

$$x' = ax$$

egyenlet helyett vehetjük az

$$x' = a(t)x$$

egyenletet, ahol az $a(t)$ időfüggésének oka lehet születésszabályozási rendelet, járvány vagy bármilyen közvetlen beavatkozás a folyamatba.

Az

$$x' = a(t)x + b(t)$$

egyenletben a $b(t)$ függvény lehet időtől függő bevándorlási ráta, népességszabályozás, változó sebességű infúzió stb.

A nemautonóm egyenletek megoldása, a megoldások vizsgálata általában nehezebb. Egyszerűbb esetek azonban könnyen kezelhetők. Például, az

$$x' = a(t)x$$

egyenlet megoldása

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int \frac{dx}{x} = \int a(s) ds + c$$

$$\ln |x| = \int a(s) ds + c.$$

Némi meggondolás után

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t a(s) ds}.$$

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Vegyük észre, hogy az egyenletek megoldására mindig ugyanazt az egyszerű módszert használtuk. Kihasználtuk azt az egyszerű tényt, hogy az egyenlet jobboldala egy x -től és egy t -től függő tényező szorzata. Ez a módszer általában is alkalmazható az úgynevezett *szétválasztható változójú* egyenletekre, amelyek

$$x' = f(x) \cdot g(t)$$

alakúak. Ha $f(x) = 0$, akkor ennek az egyenletnek a megoldásai a differenciálegyenletnek is megoldásai, hiszen a derivált ezeken a helyeken zéró. Ha $f(x) \neq 0$, akkor

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t),$$

ezért integrálva az egyenletet ($x = x(t)$, $dx = x'dt$), az

$$\int \frac{x'}{f(x)} dt = \int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt$$

egyenlőséget kapjuk. Az

$$\int \frac{dx}{f(x)}, \quad \int g(t) dt$$

integrálások elvégzése után $x(t)$ -re egy egyenletet kapunk, amely egy határozatlan konstans is tartalmaz. Ez a konstans az $x_0 = x(t_0)$ kezdeti feltételből meghatározható. Az egyenletet megoldva (ha megoldható!) kapjuk az $x(t)$ megoldást.

A fenti módszert nevezzük a *változók szétválasztása módszerének*. Néhány esetben az (x, t) változókra alkalmazott transzformációkkal visszavezethetjük az egyenletet szétválasztható változójúra. Ezekkel itt nem foglalkozunk.

8.10. Magasabb rendű egyenletek, lineáris egyenletek megoldása

A Newton törvény miatt az $x(t)$, $x'(t)$ és $x''(t)$ is szerepel a mozgásokat leíró egyenletekben. Ezek egy általánosabb alakja

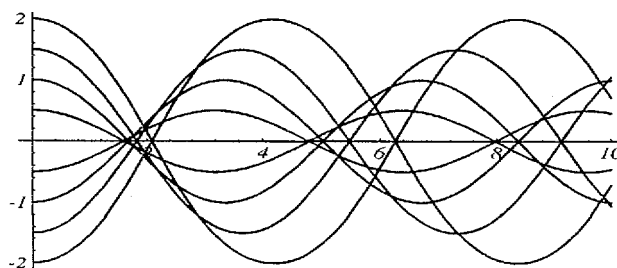
$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$

Az egyenletben a második derivált explicit módon ki van fejezve. Ez egy másodrendű differenciálegyenlet.

Általában, n -edrendű differenciálegyenletről beszélünk, ha az egyenlet összefüggést tartalmaz $t, x(t), x'(t), x''(t), \dots$ és $x^{(n)}(t)$ között. A másodrendű egyenletnél kezdeti feltételt kell adni $x(t)$ -re és $x'(t)$ -re, az n -ed rendűnél pedig az $x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ függvényekre. Ezek az egyenletek is lehetnek lineárisak vagy nemlineárisak. Az inga mozgását leíró

$$x'' + \sin x = 0$$

egyenlet nemlineáris. Ennek megoldásait mutatja az alábbi ábra:



Felhasználva a differenciálható függvények lineáris közelítését (3.6. fejezet), a fenti másodrendű egyenlet jobboldalán levő nemlineáris függvényt helyettesíthetjük az érintőjével az $x = 0$

8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

egyensúlyi helyzet környezetében. Az $x'' = -x$ egyenletet kapjuk. Ez általában is megtehető. Ezért van kiemelt jelentőségük a lineáris egyenleteknek, a fizikai alkalmazásokban a lineáris másodrendű egyenleteknek.

A továbbiakban a másodrendű, konstans együtthatós, lineáris

$$x'' + bx' + cx = 0$$

egyenlet megoldásának módszerét vázoljuk. Az állításokat nem bizonyítjuk, utólagos differenciálással ellenőrizhetők. Az elsőrendű lineáris $x' = ax$ egyenlethez hasonlóan, keressük a megoldásokat $x(t) = e^{\lambda t}$ alakú exponenciális függvény alakjában. Ezt a függvényt a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk az

$$x(t) = e^{\lambda t}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

egyenletet. Eszerint, az $e^{\lambda t}$ függvény akkor és csakis akkor megoldása az egyenletnek, ha λ kielégíti az

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

úgynevezett **karakterisztikus egyenletet**.

1. eset. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van ($b^2 - 4c > 0$). Legyenek

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Ekkor az egyenletnek megoldásai az $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ függvények, és bármely megoldás

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t},$$

alakú, ahol a_1 és a_2 a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

2. eset. Tegyük fel, hogy $b^2 - 4c = 0$. A karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van, $\lambda_0 = -\frac{b}{2}$.

Ekkor $e^{\lambda_0 t}$ és $te^{\lambda_0 t}$ megoldások, bármely megoldás pedig

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_0 t} + a_2 te^{\lambda_0 t}$$

alakban írható, ahol a_1 és a_2 a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

3. eset. Végül legyen $b^2 - 4c < 0$. A karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása. Ekkor a $\lambda_0 = -\frac{b}{2}$ és $\mu = \sqrt{4c - b^2}$ jelöléssel élve, az $e^{\lambda_0 t} \cdot \sin \mu t$ és az $e^{\lambda_0 t} \cos \mu t$ függvények megoldások. Minden megoldás pedig

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_0 t} \cdot \sin \mu t + a_2 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t$$

alakban írható, ahol az a_1 és a_2 konstansok a kezdeti feltételekből határozhatók meg. A fizikusok gyakran használják az

$$x(t) = Ae^{\lambda_0 t} \sin(\mu t + \varphi)$$

formát, ahol A az amplitúdó, φ pedig a kezdeti fázisszög. Az elnevezések a harmonikus rezgésnél és az ingamozgásnál használatos elnevezésekből maradtak meg.

8.3. Példa. Tekintsük példaként a harmonikus rezgőmozgás

$$x'' + k^2 x = 0$$

egyenletét, ahol k^2 a rugalmassági együttható. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

aminek nincs valós gyöke. Innen $\lambda_0 = 0$, $\mu = k$. Ezért az általános megoldás

$$x(t) = A \sin(kt + \varphi)$$

alakú.

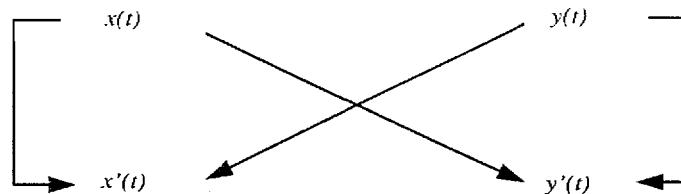
8.11. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

A síkbeli, térbeli mozgások során, illetve mindenütt, ahol több folyamat változását, egymásra hatását vizsgáljuk, mindegyik változóra differenciálegyenletet, együttesen differenciálegyenlet-rendszert nyerünk. Két folyamat $(x(t), y(t))$ esetén egy eléggé általános alakú az

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t)),$$

$$y'(t) = g(t, x(t), y(t))$$

rendszer. Látható, hogy az $x(t)$ változóra az $y(t)$, és az $y(t)$ változóra az $x(t)$ is hatással van.



Az $x(t)$, $y(t)$ komponenseket külön-külön ábrázolhatjuk a (t, x) , (t, y) koordinátarendszerekben vagy együtt a (t, x, y) térbeli koordinátarendszerben. Ugyanitt képezhetjük az egyenlet-rendszerhez tartozó $\{(1, f(t, x, y), g(t, x, y))\}$ iránymezőt is.

Ha a rendszer autonóm (a jobboldal nem függ t -től)

$$x' = f(x, y)$$

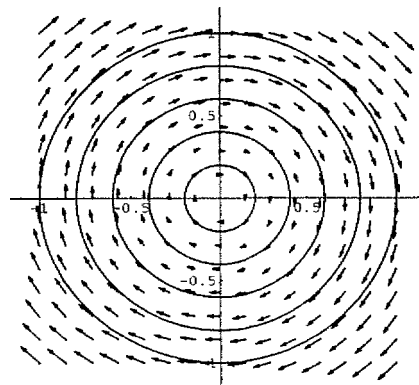
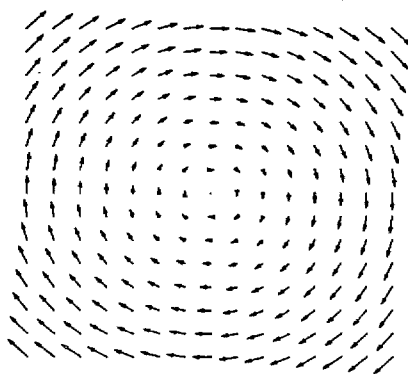
$$y' = g(x, y)$$

akkor a megoldásokat ábrázolhatjuk az (x, y) fázissíkon. Az így kapott $(x(t), y(t))$ görbékét fázisgörbéknek nevezzük.

Minden $(x(t), y(t))$ pontban a mozgás irányát és sebességét az $(x'(t), y'(t))$ sebességvektor mutatja. A fázissík tetszőleges (x, y) pontjára a sebességvektor az egyenlet szerint $(f(x, y), g(x, y))$, így ezeket a megoldások ismerete nélkül is felrajzolhatjuk. Ezt minden ponthoz megtéve, vektormezőhöz jutunk. Az

$$x' = y, \quad y' = -x$$

rendszerhez tartozó vektormezőt láthatjuk a baloldali ábrán.



Az autonóm differenciálegyenlet-rendszer megoldása a fázissíkon az egyenlethez tartozó vektormezőhöz simuló görbék (nem feltétlenül $y = y(x)$ függvények grafikonjai) keresését jelenti. A fenti egyenlet megoldásainak fázisgörbéit a jobboldali ábrán láthatjuk.

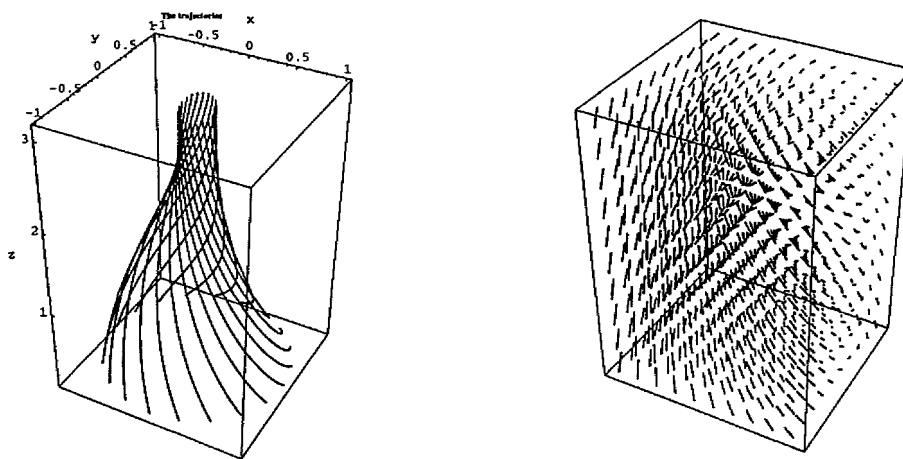
8. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Megjegyezzük, hogy a fentiek alkalmazhatók a térbeli $(x(t), y(t), z(t))$ mozgások egyenlet-rendszereire és általánosabb rendszerekre is. Ott a fázisgörbék egy térbeli vektormezőhöz simulnak.

Az

$$x'(t) = y, \quad y'(t) = -y - x, \quad z'(t) = 1$$

egyenletrendszer néhány megoldásának fázisgörbéjét és vektormezőjét mutatják az alábbi ábrák.



A legegyszerűbb lineáris

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

differenciálegyenlet-rendszernek számos gyakorlati alkalmazása van. A továbbiakban csak ezzel az egyenlettel foglalkozunk.

Mindenekelőtt vázoljuk a megoldás módszerét. Ez hasonló az előző pontban tárgyalt másodrendű lineáris egyenlet megoldásának módszeréhez. Az állításokat most sem bizonyítjuk, utólagos differenciálással ellenőrizhetők. A megoldásokat exponenciális függvény alakjában keressük: $x(t) = pe^{\lambda t}$, $y(t) = qe^{\lambda t}$. A differenciálegyenlet-rendszerbe helyettesítve, valamint p -t és q -t kifejezve, λ -ra most az alábbi

$$(a - \lambda)(d - \lambda) = bc,$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. Legyen $D = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$ az egyenlet diszkriminánsa.

1. eset. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenletnek két valós λ_1, λ_2 megoldása van ($D > 0$). Ekkor a megoldások

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = A_2 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

alakúak, ahol (A_1, B_1) és (A_2, B_2) a kezdeti feltételekből, illetve a differenciálegyenlet-rendszerbe való behelyettesítéssel határozhatók meg.

2. eset. Ha $D = 0$, és egy valós gyök van (λ_0), akkor a megoldások

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_0 t} + B_1 t \cdot e^{\lambda_0 t}$$

$$y(t) = A_2 e^{\lambda_0 t} + B_2 t e^{\lambda_0 t}$$

alakúak. Az együtthatók meghatározása a fentiekkel azonos módszerrel történik.

3. eset. Ha $D < 0$, akkor legyen $\mu = \sqrt{-D}$. Most a megoldások általános alakja

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_0 t} \sin \mu t + B_1 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t = C_1 e^{\lambda_0 t} \sin(\mu t - \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 e^{\lambda_0 t} \sin \mu t + B_2 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t = C_2 e^{\lambda_0 t} \sin(\mu t - \varphi_2)$$

Az együtthatók meghatározásának módszere a korábbiakkal azonos.

8.4. Példa. Oldjuk meg az

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

differentiálegyenlet-rendszert. A karakterisztikus egyenlet és megoldásai:

$$\lambda^2 - 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

A megoldások általános alakja

$$x(t) = A_1 e^{\sqrt{2}t} + B_1 e^{-\sqrt{2}t}, \quad y(t) = A_2 e^{\sqrt{2}t} + B_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Keressük az $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$1 = A_1 + B_1,$$

$$-1 = A_2 + B_2.$$

Az egyenletbe helyettesítve, és a $t = 0$ pillanatot véve

$$A_1 \sqrt{2} - B_1 \sqrt{2} = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0,$$

$$A_2 \sqrt{2} - B_2 \sqrt{2} = A_1 + B_1 - (A_2 + B_2) = 2.$$

Innen

$$A_1 + B_1 = 1, \quad A_1 - B_1 = 0,$$

$$A_2 + B_2 = -1, \quad A_2 - B_2 = \sqrt{2}.$$

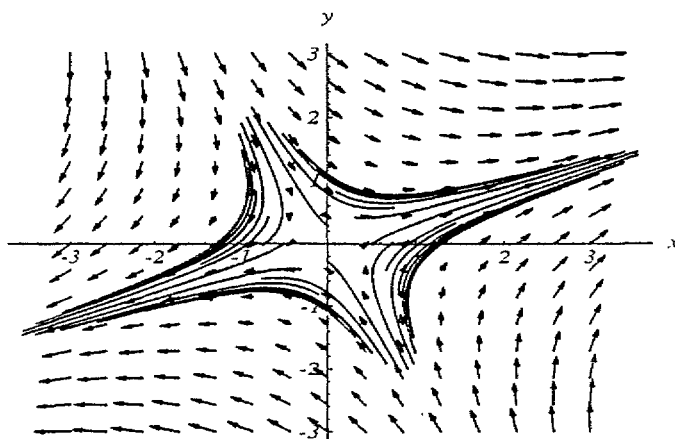
Oldjuk meg a fenti egyenletrendszereket:

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad B_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Az adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldás tehát

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}), \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}t}.$$

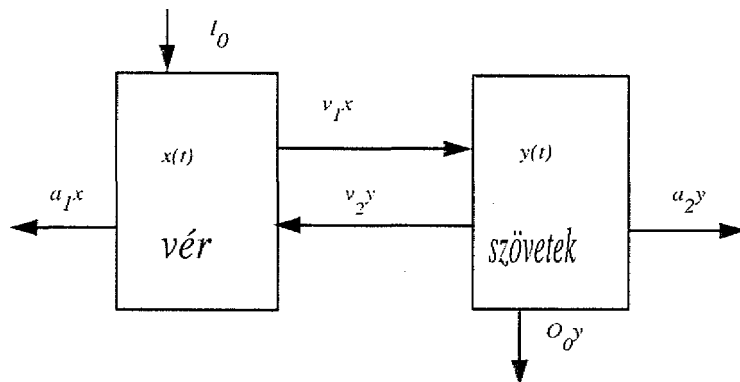
E rendszerhez tartozó vektormezőt és néhány fázisgörbét láthatunk az alábbi ábrákon.



8.11.1. Egy gyógyszerfelszívódási modell

A vér áramlik a szervezetben az érrendszer, a szövetek és szervek között. Valamely gyógyszert a szervezetbe beadva (intravénásan a vérbe, injekcióval a szövetekbe), a felszívódást, lebomlást és kiürülést vizsgáljuk a vérben és a szövetekben. Egy egyszerűsített sémát tekintünk. A gyógyszer a vérből a szövetekbe és szervekbe v_1 relatív sebességgel kerül át (felszívódik), ugyanakkor, van egy v_2 fordított irányú mozgás is. A gyógyszer a veséből kiürül O_0 relatív sebességgel. A vérben és a szövetekben a gyógyszer lebomlik a_1, a_2 relatív sebességgel. A relatív sebesség az egységnyi mennyiséghez viszonyított sebességet jelenti. Mindegyik lebomlási, áramlási folyamat a gyógyszer adott pillanatbeli mennyiségével arányos. Legyen a gyógyszer mennyisége a vérben $x(t)$, a szövetekben $y(t)$.

Rendszerünket grafikusan is ábrázolhatjuk.



Az I_0 áram (külső input) folyamatos adagolást, infúziót jelent. Ez független a már eddig beadott gyógyszer mennyiségétől. Az $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ a gyógyszer beadásának pillanatában levő mennyiség (dózis), feltéve, hogy az elterjedés az adott részben (vér, szövetek) azonnali.

A fentiek szerint

$$x'(t) = -a_1 x - v_1 x + v_2 y + I_0,$$

$$y'(t) = -a_2 y - v_2 y + v_1 x - O_0 y.$$

Az $I_0 = 0$ esetben a fent tárgyalt egyenletre jutottunk. Ha $I_0 \neq 0$, az egyenlet akkor is könnyen megoldható. A megoldási módszert lásd például L. Sz. Pontrjagin könyvében ([8]).

Az egyenletrendszer együtthatóit kísérleti eredményekből határozhatjuk meg oly módon, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásait (amelyek függnak az áramlási paramétereiktől) a legkisebb négyzetek módszerével illesztjük a mért adatsorozatokhoz. A lineáris regresszió két paraméterével szemben itt több paraméterre vonatkozó minimalizálást kell végezni (lásd a 7.3. fejezetet). Ezekkel a feladatokkal itt részleteiben nem foglalkozunk.

Az olyan rendszereket, ahol különböző rekeszek közötti anyagáramlást vizsgáljuk, rekesz- vagy kompartment rendszereknek nevezzük. Ezen rendszerek matematikai vizsgálata lökést adott a gyógyszerhatástani, az ér- és nyirokrendszer működésének modellezésére irányuló kutatásoknak.

A. Függelék. További irodalom

- [1] E. Batchelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd edition, Springer, 1979.
- [2] D. D. Berkey, P. Blanchard, *Calculus*, Saunders College Publishing, 1994.
- [3] T. P. Dreyer, *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993.
- [4] Hajtman B., *Matematika orvosok és gyógyszerészek részére*, Medicina, Budapest, 1980.
- [5] Hajtman B., *Matematikai feladatgyűjtemény gyógyszerészhallgatók számára*, SOTE jegyzet.
- [6] F.C. Hoppensteadt, C.S. Peskin, *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] Izsák I., Juhász Nagy P., Varga Z., *Bevezetés a Biomatematikába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [8] L. Sz. Pontrjagin, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
- [9] S. Wolfram, *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [10] Szili L., Tóth J., *Matematika és Mathematica*, Eötvös Kiadó Budapest, 1996.

B. Függelék. Függvények tanulmányozása számítógéppel

A jegyzetben a függvények tulajdonságainak tanulmányozásához szükséges legalapvetőbb elméleti fogalmakat és eljárásokat tárgyaltuk. A gyakorlati feladatok megoldása során számos technikai részprobléma, például a grafikonok készítése, a deriválás, az integrálás, a Taylor polinomok keresése vagy a legkisebb négyzetekkel való közelítés meglehetősen időigényes lehet, és csak eredményük érinti a probléma lényegét.

Ma már a matematikai feladatok nagy részét is elvégeztethetjük számítógéppel. Ezzel is segíthetjük a feladat gyors megoldását és a lényegre való koncentrációt. Számos program ismert, amely különböző típusú feladatok megoldásában segít. Az általunk legfontosabbnak tartott rendszerek az alábbiak:

Mathematica (Wolfram Research)	: Általános matematikai rendszer,
Maple (Waterloo Maple Software)	: Általános matematikai rendszer,
SAS (SAS Institute)	: Statisztikai rendszer,
SPSS (SPSS Inc.)	: Statisztikai rendszer.

A statisztikai rendszerekkel a biostatisztika tantárgy keretében találkozik az olvasó. A matematikai rendszerek közül a SZOTE-n a Mathematica használható. Számos oktatóanyag áll a hallgatóság rendelkezésére, amely segíti az elméleti tananyag elsajátítását, és a szakmai tárgyak tanulmányozásánál is hasznos lehet. Egy rövid Mathematica bevezetés és a legfontosabb példák gyűjteménye önálló jegyzetben állnak a hallgatók rendelkezésére.