

MELLÉKLET

a

„3. A Bernoulli-egyenlet” című videóleckéhez

(A videólecke keretében először megjelenő
Bernoulli-egyenlet levezetése a tananyag mélyebb
megértésének elősegítésére)

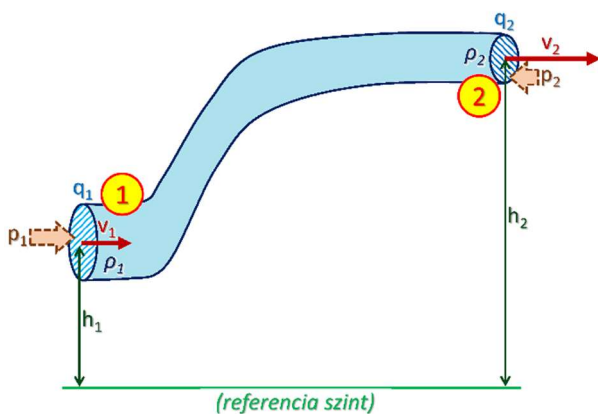
A Bernoulli-egyenlet (levezetés)

ÁLTALÁNOS MEGFONTOLÁSOK

Vizsgáljuk meg, hogyan mozog egy kis folyadékrész egy **súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásában kiszemelt vékony áramfonal** mentén! – Ez a cél akár dinamikai úton (*a térfogatelemre ható erők meghatározásával, majd a dinamika alapegyenletének alkalmazásával*), akár energetikai módszerrel (*a kis folyadékrészre ható erők munkáinak kiszámításával, majd a munkatétel használatával*) elérhető. Az alábbiakban mindkét módszert követve levezetjük a Bernoulli-egyenletet.

A BERNOULLI-EGYENLET MUNKATÉTELEN (KINETIKAI ENERGIA TÉTELÉN) ALAPULÓ LEVEZETÉSE

A stacionáriusan áramló ideális folyadék i -edik áramfonal-darabja az alábbi mennyiségekkel jellemezhető:



- q_i : az áramcső adott helyen vett keresztmetszete;
- v_i : az áramcső adott helyén mérhető (a teljes keresztmetszet mentén állandónak vett) áramlási sebesség;
- ρ_i : a folyadék sűrűsége az áramcső adott szakaszán;
- h_i : az áramcső adott szakaszának (egy közös) referencia-szinttől mért magassága;
- p_i : az áramcső adott szakaszára jellemző (sztatikai) nyomás, melynek a cső két végén a szaggatott nyíllal jelölt nyomóerő-irányok felelnének meg.

A további számoláshoz szükséges fizikai mennyiségek megnevezéséhez kötődően három – korábban már említett – **peremfeltétel fontosságára** hívnánk fel a figyelmet:

1. A folyadékot összenyomhatatlannak (és homogénnek) feltételezve, sűrűsége a teljes áramfonal mentén állandó értékű. A későbbiekben ennek megfelelően a fenti ábrán megjelölt áramfonal-szakaszokra felírt ρ_1, ρ_2 stb. jelölés helyett a folyadék sűrűségét egységesen ρ -val jelöljük.
2. Az áramlásban keskeny áramfonalat jelöltünk ki, ami két okból is fontos, de hasznos megszorítást jelent: egyrészt – a 2. fejezetben tárgyalt kontinuitási egyenlethez hasonlóan – az áramlási sebesség egy adott (kicsiny) keresztmetszet mentén valóban egyetlen értékkel jellemezhető; másrészt, egy „végtelenül keskeny” áramcső bármely szakaszának térbeli pozíciója valóban egyetlen magasság-értékkel adható meg. (Széles áramfonal esetén a középvonalának referencia-szinthez képest mért magasságát szokás megadni, bár e magasság definiálása – tipikusan pl. számolási feladatokban – a pontos végeredmény meghatározását és interpretálását illetően problémát vethet fel.)
3. Az áramlás stacionárius tulajdonsága miatt a tetszőlegesen kicsiny Δt időtartam alatt az áramcső elülső véglapján át belépő, ill. – az összenyomhatatlanság folytán – a hátulsó véglapján át távozó folyadék-mennyiséget tekinthetjük úgy is, mintha egy $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ tömegű folyadékrész az áramfonal „1” jelű helyéről a „2” jelzésű helyére került volna.

Utóbbi tömegelem sebességének időbeli alakulása a munkatétel segítségével is meghatározható, mivel a folyadékrész mozgási energiáját – súrlódás hiányában – csak az áramcső véglapjain ható nyomóerők és a nehézségi erő változtathatja meg:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_p + W_g (*).$$

Ehhez a mozgási energia ΔE_{kin} megváltozását, valamint a nyomóerők W_p , ill. a nehézségi erő W_g munkavégzését kell kiszámítanunk (a fenti ábrán jelölt mennyiségek és a Δt időtartam ismeretében). – Lássuk őket sorjában!

A mozgási energia változása

Definíció szerint a mozgási energia megváltozását a későbbi és a korábbi energia-értékek különbsége adja:

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1},$$

amelybe behelyettesítve a kinetikai energia definícióját, továbbá a sűrűség segítségével kifejezett tömeget:

$$\Delta E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \rho_i V_i v_i^2 = \frac{1}{2} \rho V_i v_i^2.$$

A V_i ($i = 1,2$) térfogatelem meghatározása a kontinuitási egyenlet levezetésénél már megismert módszerrel történik. Mivel az áramcső egy adott helyén felvett q_i keresztmetszeten (rövid idő-intervallumokban állandónak feltételezhető) v_i sebességgel áthaladó folyadék Δt idő alatt $\Delta s_i = v_i \cdot \Delta t$ utat tesz meg, így az ezen idő-tartam alatt átáramló folyadék térfogata egy q_i alapterületű és Δs_i magasságú henger térfogatával egyenlő:

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} \rho v_i^2 \cdot V_i = \frac{1}{2} \rho v_i^2 \cdot q_i v_i \Delta t \quad (i = 1,2).$$

A mozgási energia megváltozása így az alábbi alakba írható:

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \cdot q_2 v_2 \Delta t - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cdot q_1 v_1 \Delta t.$$

A nyomóerők munkája

Az áramlási cső véglapjain ható nyomóerők munkája az elemi munkavégzés definíciójának alkalmazásával a nyomóerők és az elmozdulások skaláris szorzataként írható fel:

$$W_{p1} = F_1 \cdot \Delta s_1 \cdot \cos 0^\circ = F_1 \cdot \Delta s_1 = p_1 q_1 \cdot v_1 \Delta t, \text{ ill. } W_{p2} = F_2 \cdot \Delta s_2 \cdot \cos 180^\circ = -F_2 \cdot \Delta s_2 = -p_2 q_2 \cdot v_2 \Delta t,$$

minthogy a folyadék elmozdulása az áramlási cső „1” jelű véglapján ébredő nyomóerővel megegyező, míg a „2” jelű véglapnál ható nyomóerővel ellentétes irányú. Kihasználtuk továbbá, hogy a nyomás definíciójából ($p = F/q$) adódóan a q_i felületre merőleges nyomóerő az adott felületen ható nyomás és a felület szorzataként számítható ki. – A nyomóerők összes munkája a fenti két munkavégzés előjeles összege:

$$W_p = W_{p1} + W_{p2} = p_1 q_1 v_1 \Delta t - p_2 q_2 v_2 \Delta t.$$

A nehézségi erő munkája

A nehézségi erő munkavégzésének meghatározásához szintén a munkatételt, valamint a nehézségi (tehát konzervatív) erőterben érvényes mechanikai energia megmaradásának tételét hívjuk segítségül:

$$E_{\text{mech},1} = E_{\text{mech},2} \Rightarrow E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} = E_{\text{kin},2} + E_{\text{pot},2} \Rightarrow E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2}.$$

A fenti egyenlet bal oldalán egy, a nehézségi erőterben mozgó test kinetikus energiájának megváltozását alakítottuk ki – a munkatétel értelmében ez éppen a nehézségi erő munkavégzésével egyenlő:

$$W_g = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2}.$$

A nehézségi erő 1→2 áramcső-szakaszon végzett munkája tehát az áramcső két végén mérhető helyzeti (potenciális) energiák különbségeként adható meg. – Miután az áramcső két végének (referencia szinthez képest mért) h_i magasságai ismertek, így a nehézségi erőterre jellemző helyzeti energia definíciója szerint:

$$E_{\text{pot},i} = m_i g h_i = \rho_i V_i g h_i = \rho V_i g h_i = \rho \cdot q_i v_i \Delta t \cdot g h_i,$$

ahol a tömeg, majd a térfogat átírása a mozgási energiánál már ismertetett módszertant követi. A nehézségi erő munkavégzése így az alábbi alakot ölti:

$$W_g = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2} = \rho \cdot q_1 v_1 \Delta t \cdot g h_1 - \rho \cdot q_2 v_2 \Delta t \cdot g h_2 = \rho g h_1 \cdot q_1 v_1 \Delta t - \rho g h_2 \cdot q_2 v_2 \Delta t.$$

Ezen a ponton már minden szükséges részeredménnyel rendelkezünk; visszatérhetünk a kezdeti kérdéshez!

Behelyettesítés a kinetikai energia tételébe; a Bernoulli-egyenlet

Az áramlási cső „1” helyéről a „2” helyére mozgó folyadékrészre vonatkozó munkatétel (*) alakjába behelyettesítve a fentebb kiszámított (kékekkel szedett) részeredményeket:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_g + W_p \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_2^2 \cdot q_2 v_2 \Delta t - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cdot q_1 v_1 \Delta t = \rho g h_1 \cdot q_1 v_1 \Delta t - \rho g h_2 \cdot q_2 v_2 \Delta t + p_1 q_1 v_1 \Delta t - p_2 q_2 v_2 \Delta t$$

A fenti egyenletet leosztva a Δt időtartammal, majd az azonos indexű tagokat egy oldalra rendezve:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 \cdot q_2 v_2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cdot q_1 v_1 = \rho g h_1 \cdot q_1 v_1 - \rho g h_2 \cdot q_2 v_2 + p_1 q_1 v_1 - p_2 q_2 v_2,$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 \cdot q_2 v_2 + \rho g h_2 \cdot q_2 v_2 + p_2 q_2 v_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cdot q_1 v_1 + \rho g h_1 \cdot q_1 v_1 + p_1 q_1 v_1.$$

Végül pedig használjuk ki, hogy a kontinuitási egyenlet értelmében $q_1 v_1 = q_2 v_2$ (így ezzel is leoszthatunk):

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 \cancel{q_2 v_2} + \rho g h_2 \cancel{q_2 v_2} + p_2 \cancel{q_2 v_2} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cancel{q_1 v_1} + \rho g h_1 \cancel{q_1 v_1} + p_1 \cancel{q_1 v_1}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

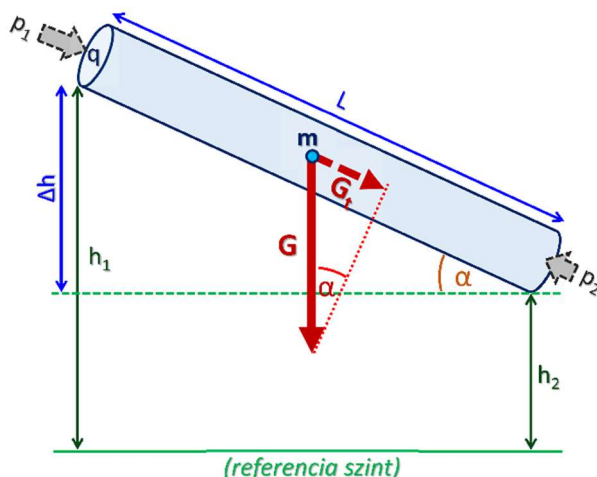
Ezzel megkaptuk a (súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásában kiszemelt vékony áramfonal mentén érvényes) **Bernoulli-egyenletet**:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

A BERNOULLI-EGYENLET DINAMIKA ALAPEGYENLETÉN ALAPULÓ LEVEZETÉSE

Mint ahogy a legtöbb mechanikai feladatban – a mozgást létrehozó/fenntartó erők ismeretében – a sebesség időfüggésének felírásához dinamikai megközelítéssel is eljuthatunk, az alábbiakban egy áramcső-szakaszon súrlódásmentesen mozgó folyadékrész mozgásegyenletéből kiindulva is levezetjük a Bernoulli-egyenletet. (A pillanatnyisebesség-vektor definícióján alapuló kinematikai megközelítést – mely jelen esetben a folyadékrészecskék pályavonalaiból indulna ki – a bevezető fejezetben már említett okokból hanyagoljuk.)

Tekintsünk egy L hosszúságú, a közös referencia-szinthez képest h_1 magasságból h_2 magasságba süllyedő vékony áramcső-szakaszt, melyből a folyadék – egy henger alakú tömbként – súrlódásmentesen kicsúszik a nehézségi erő és az áramcső végein fellépő nyomóerők hatására. (Amennyiben nem ez, a lenti ábrán vázolt eset állna fenn, akkor a folyadékot a nehézségi erő ellenében az áramcső végein ható nyomóerők eredője nyomná fel a h_1 magasságból h_2 magasságig emelkedő áramcső-szakaszon.) – Írjuk fel a mozgásegyenletet!



A mozgó, henger alakúnak gondolt folyadékrész tömege annak állandó ρ sűrűségével kifejezve:

$$m = \rho V = \rho \cdot q L.$$

A vizsgált Δt időtartamon (egyenes vonalú) egyenletesen változó mozgást feltételezve, annak átlagos gyorsulása:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}.$$

A folyadékrészre ható eredő erő az áramcső végei közötti nyomáskülönbségből származó erőből és a nehézségi erőből tevődik össze. – A nyomáskülönbségből származó erő a nyomás definíciójából következően:

$$F_p = \Delta p \cdot q = (p_1 - p_2) q,$$

miután a folyadék előre irányuló (az ábrán balról jobbra történő) mozgását fenntartó nyomáskülönbség nagyobb (sztatikai) nyomást feltételez az áramcső elülső véglapján, mint a hátsó véglapon. A folyadék rész áramcsőben történő mozgásakor a $\underline{G}$ súlyerőnek pedig – miután annak áramcső falára merőleges komponensét az áramcső folyadékot át nem engedő, merevnek képzelt falában ébredő kényszererő kompenzálja – csak az adott áramcső-szakasz hossz tengelyébe eső $\underline{G}_t$ érintő irányú komponense érvényesül (hasonlóan, mint egy lejtőn súrlódásmentesen lecsúszó test esetében). Ez utóbbi erő (merőleges komponens) nagysága az ábra alapján:

$$\frac{G_t}{G} = \sin \alpha \Rightarrow G_t = G \cdot \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha,$$

melyben a „lejtő” – az ábrán narancssárgával jelölt, és a $\underline{G}$ felbontásához használt merőleges szárú – hajlásszöge az áramcső-szakasz hosszúság dimenziójú paramétereiből könnyen kiszámítható:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_1 - h_2}{L}.$$

Zölddel kiemelt részeredményeinket beírva a dinamika alapegyenletébe:

$$m \cdot a = F_p + G_t \Rightarrow \rho q L \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = (p_1 - p_2) q + \rho q L \cdot g \cdot \frac{h_1 - h_2}{L}.$$

Mivel – feltételezésünk szerint – a folyadéktömb a kicsiny Δt időtartam alatt egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez, ezért az ezen időtartam alatt megtett útja – ami az áramlás stacionárius volta miatt az áramcső-szakasz L hosszával egyenlő – a mozgás Δt időtartamra vett átlagsebességével is megadható:

$$v_{\text{átl}} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow L = v_{\text{átl}} \Delta t = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2L}{v_2 + v_1},$$

amit beírva a dinamika alapegyenletének előző (lilával jelölt) alakjába:

$$\rho q L \frac{v_2 - v_1}{2L} (v_2 + v_1) = (p_1 - p_2) q + \rho q L g \frac{h_1 - h_2}{L}.$$

Utóbbiban felismerve az „ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ” azonosságot, valamint egyszerűsítve L -lel és az áramcső (mindvégig azonos) q keresztmetszetével:

$$\rho \cancel{q} \frac{v_2 - v_1}{2} (v_2 + v_1) = (p_1 - p_2) \cancel{q} + \rho \cancel{q} g (h_1 - h_2),$$

$$\rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = (p_1 - p_2) + \rho g (h_1 - h_2),$$

amelyből a zárójelek felbontása és az azonos indexű tagok egy oldalra történő rendezését követően:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Ezzel szintén Bernoulli egyenletéhez jutunk (jelen megközelítésben is felhasználva, hogy súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásáról van szó).

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014