

# MELLÉKLET

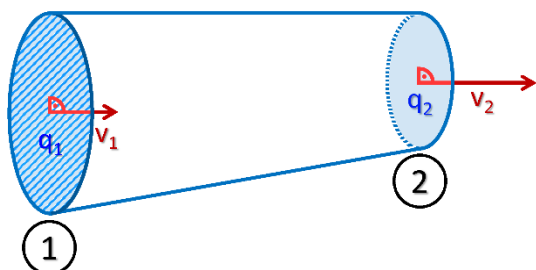
a

## „2. A kontinuitási egyenlet” című videóleckéhez

(A videólecke keretében tárgyalt áramlástan  
kontinuitási egyenlet levezetése a tananyag  
mélyebb megértésének elősegítésére)

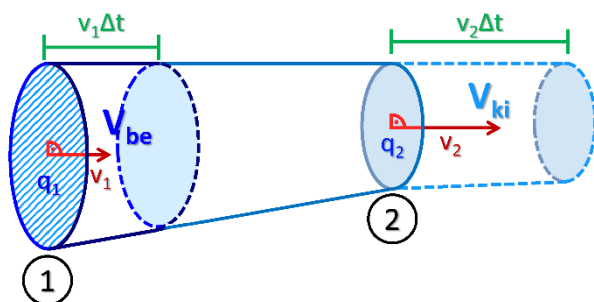
# A kontinuitási egyenlet (levezetés)

## AZ ÁRAMLÁSTANI KONTINUITÁSI EGYENLET SPECIÁLIS ALAKJA



Tekintsünk egy ideális (súrlódásmentesen áramló összenyomhatatlan) folyadékban felvett keskeny áramlási csövet, melynek  $q_1$ , ill.  $q_2$  keresztmetszetű véglapjain  $v_1$ , ill.  $v_2$  sebességgel áramlik át a folyadék. (A sebességeket az áramcső-véglapok teljes keresztmetszetén állandónak tekintjük – ezért szükséges a keskeny áramlási csőre történő megszorításunk.)

Mivel az áramcső oldalfalán át – az áramlási cső definíciója szerint – nem léphet ki folyadék a csőből, és az 1. véglapon át belépő folyadék – annak összenyomhatatlansága miatt – nem halmozódhat fel az áramcsőben, ezért a 2. véglapon át kénytelen távozni. Matematikai alakban megfogalmazva: az 1. véglapon át (tetszőleges, kicsiny)  $\Delta t$  időtartam alatt belépő  $V_{be}$  térfogatnak és a véglapok által kijelölt áramcsőszakaszból a 2. felületen át ugyanekkora időtartam alatt távozó  $V_{ki}$  folyadék-térfogatnak meg kell egyeznie:  $V_{be} = V_{ki}$ .



Mivel a  $q_1$  keresztmetszetű véglapon át (merőlegesen) belépő folyadék rész a szóban forgó  $\Delta t$  időtartam alatt  $v_1$  (átlag)sebességgel egyenletesen haladva  $L_1 = v_1 \Delta t$  utat tesz meg, így az áramlási csőbe belépő folyadék-térfogat:

$$V_{be} = q_1 L_1 = q_1 v_1 \Delta t.$$

Hasonló elvek mentén a  $q_2$  keresztmetszetű véglapon át (merőlegesen) távozó folyadék térfogata:

$$V_{ki} = q_2 L_2 = q_2 v_2 \Delta t.$$

A folyadék inkompresszibilitásának fenti feltételébe behelyettesítve (és hallgatólagosan feltételezve, hogy a folyadék homogén, vagyis helytől függetlenül állandó sűrűségű):

$$V_{be} = V_{ki} \Rightarrow q_1 v_1 \Delta t = q_2 v_2 \Delta t \Rightarrow q_1 v_1 = q_2 v_2.$$

Vagyis egy keskeny áramcsőben súrlódásmentesen áramló összenyomhatatlan és homogén folyadék esetén az áramcső mindenkor  $q$  keresztmetszetének és a folyadék ott mérhető  $v$  áramlási sebességének szorzata a cső minden helyén állandó. (Stacionárius áramlás esetén e szorzat időben is állandó értékű.)

## AZ ÁRAMLÁSTANI KONTINUITÁSI EGYENLET ÁLTALÁNOSABB ALAKJA

Amennyiben a folyadék nem homogén, akkor  $\rho$  sűrűsége az áramlási cső mentén nem állandó: a fenti ábrán tekintett 1. és 2. véglapoknál  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Ekkor a folyadéknak e véglapok határolta áramcső-szakaszban történő fel nem halmozódása a folyadék tömegére szab a fentihez hasonló, de általánosabb érvényű feltételt: az 1. véglapon át (tetszőleges, kicsiny)  $\Delta t$  időtartam alatt belépő  $m_{be}$  tömegnek és a véglapok által kijelölt áramcsőszakaszból a 2. véglapon át ugyanekkora időtartam alatt távozó  $m_{ki}$  tömegnek kell meg egyeznie:  $m_{be} = m_{ki}$ . – A sűrűség definíciójából adódóan ekkor a kontinuitási egyenlet így módosul:

$$m_{be} = m_{ki} \Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \rho_1 q_1 v_1 \Delta t = \rho_2 q_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \rho_1 q_1 v_1 = \rho_2 q_2 v_2.$$

**Összefoglalva:** levezetéseink során azt használtuk ki, hogy az ideális folyadék súrlódásmentesen áramlik, továbbá összenyomhatatlan, amiből lényegében bármely áramcső-szakaszra a folyadék tömegének, ill. – homogén folyadék esetén – térfogatának megmaradása következik. (Feltéve, hogy az áramlási tér nem tartalmaz forrásokat vagy nyelőket.)



EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen  
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

