

|                                      |                                                                                                                                   |                                                                                                                                     |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <h1>Hibakorrekciós modell: VECM</h1> | <p><b>Olvasási idő:</b><br/><b>20 perc</b></p>  | <p><b>Készítette:</b><br/><b>Csiki Máté</b></p>  |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Bevezetés

- Hosszú távú növekedés
  - Népesedőnövekedés: több ember (=nagyobb munkamennyiség) tudja előállítani a termékeket és szolgáltatásokat
  - Tőke növekedése: pld. gyártósorok növekedése
  - a technológiai változások növelik a termelékenységét
- A hosszú távú növekedés ellenére: időnként van gazdasági visszaesés
  - Ezek összhangban vannak az üzleti ciklusokkal.
  - *Amelyek nem a hosszú távú faktorok, hanem a rövid távú faktorok hatásai (a rövid távú faktorok hatásait a közép-távú modellekben is felhasználjuk)*
  - ez egyértelműen látszik pl. a munkanélküliségi ráta aszimmetrikus viselkedéséből.
- Az idősor stacioner? – Hogyan kezeljük az integrált **I(1)** idősorokat?
  - 1. lehetőség: stacionerré tétel differenciálással (pl:  $\Delta \log$ ) vagy trend eltávolítás (eg: **HP filter**, lineáris trend ...), hogy **I(0)** (nem integrált) idősort kapjunk.
  - 2. lehetőség: Vagy tartsuk meg az információt és alkalmazzunk olyan modellt, amely figyelembe tudja venni a közös trendeket (Hibakorrekciós modellek ((**Error-Correction Models (ECM)**))
- Közgazdaságtanilag: az egyensúlyi viszonyok igazolják a kointegráció jelenlétét: Ha a kutya egy **I(1)** folyamat és a kutyasétáltató (Kosztolányi úr) egy másik **I(1)** folyamat, amelyek össze vannak kötve egy pórázzal. Ilyenekre példa<sup>28</sup>:
  - Fogyasztás és jövedelem
  - Pénz, kamatláb, kibocsátás és árák
  - kibocsátás és foglalkoztatottság
  - vásárlóerő
- Az integrált változók stacioner kointegrációs viszonyát hosszú távú egyensúlynak tekinthetjük
  - Mindeféle rövid távú ingadozás a hosszú távú egyensúly körül előbb-utóbb eltűnik, a modell dinamikájától függően (mennyire perzisztens)
- Nézzünk egy változót ( $X_t$ ), az ADF teszt az alábbi regresszió alapul:

$$\Delta X_t = C + \delta t + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^p a_i \Delta X_{t-i} + u_t$$

- ahol  $u_t$  egy gyenge fehérzaj,  $p$  az AR rendje az  $\Delta X_t$ -nek

<sup>28</sup> Egy érdekes blogbejegyzés a témáról: <http://blog.mindymallory.com/2018/02/basic-time-series-analysis-a-drunk-and-her-dog-explain-cointegration-and-the-vecm-model/>

- A  $C$  konstans és a  $\delta t$  lineáris trend lehet, hogy nem szerepel a regresszióban, és ez az alábbi lehetséges tesztekhez vezet:
  - $C = 0$  és  $\delta t = 0$
  - $C = 0$  és  $\delta t \neq 0$
  - $C \neq 0$  és  $\delta t = 0$
  - $C \neq 0$  és  $\delta t \neq 0$
- Nullhipotézis:  $H_0 : \rho = 0$  az  $X_t$  idősor gyengén stacioner ( $I(0)$ )
  - A nullhipotézist student-féle  $p$  statisztikával teszteljük

#### A kointegrált idősorok fogalma

- Van egy  $X_t$  és egy  $Y_t$  változónk
  - Ha az alábbi feltételek teljesülnek akkor kointegráltak:
    - $X_t$   $I(1)$ -es és  $Y_t$   $I(1)$ -es (integrált) folyamat
    - There exist  $(\alpha; \beta)$  such as  $\alpha x_t + \beta y_t$  is  $I(0)$
    - $\alpha X_t + \beta Y_t$   $I(0)$  folyamat
  - $\alpha, \beta$  kointegrációs vektor
  - Ha  $n$  idősorra általánosítjuk:  $(Y_{t1}, \dots, Y_{tn}) = Y_t$  1-es rendűen integrált
  - a kointegrációs vektor  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  azaz  $\beta X_t$   $I(0)$ 
    - $\beta_1$  gyakran 1

### Hibakorrekciós modell (ECM)

#### Alap ECM 2 változóval

- Ez a modell képes figyelembe venni a kointegrációt (a változók logaritmizálva vannak):  $\Delta y_t = c + \alpha \Delta x_t + \gamma (y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + e_t$ 
  - $\alpha$  : rövid távú elaszticitás
  - $\beta$ : hosszú távú elaszticitás
  - $\gamma$ : a hosszú távú egyensúlyhoz való visszatérés sebessége,  $\gamma < 0$
  - Az ECM-nek 2 komponense van: **rövid távú** ( $I(0)$  változókkal) és **hosszú távú** (késleltetett  $I(1)$  változókkal)

#### Alap ECM n darab változóval

- $n$  darab változó:  $(Y_{t1}, \dots, Y_{tn})$ , amelyek kointegráltak
  - Az alábbi modell képes figyelembe venni a kointegrációt  $n$ -darab esetben (logaritmizált változókkal):
  - $\Delta y_{1,t} = c + \sum_{i=2}^n \alpha_i \Delta y_{i,t} + \gamma (y_{1,t-1} - \sum_{i=2}^n \beta_i y_{i,t-1}) + e_t$ 
    - $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ : rövid távú elaszticitás
    - $\beta = (\beta_2, \dots, \beta_n)$ : hosszú távú elaszticitás
    - $\gamma$ : hosszú távú egyensúlyhoz való visszatérés sebessége,  $\gamma < 0$

#### Kibővített ECM n darab változóval

- Van egy  $I(1)$  változónk, amely  $Y_t$ -t magyarázza
  - további változókat tehetünk a modellbe, amelyek magyarázhatják  $Y_t$ -t
    - rövid távon ( $m$  vektor  $Y_t$ , amely  $I(0)$ )
    - hosszú távon ( $q$  vektor  $Z_t$ , amely  $I(1)$ )
  - $\Delta y_{1,t} = c + \sum_{i=2}^m \alpha_i \Delta x_{i,t} + \gamma (y_{1,t-1} - \sum_{i=2}^q \beta_i z_{i,t-1}) + e_t$

### Vector-ECM (VECM) n darab változóval

- Tekintsünk egy VAR(p) modellt:  $\Phi(B)y_t = \epsilon_t$ ;
  - $\Delta y_t = -\Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Gamma_p \Delta y_{t-p+1} + \epsilon_t$ 
    - $\Pi = (I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p)$
    - $\Gamma_i = -(\Phi_{i+1} - \dots - \Phi_p)$
    - $y_t$  **gyengén stacioner** ha  $|\Phi(z)| = 0$ 
      - Az egységgyök jelenlétében, ha  $|\Phi(1)| = 0$  amely szerint  $\Phi(1)$  kisebb a rangja
      - $\Phi(1) = I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p$ , nálunk  $\Phi(1) = \Pi$ .  $\Pi$  rangja az egységgyök jelenlétével függ össze az  $y_t$  vektorban
    - Ha az összes n változó stacioner, akkor  $\Pi$  rangja n. Ekkor ez a stacioner változók VAR(p) modellje
    - Ha az összes n változó integrált és nem kointegrált, akkor  $\Pi = 0$  és a modell egy egyszer differenciált VAR(p-1):  $\Delta y_t = \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Gamma_p \Delta y_{t-p+1} + \epsilon_t$
    - Ha az összes n változó integrált és kointegrált,  $\Pi$  rangja r, amely  $0 < r < n$ , és az r a kointegrált kapcsolatok száma
    - Ebben az esetben:  $\Pi = \alpha \times \beta'$  ahol  $\alpha$  egy (n x r)-es és  $\beta'$  egy (r x n)-es mátrix
    - $\beta$  mátrix tartalmazza r koefficienseit, amely az n számú integrált változó független stacioner kombinációja
      - $\beta' y_{t-1} \sim I(0)$
  - a Vector ECM (VECM) modell<sup>29</sup>:
    - $\Delta y_t = -\alpha \beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Gamma_p \Delta y_{t-p+1} + \epsilon_t$
    - ahol az  $\alpha$  mátrix tartalmazza az összes egyenletre vonatkozó r kointegrált kapcsolatot

## kointegrációs tesztek

### Engle-Granger kointegrációs tesztek

- Engle and Granger (1987) az alábbi kétlépéses tesztelési lehetőséget adja a kointegráció meglétére ( $y_{1t}$ ; ... ;  $y_{nt}$ ) változók között
  - OLS-el megbecsli az alábbi regressziót:  $y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \dots + \beta_n y_{nt} + u_t$
  - Az  $u_t$  maradéktagra futtat egységgyök tesztet. Ha igaz (egységgyök) akkor nincsen kointegráció, máskülönben a változók kointegráltak.
  - Az ADF teszt kritikus értékei eltérnek a standard ADF tesztől.
  - Engle and Granger (1987) megfelelő kritikus értékeket ad szimulációk segítségével, mivel a teszt aszimptotikus eloszlása nem szabványos.
  - A standard ökonometriai szoftverek táblázatos formában képesek erre
  - Amennyiben a becült maradéktag  $I(1)$ , ez azt jelenti, hogy a változók nem kointegráltak: ez a hamis regresszió, pl.: nem kointegrált  $I(1)$  változók lineáris regressziója
  - A hamis regresszió másik jele az extrém magas magyarázóerő ( $R^2$ )
  - **Előnye:** intuitív és könnyű értelmezni

<sup>29</sup> Egy példa az alkalmazására: <https://www.hindawi.com/journals/ddns/2018/5350308/>

- **Hátránya 1:** Az OLS becslés eloszlása nem normális, amely statisztikai inferenciát (rossz következtetéseket) okoz.
- **Hátránya 2:** nem teszi lehetővé a kointegrált kapcsolatok számának meghatározását,  $r$  (rang vagy a kointegrált kapcsolatok száma)
- A teszt után a teljes modell becsülhető
  - A hosszú távú megbecsült stacionárius maradéktag
  - egyenlet:  $u_t = y_{1t} - \beta_1 y_{2t} - \dots - \beta_n y_{nt}$
  - A rövid távú egyenlet:  $\Delta y_{1,t} = c + \sum_{i=2}^n \alpha_i \Delta y_{i,t} + \gamma \hat{u}_{t-1} + e_t$
- Kétlépéses becslés:
  - Hosszú táv becslése OLS-el:  $u_t = y_t - \beta x_t$ ,  $u_t \sim I(0)$ ?
  - Rövid táv becslése OLS-el:  $\Delta y_{1,t} = c + \alpha_i \Delta x_t + \gamma \hat{u}_{t-1}$
- A kibővített modell a rövid távú dinamikát is figyelembe véve:
  - $\Delta y_t = c + \sum_{i=2}^p \varphi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=2}^q \alpha_i \Delta x_{t-i} + \gamma(y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}) + e_t$

### Johansen kointegrációs teszt

- Johansen (1995) Maximum Likelihood megközelítése a  $r$  rang kointegráció meghatározására,  $\alpha$  és  $\beta$  ML becslése, illetve teszt specifikus hipotézisek a paraméterekre
- A Johansen teszt az alábbi hipotéziseket teszteli egymás után:
  - $H_0: r = 0$  vs  $H_1: r = 1$  (1 egyenlet kointegrált)
  - $H_0: r \leq 1$  vs  $H_1: r = 2$  (2 egyenlet kointegrált)
  - $H_0: r \leq 2$  vs  $H_1: r = 3$
  - 1 lépés: teszt nem veti el  $H_0$ -t, ezért  $r = 0$ .
  - $i$ -edik lépés, a teszt elveti a  $H_0$ -t, ezért  $r = i$
- Johansen (1995) 2 tesztstatistikát javasol:
  - a **trace tesztet és maximális sajátérték tesztet**
  - A gyakorlatban mind a két tesztet érdemes elvégezni és az eredményeket összevetni.
- Amikor a teszt meghatározza  $r$  értékét, utána a kointegrációs koefficienseket kell identifikálni
  - Minden  $r \times r$ -es  $Q$  mátrixra azt kapjuk, hogy:  $\Pi = \alpha\beta' = \alpha Q Q^{-1} \beta' = \gamma\delta'$
  - Ez azt jelenti, hogy a kointegrációs koefficienseket nem sikerült egyedileg azonosítani. Korlátozásokat kell bevezetni.

### g) VECM előrejelzés $n$ darab változóval

- A VECM előrejelzés  $h = 1$  ( $t+1$ ):
  - $\Delta \hat{y}_t(1) = -\alpha\beta' y_t + \Gamma_1 \Delta y_t + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p} + e_t$
  - Az  $y_{t+1}$  előrejelzett értéke az alábbi:  $\Delta \hat{y}_t(1) = y_t + \Delta \hat{y}_t(1)$
- Ha  $h > 0$  ( $t+h$ ), az előrejelzés iterálása:
  - $\Delta \hat{y}_t(h) = -\alpha\beta' \hat{y}_t(h-1) + \Gamma_1 \Delta \hat{y}_t(h-1) + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta \hat{y}_t(h-p) + e_t$
  - ahol az rhs előrejelzése esetén a valódi értékeket írjuk be, amennyiben lehetséges

### VECM előrejelzés ha $h = 1$

- Specifikus kétváltozós esetekben ( $y_t$ ;  $x_t$ ), a  $y_{t+1}$  következő időszakra történő előrejelzése:
  - $\Delta \hat{y}_t(1) = -\alpha(\hat{x}_t(1) - x_t) + \gamma(y_t - \beta x_t)$
  - Ebben az esetben az  $x_t$  következő időszaki értékét kell megbecsülni

## Források

- Hamilton, J.D. (1994), Time Series Analysis, Princeton University Press.
- Ghysels, E. and M. Marcellino (2018), Applied Economic Forecasting using Time Series Methods, Oxford University Press

- Johansen, S. (1995), Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models, Oxford University Press

### Önellenőrző kérdések

1. Miben tér el a VECM modell a VAR modelltől bemeneti változók szempontjából?
2. Mennyiben hasonlít a VECM modell a VAR modellre kimenetek szempontjából?
3. Miért lehet hasznos a kointegráció?

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

