

Kalkulus feladatok megoldása

6. Olvasólecke

Elemi függvénytranszformációk, függvény inverze

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 40 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFÉKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ A függvények megadásának módjai;
- ☐ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete;
- ☐ inverz függvény;
- ☐ az összetett függvény mint leképezések szorzata;
- ☐ a legalapvetőbb függvények: lineáris, négyzetes, gyök-, szinusz- és koszinusz-, logaritmus-, exponenciális függvény megadása és tulajdonságai.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait.

Különösen hasznos, ha az elemi függvénytranszformációkról készült videóleckét is áttanulmányozza az olvasó az első feladat megoldása előtt vagy közben, a még alaposabb megértés érdekében.

A gyakorlati OL fókusz

- Függvények értelmezési tartomány és értékkészlete
- Összetett függvények
- Elemi függvénytranszformációk: $f(x) + c$, $c \cdot f(x)$, $f(x + c)$ és $f(c \cdot x)$
- Inverz függvény megadása

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ meg tudja határozni az alapvető függvények, illetve az ilyenekből összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét;
- ✓ végre tudjon hajtani elemi függvénytranszformációkat;
- ✓ egy összetett függvényt ábrázolni tudjon, amennyiben elemi függvénytranszformációkkal jön létre;
- ✓ eldöntse egy függvényről, létezik-e inverze, és hogy mi az;
- ✓ grafikonjaikról felismerje az egymással inverz függvényeket.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Ábrázolja elemi függvénytranszformációk felhasználásával az $f: x \mapsto 2 - \ln(3 - 5x)$ függvényt!
Megoldás a 3. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Állapítsa meg a következő függvények inverzét, és ábrázolja is a grafikonjukat!

$$(a) f: x \mapsto y = 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6, \quad (b) f: x \mapsto y = \frac{x-1}{x+1}$$

Megoldás az 5. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Ábrázolja elemi függvénytranszformációk felhasználásával az $f: x \mapsto 2 - \ln(3 - 5x)$ függvényt!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A független és a függő változó fogalma;
2. elemi függvénytranszformációk: lineáris változótranszformációk;
3. a független változón végrehajtott lineáris transzformációk hatása: valós szám hozzáadása, -1 -gyel szorzás, illetve tetszőleges valós számmal szorzás;
4. a függő változón végrehajtott transzformációk hatása: valós szám hozzáadása, -1 -gyel szorzás, illetve tetszőleges valós számmal szorzás.

A független változó, vagyis az x , illetve a függő változó, vagyis az $y = f(x)$ függvényérték lineáris transzformációi és azok hatásuk a függvény grafikonjára

A független változó lineáris transzformációi

transzformáció	a transzformáció hatása a függvény grafikonjára
$e: x \mapsto x + c$	eltolás az x -tengely mentén $(-c)$ -vel
$t: x \mapsto -x$	tükrözés az y -tengelyre
$n: x \mapsto c \cdot x$	c -szeres összenyomás az y -tengelyre merőlegesen

A függvényérték lineáris transzformációi

transzformáció	a transzformáció hatása a függvény grafikonjára
$E: y \mapsto y + c$	eltolás az y -tengely mentén (c) -vel
$T: y \mapsto -y$	tükrözés az x -tengelyre
$N: y \mapsto c \cdot y$	c -szeres nyújtás az x -tengelyre merőlegesen

Ábrázolandó: $f: x \mapsto y = f(x) = 2 - \ln(3-5x)$

* Mi a transzformálandó alapfüggvény? Az $\ln$ -függvény

(1) A független változó transzformációja

② Mi történik az $\ln$ argumentumában, vagyis a „zárójelben”?

③ Egy $x \mapsto 3-5x = -5x+3$ transzformáció.

④ Ez felbontható: $x \xrightarrow{T} 5x \xrightarrow{t} -(5x) \xrightarrow{E} -(5x)+3$

$\Rightarrow (e \circ t \circ n)(x) = 3-5x$, vagy másképpen:

$$\ln(e(t(n(x)))) = \ln(3-5x)$$

lineáris transzformációk

$$\ln(e(t(n(x)))) = \ln(3-5x)$$

alapfgv: $\ln(u)$ grafikonja

① fgv: $(\ln \circ e)(v) = \ln(v+3)$

$\ln u$ grafikonja } eltolás a (-3)-nal v-tengely mentén

② fgv: $(\ln \circ e \circ t)(w) = (\ln \circ e)(-w)$

$\ln \circ e$ grafikonja } tükrözés a y-tengelyre

③ fgv: $(\ln \circ e \circ t \circ n)(x) = (\ln \circ e \circ t)(5x)$

$\ln \circ e \circ t$ grafikonja } 5-szörös y-tengelyre grafikonja } 5-szörös y-tengelyre

(3) Az összes transzformációs lépés sorozata:

$$f: x \xrightarrow{n} 5x \xrightarrow{t} -5x \xrightarrow{E} -5x+3 \xrightarrow{\ln} \ln(3-5x) \xrightarrow{T} -\ln(3-5x) \xrightarrow{E} -\ln(3-5x)+2 = f(x)$$

(2) A függő változó (függvényérték) transzformációja

• Mi történik az $\ln$ függvény értékével? vagyis milyen lineáris transzformáció argumentumában van az $\ln$?

* Egy $\lg(\cdot) \mapsto -\lg(\cdot)+2$ trfó.

* Ez felbontható:

$$\lg(\cdot) \xrightarrow{T} -\lg(\cdot) \xrightarrow{E} -\lg(\cdot)+2$$

$\ln$ -trfók

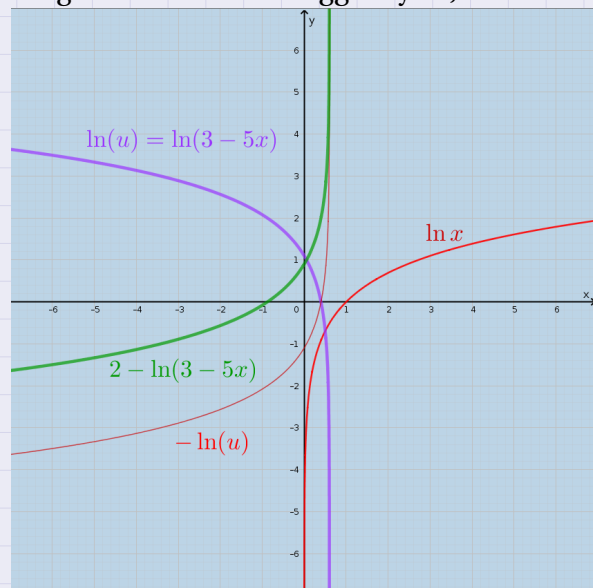
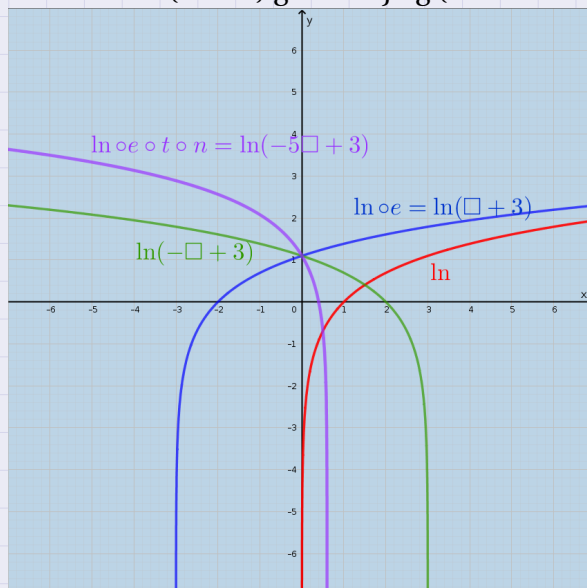
$$\ln(\cdot) \xrightarrow{T} -\ln(\cdot) \xrightarrow{E} -\ln(\cdot)+2$$

$T: \ln(\cdot) \mapsto -\ln(\cdot)$ tükrözés a y-tengelyre

$E: -\ln(\cdot) \mapsto -\ln(\cdot)+2$ eltolás az y-tengely mentén 2-vel

A bal oldali koordináta-rendszerben a független változó transzformációjának lépéseiként kapott grafikonokat ábrázoltuk, kiindulva az $\ln u$ grafikonjából, egészen az $\ln(3-5x)$ grafikonjáig.

A jobb oldali koordináta-rendszerben a függő változó (a függvényértékek) transzformációjának lépéseiként kapott grafikonokat ábrázoltuk, kiindulva az $\ln(3-5x)$ grafikonjából, egészen a $2 - \ln(3-5x)$ grafikonjáig (feltüntetjük még a kiindulási $\ln x$ függvényt is).



Észrevételek

- A bal oldali koordináta-rendszerben nem jelöltük az egyes függvények független változóit, hiszen ezen összetett függvények (függvénysszorzatok) argumentumában rendre más változó áll: még hátra lévő transzformáló függvény (illetve azok szorzatának) füg-

gő változója.

- Nem nehéz belátni, és hasznos gyakorlás végiggondolni, hogy kezdhetünk a függő változó transzformációival is, és a kapott függvény grafikonján hajtjuk végre a független változó elemi transzformációból adódó transzformációkat. Eredményül természetesen ugyanahhoz a grafikonhoz jutunk.

2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Állapítsa meg a következő függvények inverzét, és ábrázolja is a grafikonjukat!

$$(a) f: x \mapsto y = 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6, \quad (b) f: x \mapsto y = \frac{x-1}{x+1}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Mit jelent, hogy egy függvény kölcsönösen egyértelmű;
2. egy kölcsönösen egyértelmű függvény inverzének fogalma;
3. függvény és inverzének grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre.

(a) feladat

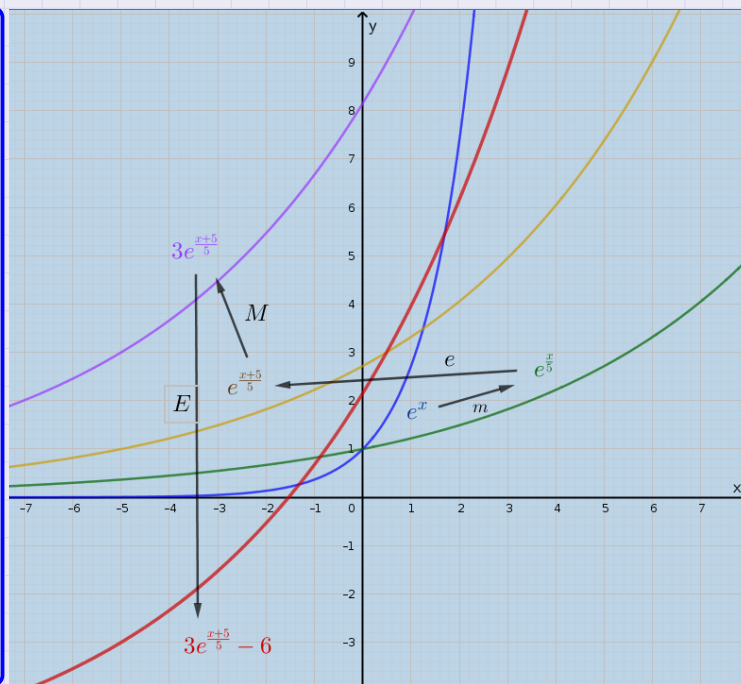
Az f függvény az $x \mapsto e^x$ exponenciális függvény független változójának, illetve függvényértékének lineáris transzformációjával jött létre.

A koordináta-rendszerben ábrázoltuk a kiindulási $x \mapsto e^x$ exponenciális függvényt és a független változó m , majd e lineáris transzformációjával nyert újabb függvények grafikonjait, majd a függvényérték M majd E transzformációjával kapott függvények grafikonjait, a sorrendet fekete nyilak jelzik.

Az elemi függvénytranszformációk végrehajtásának fontos szabálya: a független változóval kezdünk, egymás után végrehajtjuk a független változó transzformációit a megállapított leképezési sorrendnek megfelelően; elérünk az alapfüggvényig, majd egymás után végrehajtjuk a függő változó transzformációit is a megállapított leképezési sorrendnek megfelelően.

Vagyis először az m -et hajtjuk végre, eredménye a grafikon az y -tengelyre merőleges $\frac{1}{5}$ -szörös összenyomása, azaz 5-szörös "nyújtás". Utána az e transzformáció hatásaként a grafikon eltoljuk az x -tengely mentén (-5) -tel.

Folytatjuk a függvényértékekkel: az M leképezéssel, hatása 3-szoros "nyújtás" az x -tengelyre merőlegesen. Végül az E hatása "eltolás" az y -tengely mentén (-6) -tal.



Az alap $h: x \mapsto e^x$ exponenciális függvény.

$$x \xrightarrow{e} x+5 \xrightarrow{M} \frac{1}{5} \cdot (x+5) \xrightarrow{\exp} e^{\frac{x+5}{5}} \xrightarrow{M} 3 \cdot e^{\frac{x+5}{5}} \xrightarrow{E} 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6$$

A független változó e, m lineáris transzformációi és a függvényérték M, e lineáris transzformációi

$\downarrow$
 f bijektív, mert h bijektív

$h: x \mapsto e^x$ alapfüggvény
(1) $D_h = \mathbb{R}, R_h = \mathbb{R}^+$
(2) h szigorúan monoton nő
($e > 1$) ($e \approx 2,718$)
(3) $\Rightarrow h$ bijektív

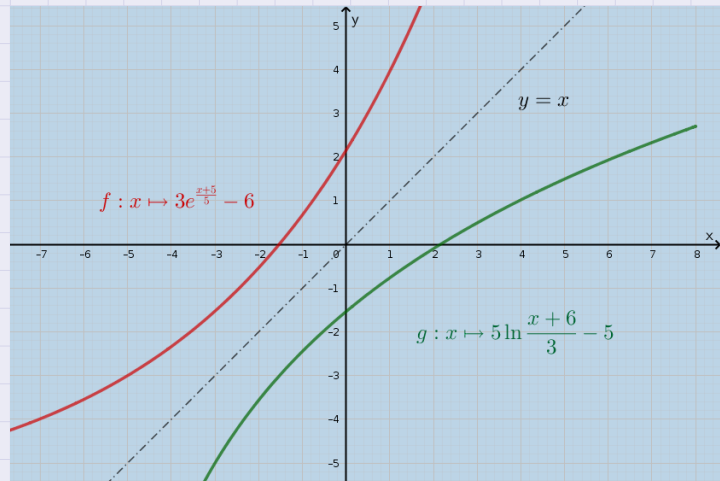
Ezért létezik az inverze. Kiszámítása az alábbi módon lehetséges. Mellette ábrázoljuk koordinátarendszerben az f és inverzének, a g függvénynek a grafikonját.

Az $f: x \mapsto 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6 = y$ függvény

$g: y = 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6 \mapsto x$ inverze kifejezhető lépésenként:

(1)

$$\begin{aligned} 3e^{\frac{x+5}{5}} - 6 &= y && +6 \\ 3e^{\frac{x+5}{5}} &= y+6 && :3 \\ e^{\frac{x+5}{5}} &= \frac{y+6}{3} && \ln(\cdot) \\ \frac{x+5}{5} &= \ln \frac{y+6}{3} && \cdot 5 \\ x+5 &= 5 \ln \frac{y+6}{3} && -5 \\ x &= 5 \ln \frac{y+6}{3} - 5 \end{aligned}$$



Megfigyelhetjük, hogy az f exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő az egész értelmezési tartományán, és ezért az inverze, a g logaritmusfüggvény is az.

(b) feladat

(b) $f: x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$. ÉT: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ÉK: $R_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

„Lineáris törtfüggvény”

Alakítsuk át EKVIVALENS módon!

D_f ne változzon meg!

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-x+2}{1+x} = \frac{2}{x+1} - 1 \quad (*)$$

Alapfüggvény: $h: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Grafikonja: normál hiperbola.

* a lineáris transzformációk:

$$x \xrightarrow{e} x+1 \xrightarrow{h} \frac{1}{x+1} \xrightarrow{M} 2 \cdot \frac{1}{x+1} \xrightarrow{E} 2 \cdot \frac{1}{x+1} - 1$$

eltolás az x -tengely mentén $(+1)$ -gyel
2-szeres nyújtás az x -tengelyre merőlegesen
eltolás az y -tengely mentén (-1) -gyel

Hogyan határozható meg R_f ?

• $A(x)$ alakból:

- (a) $x+1$ minden $\mathbb{R}$ értéket felvehet, kivéve a 0-t.
- (b) $\frac{1}{x+1}$ az összes nem 0 valós szám reciprok értékét felveszi: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (c) $\frac{2}{x+1}$ az összes nem 0 valós szám kétszeresét felveszi: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (d) $\frac{2}{x+1} - 1$ az összes nem -1 valós értéket felveszi: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Az f függvény grafikonja az alábbi jobb oldali képen sárga vonallal ábrázolt, $x = -1$ és $y = -1$ az aszimptotái a hiperbolának.

Az f függvény g inverzének megoldása

* $a(x)$ alakból:

$$f: x \mapsto \frac{2}{x+1} - 1 = y$$

az x kifejezhető y -nal:

$$x = \left(\frac{y+1}{2} \right)^{-1} - 1 = \frac{2}{y+1} - 1$$

tehát

$$g: y \mapsto \frac{2}{y+1} - 1 = \frac{1-y}{1+y}$$

Az f és a g ugyanazok a valós függvények: független változó-juttatók közös képlettel rendelkeznek függvényértéküket!

A kölcsönösen egyértelműség oka:

(*) minden $x \in D_f$ esetén $\exists! y \in R_f$ úgy, hogy $f(x) = y$

(**) minden $y \in R_f$ esetén $\exists! x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = y$. Valóban:

$$f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow \frac{2}{x_0+1} - 1 = \frac{2}{x_1+1} - 1$$

$$\Rightarrow x_0 = x_1$$

* Tehát: f inverze ÖNHÁGA: $f = g$.

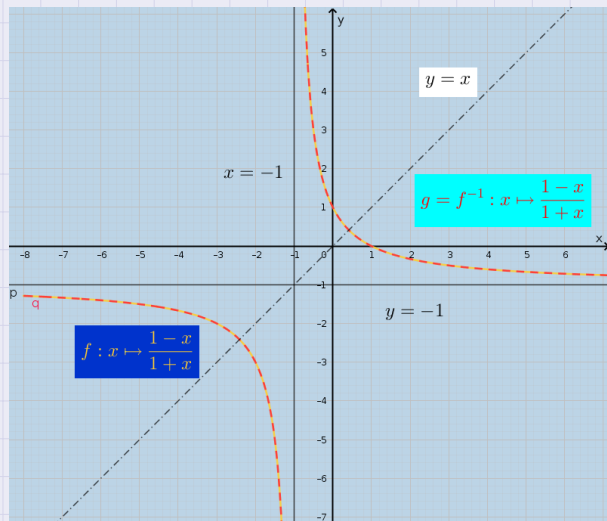
$D_g = R_f$ és $R_g = D_f$ triviálisan adódik!

* Az f függvény

a kölcsönösen egyértelmű $\Rightarrow$ van inverze

□ grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre

$\Rightarrow$ meggyezik az inverzével és látszik a formulával megoldásból is!



A koordináta-rendszerben a g inverz függvény grafikonját piros szaggatott vonal ábrázolja, teljes átfedésben az eredeti f függvényével. Jól látszik a szimmetria az $y = x$ egyenletű egyenesre.

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

? A g és f függvényekből $f \circ g$ összetett függvényt akarunk konstruálni.

- Megtehető-e ez, ha a g értékkészlete valódi részhalmaza az f értelmezési tartományának?
- Megtehető-e ez, ha a g értékkészletének valódi nem üres részhalmaza az f értelmezési tartománya?
- Megtehető-e ez, ha a g értékkészlete és az f értelmezési tartománya diszjunktak?
- Igaz-e, hogy ha $f \circ g$ létezik, akkor $g \circ f$ is létezik?

? Ha az $f: x \mapsto |x|$ függvényben x -hez 2-t adunk, akkor melyik pontban lesz a grafikon "csúcsa"?

? Lehet-e egy nem szigorúan, de monoton függvénynek inverze?

? Egy invertálható f függvény g inverzére teljesül, hogy $f(x)g(x) = 1$. Lehetséges-e ez, és ha igen, hogyan?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$$(a) \ x \mapsto \frac{x^2}{1+x}, \quad (b) \ x \mapsto \sqrt{3x-x^3}$$

2. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

(a) $x \mapsto \ln(x^2 - 4)$, (b) $x \mapsto \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

3. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

(a) $x \mapsto \sqrt{\log_5 \frac{x}{5+x}}$, (b) $x \mapsto \arcsin(\lg(x^2 - 1))$, (d) $x \mapsto \arccos(2 \sin x)$

4. Határozza meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvényeket!

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x - 2$, (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

5. Határozza meg az $f \circ g$, $g \circ f \circ k$ és a $k \circ f \circ g$ összetett függvényeket!

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$, $k(x) = x + 2$, (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$, $k(x) = \sin x$

6. Ábrázolja a következő függvényeket!

(a) $x \mapsto |x - 3|$, (b) $x \mapsto 2 - 2|4 - 2x|$, (c) $x \mapsto \cos\left(2x + \frac{5}{2}\right)$, (d) $x \mapsto \ln(1 + 3x) + 1$

7. Határozza meg a következő függvények inverzét!

(a) $f: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 6$, (b) $f: x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{2x-1}{5} + 4$, (c) $f: x \mapsto \frac{1}{2-x}$,
(d) $f: x \mapsto 2x^2 + 1$, (e) $f: x \mapsto 4 \lg(3x - 1)$

5. Ajánlott irodalom

- Reimann István: Matematika, Typotex
- Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
- Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON
- Fülöp Vanda: Kalkulus I. példatár, POLYGON