Kalkulus feladatok megoldása

4. Olvasólecke

Számsorozatok megadása, monotonitása, korlátossága 2.

Az olvasólecke szerzője

Kozma József
PhD, főiskolai docens
SZTE TTIK
Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 40 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
BOLYAI INTÉZET

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Előismeretek

- ☐ Sorozat fogalma, megadása,
- ☐ számtani sorozat, mértani sorozat,
- ☐ a természetes számok intuitív fogalma,
- ☐ a teljes indukció elve.

Jó tanácsok az Olvasónak

- ⋆ Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző általános tanácsait.
- ⋆ A sorozatok fogalma a későbbi tanulmányai során alapvető jelentőségű. Ezért ebben folytatjuk az előzőben megkezdett példák és feladatok sorát.
- ⋆ E gyakorlaton is célunk a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése konkrét feladatokon keresztül. Ezért kifejezetten beiktatunk "A probléma megértése" — a "Mit jelent?", "Mit kell kitalálni?" kérdések megválaszolásával —, a "Megoldási terv készítése" és a "Megoldási terv kivitelezése" szakaszokat.

A gyakorlati OL fókusza

- A számtani és mértani sorozat első n elemének összege;
- rekurzív sorozatok értelmezése, típuspélda rekurzívan adott sorozat 5. tagjának meghatározása;
- sorozat monotonitása, korlátossága.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ tudjon sorozatot, számsorozatot megadni;
- ✓ tudjon szabályt felállítani egy számsorozat elemeinek megadásához;
- ✓ képes legyen számtani és mértani sorozatok első n elemét összegezni;
- ✓ értse a rekurzív sorozat fogalmát, ki tudja számítani tagjait;
- ✓ meg tudja állapítani egy sorozat monotonitását, illetve korlátosságát.

Fontos megjegyezni, hogy ennek a leckének a feldolgozása feltételezi az előzőnek a korábbi elvégzését, az ott tárgyalt problémák alapos megértését.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ tudjon sorozatot, számsorozatot megadni;
- ✓ tudjon szabályt felállítani egy számsorozat elemeinek megadásához;
- ✓ képes legyen számtani és mértani sorozatok első n elemét összegezni;
- ✓ értse a rekurzív sorozat fogalmát, ki tudja számítani tagjait;
- ✓ meg tudja állapítani egy sorozat monotonitását, illetve korlátosságát.

Fontos megjegyezni, hogy ennek a leckének a feldolgozása feltételezi az előzőnek a korábbi elvégzését, az ott tárgyalt problémák alapos megértését.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Számtani és mértani sorozat

A sorozat *viselkedését*, vagyis matematikai tulajdonságait a sorozatot megadó függvény tulajdonságai határozzák meg. Tehát a függvényértékekre teljesülő feltételek adják a sorozat tulajdonságait. Ezeknek a feltételeknek a teljesülését a sorozat tagjaira vonatkozó állítások mondják ki. Eszerint a tagokra megfogalmazható (igazolható) állítások megismerése segít megérteni a sorozat viselkedését, tulajdonságait.

Korábbról legismertebb sorozataink a számtani és a mértani sorozat.

Tisztázandó fogalmak

- Fogalmazzon meg definíciót a számtani sorozatra!
- Fogalmazzon meg definíciót a mértani sorozatra!

2.1. Bevezető gyakorlat

Adjon meg olyan számtani, illetve mértani sorozatokat, ha vannak, amelyeknek az első öt egymást követő elemei az alábbiak!

(a) $1, 1, 1, 1, 1;$

(b) $1, 3, 5, 7, 9;$

Megoldás a 6. oldalon

2.1. gyakorlat.

Adjon meg olyan számtani, illetve mértani sorozatokat, ha vannak, amelyeknek az első öt egymást követő elemei az alábbiak!
(a) $-1, 1, -1, 1, -1$;
(b) $2, -4, 8, -16, 32$.

Megoldás a 6. oldalon

2.1. Példa

Adjon meg olyan számsorozatot, ha van, amelynek az első öt egymást követő tagja: 1, 1, 1, 1, 1, de ne legyen se számtani, se mértani sorozat!

Megjegyzések, válaszok a 7. oldalon

2.1. A probléma megértése

1. Tisztázott: számsorozat, annak megadása, tagjai; számtani sorozat, mértani sorozat.
2. De mit jelent az, hogy egy számsorozat nem számtani sorozat?
3. Mit jelent az, hogy egy számsorozat nem mértani sorozat?
4. Hogyan lehet ezeket ellenőrizni?
5. Milyen további feltétel van a példa kitűzésében?

2.1. Megoldási terv készítése

1. Mit jelent az, hogy egy számsorozat nem számtani sorozat? A számsorozat "számtani voltát" kifejező állítást kell tagadni.
2. Ugyanígy a "mértani voltát" kifejező állítást kell tagadni.
3. Először a két tagadásból (állításból) alkossuk meg azt az állítást, amelyet könnyen értelmezni tudunk (pl. ne tagadásként fogalmazódjon meg).
4. Ehhez az állításhoz szintén "és" kapcsolja a példa feltételéből azt az állítást, amely az első öt tagot rögzíti.

2.1. Megoldási terv kivitelezése

(a) Legyen az állítás S, mely azt fejezi ki, hogy a sorozat számtani. Tehát:
S = A sorozat bármely két egymást követő tagjának különbsége ugyanaz.
Ennek tagadása: nem igaz az S állítás, vagyis
¬S = Nem igaz, hogy a sorozat bármely két egymást követő tagjának különbsége ugyanaz.
Pozitív állítás formájában kifejezve ugyanezt:
¬S = Van két olyan különbsége egymást követő tagoknak, amely különbségek nem egyenlőek egymással.

(b) Legyen az állítás M, mely azt fejezi ki, hogy a sorozat mértani. Tehát:
M = A sorozatnak nincsen 0 tagja, és bármely két egymást követő tagjának hányadosa ugyanaz.
Pozitív állítás formájában kifejezve ennek tagadását:
¬M = (A sorozatnak van 0 tagja), vagy (létezik két olyan hányadosa egymást követő tagoknak, amelyek nem egyenlőek egymással).

2.2. gyakorlat.

Adjon meg olyan számsorozatokat, ha vannak, amelyeknek az első öt egymást követő elemei az alábbiak, de egyik se legyen se számtani, se mértani sorozat!

(a) $1, 3, 5, 7, 9$;

(b) $-1, 1, -1, 1, -1$;

(c) $2, -4, 8, -16, 32$.

Megoldás a 7. oldalon

2.1. Mintafeladat.

Adja meg az összes olyan számsorozatot, amely egyszerre számtani és mértani sorozat is!

Megoldás a 7. oldalon

2.3. gyakorlat.

Tudjuk, hogy 2020 egy $d = 8$ differenciájú számtani sorozat egyik eleme.

1. Meg lehet-e ezek ismeretében adni a sorozat minden tagját?
2. Hány szóba jöhető sorozat van?
3. Milyen összefüggés van az ilyen feltételnek eleget tévő számsorozatok között?

2.1. Harmonikus sorozat

A harmonikus sorozat fogalma

Egy azonos előjelű tagokból álló számsorozatot harmonikusnak nevezünk, ha a másodiktól kezdve minden tagja szomszédjainak harmonikus közepe. Vagyis

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} \qquad (n \geq 2).$$

2.4. gyakorlat.

Mutassa meg, hogy minden állandó tagú számsorozat harmonikus sorozat!

2.5. gyakorlat.

Milyen sorozathoz jutunk, ha csak pozitív vagy csak negatív számokból álló számtani sorozat tagjainak reciprokait vesszük?

3. A leghíresebb rekurzív sorozat: Fibonacci sorozata

Ha a természetes számok halmaza elemének tekinti valaki a 0 számot, akkor egy számsorozat első eleme az a_0, gyakran szokás ezért 0-adik elemnek is nevezni. Ilyenkor az első n elem összege az $a_0 + \cdots + a_{n-1}$ összeg.

3.1. Mintafeladat.

Egy számsorozatot a következőképpen adunk meg:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \ge 2).$$

(a) Írja fel az első nyolc tagot!

(b) Mutassa meg, hogy $a_{k+2} = \sum_{i=0}^{k} a_i + 1$ $(k \ge 2)$!

Megoldás a 9. oldalon

A Fibonacci-sorozat fogalma

Az előző feladatban szereplő sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezik.

4. Megoldások és útmutatók

A 2.1. Bevezető gyakorlat (4. o.) megoldása.

(a) Egy lehetőség: $\forall n : a_n = 1$. Ekkor $a_{n+1} - a_n = 0 =$ áll. $(n \ge 2)$. Ezért ez számtani sorozat. Ugyanakkor: ez a sorozat mértani is, hiszen a másodiktól kezdve az egymást követő tagok hányadosa $\frac{1}{1} = 1$.

Lehet más megadás is. Pl. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, … folytatással megfelelő az $a_n = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ $(n \ge 1)$. ($\lceil\cdot\rceil$ a felső egészrész függvény, vagyis a legkisebb egész szám, amely a valós számnál nem kisebb.) Ez a számsorozat nem számtani, hiszen az egymást követő tagok különbsége hol 0, hol 1. De nem is mértani, mert az egymást követő tagok hányadosa hol 1, hol egy 1-nél nagyobb szám.

(b) A megadott sorozat a páratlan természetes számok sorozataként is folytatható: $a_n = 2n - 1$ $(n \ge 1)$. Ez számtani sorozat, hiszen az egymást követő tagok különbsége állandó: 2.

Lehetne ugyanakkor másként is folytatni, más formulával megadni az általános tagot definiáló függvényt. Pl. lehet a folytatás $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 111, 113, 115, 117, 119, \ldots$ És még ehhez a folytatáshoz is többféle lehetséges további folytatás lehetséges (lásd a **??** kitűzött problémát).

A 2.1. gyakorlat (4. o.) megoldása.

a) Több formulát is megadhatunk arra, hogy minden páratlan tag -1 legyen, és minden páros tag 1 legyen. Pl.: $a_n = (-1)^n$ megfelelő. Ez mértani sorozat, hiszen az egymást követő tagok hányadosa -1. b) Könnyen látható, hogy az $a_n = (-1)^{n+1} 2^n$ $(n \ge 1)$ megfelelő, és az így megadott számsorozat mértani sorozat, mert az egymást követő tagok hányadosa

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} 2^n} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

Megjegyzések, válaszok a 2.1. Példához (4. o.) .

Pl. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2 első tíz eleme egy számsorozatnak, amelynek szöveges megadása: Legyen az első öt tag mindegyike 1, a második öt tag mindegyike 2, és így tovább, az n-edik öt tag mindegyike $5n$. Formulát is adhatunk: $a_n = q$, ha $n = q \cdot 5 + m$, ahol $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ehhez természetesen azt kell tudni, hogy minden természetes számon egyértelműen lehet maradékos osztást elvégezni az 5 egész számmal. Ugyanehhez a sorozathoz juthatunk más képlettel is. Megfelelő lesz az $a_n = \lceil \frac{n}{5} \rceil$ $(n \geq 1)$ képlettel megadás is. ($\lceil \cdot \rceil$ a felső egészrész függvény, vagyis a legkisebb egész szám, amely a valós számnál nem kisebb.) Ez a számsorozat nem számtani, hiszen az egymást követő tagok különbsége hol 0, hol 1. De nem is mértani, mert az egymást követő tagok hányadosa hol 1, hol egy 1-nél nagyobb szám.

A 2.2. gyakorlat (5. o.) megoldása.

(a) A megadott sorozat a páratlan természetes számok sorozataként is folytatható: $a_n = 2n - 1$ $(n \geq 1)$. Ez számtani sorozat, hiszen az egymást követő tagok különbsége állandó: 2. Lehetne ugyanakkor másként is folytatni, más formulával megadni az általános tagot definiáló függvényt. Pl. lehet a folytatás $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 111, 113, 115, 117, 119, \ldots$ És még ehhez a folytatáshoz is többféle lehetséges további folytatás lehetséges (lásd a **??** kitűzött problémát).

(b) Több formulát is megadhatunk arra, hogy minden páratlan tag -1 legyen, és minden páros tag 1 legyen. Pl.: $a_n = (-1)^n$ megfelelő. Ez mértani sorozat, hiszen az egymást követő tagok hányadosa -1.

(c) Könnyen látható, hogy az $a_n = (-1)^{n+1} 2^n$ $(n \geq 1)$ megfelelő, és az így megadott számsorozat mértani sorozat, mert az egymást követő tagok hányadosa

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} 2^n} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

2.1. Mintafeladat megoldása (5. o.)

Adja meg az összes olyan számsorozatot, amely egyszerre számtani és mértani sorozat is!

4.1. A probléma megértése

Mit jelent?

- sorozat
- számsorozat
- számtani sorozat
- mértani sorozat

Fogalomértés ellenőrzése: válasszoljon az alábbi kérdésekre!

1. Melyikből van több? Természetes számokon értelmezett valós értékű függvényekből vagy számsorozatokból?
2. Igaz-e a következő állítás: *Minden sorozat számsorozat.*
3. Minden sorozatnak végtelen sok tagja van.

Mit kell kitalálni?

1. Mit kell megtalálni? Számsorozatot.
2. Hányat? Egyet? Többet? Az összeset.
3. Ismer példát, mely megfelel? IGEN. Az **??**. Mintafeladat (1) problémájánál láttunk ilyet: az $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat ilyen.
4. Mi az, ami adott? Mit tudunk a számsorozatról? Azt, hogy számtani sorozat, ÉS azt, hogy mértani sorozat. Ezt a két tulajdonságát le is tudjuk fordítani (hiszen ismerjük a definíciók tartalmát).
5. A számsorozat megadását kell kitalálni, formulával vagy más módon.

4.1. Megoldási terv készítése

1. Találkoztam-e már hasonló problémával? A **??**. Mintafeladat (1) részében: a csupa 1-esekből álló sorozat megfelel a feltételeknek.
2. Vajon minden állandó (nem 0) tagú sorozat megfelel? Úgy tűnik, hogy igen!
3. Lehet, hogy nincs is másfajta megfelelő számsorozat?
4. Vagyis azt lehet belátni, hogy a feltételek mellett $q = 1$, és $d = 0$?
5. Ez alapján meg tudjuk adni az összes ilyen sorozatot? Arra gondolhatunk, hogy minden állandó tagú sorozat megfelelő lesz, de ezt azért meg is kell majd mutatni!
6. TERV: A feltételeket felírjuk a kvóciens és a különbség segítségével, és arra számítunk, hogy következményt $q = 1$ és $d = 0$ adódik. Ha ez megvan, megnézzük, hogy minden állandó tagú sorozat teljesíti-e a két feltételt. Próbálkozzunk ezzel!

4.1. Megoldási terv kivitelezése

1. A sorozat számtani. Ezért $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + d$, ahol $d \in \mathbb{R}$ állandó.
2. A sorozat mértani. Ezért $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = q \cdot a_n$, ahol $q \in \mathbb{R}$ egy 0-tól különböző állandó.
3. Az első két állításból következik, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + d = q \cdot a_n$.
4. Az egyenlőséget a valós számok összeadására és szorzására vonatkozó szabályok szerint átrendezve: $(q-1)a_n = d$ következik.
5. Ha $q = 1$, akkor mindkét oldal 0, ezért $q = 1$, és $d = 0$, következésképpen a sorozat állandó tagú.
6. Ha $q \neq 1$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = d/(q-1)$, vagyis állandó, ami miatt a kvóciensre $q = 1$. Ellentmondáshoz jutottunk, ezért a feltevés nem teljesülhet.
7. Azt kaptuk, hogy a feltételekből $q = 1$, és $d = 0$ következik, tehát a sorozat állandó tagú.
8. Legyen $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = c \neq 0$. Teljesül-e, hogy számtani? Bármely két egymást követő tag különbsége $d = 0$ állandó, tehát a sorozat számtani. Teljesül-e, hogy mértani? Bármely két egymást követő tag hányadosa $q = 1$ állandó, tehát a sorozat mértani.
9. Azt kaptuk, hogy a nem 0 állandó tagú sorozatok megfelelnek a feltételeknek.
10. **Válasz a kitűzött problémára: azok a sorozatok, amelyek egyszerre számtani és mértani sorozatok is, pontosan a nem 0 állandó tagú számsorozatok.**

A kivitelezés ellenőrzése

- Minden lépést indokoltunk, és a következtetés indokolása helyes volt: csak igaz állítások szerepelnek a kivitelezés lépéseiben.
- Nem hiányzik-e valami?
- A kivitelezés elvégzését követő kis pihenés után érdemes visszatérni a megoldás kivitelezésére.
- Most már kissé precízebben is fogalmazhatunk annak helyességét illetően. Amikor az "összes olyan számsorozatot" kerestük, valójában számsorozatok $\mathscr{S}$ halmazának adott tulajdonságokkal rendelkező számsorozatokból álló $\mathscr{S}_{\mathrm{szm}}$ részhalmazát kerestük. A sejtésünk az volt, hogy ez a halmaz szoros kapcsolatban van a konstans tagú számsorozatok

$$\mathscr{S}_c =: \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n = c\}$$

halmazával. Először megmutattuk, hogy az $\mathscr{S}_c$-ből a 0-sorozat elhagyásával kapott

$$\mathscr{S}_c^0 =: \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n = c \neq 0\}$$

halmazra $\mathscr{S}_{\mathrm{szm}} \subseteq \mathscr{S}_c^0$. Azután rámutattunk, hogy: $\mathscr{S}_c^0 \subseteq \mathscr{S}_{\mathrm{szm}}$. A két tartalmazás együtt azt adja, hogy $\mathscr{S}_{\mathrm{szm}} = \mathscr{S}_c^0$.

4.1. Visszatekintés

- Külön ellenőrzés nem látszik szükségesnek, mert a kivitelezés során minden egyes lépést alaposan indokoltunk, majd az indoklást jelentő állítások igazságtartalmát is ellenőriztük.
- Abszolút biztosak azonban – a tudományos és az oktatási tapasztalatok is ezt mutatják – csak akkor lehetünk, ha "külső ellenőrzésen is átment a megoldás, vagyis nem csak a már leírt lépéseken megyünk végig újra és újra.
  1. Ez lehet egyrészt kollegiális együttműködés, meghallgatás, megbeszélés.
  2. Még ennél is jobb, ha másik, alternatív megoldást, igazolást keresünk a problémára.
- Ha feltételeket másképpen is meg tudjuk ragadni, másféle megoldás irányába mozdulhatunk el.
  1. Ha azt az ekvivalens feltételt használjuk, hogy minden tag a szomszédainak számtani, illetve mértani közepe, másképpen érünk ugyanehhez a célhoz. Itt most nem vezetjük le a megoldást, a gyakorlatok között azonban kitűzzük.

3.1. Mintafeladat megoldása (6. o.)

Egy számsorozatot a következőképpen adunk meg:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

(a) Írja fel az első nyolc tagot!
(b) Mutassa meg, hogy $a_{k+2} = \sum_{i=0}^{k} a_i + 1$ $(k \geq 2)$!

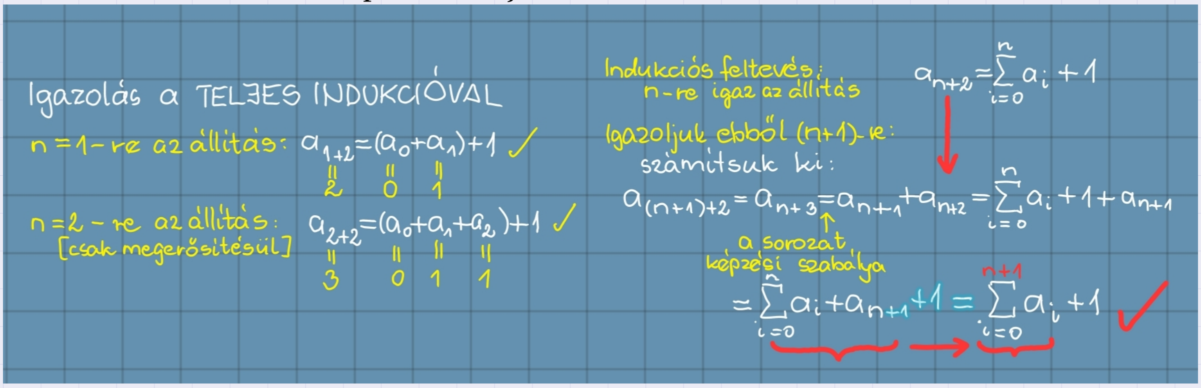
Mit kell tudni a feladat megoldásához?

A teljes indukció elve és alkalmazása.

(a) Egyszerű kéttagú összeadások adják, hogy

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 13.$$

(b) A második részfeladat tipikusan teljes indukcióval kezelhető.



5. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- Van-e olyan nem nulla számokból álló sorozat, mely reciprokainak sorozatával együtt monoton növő?
- Ha egy mértani sorozat kvóciense negatív, akkor lehet-e a sorozat növekvő?
- Mondjon példát olyan monoton csökkenő sorozatra, amely korlátos, és olyanra is, amelyik nem az!
- Milyen előjelű a számtani sorozat differenciája, ha az első n elemének S_n összege monoton csökkenő?

6. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Igaz-e, hogy egy szigorúan monoton növő számtani sorozat nem korlátos?
2. Igaz-e, hogy van szigorúan csökkenő, alulról korlátos mértani sorozat?
3. Igaz-e, hogy van szigorúan csökkenő, alulról nem korlátos mértani sorozat?
4. Adja meg az összes olyan számsorozatot, amely egyszerre mératni és számtani sorozat!
5. Egy számtani sorozatban $a_1 = 6$, $d = 3$. Jellemezze a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!
6. Egy számtani sorozatban $a_1 = 6$, $d = 3$, és tekintse az S_n sorozatot, vagyis az első n tag összegéből álló sorozatot. Jellemezze ezt a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!

7. Egy mértani sorozatban $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$. Jellemezze a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!
8. Egy mértani sorozatban $a_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$. Jellemezze a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából! Ha S_n az első n tag összege, akkor jellemezze az $\{S_n\}$ sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából!
9. Rekurzióval adott a következő sorozat: $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 1$. Döntse el, hogy a sorozat korlátos-e! Vizsgálja meg monotonitás szempontjából! Írja föl a sorozat általános tagját!
10. Az $\{a_n\}$ sorozat esetén $a_1 = 3$, és $a_n = a_{n-1}^2 + 8$ $(n > 1)$. Döntse el, hogy korlátos-e a sorozat, illetve hogy monoton-e a sorozat!

7. Ajánlott irodalom

[1] Reimann István: Matematika, Typotex

[2] Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar

[3] U. Daepp and P. Gorkin: *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.