

Kalkulus feladatok megoldása

3. Olvasólecke

Számsorozatok megadása, monotonitása, korlátossága 1.

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFÉKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Előismeretek

- ☐ Sorozat fogalma, megadása,
- ☐ számtani sorozat, mértani sorozat,
- ☐ a természetes számok intuitív fogalma,
- ☐ a teljes indukció elve.

Jó tanácsok az Olvasónak

- ★ Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző általános tanácsait.
- ★ A sorozatok fogalma a későbbi tanulmányai során alapvető jelentőségű. Ezért ebben az olvasóleckében körültekintően foglalkozunk e fogalmak kialakításával és elmélyítésével. Ezúttal a megelőző iskolai tanulmányaik során megismert fogalmak mellett megjelennek újabbak is. Ezek megértését, és a korábbi ismerteknek az új kontextusbeli megfelelő értelmezését szolgálják a bevezető Példák.
- ★ A frissen tanult és ebben a gyakorlati olvasóleckében alkalmazott leg-alapvetőbb fogalmak a gyorsabb referencia érdekében belső linkkel elérhetőek, a lecke végére csoportosítva.
- ★ E gyakorlaton is célunk a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése konkrét feladatokon keresztül. Ezért kifejezetten beiktatunk "A probléma megértése" — a "Mit jelent?", "Mit kell kitalálni?" kérdések megválaszolásával —, a "Megoldási terv készítése" és a "Megoldási terv kivitelezése" szakaszokat.

A gyakorlati OL fókusz

- A számtani és mértani sorozat első n elemének összege;
- rekurzív sorozatok értelmezése, típuspélda rekurzívan adott sorozat 5. tagjának meghatározása;
- sorozat monotonitása;
- sorozat korlátossága.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ tudjon sorozatot, számsorozatot megadni;
- ✓ tudjon szabályt felállítani egy számsorozat elemeinek megadásához;
- ✓ képes legyen számtani és mértani sorozatok első n elemét összegezni;
- ✓ értse a rekurzív sorozat fogalmát, ki tudja számítani tagjait;
- ✓ meg tudja állapítani egy sorozat monotonitását, illetve korlátosságát.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Sorozatok megadása

2.1. Bevezető példák és gyakorlatok

2.1. Példa

Definiáljuk a (a_n) sorozatot úgy, hogy $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Írja fel ennek a sorozatnak az első néhány tagját, és grafikonon ábrázolja a sorozat elejét!
([1] Example 18.1)

Megjegyzések, válaszok a 6. oldalon

2.1. A probléma megértése

Találkozott már hasonló problémával? Ismerősek a példában szereplő fogalmak és eljárások?

Mit jelent?

- Látott már "sorozatot"?
- A $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ egy sorozatot definiál?
- Egyáltalán, mit jelent "definiálni" valamit?
- Mit jelent az, hogy valami egy sorozat tagja?
- Lehet egy ilyen sorozatot koordinátarendszerben ábrázolni? Függvényeket szoktak ábrázolni koordinátarendszerben!
- A számsorozat minden tagját két szám jellemzi:
 1. a tag indexe, vagyis az a szám, amelyik kijelöli a helyét a sorozatban;
 2. a tag maga, hiszen az is egy szám.

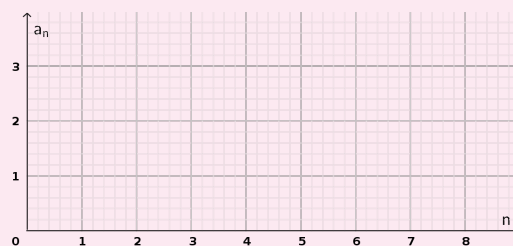
Mit kell kitalálni?

- Mit kell tennünk először? Felírni, mondjuk, az első 8 tagot.
- Mit kell tennünk másodszor? Egy grafikont kell felrajzolnunk, melynél az értékek a sorozat tagjai.

2.1. Megoldási terv

$a_1 = ?$, $a_2 = ?$, $a_3 = ?$, $a_4 = ?$, $a_5 = ?$, $a_6 = ?$,
 $a_7 = ?$, $a_8 = ?$ A kérdőjelek helyébe kell az értékeket beírni.

A koordináta-rendszerben azokat a pontokat kell felvenni (pl. az első nyolcat), amelyek abszcisszája rendre 1, 2, 3, ..., 8, második koordinátája a megfelelő indexű tag.



2.1. Bevezető gyakorlat

Tekintse a következő sorozatot: $a_n = 1 + (-1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Írja fel az első négy tagját! Ábrázolja mint függvényt az értelmezési tartományáról ($\mathbb{N}$) a képhalmazába.

Megoldás a 6. oldalon

2.2. Bevezető gyakorlat

Mi a következő sorozat első öt eleme? Ábrázolja a sorozatot koordináta-rendszerben!

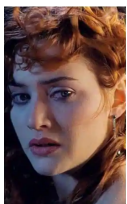
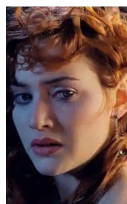
$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

([1] Exercise 18.2 (b))

Megoldás a 6. oldalon

2.3. Bevezető gyakorlat

Személyekből állítunk össze egy sorozatot, megadva az első öt tagot.

$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$
				

, ...

Tisztázandó kérdések

1. Lehet ennek megfelelően megadni egy sorozatot?
2. Mik a sorozat tagjai?
3. Hány tagja van a sorozatnak? És hány eleme van a sorozat tagjai értékhalmazának?

Megoldás a 6. oldalon

Tisztázandó kérdések általában a sorozatokkal kapcsolatban

Mit jelent az, hogy valamiből végtelen sok van? Honnan tudjuk, hogy egy sorozatnak végtelen sok tagja van? Az, hogy egy sorozatnak végtelen sok tagja van, jelenti-e azt, hogy a sorozat tagjainak halmaza végtelen?

Definíciója szerint egy sorozatnak annyi tagja van, amennyi természetes szám van: mindegyikhez tartozik a sorozatnak egy tagja. A természetes számok számát (számosságát) *megszámlálhatóan végtelennek* nevezzük. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a tagok halmaza is végtelen lenne: pl. a csupa 9-esekből álló sorozat tagjainak halmaza egyelemű halmaz, egyetlen eleme a 9 szám.

3. Monoton, korlátos számsorozatok

Példa

Valójában rekurzív definíció.

$$\begin{aligned}a_1 &= 0 \\a_2 &= a_1 + 1 \\a_3 &= a_2 + 2 \\a_4 &= a_3 + 3 \\&\vdots \\a_n + 1 &= a_n + n\end{aligned}$$

Formula: $a_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1)$. (Igazoljuk!)

Tulajdonságok

TULAJDONSÁGOK = **Igaz állítások**

1. **Állítás. Minden tag nagyobb az előzőnél.**

- Egyre nagyobb.
- Minden pozitív számnál nagyobbá válik a növekmény.

2. **Állítás. Minden számnál nagyobbak tagok is lesznek.**

A sorozat mindig, korlát nélkül növekszik.

Példa

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ prím,} \\ \text{a legnagyobb prím, amely } n\text{-nél kisebb,} & \text{ha } n \text{ nem prím.} \end{cases}$$

Gondolja végig, hogy ez a sorozat vajon jól van-e definiálva!

Még ha nem is olyan könnyű egy adott n esetén az a_n tagot megnevezni, az nyilvánvalónak tűnik, hogy a véges sok n -nél kisebb prímszám között kell lennie legnagyobbnak.

1, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 11, 11, 13, ...

3.1. Mintafeladat.

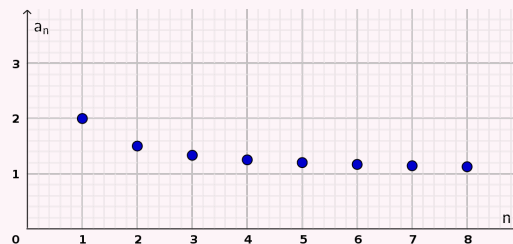
Egy számtani sorozatban $a_1 = 6$, $d = 3$. Jellemezze a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!

Megoldás a 7. oldalon

4. Megoldások és útmutatók

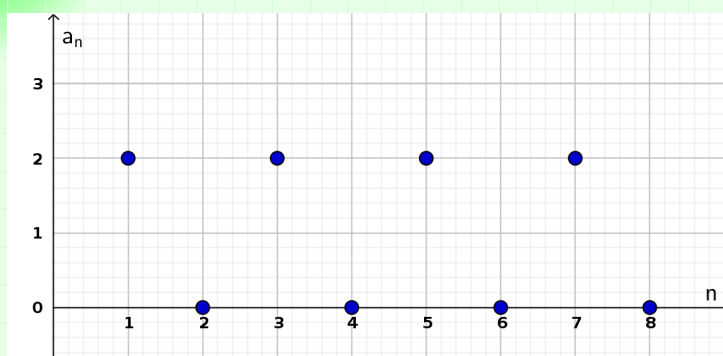
Megjegyzések, válaszok a 2.1. Példához (4. o.) .

$$\begin{aligned}a_1 &= 2, & a_2 &= 1\frac{1}{2} = 1,5, & a_3 &= 1\frac{1}{3} \approx 1,33, \\a_4 &= 1\frac{1}{4} = 1,25, & a_5 &= 1\frac{1}{5} = 1,2, & a_6 &= 1\frac{1}{6} \approx 1,17, \\a_7 &= 1\frac{1}{7} \approx 1,14, & a_8 &= 1\frac{1}{8} \approx 1,13.\end{aligned}$$



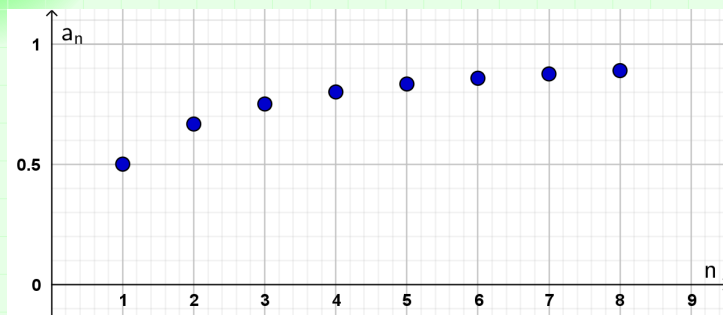
A 2.1. Bevezető gyakorlat (4. o.) megoldása.

$$a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 0.$$



A 2.2. Bevezető gyakorlat (4. o.) megoldása.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = \frac{5}{6}$$



A 2.3. Bevezető gyakorlat (4. o.) megoldása.

Válaszok és útmutatások.

1. Lehet ennek megfelelően megadni egy sorozatot? Igen, egy f függvényt kell találnunk, melynek értelmezési tartománya a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza, X értékkészlete pedig tartalmazza Lenardo di Capriot és Kate Winsletet:

$$\text{Lenardo di Caprio, Kate Winslet} \in X.$$

Lehet a hatodik tagtól kezdve bármit megadni a sorozat elemének, csak akkor azokat az elemeket fel kell venni a függvény értékkészletébe.

2. Mik a sorozat tagjai? Attól függ, hogy mi az függvény utasítása. Használhatjuk pl. az

$$a_n = \begin{cases} \text{Kate Winslet,} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \text{Leonardo di Caprio,} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

formulát. Ezzel megadtuk egy a feltételnek megfelelő sorozat tagjait.

3. Hány tagja van a sorozatnak? A sorozatnak annyi tagja van, mint ahány természetes szám van. Ez végtelen, "megszámlálhatóan végtelen". És hány eleme van a sorozat tagjai halmazának? Ez a halmaz most $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Mint fent megjegyeztük, ez most egy kételemű halmaz:

$\{\text{Kate Winslet, Leonardo di Caprio}\}$.

3.1. Mintafeladat megoldása (5. o.)

Egy számtani sorozatban $a_1 = 6$, $d = 3$. Jellemezze a sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

- Számtani sorozat fogalma, differenciája, általános tagja.
- Sorozat monoton növekedés, csökkenése, szigorúan monoton növekedés, csökkenés.
- Sorozat korlátossága.

MONOTONITÁS

$a_1 = 6$, $d = 3 \Rightarrow$ általános tag:

A definíció szerint $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{n+1} - a_n = d = 3 > 0$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+1} > a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Szigorúan monoton növekvő.

KORLÁTOSAG

Azt kell vizsgálni, hogy két valós szám között van-e a sorozat minden eleme.

* szig. mon. növekvő $\Rightarrow a_1 \leq a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
Ezért $6 \leq a_n$, így alulról korlátos.

* Tetszőleges (nagy) K számmal n van nagyobb tagja a sorozatnak:

$a_n > K : a_n = 3n + 3 > K$,
hacsak $n > \frac{K-3}{3}$. (Pl. ha $K = 1000$,
akkor $n > 332\frac{1}{3}$ esetén minden tag $> K$.)
Felülről NEM korlátos.

Megoldási útmutató: 4.1. feladat

- Először állapítsuk meg a sorozat tagjainak képzési szabályát (hogyan lehet megadni tetszőleges elemet)!
- Gondolja át: több szabályt is meg tudna-e adni?
- Vizsgálja meg, hogy állandó-e az egymást követő tagok különbsége vagy hányadosa!
- Van-e olyan sorozat közöttük, amelyik számtani és mértani is lehet?

1) Egy lehetőség: $\forall n: a_n = 1$. Ekkor $a_{n+1} - a_n = 0 = \text{áll.}$ ($n \geq 2$). Ezért ez számtani sorozat. Ugyanakkor: ez a sorozat mértani is, hiszen a másodiktól kezdve az egymást követő tagok hányadosa $\frac{1}{1} = 1$.

Lehet más megadás is. Pl. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, ... folytatással megfelelő az $a_n = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ ($n \geq 1$). ($\lceil \cdot \rceil$ a felső egészrész függvény, vagyis a legkisebb egész szám, amely a valós számnál nem kisebb.) Ez a számsorozat nem számtani, hiszen az egymást követő tagok különbsége hol 0, hol 1. De nem is mértani, mert az egymást követő tagok hányadosa hol 1, hol egy 1-nél nagyobb szám.

2) A megadott sorozat a páratlan természetes számok sorozataként is folytatható: $a_n = 2n - 1$ ($n \geq 1$). Ez számtani sorozat, hiszen az egymást követő tagok különbsége állandó: 2.

Lehetne ugyanakkor másként is folytatni, más formulával megadni az általános tagot definiáló függvényt. Pl. lehet a folytatás 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 111, 113, 115, 117, 119, ... És még ehhez a folytatáshoz is többféle lehetséges további folytatás lehetséges (lásd a 4.1 kitűzött problémát).

3) Több formulát is megadhatunk arra, hogy minden páratlan tag -1 legyen, és minden páros tag 1 legyen. Pl.: $a_n = (-1)^n$ megfelelő. Ez mértani sorozat, hiszen az egymást követő tagok hányadosa -1 .

4) Könnyen látható, hogy az $a_n = (-1)^{n+1} 2^n$ ($n \geq 1$) megfelelő, és az így megadott számsorozat mértani sorozat, mert az egymást követő tagok hányadosa

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} 2^n} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

4.1. gyakorlat.

Az alábbi számsorozatok közül melyik számtani sorozat, és melyik mértani sorozat?

1. 1, 1, 1, 1, 1, ...
2. 1, 3, 5, 7, 9, ...
3. $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$
4. 2, $-4, 8, -16, 32, \dots$

4.1. Kitűzött probléma

A 4.1. gyakorlatban szereplő sorozat első öt tagja: 1, 3, 5, 7, 9.

1. Hány olyan számsorozat lehetséges, melynek ez az öt szám az első öt tagja?
2. Adjunk meg formulával számsorozatokat, melyeknek ezek az első tagjai!
3. Folytassuk a sorozatot tíz újabb taggal a megoldási útmutató szerint: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 111, 113, 115, 117, 119. A folytatás még mindig sokféleképpen lehetséges. Keressünk ilyeneket, és adjunk rá formulát!

5. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Sorozatokat csak számokból lehet-e képezni?
- ? Igaz vagy hamis? Sorozat tagjainak az értéke egy formulával adható meg.
- ? Van-e olyan nem nulla számokból álló sorozat, mely reciprokainak sorozatával együtt monoton növekvő?
- ? Ha egy mértani sorozat kvóciense negatív, akkor lehet-e a sorozat növekvő?
- ? Mondjon példát olyan monoton csökkenő sorozatra, amely korlátos, és olyanra is, amelyik nem az!
- ? Milyen előjelű a számtani sorozat differenciája, ha az első n elemének S_n összege monoton csökkenő?

6. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Döntse el az alábbi állítások igazságtartalmát!
 - (a) Minden számtani sorozat monoton.
 - (b) Minden számtani sorozat szigorúan monoton.
 - (c) Létezik nem monoton számtani sorozat.
 - (d) Létezik nem szigorúan monoton számtani sorozat.
2. Döntse el az alábbi állítások igazságtartalmát!
 - (a) Minden mértani sorozat monoton.
 - (b) Minden mértani sorozat szigorúan monoton.
 - (c) Létezik nem monoton mértani sorozat.
 - (d) Létezik nem szigorúan monoton mértani sorozat.
3. Döntse el az alábbi állítások igazságtartalmát!
 - (a) Ha egy számtani sorozat differenciája negatív, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő.
 - (b) Ha egy mértani sorozat valamelyik tagja és a hányadosa is pozitív, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.
 - (c) Ha egy mértani sorozat valamelyik tagja negatív, és a hányadosa pozitív, akkor a sorozat monoton.
 - (d) Van olyan mértani sorozat, amelynek a hányadosa negatív, de a sorozat monoton.
 - (e) Nincsen olyan számsorozat, amely egyszerre számtani és mértani sorozat is.

7. Ajánlott irodalom

- [1] Reimann István: Matematika, Typotex
- [2] Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
- [3] U. Daepf and P. Gorkin: *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.