

Kalkulus feladatok megoldása

10. Olvasólecke

Többváltozós függvények szemléltetése

Az olvasólecke szerzője



Vigh Viktor

PhD, egyetemi docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ Többváltozós függvények fogalma;
- ☐ többváltozós függvények szekciófüggvényei;
- ☐ kétváltozós függvények szintvonalai,
- ☐ kétváltozós függvények határértéke és folytonossága,
- ☐ egyenletükkel adott görbék, koordináta geometria, egyenletrendszerek.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt Kozma József társszerzőm tanácsait.

A gyakorlati OL fókusza

- Többváltozós függvények fogalmának elmélyítése;
- többváltozós függvények értelmezési tartománya;
- szintvonalas ábrázolás.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ vizualizálni tudjon képlettel adott többváltozós függvényeket;
- ✓ biztonsággal kezelje a többváltozós függvényekhez kapcsolódó alapfogalmakat.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Határozzuk meg és ábrázoljuk a következő kétváltozós függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x, y) = \ln((x-2)^2 + (y+4)^2)$

b) $g(x, y) = \sqrt{\ln(xy)}$

Megoldás a 3. oldalon

2.2. Mintafeladat.

2.1. gyakorlat. A megadott c_0 értékekhez tartozó szintvonalak ábrázolásával szemléltessük a következő függvényeket!

- a) $a(x, y) = 2x - y$, $c_0 = -2, -1, 0, 1, 2$
b) $b(x, y) = x/(y^2 - 16)$, $c_0 = -1, 0, 1, 4$

Megoldás a 4. oldalon

2.3. Mintafeladat.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ?$$

Megoldás a 6. oldalon

2.4. Mintafeladat.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} = ?$$

Megoldás a 7. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (2. o.)

Határozzuk meg és ábrázoljuk a következő kétváltozós függvények értelmezési tartományát!

- a) $f(x, y) = \ln((x-2)^2 + (y+4)^2)$
b) $g(x, y) = \sqrt{\ln(xy)}$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A feladat megfelelő értelmezése: egy függvény teljes megadásához hozzátartozik az értelmezési tartománya is, így a feladat szövegezése nem teljesen precíz - azonban követi az évtizedes szakzsargont. Helyesebb lenne így kérdezni: „határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők.”
2. A megoldás a sík egy részhalmaza, aminek precíz leírása bonyodalmas lehet, és sokszor nem világos, mikor adtuk meg megfelelő formátumban a választ. Ezért ilyen típusú feladatoknál minden esetben rajzoljuk le megoldásunkat, akkor is ha a feladat külön nem kéri, ezzel mi magunk is jobban megértjük a halmaz szerkezetét, és a válaszukat is világosabbá tesszük. (Nagyon banális rajzoktól esetleg eltekinthetünk.)
3. A gyök- és logaritmusfüggvények ismerete.
4. Összetett függvények, egyenlőtlenségek.

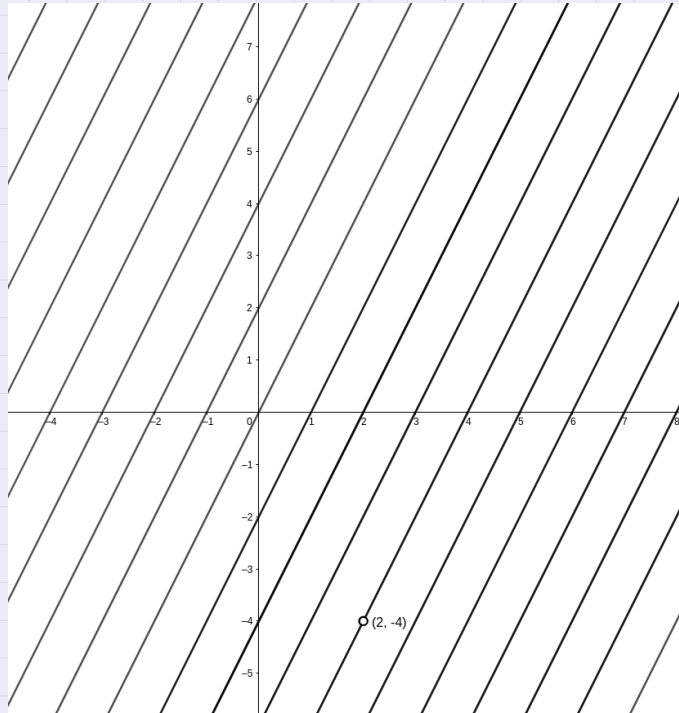
- a) A logaritmus csak pozitív számokra van értelmezve, ezért

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 > 0.$$

Mivel nyilvánvalóan $(x-2)^2 \geq 0$ és $(y+4)^2 \geq 0$, így a bal oldal biztosan nemnegatív. Az

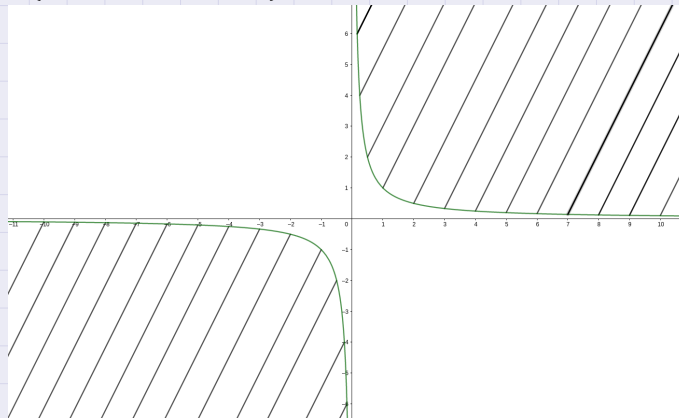
összeg csak akkor lehet 0, ha $(x-2)^2 = 0$ és $(y+4)^2 = 0$ egyszerre teljesül, azaz $x = 2$ és $y = -4$. Így az egyetlen pont, ahol nincs értelmezve a kifejezés a $(2, -4)$.

Kaptuk, hogy $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, -4)\}$.



- b) Először is a gyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért $\ln(xy) \geq 0$. Ezután a logaritmus-függvény monotonitása miatt $\ln(xy) \geq \ln 1$ pontosan akkor teljesül, ha $xy \geq 1$. Itt megállhatunk a ponthalmaz leírásával, további értelmezés már csak bonyolítaná a leírást. Az ábrázolásnál ügyeljünk a III. síknegyedbe eső pontokra, amelyek mindkét koordinátája negatív.

Kaptuk, hogy $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\}$.



2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

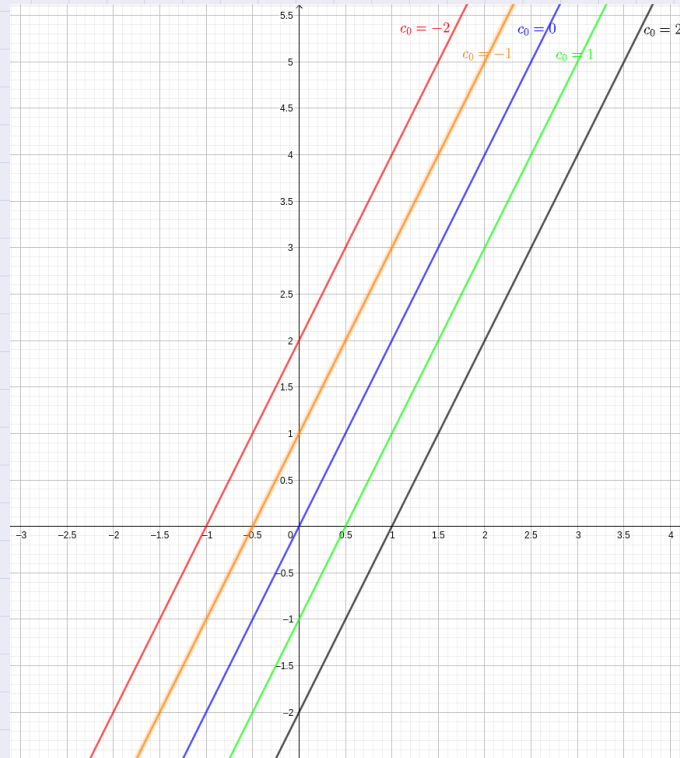
2.3. gyakorlat. A megadott c_0 értékekhez tartozó szintvonalak ábrázolásával szemléltessük a következő függvényeket!

- a) $a(x, y) = 2x - y$, $c_0 = -2, -1, 0, 1, 2$
 b) $b(x, y) = x/(y^2 - 16)$, $c_0 = -1, 0, 1, 4$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

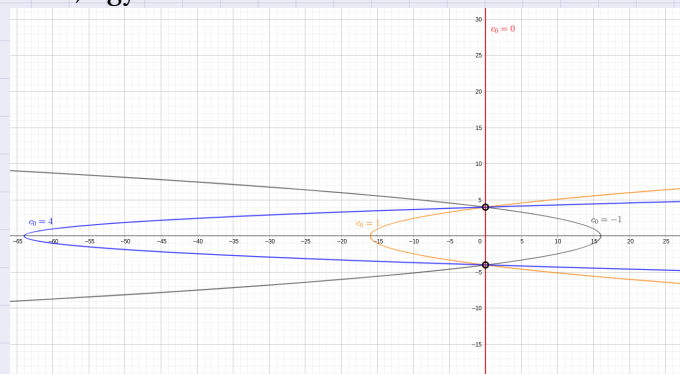
1. Szintvonal fogalma.
2. Első és másodfokú egyváltozós függvények ábrázolása.

- a) A $c_0 = 2x - y$ egyenletű görbéket kell felrajzolnunk a megadott c_0 értékekre. Átrendezve $y = 2x - c_0$, amiről jól tudjuk, hogy egy 2 meredekségű, $-c_0$ y -tengelymetszetű egyenes. Így kapjuk a keresett szintvonalakat.



A koordinátageometriából tanultak alapján tudjuk, hogy ez egy sík. Rajzoltassuk ki valamilyen szoftverrel!

- b) Most a $c_0 = x/(y^2 - 16)$ egyenletű görbéket kell ábrázolnunk. Vegyük észre, hogy $y \neq \pm 4$, vagyis a függvény nincs értelmezve az $y = 4$ és $y = -4$ egyeneseken. Ezeken a helyeken természetesen a szintvonalnak sem lehet pontja. Átrendezve a szintvonalak általános egyenletét, az $x = c_0 y^2 - 16c_0$ egyenletű vízszintes állású parabolákat kapjuk az $y \neq \pm 4$ kikötéssel. Ezeket a standard $x = y^2$ vízszintes parabolából kaphatjuk c_0 arányú, y -tengelyre vonatkozó „nyújtás” (merőleges affinitás), majd vízszintes irányú $-16c_0$ egységgel való eltolás után, ügyelve a kikötésre.



A $(0, 4)$ és $(0, -4)$ pontok egyik szintvonalnak sem elemei.

Rajzoltassuk ki valamilyen szoftverrel a grafikont!

2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ?$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Kétváltozós függvény határértékének fogalma: a pontos definícióért az előadás 7. olvasóleckéjére hivatkozunk.
2. Többváltozós függvények határértékét kiszámítani általában nehéz probléma, nincs rá mindig működő recept. A következő lépések végrehajtása azonban mindig érdemes, a példák zömében ez a módszer eredményre vezet. (A többi feladat egyedi ötletet igényelhet, ezek a kurzus keretein túlmutatnak.)
 1. Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományt! Ha a függvény definiált a vizsgált pontban, nem következik a 7.15. vagy 7.16. tételből a folytonosság? Ilyenkor a határérték a helyettesítési értékkel egyenlő, készen vagyunk. Esetleg nem rosszul kitűzött a feladat?
 2. Írjuk át problémát $u = x - x_0$ és $v = y - y_0$ helyettesítéssel, hogy a limeszt az origóban számíthassuk:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} f(u + x_0, v + y_0).$$

3. Helyettesítsünk $u = 0$ -t, és számoljuk ki az egyváltozós limeszt. Helyettesítsünk $v = 0$ -t is, és ismét számoljuk ki az egyváltozós limeszt. Ha két kapott limesz különböző, akkor a keresett határérték nem létezik, a feladatot megoldottuk.
4. Helyettesítsünk $y = \lambda u$ -t, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az egyváltozós limeszt! (A λ paraméter.) Ha a kapott limesz valamilyen λ esetén nem létezik, vagy minden λ esetén létezik, de függ a λ paramétertől (azaz vannak különböző λ értékek, amikre különböző a limesz), akkor a kétváltozós határérték nem létezik, készen vagyunk.
5. Alkalmazzunk polártranszformációt: $u = r \cdot \cos \varphi$, $v = r \cdot \sin \varphi$. Itt $r \rightarrow 0+$ mellett számítunk határértéket, aminek φ -től függetlenül kell léteznie.

A példában

$$f(x,y) = \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Menjünk végig a javasolt lépéseken!

1. Világos, hogy $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, azaz behelyettesítéssel nem tudunk határértéket számolni, de a feladat értelmes.
2. A határértéket az origóban kell kiszámoljuk, így az u és v változók bevezetésétől eltekinthetünk.
3. Helyettesítsünk $x = 0$ -t.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 0 \cdot y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Hasonlóan, $y = 0$ -t is.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x \cdot 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

A kapott két határérték megegyezik, nem jutottunk eredményre. (Ebben a lépésben csak az derülhet ki, hogy nem létezik a keresett határérték. A határértékek egyezőségéből semmi nem következik, szemléletesen a tengelyek mentén közelítettük az origót. A határérték létezéséhez minden lehetséges utat vizsgálnunk kell.)

4. Helyettesítsünk $y = \lambda x$ -t ($\lambda \in \mathbb{R}$)! Ilyenkor $y \rightarrow 0$ automatikus, és ismét egyváltozós limeszt számolunk.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x \cdot \lambda x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\lambda x^2}{|x|\sqrt{1 + \lambda^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\lambda|x|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 0.$$

A határérték minden λ esetén létezik, és egyenlő, ebből ismét nem következtethetünk semmire.

5. Vezessünk be polárkoordinátákat:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Azt látjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0^+, \varphi \in [0, 2\pi)} \frac{3r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+, \varphi \in [0, 2\pi)} 3r \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésnél használtuk a Rendőr-elvet: mivel $-1 \leq \cos \varphi \cdot \sin \varphi \leq 1$ minden φ -re, így

$$0 \leftarrow -3r \leq 3r \sin \varphi \cdot \cos \varphi \leq 3r \rightarrow 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy a keresett limesz létezik, és

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} = ?$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Lásd az előző feladatnál adott tanácsokat.

A példában

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Menjünk végig a javasolt lépéseken!

1. Világos, hogy a függvény $x + y = 0$ egyenesen nem értelmes, azaz $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$. Így behelyettesítéssel nem tudunk határértéket számolni, de a feladat

értelmes.

2. A határértéket az origóban kell kiszámoljuk, így az u és v változók bevezetésétől eltekintünk.
3. Helyettesítsünk $x = 0$ -t.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y}{0 + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Hasonlóan, $y = 0$ -t is.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Mivel a két határérték nem egyezik meg, ezért az f függvénynek nem létezik a határértéke az origóban.

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

? Mennyivel „nehezebb” folytonosságot ellenőrizni, mint határértéket számolni?

? Folytonos-e az origóban az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény?

? Folytonos-e az origóban az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{ha } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x+y = 0 \end{cases}$$

függvény?

? Keressen példát olyan függvényre, aminek az origóban mindkét szekciófüggvénye azonosan 0 függvény, de a függvény az origóban nem folytonos.

? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!

- ☐ Egy kétváltozós függvény különböző c_0 értékekhez tartozó szintvonalai metszhetik egymást.
- ☐ Az összes szintvonal ismeretében a függvény tetszőleges helyen vett helyettesítési értéke kiszámolható.
- ☐ Ha egy függvény folytonos (x_0, y_0) pontban, akkor ott létezik a határértéke.
- ☐ Ha szekciófüggvények folytonosak, akkor a függvény is folytonos.

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

- Határozzuk meg és ábrázoljuk a következő kétváltozós függvények értelmezési tartományát!
 - $a(x, y) = 2x - y$
 - $b(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$
 - $c(x, y) = x^3 / (y^2 - 16)$
 - $d(x, y) = \frac{\ln(y^2 - 16)}{\sqrt{x^2 - 9}}$
 - $e(x, y) = \ln(y^2 - 16) \cdot \sqrt{x^2 - 9}$
 - $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$
- A megadott c_0 értékekhez tartozó szintvonalak ábrázolásával szemléltessük a következő függvényeket!
 - $a(x, y) = (x-2)^2 + (y+4)^2, c_0 = -1, 0, 1, 4$
 - $b(x, y) = \ln((x-2)^2 + (y+4)^2), c_0 = -1, 0, 1, 4$
 - $c(x, y) = \sqrt{(x^2 - 9)y}, c_0 = -1, 0, 1, 4$
 - $d(x, y) = \ln(xy), c_0 = -1, 0, 1, 4$
- Döntsük el, behelyettesítéssel számíthatóak-e az alábbi limeszek. Ha a behelyettesítési módszer nem működik, a tanult lépésekkel (koordinátatengelyek mentén, λ meredekségű egyenes mentén) teszteljük, hogy léteznek-e a határértékek! Ha a tesztek sem vezettek eredményre, alkalmazzunk polártranszformációt, és számítsuk ki a limeszt!
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (3x^2y + xy - 2)$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{3x^2y + xy - 2}{2x + y}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x + y}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{2x + y^2}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \log_x(x + y)$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

5. Ajánlott irodalom

- Bagota Mónika, Németh József, Németh Zoltán: Analízis II. feladatgyűjtemény, POLY-GON
- Szabó Tamás: Kalkulus II. példatár informatikusoknak, POLY-GON