

Kalkulus feladatok megoldása

1. Olvasólecke

Bevezetés, ismételés

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 40 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFÉKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

A középiskolában megszerzett és az előadáson áttekintett legalapvetőbb fogalmak és összefüggések a számokkal, vektorokkal, illetve a logaritmusfüggvénnyel kapcsolatosan.

- ☐ Koordináta-rendszer, vektorok, skalárszorzat
- ☐ Egyenes egyenlete, meredekség, irányvektor, normálvektor
- ☐ Sík egyenlete, normálvektora
- ☐ A logaritmus fogalma, azonosságai, a logaritmusfüggvény és monotonitása

Jó tanácsok az Olvasónak

1. Forduljon korábbi tanulmányai során használt tankönyveihez, a tanulás során készített jegyzeteihez!
2. Mindig érdemes a tovább lépés előtt tisztázni, hogy mit tud pontosan felidézni, illetve hol vannak a megértésben kitöltendő hézagok.
3. Előzetesen olvassa át az előadás azonos című olvasóleckéjét, és nézze meg az előadáshoz tartozó videóleckét!
4. E gyakorlathoz azonos című videólecke kapcsolódik, amely néhány problémát és azok megoldását mutatja be, illetve szolgál szóbeli magyarázattal.
5. Ha szükséges, forduljon a tananyagban szereplő referenciához (további külső videóleckék, más tananyagok, javasolt könyvek)!
6. A kidolgozott példák
 - segítenek végigmenni a probléma megértésének, megoldásának és a megoldás ellenőrzésének, tudássá válásának útján. Ezért ajánlott a még egyszerűnek, esetenként nyilvánvalónak is tűnő lépéseket is végiggondolni, és lehetőség szerint egyet sem kihagyni.
 - önálló megoldását mindenképpen érdemes az olvasónak megpróbálnia. Ez segíti abban, hogy tisztázhassa: a problémával kapcsolatos fogalmaknak, eljárásoknak pontosan és teljes mértékben birtokában van-e. Ekkor el tudja dönteni, hogy az Előadás és a Gyakorlat Videó- és Olvasóleckéit milyen mértékben kell újra átnéznie. Még a sikeres önálló megoldás esetén is ajánlott az itt kidolgozott megoldás áttekintése, hiszen abból további, a kurzus menetébe illeszkedő ismereteket szerezhet, illetve erősíthet meg a saját tudásában.
 - gyakran egymásra épülnek, az egyes feladatok megoldásához szükséges ismeretanyag gyakran feltételezi az előző feladatokhoz szükséges ismereteket.
7. A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén ajánlott.

A gyakorlati OL fókusz

- vektorműveletek koordinátás alakban, típusfeladat: adott **a** és **b** (koordinátákkal), számítsuk ki $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektort;
- skalárszorzat, típusfeladat: vektorok szögének kiszámítása;
- egyenes egyenlete a síkban, típusfeladat: normálvektor leolvasása egy meredekséges alakban adott egyenletből;
- sík egyenlete a térben, típusfeladat normálvektoros síkegyenlet felírása;
- logaritmus, típusfeladat numerikusan adott logaritmikus kifejezések sorba rendezése.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ műveleteket tudjon elvégezni koordinátás alakban megadott vektorokkal,
- ✓ ki tudja számítani koordinátaikkal adott vektorok skaláris szorzatát és szögét,
- ✓ egyenletével adott egyenest jellemezni tudjon irányvektorával, normálvektorával,
- ✓ két pontjával vagy egy pontjával és irány- vagy normálvektorával adott egyenes egyenletét fel tudja írni,
- ✓ meg tudja határozni a térben egy sík egyenletét normálvektorának és egy pontjának ismeretében,
- ✓ alkalmazni tudja a logaritmus fogalmát olyan kifejezések értékének sorba rendezésére, melyek logaritmust tartalmaznak.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a}(3;5)$, $\mathbf{b}(-1;6)$, $(-1;-8)$, $\mathbf{d}(2;-3)$. Határozza meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ vektor koordinátáit!

Megoldás az 5. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Adottak a következő vektorok: $\mathbf{b}(-1;6)$, $(-1;-8)$, $\mathbf{e}(0;6)$. Határozza meg a $6\mathbf{e} - \mathbf{c} + 6\mathbf{b}$ vektor koordinátáit!

Megoldás az 5. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Adottak az $\mathbf{a}(-2;5)$ és $\mathbf{b}(6;3)$ vektorok. Határozzuk meg a két vektor szögét!

Megoldás a 6. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Írja fel az ℓ egyenes egyenletét, ha $P_0(-1;-2)$ az egyenes egy pontja, és $\mathbf{n}(-1;-2)$ egy normálvektora!

Megoldás a 6. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Határozza meg az $\ell : y = 7x + 4$ egyenes egy normálvektorát, valamint egy irányvektorát!

Megoldás a 7. oldalon

2.6. Mintafeladat.

Írja fel a Σ sík egyenletét, ha $P_0(-3;-1;2)$ a sík egy pontja, és $\mathbf{n}(1;1;2)$ egy normálvektora!

Megoldás a 8. oldalon

2.7. Mintafeladat.

Határozza meg a $\Sigma : 7x - 3y + 8z + 4 = 0$ sík egy normálvektorát!

Megoldás a 8. oldalon

2.8. Mintafeladat.

Rendezze sorba nagyság szerint a következő számokat:

$$\lg 1000, \quad \lg \sqrt{100}, \quad \log_5 1, \quad \log_2(-4), \quad \log_{\frac{1}{7}} 49, \quad \log_{\sqrt{2}} 2$$

Megoldás a 9. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a}(3;5)$, $\mathbf{b}(-1;6)$, $(-1;-8)$, $\mathbf{d}(2;-3)$. Határozza meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ vektor koordinátáit!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Ha két vektor a koordinátaival $\mathbf{u}(u_1, u_2)$, $\mathbf{v}(v_1, v_2)$, akkor összegük koordinátáira:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

vagyis *vektorok összegének koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak összegei.*

2. A vektorok összeadása kommutatív művelet, vagyis bármely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. A vektorok összeadása asszociatív művelet, vagyis bármely $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

$$\begin{array}{l} \underline{\mathbf{a}}(3;5) \\ \underline{\mathbf{b}}(-1;6) \\ \underline{\mathbf{c}}(-1;-8) \\ \underline{\mathbf{d}}(2;-3) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}})(3-1; 5+6) = (2;11) \\ (\underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{d}})(-1+2; -8-3) = (1;-11) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{d}})(2+1; 11-11) = (3;0) \end{array} \right.$$

Észre vétel: tetszőleges számú vektor összegének koordinátáit megkapjuk, ha az összes megfelelő koordinátát összeadjuk!

Vagyis: „megtakaríthatjuk” a csoportosítást:

$$(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{d}})(3-1-1+2; 5+6-8-3) = (3;0)$$

2.2. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Adottak a következő vektorok: $\mathbf{b}(-1;6)$, $(-1;-8)$, $\mathbf{e}(0;6)$. Határozza meg a $6\mathbf{e} - \mathbf{c} + 6\mathbf{b}$ vektor koordinátáit!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Ha egy vektor a koordinátaival $\mathbf{v}(v_1, v_2)$, és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy való szám, akkor a $\lambda\mathbf{v}$ vektor adott számszorosa a koordinátaival:

$$(\lambda\mathbf{v})(\lambda v_1, \lambda v_2),$$

vagyis *vektorok számszorosának koordinátái a vektor megfelelő koordinátáinak számszorosai.*

2. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$ összegvektorral egyenlő.

$$\underline{b}(-1;6) \rightarrow 6\underline{b}(6 \cdot (-1); 6 \cdot 6) = (-6; 36)$$

$$\underline{c}(-1;-8) \rightarrow -\underline{c}((-1)(-1); (-1)(-8)) = (1; 8)$$

$$\underline{e}(0;6) \rightarrow 6\underline{e}(6 \cdot 0; 6 \cdot 6) = (0; 36)$$

$$6\underline{e} - \underline{c} + 6\underline{b} = 6\underline{b} - \underline{c} + 6\underline{e} = (-6 + 1 + 0; 36 + 8 + 36) = (-5; 80)$$

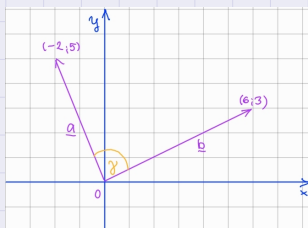
↑
kommutativitás

2.3. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Adottak az $\underline{a}(-2;5)$ és $\underline{b}(6;3)$ vektorok. Határozzuk meg a két vektor szögét!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Két vektor szöge a *skaláris szorzatuk* definíciójában jelenik meg.
2. Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzata: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \gamma$, ahol $|\underline{u}|$ és $|\underline{v}|$ a vektorok abszolút értéke (hosszúsága), és γ az általuk bezárt szög.
3. Egy $\underline{v}(v_1, v_2)$ vektor $|\underline{v}|$ abszolút értéke koordinátákkal kifejezve: $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
4. Koordinátákkal kifejezve az $\underline{u}(u_1, u_2)$ és $\underline{v}(v_1, v_2)$ vektorok skaláris szorzata $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$.



$$\underline{a}(-2;5), \underline{b}(6;3)$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

A geometriai definíció szerint:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sqrt{29} \cdot \sqrt{45} \cdot \cos \gamma \quad \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = (-2) \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 3$$

$$\cos \gamma = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{3}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{45}} \approx 0,0830$$

$$\text{Ezért } \gamma \approx 85,24^\circ.$$

2.4. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Írja fel az ℓ egyenes egyenletét, ha $P_0(-1;-2)$ az egyenes egy pontja, és $\underline{n}(-1;-2)$ egy normálvektora!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A P_0 ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú egyenes (normálvektoros) egyenlete

$$\langle \underline{n}, (\underline{x} - \underline{p}_0) \rangle = 0,$$

ahol $\underline{p}_0$ a P_0 pont helyvektora, $\underline{x}$ az egyenesre illeszkedő X pont helyvektora.

2. Az egyenes normálvektoros egyenlete koordinátákban, $\underline{n}(a;b)$ és $P(x_0; y_0)$ esetén

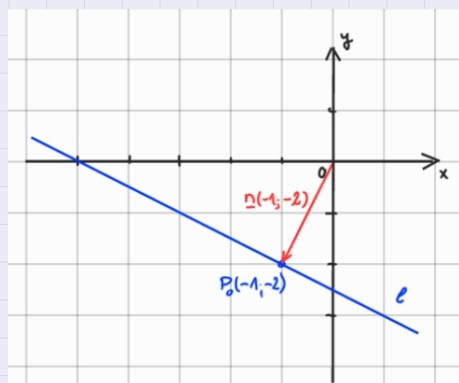
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

(lásd a skaláris szorzat felírását koordinátákkal).

A feladat megoldása az előzetes ismeretek birtokában pusztán egy behelyettesítésre korlátozódik a sík normálvektoros egyenletébe.

A behelyettesítés követését megkönnyíti, hogy a levezetésben nyilak mutatják az egyes koordináták helyettesítésének pozícióját.

A levezetés melletti koordináta-rendszer szemlélteti a számolás eredményét. (Az a feladat szerzőjének "játékossága", hogy a megadott P_0 pont és az $\mathbf{n}_0$ pont koordinátái ebben a feladatban megegyeznek.)



$$\begin{array}{l} \underline{n}(-1; -2) \qquad P_0(-1; -2) \\ \text{az } l \text{ normálvektora} \quad \text{az } l \text{ egy pontja} \\ \text{az egyenes (normálvektoros) egyenlete:} \\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \\ \begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & -1 & & -1 & & -2 & & -2 \end{array} \\ -(x+1)-2(y+2)=0 \\ -x-2y-5=0 \rightarrow x+2y+5=0 \end{array}$$

2.5. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Határozza meg az $\ell: y = 7x + 4$ egyenes egy normálvektorát, valamint egy irányvektorát!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Minden (esetleg hiányos) $ax + by + c = 0$ kétismeretlenes elsőfokú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol nem lehet a és b egyszerre 0, mert akkor c is 0, és nincsen egyenlet.
2. Minden (esetleg hiányos) $ax + by + c = 0$ kétismeretlenes elsőfokú egyenlet egy olyan egyenes egyenlete, amelynek normálvektora az $\mathbf{n}(a; b)$ vektor.
3. A $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes (irányvektoros) egyenlete

$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0.$$

4. Minden $ax + by + c = 0$ kétismeretlenes (esetleg hiányos, ahol vagy $a = 0$, vagy $b = 0$) elsőfokú egyenlet tekinthető egy egyenes irányvektoros egyenletének, ahol $\mathbf{v}(b; -a)$ az egyenes egy irányvektora; és ugyanakkor tekinthető egy egyenes normálvektoros egyenletének, ahol $\mathbf{v}(a; b)$ az egyenes egy normálvektora.

$$\begin{array}{l} y = 7x + 4 \\ \downarrow \\ \underbrace{7x}_{\uparrow a} + \underbrace{(-1)y}_{\uparrow b} + 4 = 0 \quad \underbrace{7x}_{\uparrow v_2} + \underbrace{(-1)y}_{\uparrow -v_1} + 4 = 0 \\ \underline{n}(7; -1) \text{ egy normálvektor} \quad \underline{v}(1; 7) \text{ egy irányvektor} \end{array}$$

2.6. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Írja fel a Σ sík egyenletét, ha $P_0(-3; -1; 2)$ a sík egy pontja, és $\mathbf{n}(1; 1; 2)$ egy normálvektora!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A P_0 ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík (normálvektoros) egyenlete

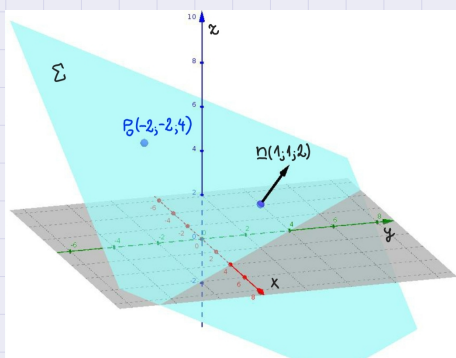
$$\langle \mathbf{n}, (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{p}_0$ a P_0 pont helyvektora, $\mathbf{x}$ a síkra illeszkedő X pont helyvektora.

2. Az sík normálvektoros egyenlete koordinátákban, $\mathbf{n}(a; b; c)$ és $P(x_0; y_0; z_0)$ esetén

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(lásd a skaláris szorzat felírását koordinátákkal).



$\underline{n}(1; 1; 2)$ $P_0(-2; -2; 4)$
 a Σ egy normálvektora a Σ egy pontja
 a Σ sík (normálvektoros) egyenlete:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$1(x + 2) + 1(y + 2) + 2(z - 4) = 0$$

$$x + y + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + 2z - 4 = 0}$$

2.7. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Határozza meg a $\Sigma: 7x - 3y + 8z + 4 = 0$ sík egy normálvektorát!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Minden (esetleg hiányos) $ax + by + cz + d = 0$ háromismeretlenes elsőfokú egyenlet egy sík egyenlete, ahol nem lehet a , b és c egyszerre 0, mert akkor d is 0, és nincsen egyenlet.
2. Minden (esetleg hiányos) $ax + by + cz + d = 0$ háromismeretlenes elsőfokú egyenlet egy olyan sík egyenlete, amelynek normálvektora az $\mathbf{n}(a; b; c)$ vektor.

A Σ sík egyenlete: $7x - 3y + 8z + 4 = 0$. Keressük az $\underline{n}(a; b; c)$ normálvektort.

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix} \rightarrow \underline{n}(7; -3; 8)$$

FONTOSSÁG ÉSZREVÉTEL:
 az $\underline{n}$ bármely 0-tól különböző szám (szoros) is normálvektora Σ -nek.
 Pl.: $\underline{n}(1; -\frac{3}{7}; \frac{8}{7})$.

2.8. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Rendezze sorba nagyság szerint a következő számokat:

$$\lg 1000, \lg \sqrt{100}, \log_5 1, \log_2(-4), \log_{\frac{1}{7}} 49, \log_{\sqrt{2}} 2$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A szám logaritmusának fogalma: Egy nemnegatív b szám a alapú (a pozitív, és $a \neq 1$) logaritmus az a kitevő, amelyre a -t emelve b -t kapunk:

$$a^{\log_a b} = b.$$

2. Hagyomány szerint $\lg x$ a 10-es alapú logaritmust jelöli.
3. A logaritmus azonosságai (mindig feltételezzük, hogy a formulákban szereplő hatványok, illetve logaritmusok léteznek):
 - (a) Szorzat logaritmus: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
 - (b) Hatvány logaritmus: $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$.
 - (c) Áttérés c alapú logaritmusra: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
 - (d) Az 1 szám bármilyen logaritmus: 0.
4. A számokhoz az a alapú logaritmusukat rendelő függvény 1-nél nagyobb a alap esetén nagyobb számhoz nagyobb értéket rendel, vagyis az $x \mapsto \log_a x$ szigorúan monoton növekvő függvény, ha $a > 1$. Az $a < 1$ esetben ez a függvény szigorúan monoton csökkenő függvény.

A logaritmus azonosságait, illetve közvetlenül a definícióját alkalmazhatjuk az egyes értékek kiszámítására.

$$1 \star \lg 1000 = \lg(10^3) = 3 \cdot \lg 10 = 3 \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$$

hatvány loga-
ritmusa

$$2 \star \lg \sqrt{100} = \lg 10 = 1 \leftarrow \text{ld. az előzőt!}$$

$$3 \star \lg_5 1 = 0 \leftarrow \text{hiszen } 5^0 = 1.$$

$$4 \star \log_2(-4) \leftarrow \text{ez nincsen értelme, mert } -4 < 0.$$

$$5 \star \log_{\frac{1}{7}} 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 \frac{1}{7}} = \frac{\log_7 7^2}{\log_7 7^{-1}} = \frac{2 \log_7 7}{(-1) \log_7 7} = \frac{2 \cdot 1}{-1} = -2$$

átérés 7-es
alapra

hatvány
logaritmus

log_a = 1

$$6 \star \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

átérés 2-es
alapra

hatvány
logaritmus

$$\text{A sorrend: } \log_{\frac{1}{7}} 49 < \log_5 1 < \lg \sqrt{100} < \log_{\sqrt{2}} 2 < \lg 1000$$

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Igaz-e, hogy bármely vektort fel lehet bontani két vektor összegére, akár a síkban, akár a térben?
- ? A térben bármely vektorhoz van-e olyan vektor, melyet hozzáadva az $(1;0;0)$ koordinátájú vektort kapjuk?
- ? Igaz vagy hamis a következő állítás? Két vektor szögének szinusza sosem negatív, de koszinusza lehet az.
- ? Lehet-e két vektor akkor is merőleges, ha skaláris szorzatuk nem 0?
- ? Igaz vagy hamis a következő állítás? Egy irányítványozójével adott egyenes nem lehet merőleges egyik koordináta-tengelyre sem.
- ? Ha két sík párhuzamos, azt hogyan ismerheti fel az egyenletükből?
- ? Van-e olyan negatív szám, amelynek logaritmus a pozitív?
- ? Döntse el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás! Ha egy szám pozitív, és a logaritmus alapja is pozitív, akkor a szám logaritmus a pozitív.
- ? Van-e olyan logaritmus alap, amely esetén minden számnak ugyanaz a logaritmus a?
- ? Igaz-e, hogy ugyanannak a számnak a nagyobb alapú logaritmus a kisebb?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a}(3;5)$, $\mathbf{b}(-1;6)$, $(-1;-8)$, $\mathbf{d}(2-3)$, $\mathbf{e}(0,6)$. Határozza meg a következő műveletekkel adott vektorok koordinátáit!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}; \quad 2\mathbf{a} + 4\mathbf{c}; \quad \mathbf{b} - \mathbf{d}; \quad 6\mathbf{e} - \mathbf{c} + 6\mathbf{b}.$$

2. Legyen A , B és C egy háromszög csúcspontja, S a súlypontja. Számítsa ki a hiányzó adatokat!

$$A(4;1), B(3;6), C(-2;-1). \quad S(?;?); \quad A(4;2), B(5;1), S(3;5). \quad C(?;?).$$

3. Adottak az $\mathbf{e}(-3;8)$ és $\mathbf{f}(-1;12)$ vektorok. Határozzuk meg a két vektor skaláris szorzatát!
4. Adottak az $\mathbf{u}(-3;4)$ és $\mathbf{b}(12;5)$ vektorok. Határozzuk meg a két vektor szögét!
5. Írja fel a következő egyenesek egyenletét, ha P_0 az egyenes egy pontja, és $\mathbf{n}$ az egyenes normálvektora!

$$\text{a) } P_0(0;0), \quad \mathbf{n}(2;7); \quad \text{b) } P_0(-1;-2), \quad \mathbf{n}(-1;-2).$$

6. Határozza meg az alább adott egyenesek normálvektorát!

$$y = \frac{1}{2}x - 4; \quad 7y = -0,4x + 8.$$

7. Írja fel a következő síkok egyenletét, ha P_0 a sík egy pontja, és $\mathbf{n}$ a sík normálvektora!

$$\text{a) } P_0(0;0;0), \mathbf{n}(0;2;7); \quad \text{b) } P_0(2;-1;-2), \mathbf{n}(2;-1;-2).$$

8. Határozza meg a következő síkok normálvektorát!

$$x - 13y + 2z - 7 = 0; \quad 2x + 5y - 4z = 0.$$

9. Rendezze sorba nagyság szerint a következő számokat!

$$\lg 10000, \quad \lg \sqrt{1000}, \quad \log_2 1, \quad \log_2(32), \quad \log_{\frac{1}{13}} 169, \quad \log_{\sqrt{5}} 25.$$

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$\log_2 a = 4; \quad \lg b = -3; \quad \log_{\frac{1}{3}} c = 2; \quad \log_3 g = \frac{2}{3} \quad \log_5 h = -\frac{1}{2}.$$

5. Ajánlott irodalom

1. Reimann István: Matematika, Typotex
2. Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar