Fodor Ferenc és Vígh Viktor

# Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
# előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

# 9. Olvasólecke

# Többváltozós függvények szélsőértéke

**Készítette:**

Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

**Az olvasólecke tartalma:**

- Kétváltozós függvények lokális szélsőértéke
- Lokális szélsőértéke létezésének elégséges feltétele
- Abszolút szélsőérték korlátos zárt halmazon
- Önellenőrző kérdések

**Olvasási idő:** kb. 1 óra

## Kétváltozós függvények lokális szélsőértéke

Korábban bevezettük a többváltozós függvények globális (abszolút) szélsőértékének fogalmát. Most, az egyváltozós esethez hasonló módon, definiáljuk a *lokális szélsőértékeket.*

**9.1. Definíció.** Tegyük fel, hogy $(a, b)$ az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának pontja. Ekkor az $f$ függvénynek az $(a, b)$ helyen

i) *lokális vagy helyi minimuma (szigorú lokális minimuma)* van, ha létezik $(a, b)$-nek olyan $H$ (nyílt) környezete, hogy $f(x, y) \geq f(a, b)$ $(f(x, y) > f(a, b))$ minden $(x, y) \in H \cap D_f$ esetén;

ii) *lokális vagy helyi maximuma (szigorú lokális maximuma)* van, ha létezik $(a,b)$-nek olyan $H$ (nyílt) környezete, hogy $f(x,y) \leq f(a,b)$ $(f(x,y) < f(a,b))$ minden $(x,y) \in H \cap D_f$ esetén.

**9.2. Megjegyzés.** Ha $f$-nek (szigorú) lokális minimuma vagy maximuma van az $(a,b)$ helyen, akkor $(a,b)$ *(szigorú) lokális minimum* vagy *maximumhelye* $f$-nek; vagy összefoglaló néven *(szigorú) lokális szélsőértékhelye*.

Ha az $(a,b)$ pontban az $f$ függvény parciálisan differenciálható $x$ és $y$ szerint és ott lokális szélsőértéke van, akkor az $x$ és $y$ szerinti szekciófüggvényeinek (mint egyváltozós függvényeknek) az $(a,b)$ pontban lokális szélsőértéke van, így deriváltjaik (amelyek $f$ parciális deriváltjai) nullával egyenlők. Ez adja a következő tételt.

**9.3. Tétel.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $(a,b)$ pontban és az $f$ parciális deriváltjai léteznek az $(a,b)$ helyen, akkor*

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0.$$

**9.4. Megjegyzés.** Figyeljük meg, hogy a 9.3. tétel azt mondja, hogy ha $f$-nek lokális szélsőértéke van egy olyan pontban, ahol mindkét parciális deriváltja létezik, akkor ott érintősíkja vízszintes. Ez hasonló az egyváltozós esethez.

A 9.3. tétel alapján, egy $f$ függvénynek értelmezési tartományának egy belső pontjában csak akkor lehet szélsőértéke, ha ott vagy mindkét változója szerint parciálisan differenciálható és parciális deriváltjai nullával egyenlők, vagy legalább valamelyik parciális deriváltja nem létezik. Ez motiválja a következő definíciót:

**9.5. Definíció.** Az $(a,b) \in D_f$ pont az $f$ függvény *kritikus vagy stacionárius pontja*, ha $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ vagy valamelyik (esetleg mindkettő) parciális derivált nem létezik $(a,b)$-ben.

Tehát egy $f$ kétváltozós függvénynek csak kritikus (stacionárius) pontban, vagy értelmezési tartományának határpontjában lehet szélsőértéke.

**9.1. Példa.** Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ függvény kritikus pontjait.

*Megoldás.* Mivel az $f$ függvény (kétváltozós) polinom, ezért mindenhol értelmezve van, és léteznek parciális deriváltjai az $\mathbb{R}^2$ síkon. Ezért stacionárius pontjai csak ott lehetnek, ahol a parciális deriváltak nullával egyenlők. Mivel

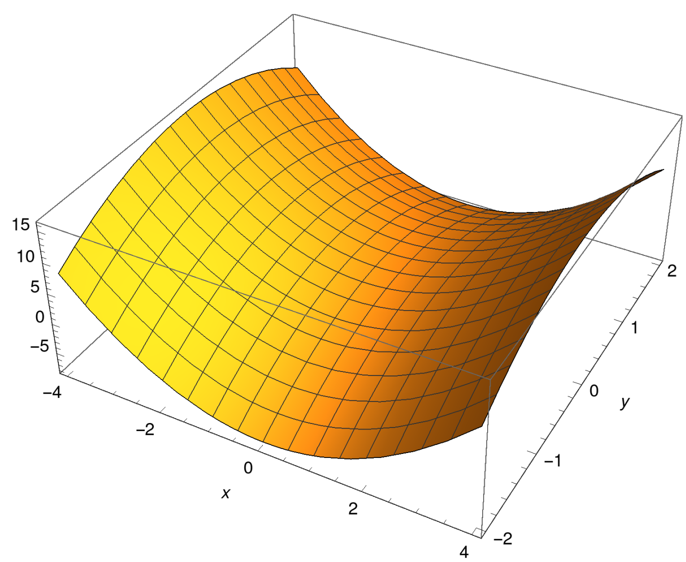
$$f_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = -4y,$$

ezért a kritikus pontokat az

$$f'_x(x,y) = 2x = 0, \qquad \text{és} \qquad f'_y(x,y) = 4y = 0$$

egyenletek határozzák meg, amelyek egyetlen megoldása a $(0,0)$ origó. Tehát az $f$ függvénynek egyetlen kritikus pontja van, mégpedig az origó, azaz csak itt lehet lokális szélsőértéke.

**9.6. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a 9.1. példabeli függvénynek az origóban nincs lokális szélsőértéke, ami az 9.1. ábrából nyilvánvaló. Tehát a kritikus pontokban nem feltétlenül van lokális szélsőérték. Az elsőrendű parciális deriváltak eltűnése csak *szükséges*, de nem elégséges feltétele a lokális szélsőérték létezésének.




9.1. ábra. Az $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ függvény grafikonja

**9.7. Definíció.** Azokat a kritikus pontokat, ahol az $f$ függvény differenciálható, de nincs lokális szélsőértéke *nyeregpontoknak* szoktuk nevezni.

A 9.1. példában szereplő függvénynek az origó nyeregpontja. Az elnevezés motivációját a 9.1. ábra jól szemlélteti.

## Lokális szélsőértéke létezésének elégséges feltétele

Amint láttuk, a kritikus pontokban a függvénynek nem feltétlenül van lokális szélsőértéke, csak lehet. A következő tétel (egy lehetséges) elegendő feltételt ad a lokális szélsőérték létezésére.

**9.8. Definíció.** Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény összes másodrendű parciális deriváltja létezik és az $(a,b) \in D_f$ pontban, akkor a

$$D(a,b) := \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - f''_{xy}(a,b)f''_{yx}(a,b)$$

determinánst az $f$ függvény $(a,b)$ pontbeli *Hesse-féle determinánsának* nevezzük.

**9.9. Megjegyzés.** Ha az $f$ másodrendű parciális deriváltjai mind folytonosak az $(a,b)$ egy környezetében, akkor a Young-tétel miatt a vegyes deriváltak egyenlők, azaz $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$, így

$$D(a,b) = f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2.$$

**9.10. Tétel** (Elegendő feltétel lokális szélsőérték létezésére)**.** *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény összes másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos az $(a,b) \in D_f$ pont egy nyílt környezetében, továbbá $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$. Ekkor*

*i) ha $D(a,b) > 0$ és $f''_{xx}(a,b) > 0$, akkor $f$-nek az $(a,b)$ pontban szigorú lokális minimuma van;*

*ii) ha $D(a,b) > 0$ és $f''_{xx}(a,b) < 0$, akkor $f$-nek az $(a,b)$ pontban szigorú lokális maximuma van;*

*iii) ha $D(a,b) < 0$, akkor $f$-nek az $(a,b)$ pontban nyeregpontja van.*

**9.11. Megjegyzés.** Fontos megjegyezni, hogy ha $D(a,b) = 0$, akkor a 9.10. tétel semmit nem mond a szélsőérték létezéséről. Ebben az esetben más utat kell keresnünk.

**9.2. Példa.** Keressük meg az $f(x,y) = 8x^3 + 24xy + y^3$ függvény szélsőértékeit.

*Megoldás.* Az $f$ függvény minden változója szerint tetszőleges sokszor parciálisan differenciálható mindenhol, ezért lokális szélsőértéke csak stacionárius pontban lehet. Stacionárius pontjait a következő egyenletrendszer határozza meg:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= 24x^2 + 24y = 0,\\
f'_y &= 24x + 3y^2 = 0,
\end{aligned}
$$

amelyből $y = -x^2$, így

$$3(-x^2)^2 + 24x = x(x^3 + 8) = 0.$$

Innen adódik, hogy $x = 0$ vagy $x = 1$. Tehát az $f$ függvénynek stacionárius pontja van a

$$(0,0), \quad (-2,-4)$$

helyeken.

A második parciális deriváltak:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= 48x,\\
f''_{xy} &= f''_{yx} = 24,\\
f''_{yy} &= 6y.
\end{aligned}
$$

Tehát a Hesse-mátrix determinánsa

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 48x & 24 \\ 24 & 6y \end{vmatrix} = 288(xy - 2).$$

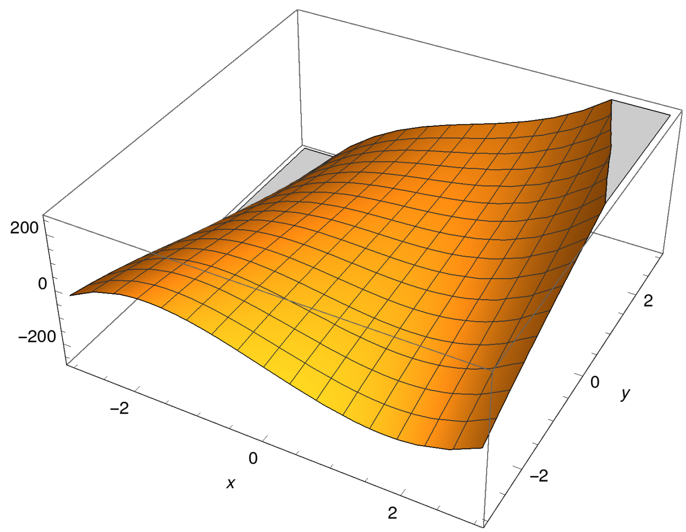
i) $D(0,0) = 288 \cdot (-2) < 0$, így a 9.10. tétel iii) pontja szerint a $(0,0)$ pont nyeregpont, azaz ott a függvénynek nincs szélsőértéke.

ii) $D(-2,-4) = 288 \cdot 6 > 0$ és $f''_{xx}(-2,-4) = (-2) \cdot 48 < 0$, ezért a 9.10. tétel ii) pontja szerint az $f$ függvénynek a $(-2,-4)$ helyen szigorú lokális maximuma van.

**9.3. Példa.** Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ függvény szélsőértékeit.

*Megoldás.* Ezzel a függvénnyel már találkoztunk a 9.1. példában. Láttuk, hogy egyetlen kritikus pontja van, az origó, ahol nyeregpont van. Ezt most a 9.10. tétellel is megmutatjuk. A függvény második parciális deriváltjai

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= 2,\\
f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) = 0,\\
f''_{xx}(x,y) &= -4,
\end{aligned}
$$




9.2. ábra. Az $f(x,y) = 8x^3 + 24xy + y^3$ függvény grafikonja.)

ezért

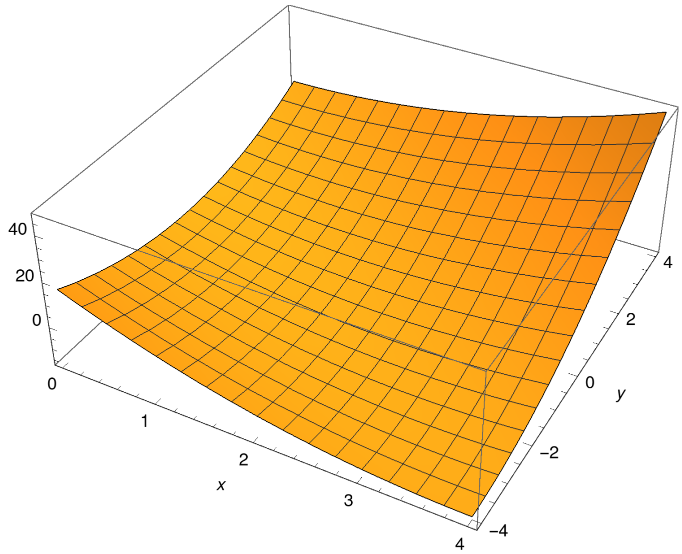
$$D(0,0) = 2 \cdot (-4) - 0 = -4 < 0,$$

azaz a 9.10. tétel iii) pontja alapján az origóban valóban nyeregpontja van. Máshol pedig nem lehet szélsőértéke, mert értelmezési tartományának nincsenek határpontjai.

## Abszolút szélsőérték korlátos zárt halmazon

A Weiertrass-tételből tudjuk, hogy korlátos zárt halmazon folytonos függvény korlátos, és felveszi szélsőértékeit. Azaz az ilyen függvényeknek van abszolút minimuma és maximuma, amelyet fel is vesznek az adott halmazon Előző pontbeli vizsgálódásainkból pedig tudjuk, hogy egy kétváltozós függvénynek szélsőértéke stacionárius pontban vagy pedig értelmezési tartományának határán lehet. Ennek alapján egy korlátos, zárt $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazon úgy keressük meg az $f$ folytonos függvény abszolút szélsőértékeit, hogy meghatározzuk lehetséges lokális szélsőértékhelyeit, amelyek kritikus pontban vannak, illetve a lehetséges lokális szélsőértékhelyeit a $H$ halmaz határán. Az így felsorolt szélsőértékhelyeken kiszámítjuk a függvény értékét és a kapott értékek közül kiválasztjuk a legkisebbet (abszolút minimum) és a legnagyobbat (abszolút maximum).

**9.4. Példa.** Keressük meg az $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 8x$ függvény abszolút szélsőértékeit az $0 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$ téglalapon.




9.3. ábra. Az $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 8x$ függvény grafikonja az $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 3$ téglalapon.

*Megoldás.* Az $f$ függvény stacionárius pontjai kielégítik a következő egyenleteket:

$$f'_x = 4x + 2y - 8 = 0,$$
$$f'_y = 2y + 2x = 0,$$

amiből a stacionárius pontra azt kapjuk, hogy $(2, -2)$, ami benne van a megadott téglalapban. A függvényérték $f(2, -2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 = -16$.

Most meg kell néznünk, hogy van-e a függvénynek szélsőértéke a téglalap határain:

i) $x = 0, -4 \leq y \leq 4$: Ekkor $f(0, y) = y^2$, aminek minimuma az $y = 0$-ban $f(0, 0) = 0$, maximuma az $y = \pm 4$-ben $f(0, \pm 4) = 16$.

ii) $x = 4, -4 \leq y \leq 4$: Ekkor $f(4, y) = 32 + 8y + y^2 - 32 = y^2 + 8y$, aminek minimuma $y = -4$-ben, azaz az egyik végpontban van, ahol a függvényérték $f(4, -4) = -16$. Maximuma a másik végpontban lehet, ahol $f(4, 4) = 48$.

iii) $y = -4, 0 \leq x \leq 4$ : Ekkor $f(x, -4) = x^2 - 8x + 16 - 8x = x^2 - 16x + 16$, amelynek minimuma az $x = 8$ pontban van, a $[0, 4]$ intervallumon kívül. Azaz szélsőértéke csak végpontban lehet, ahol $f(0, -4) = 16$ és $f(4, -4) = -16$.

iv) $y = 4, 0 \leq x \leq 4$ : Ekkor $f(x, 4) = x^2 + 8x + 16 - 8x = x^2 + 16$, amelynek minimuma az $x = 0$-ban van, ahol $f(0, 4) = 16$. Az intervallum másik végpontjában $f(4, 4) = 48$.

A fenti értékek közül a legkisebb $-16$, amelyet a függvény a $(4,-4)$ pontban vesz fel, a legnagyobb pedig 48, amit a függvény az $(0,4)$ pontban ér el. A függvény gráfja a kérdéses téglalapon a 9.3. ábrán látható.

Tehát a függvény abszolút maximuma 48, abszolút minimuma pedig $-16$ a megadott tartományon.

## Önellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg az $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ függvény szélsőértékeit.
2. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2-4xy+y^2+6x+1$ függvény szélsőértékeit.
3. Határozzuk meg az $f(x,y)=x\sin y$ függvény szélsőértékeit.
4. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2-y^2$ függvény szélsőértékeit az $x^2+y^2\leq 1$ körlapon.
5. Határozzuk meg az $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ függvény szélsőértékeit az $x^2+y^2\leq 4$ körlapon.

## Ajánlott irodalom


1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.