Fodor Ferenc és Vígh Viktor

# Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



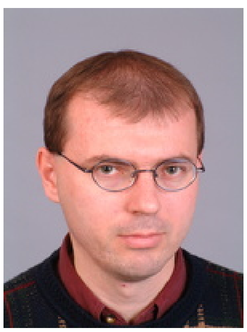
**Szegedi Tudományegyetem**
**Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.**
**www.u-szeged.hu**
**www.szechenyi2020.hu**

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

# 8. Olvasólecke

# Többváltozós függvények deriválása, gradiens, iránymenti derivált


**Készítette:**



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék


**Az olvasólecke tartalma:**

- Kétváltozós függvények parciális deriváltjai
- Magasabb rendű parciális deriváltak
- Totális derivált, gradiens
- Érintősík
- Önellenőrző kérdések

**Olvasási idő:** kb. 1 óra

## Többváltozós függvények parciális deriváltjai

A kétváltozós függvényekkel kapcsolatos számításokat (legalábbis részben) vissza fogjuk vezetni az egyváltozós függvényeknél megismert eljárásokra. Ennek egyik példája a *parciális deriváltak* fogalma. Ez lényegében azt jelenti, hogy ha egy kétváltozós függvény egyik változóját az értelmezési tartomány egy pontjában rögzítjük, és csak a másik változik, akkor egy egyváltozós függvényt kapunk, amelyet (jó esetben) már tudunk deriválni. Így kapjuk az adott pontbeli nem rögzített változó szerinti parciális deriváltat. A pontos definíció a következő.

**8.1. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(a, b)$ az $f$ értelmezési tartományának belső pontja. A

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

határértéket, amennyiben létezik, az $f$ függvény *$x$ szerinti $(a, b)$-beli parciális deriváltjának* nevezzük. A

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

határértéket pedig (ha létezik), az $f$ függvény *$y$ szerinti $(a, b)$-beli parciális deriváltjának* nevezzük.

A parciális deriváltakat például a következő szimbólumok egyikével jelöljük:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)} \quad f'_x(a, b), \quad f'_y(a, b).$$

**8.2. Megjegyzés.** A $\partial$ szimbólum a görög delta egyik formája, és így is olvassuk ki: pl. "$\frac{\partial f}{\partial x}$" úgy hangzik, hogy "delta $f$ per delta $x$".

Ha az $f$ kétváltozós függvény a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában parciálisan differenciálható az $x$ szerint ($y$ szerint), akkor azt mondjuk, hogy $f$ *az $x$ szerint ($y$ szerint) parciálisan differenciálható a $H$ halmazon.*

Tegyük fel, hogy az $f$ kétváltozós függvény az $x$ szerint parciálisan differenciálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazon. Azt a függvényt, ami a $H$ minden pontjában megegyezik az $f$ $x$ szerinti parciális deriváltjával az *$f$ függvény $x$ szerinti parciális differenciálhányados függvényének* nevezzük, és például a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad f'_x(x, y)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük.

A parciális deriváltak kiszámítása egyszerű, lényegében az egyváltozós függvények esetén megismert szabályokat kell használnunk.

**8.1. Példa.** Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 - 1$ függvény $x$ és $y$ szerinti parciális deriváltjait az $(1, 2)$ pontban.

*Megoldás.* Az $x$ szerinti parciális deriváltat úgy határozzuk meg, hogy $y$-t konstansnak tekintjük és az $x$ szerint differenciálunk pontosan úgy, mint az egyváltozós függvények esetében:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xy + y^3 - 1) = 2x + 2y.$$

Ekkor

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(1,2)} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6.$$

Az $y$ szerinti parciális derivált meghatározásához most $x$-et tekintjük konstansnak, és $y$ szerint a szokásos módon differenciálunk:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + y^3 - 1) = 2x + 3y^2.$$

Ekkor

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(1,2)} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 14.$$

Az általában igaz, hogy a két parciális deriváltja az $f$ függvénynek nem egyenlő.

**8.2. Példa.** Számítsuk ki az $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ függvény $x$ és $y$ szerinti parciális deriváltfüggvényeit.

*Megoldás.* Az $x$ szerinti parciális deriválásnál az $y$-t konstansnak tekintjük:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2 + y^2 + 1)) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1},$$

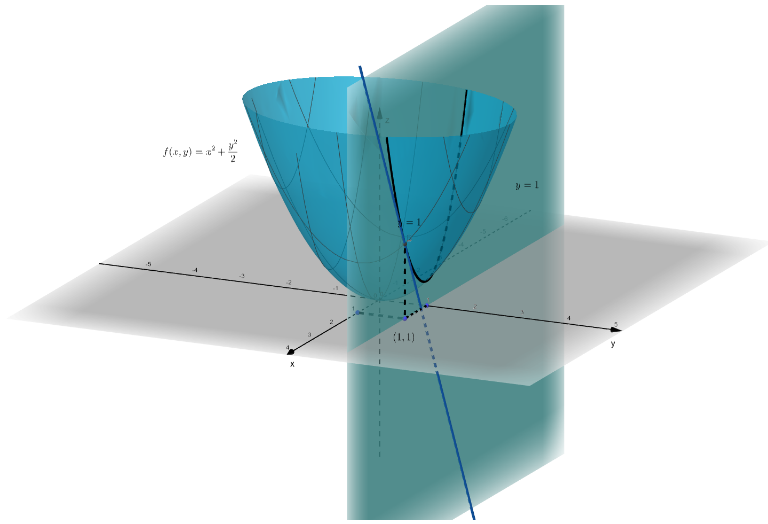
ahol az $x$ szerinti deriválásnál az egyváltozós láncszabályt használtuk.

Az $y$ szerinti parciális deriválásnál az $x$-et konstansnak tekintjük:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x^2 + y^2 + 1)) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

A parciális deriváltak szemléletes geometriai jelentése a következő: ha az $f$ függvény grafikonját elmetsszük az $y = b$ egyenletű síkkal (ez a sík párhuzamos az $xz$ koordinátasíkkal), akkor a metszet az $f(x, b)$, immár egyváltozós függvény grafikonja lesz; az $f(x, b)$ függvényt az $f$ *szekció-* vagy *metszet-függvénynének* is szoktuk nevezni. Hasonlóan, ha az $x = a$ síkkal metszünk, akkor az $f(a, y)$ egyváltozós szekciófüggvény grafikonját kapjuk.

Az $f$ függvény $x$-szerinti parciális deriváltja az $(a, b)$ pontban nem más, mint az $f(x, b)$ szekciófüggvény szokásos deriváltja az $x = a$ pontban, ami az $f(x, b)$ függvény $a$-beli érintőjének meredeksége. Az $y$ szerinti parciális derivált pedig az $f(a, y)$ szekciófüggvény deriváltja, azaz az érintőjének meredeksége az $y = b$ pontban.




8.1. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény $f'_x(1, 1)$ parciális deriváltja, mint szekciófüggvényének meredeksége.

**8.3. Megjegyzés.** A parciális deriváltak (a látszat ellenére) nem(!) felelnek meg az egyváltozós függvények deriváltjának. Ez például abból is látszik, hogy megadható olyan $f$ kétváltozós függvény, amelynek mindkét parciális deriváltja létezik egy $(a, b)$ pontban, de ott az $f$ nem folytonos.

## Magasabb rendű parciális deriváltak

Az egyváltozós függvények magasabb rendű deriváltjaihoz hasonlóan, bevezetjük a *magasabb rendű parciális deriváltakat*. Az alábbi definícióban, kényelmi okokból a független változókat $x_1$-el és $x_2$-vel jelöljük.

**8.4. Definíció.** Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az $x_i$ változó szerint parciálisan differenciálható az $(a, b)$ pont egy környezetében. Ha az $f'_{x_i}(x_1, x_2)$ $x_i$ szerinti parciális deriváltfüggvény az $x_j$ változó szerint parciálisan differenciálható az $(a, b)$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy az $f$ *az* $x_i$ *és* $x_j$ *szerint (ebben a sorrendben) kétszeresen parciálisan differenciálható az* $(a, b)$ *pontban.*

Ezeket a *másodrendű parciális deriváltakat* a következő módon szoktuk jelölni:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(x_1,x_2)=(a,b)}, \quad f''_{x_i x_j}(a, b), \quad f''_{ij}(a, b).$$

Az $f''_{x_i x_i}$ parciális deriváltakat (ahol a két változó megegyezik) *tisztának*, az $f''_{x_i x_j}$ $(i \neq j)$ parciális deriváltakat pedig *vegyes* másodrendű parciális deriváltaknak szoktuk nevezni.

A deriválások sorrendje mindig *balról jobbra olvasandó*.

A másodrendű parciális deriváltfüggvényeket, illetve a $H$ halmazon való kétszeres parciális deriválhatóságot a szokásos módon értelmezzük.

**8.3. Példa.** Számoljuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény összes lehetséges másodrendű parciális deriváltjait.

*Megoldás.*

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= y,\\
f'_y(x, y) &= x,\\
f''_{xx}(x, y) &= 0,\\
f''_{xy}(x, y) &= 1\\
f''_{yx}(x, y) &= 1,\\
f''_{yy}(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

A 8. példából úgy tűnhet, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlőek, azaz nem számít, hogy előbb $x$ szerint, aztán $y$ szerint deriválunk, vagy fordítva. Ez a megfigyelés sok esetben igaz, de nem mindig! Általában a parciális deriválások sorrendje igenis számít, tehát nem lehet őket tetszőlegesen cserélgetni.

Természetes kérdés, hogy mikor felcserélhető két változó szerinti parciális differenciálás. Erre a 8.5. tétel ad egy elegendő (de nem szükséges) feltételt.

**8.5. Tétel** (Young-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy az $f$, $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$ és $f''_{yx}$ függvények mind léteznek az $(a, b)$ pont egy környezetében és folytonosak $(a, b)$-ben. Ekkor $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.*

## Totális derivált

A két- (és általában a) többváltozós függvények esetében a totális derivált játssza azt a szerepet, amit az egyváltozós függvények esetében a szokásos derivált.

**8.6. Definíció.** Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény értelmezve az $(a, b)$ pont egy (nyílt) környezetében. Azt mondjuk, hogy az $f$ *(totálisan) differenciálható az* $(a, b)$

*helyen*, ha $f'_x(a,b)$ és $f'_y(a,b)$ létezik, és

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \omega_1(x,y)(x-a) + \omega_2(x,y)(y-b),$$

ahol $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan kétváltozós függvények, amelyekre teljesül hogy

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \omega_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \omega_2(x,y) = 0.$$

A totális deriválhatóságból már következik a folytonosság, akárcsak az egyváltozós esetben.

**8.7. Tétel.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan deriválható az $(a,b)$ pontban, akkor ott folytonos.*

Tehát a folytonosság a totális differenciálhatóság *szükséges feltétele*. A következő tétel *elegendő feltételt* ad arra, hogy egy függvény egy adott pontban totálisan differenciálható.

**8.8. Tétel** (Totális differenciálhatóság elegendő feltétele)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény $f'_x$ és $f'_y$ parciális deriváltfüggvényei folytonosak az $(a,b)$ pont egy nyílt környezetében, akkor az $f$ totálisan differenciálható az $(a,b)$ pontban.*

Egy kétváltozós függvény totális deriváltja nem egyetlen szám, mint az egyváltozós függvények deriváltja, hanem egy $\mathbb{R}^2$-beli vektor, amelynek komponensei a parciális deriváltak.

**8.9. Definíció.** Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény mindkét változója szerint parciálisan differenciálható az $(a,b)$ helyen. Ekkor a

$$\nabla f(a,b) = \operatorname{grad} f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b)) \in \mathbb{R}^2$$

vektort az $f$ függvény $(a,b)$-beli *gradiens vektorának* vagy röviden *gradiensének* nevezzük.

**8.10. Megjegyzés.** A "$\nabla f$" szimbólumot "nabla $f$"-nek olvassuk ki.

**8.4. Példa.** Határozzuk meg az $f(x,y) = e^x + 2x^2 - y^2 + 1$ függvény gradiens vektorát a $(0,1)$ pontban.

*Megoldás.*

$$f'_x(x,y) = e^x + 4x,$$

$$f'_y(x,y) = -2y,$$

tehát

$$\nabla f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (e^x + 4x, -2y),$$

$$\nabla f(0,1) = \operatorname{grad} f(0,1) = (e^0 + 4 \cdot 0, -2 \cdot 1) = (1, -2).$$

**8.11. Megjegyzés.** Megmutatható, hogy a gradiens vektor mindig merőleges az $(a,b)$ ponton átmenő $f(x,y) = c$ szintvonal érintőjére, azaz azt is mondhatjuk, hogy merőleges magára a szintvonalra az $(a,b)$-ben. Ez lényegében kitűzi azt az irányt, amelyben az $(a,b)$ pontnál a függvény a leggyorsabban változik.

## Érintősík

Az érintősík definíciójának logikája nagyon hasonló az egyváltozós függvények érintőjének bevezetéséhez. Itt is a differenciálhatóságot követeljük meg, és az érintősíkot a (totális) derivált segítségével definiáljuk.

**8.12. Definíció.** Ha az $f$ kétváltozós függvény az $(a,b)$ pontban totálisan differenciálható, akkor azt mondjuk hogy az $f$ függvény grafikonjának létezik érintősíkja az $(a,b,f(a,b))$ pontban, és ennek egyenlete

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b).$$

**8.13. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy az érintősík egyenlete nem más, mint a totális derivált definíciójának az a része, amiben az $\omega_1$ és $\omega_2$ függvények nem szerepelnek.

**8.5. Példa.** Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ felület érintősíkjának egyenletét az $(1,1)$ pontban.

*Megoldás.* Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény parciális deriváltjai

$$f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = 2y,$$

amelyek polinomok, azaz mindenhol folytonosak, és így az $f$ függvény az $\mathbb{R}^2$ sík minden pontjában totálisan differenciálható, tehát speciálisan az $(1,1)$ pontban is. Ezért létezik érintősíkja az $(1,1)$ pontban. Gradiens vektora

$$\nabla f(1,1) = (2,2),$$

így az érintősík egyenlete

$$z = 2(x-1) + 2(y-1) + 2,$$

ami némi egyszerűsítés után

$$2x + 2y - z - 2 = 0.$$

## Iránymenti derivált

Az iránymenti derivált definíciója nagyon hasonló a parciális deriváltakéhoz, annyi különbséggel, hogy az $f$ grafikonját $(a,b)$ ponton keresztül egy olyan $xy$-síkra merőleges síkkal metsszük el, ami párhuzamos egy adott $\mathbf{e}$ egységvektorral.

**8.14. Definíció.** Legyen $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ egységvektor. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre létezik a következő határérték:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(a,b) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(a + te_1, b + te_2) - f(a,b)}{t},$$

akkor azt mondjuk, hogy $f$ az $(a,b)$ *pontban az* $\mathbf{e}$ *irány szerint differenciálható*, és $\mathbf{e}$ *irány szerinti deriváltja* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(a,b)$.

**8.15. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy ha $f$ parciális deriváltjai léteznek az $(a,b)$ helyen, akkor a parciális deriváltak

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{i}}(a,b), \quad f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{j}}(a,b),$$

ahol $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ az egységnyi standard bázisvektorok $\mathbb{R}^2$-ben.

Az iránymenti deriváltat legtöbbször a 8.16. tétel segítségével szoktuk kiszámolni.

**8.16. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $(a,b)$ helyen. Ekkor $f$ az $(a,b)$-ben tetszőleges irányban irány szerint deriválható, és tetszőleges* $\mathbf{e}$ *egységvektor esetén*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{e}.$$

**8.6. Példa.** Számoljuk ki az $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ függvény $\mathbf{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ irány szerinti deriváltját az $(1,2)$ pontban.

*Megoldás.* Az $f$ parciális deriváltjai a következők:

$$f'_x(x,y) = -\sin(x^2+y^2)2x, \quad f'_y(x,y) = -\sin(x^2+y^2)2y,$$

ezért

$$f'_x(1,2) = -\sin(1^2+2^2)2\cdot 1 = -2\sin(5), \quad f'_y(1,2) = -\sin(1^2+2^2)2\cdot 2 = -4\sin(5).$$

Tehát az iránymenti derivált

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(1,2) = (-2\sin(5), -4\sin(5)) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}\sin(5).$$

## Önellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ függvény $x$ és $y$ szerinti parciális deriváltjait
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ függvény gradiensvektorát.
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1,1)$ pontban.
4. Számoljuk ki az $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ függvény összes másodrendű parciális deriváltját.
5. Számoljuk ki az $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ függvény $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ irány szerinti deriváltját az $(1,1)$ pontban.

## Ajánlott irodalom


1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.