Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

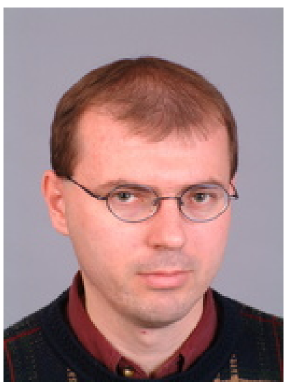
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

7. Olvasólecke

Többváltozós függvények, szintvonalak

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Többváltozós függvények fogalma, értelmezési tartománya
- Többváltozós függvények ábrázolása, grafikon, szintvonalak
- Globális szélsőérték, példák
- Kétváltozós függvények határértéke
- Kétváltozós függvények folytonossága
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

A fizikai világban számos olyan mennyiséggel találkozunk, ami nem csak egyetlen változótól függ. Ilyenre egyszerű példa a környezet pillanatnyi hőmérséklete, ami függ a mérés helyétől, azaz a földrajzi koordinátáktól, a földrajzi szélességtől és hosszúságtól. Az olyan függvényeket, amelyek több független változótól is függenek *többváltozós függvényeknek* nevezzük. Mi itt csak azzal a speciális (és talán legsűrűbben előforduló) esettel foglalkozunk, amikor a függvénynek kettő független változója van. Természetesen vannak kettőnél több változóval rendelkező függvények is, de ezeket itt most nem tárgyaljuk.

Többváltozós függvények fogalma, értelmezési tartománya

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az $(x_1, \ldots, x_n)$ rendezett n-esek halmaza, ahol $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ valós számok, az $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós valós vektorteret alkotják a koordinátánkénti összeadással és skalárral való szorzással, mint műveletekkel.

7.1. Definíció. Egy f valós szám értékű leképezést, amely az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán van értelmezve *n-változós valós függvénynek* nevezünk. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor egy $f : D \to \mathbb{R}$ n-változós függvény minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ ponthoz egy

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

számot rendel, ahol $x_1, \ldots, x$ az f függvény *(szabad) változói.*

A 7.1. definícióban szereplő D halmazt az f *értelmezési tartományának* nevezzük. Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan, ha f képlettel adott és nem teszünk konkrét feltételt D-re, akkor mindig úgy értjük, hogy f értelmezési tartománya az $\mathbb{R}^n$ tér azon legnagyobb D_f-el jelölt részhalmaza, ahol f-nek értelme van.

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós valós függvény R_f *értékkészletét*, az egyváltozós esethez hasonlóan, azon valós számok halmaza, amelyek előállnak f értékeként, azaz

$$R_f := \{z \in \mathbb{R} : z = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ valamely } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\text{-re}\}.$$

Mi az esetek túlnyomó többségében kétváltozós, azaz $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ függvényekkel fogunk dolgozni, ahol a változókat jellemzően x-el és y-al jelöljük.

7.1. Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 2x + y^2 + 1$ függvény értelmezési tartományát. (Ezen most azt értjük, hogy azt a legnagyobb halmazt keressük $\mathbb{R}^2$-ben, amelynek minden pontjában értelmezve van f.

Megoldás. Az f függvény értelmezve van minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, tehát értelmezési tartománya a teljes valós sík, azaz $D_f = \mathbb{R}^2$.

7.2. Megjegyzés. A 7.1. példában szereplő f *kétváltozós polinomfüggvény* vagy röviden *polinom*. A polinomok a legegyszerűbb kétváltozós függvények.

7.2. Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{x+y}{y-x}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás. Az f kétváltozós függvény két (kétváltozós) polinom hányadosa. Az ilyen függvényeket *(kétváltozós) racionális törtfüggvényeknek* nevezzük.

Az f értelmezve van minden olyan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ helyen, ahol a nevező nem nulla, azaz, ha $x \neq y$. Tehát értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}^2$, kivétel az $y = x$ egyenes pontjai.

7.3. Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás. Az f pontosan azokra az (x, y) pontokra van értelmezve, amelyekre a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll, azaz

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 1,$$

ami geometriailag nem más, mint az origó középpontú egység sugarú körlemez:

$$D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Míg a legtöbb általunk megismert egyváltozós függvény értelmezési tartománya intervallumok uniója (persze sok olyan függvény van, aminek értelmezési tartománya ennél sokkal bonyolultabb halmaz), egy kétváltozós függvény esetén az értelmezési tartomány már nem feltétlenül ilyen egyszerű.

Emlékezzünk vissza, hogy egy véges intervallum esetén a végpontokat *határpontoknak*, míg a végpontok által meghatározott nyílt intervallum pontjait *belső pontoknak neveztük.*

Ennek analógiájára, egy síkbeli D halmaz esetén bevezetjük a következő definíciókat:

7.3. Definíció. Egy $D \subset \mathbb{R}^2$ halmaz $\mathbf{p} = (a, b)$ pontját

i) *belső pontnak* nevezzük, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy a $\mathbf{p}$ középpontú ε sugarú nyílt körlap

$$B(\mathbf{p}, \varepsilon) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b^2 < \varepsilon^2)\}$$

benne van D-ben, azaz $B(\mathbf{p}, \varepsilon) \subset D$;

ii) *külső pontnak* nevezzük, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy a $\mathbf{p}$ középpontú ε sugarú nyílt $B(\mathbf{p}, \varepsilon)$ körlap diszjunkt D-től, azaz $B(\mathbf{p}, \varepsilon) \cap D = \emptyset$;

iii) *határpontnak* nevezzük, ha tetszőleges $\mathbf{p}$ középpontú nyílt körlap tartalmaz D-beli és D-n kívüli pontot is.

7.4. Megjegyzés. Egy tetszőleges nemüres $D \subset \mathbb{R}^2$ halmaz belső pontja mindig benne van a halmazban, egy külső pontja sosem tartozik a halmazhoz. Egy határpont esetében előfordulhat az is, hogy hozzátartozik, és az is, hogy nem tartozik a halmazhoz.

7.5. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz

i) *nyílt*, ha minden pontja belső pont;

ii) *zárt*, ha H tartalmazza minden határpontját;

iii) *korlátos*, ha létezik olyan körlemez, ami tartalmazza H-t.

Egy $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pont *környezetén* mindig olyan nyílt halmazt értünk, ami tartalmazza $\mathbf{p}$-t.

Többváltozós függvények ábrázolása, grafikonja, szintvonalak, szintfelületek

A kétváltozós függvényeket szemléltetni tudjuk *grafikonjuk* segítségével.

7.6. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény *grafikonja* alatt a következő halmazt értjük:

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\}.$$

Egy kétváltozós függvény grafikonja egy felület az $\mathbb{R}^3$ háromdimenziós térben. Természetesen a grafikon felrajzolása lényegesen nehezebb feladat egy kétváltozós függvény esetén, mint egy változóban. Ezt csak ritkán, és igen egyszerű esetekben szoktuk kézzel elvégezni. A grafikon lerajzolására többnyire valamilyen szoftvert használunk, lásd például 7.1. ábra.

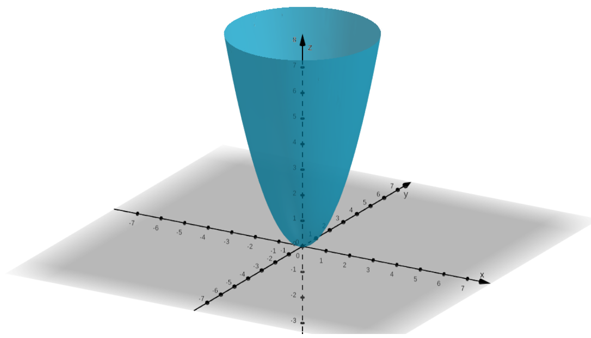
A kétváltozós függvények kétdimenziós felületen való megjelenítésére lehetőség a *szintvonalak* használata.

7.7. Definíció. Az f kétváltozós függvény $c \in R_f$ konstanshoz tartozó *szintvonala* a sík azon pontjainak halmaza, ahol az f függvény a c értéket veszi fel, azaz a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

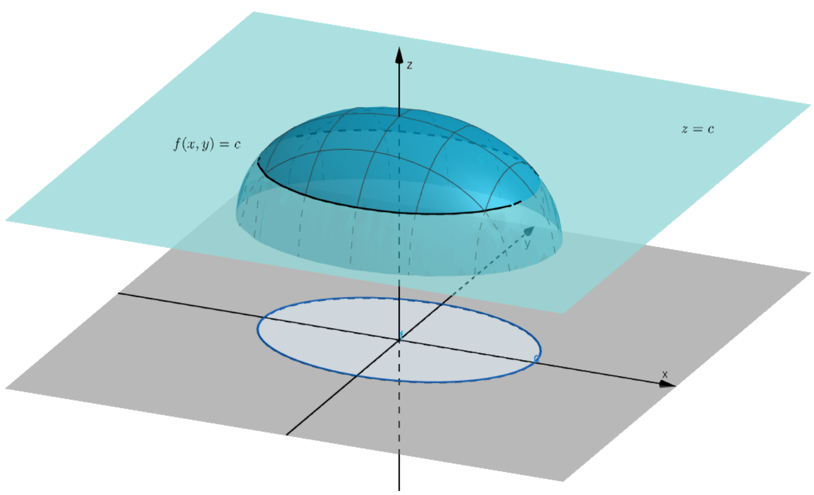
(esetleg üres) halmaz $\mathbb{R}^2$-ben.

Egy szintvonal (általában) olyan görbe, ami az f függvény D_f értelmezési tartományának azon pontjait köti össze, amelyekben f értéke azonos. Egyes esetekben a szintvonal bonyolultabb halmaz is lehet.



7.1. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény grafikonja Geogebrával lerajzolva

A c értékéhez tartozó szintvonalat úgy kaphatjuk meg geometriailag, hogy az f függvény grafikonját elmetsszük a $z = c$ síkkal, majd a kapott metszetet (ami jó esetben egy görbe) merőlegesen levetítjük az xy-síkba, lásd 7.2. ábra.



7.2. ábra. Az f függvény grafikonja és a $z = c$ egyenletű sík metszete.

Szintvonalakkal mindenki találkozott már, hiszen például a topográfiai térképek azonos tengerszint feletti magasságú pontjait összekötő vonalai éppen ilyenek, innen a név. A kétváltozós függvények értékének ilyen fajta ábrázolása más területen is jellemző, pl. a meteorológiában az azonos nyomású pontokat összekötő vonalakat *izobároknak*, az azonos hőmérsékletű pontokat összekötőket pedig *izotermáknak* nevezik. Ezekkel sokszor találkozunk időjárási térképeken, lásd például az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján az izobárokat.

A háromváltozós függvények grafikonját már nem tudjuk ábrázolni, hiszen ahhoz 4-dimenziós térre lenne szükségünk. Egy f háromváltozós függvényt az $f(x, y, z) = c$ egyenletű *szintfelületekkel* lehet esetleg szemléltetni, ha azok kellően egyszerűek. Például az $f(x, y, z) =$

$x^2+y^2+z^2$ függvény szintfelületei az $x^2+y^2+z^2=r^2$ egyenletű origó középpontú r sugarú gömbfelületek.

Kétváltozós függvények (globális) szélsőértéke

A globális (vagy abszolút) szélsőértéket a kétváltozós függvények esetében az egyváltozós esethez hasonló módon definiáljuk.

7.8. Definíció. Az $f : D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek az $(a,b) \in D$ pontban

i) *globális maximuma (szigorú globális maximuma)* van, ha tetszőleges $(x,y) \in D$ esetén $f(x,y) \le f(a,b)$ $(f(x,y) < f(a,b))$;

ii) *globális minimuma (szigorú globális minimuma)* van, ha tetszőleges $(x,y) \in D$ esetén $f(x,y) \ge f(a,b)$ $(f(x,y) > f(a,b))$.

A globális maximumot és minimumot együttesen *globális szélsőértékeknek* nevezzük. Azokat a pontokat pedig, ahol a függvény felveszi globális szélsőértékeit, *globális szélsőértékhelyeknek*.

7.4. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = x^2+y^2$ függvénynek a $(0,0)$ pontban szigorú globális minimuma van.

*Megoldás***.** Az f függvény grafikonját a 7.1. ábrán láthatjuk. Világos, hogy ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f(x,y) = x^2+y^2 > 0,$$

míg $f(0,0)=0$, azaz a $(0,0)$ helyen valóban szigorú globális minimuma van f-nek.

7.5. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ függvénynek szigorú globális maximuma van a $(0,0)$ helyen.

*Megoldás***.** Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy négyzetgyök alatt szereplő függvényre teljesül, hogy

$$1-x^2-y^2 \le 1,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=0$.

Kétváltozós függvények határértéke

Röviden megvizsgáljuk a kétváltozós függvények határértékét. A határérték fogalma itt is (lényegében) ugyanaz, mint az egyváltozós esetben: ha létezik olyan A szám, hogy ha $(x, y) \in D_f$ mindig közel van az (a, b) ponthoz, akkor $f(x, y)$ közel van A-hoz, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik határértéke az (a, b) helyen, és annak értéke A. Az (a, b) pontnak, az egyváltozós függvényekhez hasonlóan, itt sem kell hozzátartoznia az f függvény D_f értelmezési tartományához, de annak ún. *torlódási pontja*, hogy legyen, részleteket lásd alább.

Mielőtt kimondjuk a kétváltozós függvények határértékének definícióját, emlékezzünk vissza, hogy két síkbeli pont, mondjuk (x, y) és (a, b) távolsága

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

a Pitagorasz-tétel alapján.

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ egy halmaz, és (a, b) a sík olyan pontja, amire tetszőleges $\delta > 0$ esetén létezik $(x, y) \in H$ úgy, hogy $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$. Az ilyen pontokat a H halmaz *torlódási pontjainak* nevezzük. Egy halmaz torlódási pontjai nem feltétlenül tartoznak mind a halmazhoz; gondoljunk egy nyílt körlapra, amelynek határpontjai torlódási pontok, de nem tartoznak a (nyílt) körlaphoz.

7.9. Definíció (Kétváltozós függvény határértéke)**.** Tegyük fel, hogy $f : D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, és legyen (a, b) a D_f egy torlódási pontja. Ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz választható olyan $\delta > 0$, hogy ha $(x, y) \in D$ és $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, akkor $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy *f-nek létezik határértéke az (a, b) helyen, és annak értéke A.*

Jelölés: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$.

7.10. Megjegyzés. Mivel egy halmaz torlódási pontja nem feltétlenül pontjai magának a halmaznak, ezért az f határértéke nem feltétlenül csak a D pontjaiban van definiálva. Ez hasonló az egyváltozós esethez: ott sem követeltük meg, hogy f az a helyen értelmezve legyen.

7.6. Példa. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Megoldás. Először is vegyük észre, hogy $x^2y^2/(x^2+y^2)$ (kétváltozós) racionális törtfüggvény, tehát minden olyan helyen értelmezve van, ahol a nevezője nem nulla, azaz értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}^2$ sík az egyetlen $(0,0)$ pont kivételével. A határértéket pont a $(0,0)$-ban keressük, de ez az értelmezési tartomány torlódási pontja.

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Olyan $\delta > 0$ számot keresünk, hogy ha

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

akkor

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Tetszőleges $(x,y) \neq (0,0)$ esetén, amelyre $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, teljesül, hogy

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq x^2 < \delta^2,$$

mivel $x^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2$, így a $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ választás megfelelő.

7.11. Megjegyzés. Az egyváltozós függvényektől eltérően, kétváltozós függvények esetében nem adunk definíciót féloldali, illetve $\pm\infty$-ben vett határértékekre.

A következő tétel a többváltozós függvények határértéke és az alapműveletek kapcsolatát fejezi ki.

7.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy f és g kétváltozós függvények, és $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B$ (véges) határértékek léteznek. Ekkor*

i)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B;$$

ii)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (c \cdot f(x,y)) = cA;$$

iii)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y)) \cdot g(x,y)) = A \cdot B;$$

iv) ha $B \neq 0$, akkor

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}.$$

7.7. Példa. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x,y)\to((1,2))} \frac{x+y+1}{y^2+xy-2x+3}$$

határértéket.

Megoldás. A 7.12. tételt használjuk a határérték meghatározására. Először tekintsük a számlálót: a 7.12. tétel i) pontja alapján

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} x+y+1 &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} x + \lim_{(x,y)\to(1,2)} y + \lim_{(x,y)\to(1,2)} 1\\ &= 1+2+1 = 5.\end{aligned}$$

A nevező esetében a 7.12. tétel i)–iii) pontjait használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} (y^2+xy-2x+3) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} y^2 + \lim_{(x,y)\to(1,2)} xy - \lim_{(x,y)\to(1,2)} 2x + \lim_{(x,y)\to(1,2)} 3\\ &= (\lim_{(x,y)\to(1,2)} y)^2 + (\lim_{(x,y)\to(1,2)} x)(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y) - 2(\lim_{(x,y)\to(1,2)} x) + 3\\ &= 1^2 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 3 = 4 \neq 0,\end{aligned}$$

tehát a hányados limeszére használhatjuk a 7.12. tétel iv) pontját, azaz

$$\lim_{(x,y)\to((1,2))} \frac{x+y+1}{y^2+xy-2x+3} = \frac{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x+y+1)}{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(y^2+xy-2x+3)} = \frac{5}{4}.$$

7.8. Példa. Mutassuk meg, hogy a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

határétéknem létezik.

Megoldás. Ez a példa egy nagyon fontos dolgot illusztrál. Amikor az (x,y) ponttal tartunk az (a,b) felé, akkor ahhoz, hogy a határérték létezzen az (a,b) helyen, nem szabad, hogy számítson, hogy (x,y) milyen módon (milyen irányban) tart (a,b)-ba. Amennyiben ez nem teljesül, akkor a kérdéses határérték nem létezik.

Az világos, hogy ha $y = 0$ vagy $x = 0$ (de nem mindkettő egyszerre), akkor $xy/(x^2 + y^2) = 0$. Tehát, ha (x, y) az x- vagy az y-tengely mentén tart $(0, 0)$-ba, akkor $xy/(x^2 + y^2)$ mindvégig nulla. Ezért, ha a keresett határérték létezik, az csak nulla lehet.

Ezzel szemben, most tartson (x, y) a $(0, 0)$-ba az $y = x$ egyenes, mentén, azaz úgy, hogy mindvégig $y = x$. Ekkor $xy/(x^2 + y^2) = x^2/(2x^2) = 1/2$ konstans, ami semmiképpen nem tarthat 0-ba.

Tehát az (x, y) ponttal különböző irányokból tartva a $(0, 0)$-ba, különböző értékeket kapunk, így a keresett határérték nem létezik.

Ha tehát tudunk mutatni két olyan különböző utat, ami mentén a függvény nem ugyanahhoz az értékhez közelít, akkor ott nem lehet határértéke. Ez a módszer sokszor jól használható arra, hogy megmutassuk, hogy a keresett határérték nem létezik.

Mutatunk egy másik módszert is, ami racionális törtfüggvények esetében sokszor beválik.

Megoldás (2. Megoldás)**.** Használjunk $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ síkbeli polárkoordinátákat: ebben az esetben

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi \sin\varphi.$$

Ebből az látszik, hogy ha a rögzített φ irányszögű egyenes mentén tartunk az origóba (x, y)-al (azaz $r \to 0^+$ és φ konstans), akkor függvényünk értéke konstans $\cos\varphi \sin\varphi$. Tehát nincs olyan szám, amihez a függvény közelítene, attól függetlenül, hogy (x, y) hogyan tart $(0, 0)$-ba, így a keresett határérték nem létezhet

Kétváltozós függvények folytonossága

A kétváltozós függvények folytonosságát megint csak az egyváltozós esethez hasonlóan definiáljuk.

7.13. Definíció (Kétváltozós függvény folytonossága)**.** Legyen $f : D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(a, b) \in D$. Az f *folytonos az* (a, b) *pontban*, ha f-nek létezik határértéke az (a, b) helyen, és annak értéke megegyezik $f(a, b)$-val, azaz

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

7.14. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy egy kétváltozós függvény folytonosságát (a határértéktől eltérően) csak az értelmezési tartományának pontjaiban értelmezzük. Azonban, az egyváltozós esettől eltérően, egy kétváltozós függvény folytonos lehet az értelmezési tartományának egy határpontjában is.

A kétváltozós függvények folytonosságának és az alapműveleteknek a kapcsolatát az alábbi tétel fejezi ki.

7.15. Tétel. *Legyenek az f és g kétváltozós függvények folytonosak az (a, b) pontban. Ekkor $f + g$, $f \cdot g$, és ha $g(a, b) \neq 0$, akkor f/g is folytonos az (a, b) pontban.*

A 7.15. tételnek pl. következménye, hogy minden kétváltozós polinom folytonos mindenhol $\mathbb{R}^2$-ben, és minden kétváltozós racionális törtfüggvény folytonos minden olyan pontban, ahol a nevezője nem nulla.

A következő tétel az összetett függvény folytonosságát állítja. A mi számunkra az összetett függvény itt most a következőt jelenti: legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy valós értékű kétváltozós függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig egy szokásos egyváltozós valós függvény. Ha g értelmezve van a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazon, f pedig a $g(H) \subset \mathbb{R}$ halmazon, akkor az $f \circ g : H \to \mathbb{R}$ összetett függvény is egy kétváltozós függvény, amelyet az $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$ összefüggés definiál minden $(x, y) \in H$-ra.

7.9. Példa. Legyen $g(x, y) = x^2 + y^2$ és $f(t) = \sin t$. Ekkor $D_g = \mathbb{R}^2$, mivel g polinom. Továbbá $D_f = \mathbb{R}$, ezért az

$$(f \circ g)(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

összetett függvény is értelmezve van mindenhol $\mathbb{R}^2$-n.

7.16. Tétel (Összetett függvény folytonossága)**.** *Tegyük fel, hogy $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos az (a, b) pontban, és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (egyváltozós valós értékű függvény) folytonos a $g(a, b)$ helyen. Ekkor az $f \circ g$ összetett függvény folytonos az (a, b) helyen.*

A 7.16. tételnek következménye, hogy az olyan kétváltozós függvények, amelyeket az elemi függvények segítségével kapunk, mindenhol folytonosak az értelmezési tartományukban.

7.17. Definíció (Kétváltozós függvény halmazon való folytonossága)**.** Legyen a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz része az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ értelmezési tartományának. Azt mondjuk, hogy *f folytonos a H halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos pontbeli értelemben.

A következő tétel az egyik legfontosabb állítás a folytonos függvényekkel kapcsolatban. Számos alkalommal fogjuk használni még a jövőben.

7.18. Tétel (Weierstrass-tétel). *Ha a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt, és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f a H-n korlátos, és a H-n felveszi szélsőértékeit.*

Önellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ függvény értelmezési tartományát.
2. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ függvénynek szigorú globális maximuma van a $(0, 0)$ pontban.
3. Határozzuk meg a következő határértéket:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi határérték nem létezik
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$
5. Hol folytonos az $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ függvény?

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.