Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

6. Olvasólecke

A derivált alkalmazásai

Készítette:

Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- A derivált és a monotonitás kapcsolata
- Szélsőérték-vizsgálat
- A derivált és a konvexitás kapcsolata, inflexiós pontok
- Teljes menetvizsgálat
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

A derivált és a monotonitás kapcsolata

A deriválhatóságnak egy fontos következménye, hogy amennyiben az f függvény az a helyen differenciálható, akkor az a egy kis környezetében f közelíthető egy elsőfokú (lineáris) függvénnyel, ami nem más, mint az érintője. Ez, kissé pontatlanul fogalmazva, azt jelenti, hogy az f az a-hoz nagyon közel hasonlóan viselkedik, mint az érintője. Ha az érintő meredeksége pozitív, akkor ott a függvény (lokálisan) növekszik, ha pedig negatív, akkor csökken. Ezt pontosabban a következő tétel fogalmazza meg.

6.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában. Ekkor igazak a következők:*

i) Az f pontosan akkor monoton növő (csökkenő) az $[a,b]$ intervallumon, ha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a,b)$ esetén.

ii) Az f pontosan akkor szigorúan monoton növő (csökkenő) az $[a,b]$ intervallumon, ha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a,b)$ esetén, és f' nem azonosan nulla az (a,b) semmilyen részintervallumán.

6.1. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = x^3 - x$ függvény mely intervallumokban monoton növő, illetve csökkenő.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$ valós egyenes, és mivel polinomfüggvény, ezért tudjuk, hogy az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható, és

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Az f' deriváltfüggvény másodfokú polinom, ami mindenhol folytonos a valós egyenesen. Ezért ahhoz, hogy eldöntsük, hogy hol negatív, illetve pozitív, meg kell határoznunk a gyökeit, azaz azokat a pontokat, ahol metszi az x-tengely. Tehát

$$3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A két gyök három részre (intervallumra) osztja a valós egyenest:

$$(-\infty, -\sqrt{3}/3] \cup [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3] \cup [\sqrt{3}/3, +\infty).$$

Mivel f' folytonos, ezért a három intervallumban jeltartó, azaz az adott intervallum minden pontjában ugyanaz az előjele. Ezért elég minden intervallumból egy-egy *tesztpontot* választani és ott meghatározni az előjelet. Ennek alapján

$$-1 \in (-\infty, -\sqrt{3}/3),\ f'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0,$$

tehát ebben az intervallumban f szigorúan monoton növő.

$$0 \in [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3],\ f'(0) = -1 < 0,$$

tehát ebben az intervallumban f szigorúan monoton csökkenő.

$$1 \in [\sqrt{3}/3, +\infty),\ f'(1) = 3 - 1 = 2 > 0,$$

tehát ebben az intervallumban f szigorúan monoton növő.

Lokális szélsőértékek és az első derivált

Korábban már megismertük a függvények globális (vagy abszolút) szélsőértékének fogalmát. Most definiáljuk a *lokális (helyi) szélsőértékeket*, illetve *lokális szélsőértékhelyeket*.

6.2. Definíció. i) Az f függvénynek az a helyen *(szigorú) lokális maximuma* van, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $(a-\delta, a+\delta) \subset D_f$, és minden $x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) < f(a))$.

ii) Az f függvénynek az a helyen *(szigorú) lokális minimuma* van, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $(a-\delta, a+\delta) \subset D_f$, és minden $x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) > f(a))$.

Ha az f függvénynek az a helyen lokális szélsőértéke van, akkor a-t *lokális szélsőértékhelynek* nézzük; illetve *lokális maximum-* vagy *minimumhelynek*, attól függően, hogy a-ban maximum vagy minimum van.

Nagyon fontos összefüggés a deriválható függvények lokális szélsőértékhelyei és a derivált között a következő tétel.

6.3. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az a helyen és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

A tétel azt fejezi ki, hogy egy differenciálható függvény esetében a lokális szélsőérték létezésének *szükséges* feltétele, hogy ott a derivált eltűnjön. Azonban nem nehéz látni, hogy ez a feltétel nem elégséges, hiszen például az $f(x) = x^3$ függvénynek az $x = 0$ helyen nincs lokális szélsőértéke, bár $f'(0) = 0$.

Továbbá, természetesen egy függvénynek lehet lokális szélsőértéke olyan helyen is, ahol nem differenciálható.

A fentieket összefoglalva, egy f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol differenciálható és deriváltja nulla, vagy ahol nem differenciálható. Az ilyen pontok összességét nevezzük a függvény *kritikus pontjainak*.

6.2. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - x$ függvény kritikus pontjait.

Megoldás. Korábban már láttuk, hogy az f függvény mindenhol differenciálható, tehát olyan kritikus pontja nincs, ahol nem deriválható. Azt is kiszámoltuk, hogy deriváltja hol nulla: az $x = \pm\sqrt{3}/3$ pontokban. Tehát f-nek csak ez a két kritikus pontja van. Így f-nek csak ebben a két pontban lehet lokális szélsőértéke.

6.3. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ függvény kritikus pontjait.

Megoldás. Erről a függvényről korábban beláttuk, hogy az $x = 0$ hely kivételével mindenhol differenciálható és deriváltja

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

ami semmilyen x esetén sem veszi föl a nulla értéket. Tehát f-nek egyetlen kritikus pontja van, az $x = 0$, ahol nem differenciálható. Ezek alapján f-nek csak az $x = 0$ helyen lehet lokális szélsőértéke.

Egy nagyon fontos kérdés az f függvény abszolút szélsőértékeinek meghatározása egy véges zárt $[a, b]$ intervallumon. A Weierstrass-tételből tudjuk, hogy f felveszi szélsőértékeit $[a, b]$-n. A fentiek alapján f-nek abszolút szélsőértéke vagy kritikus pontban, vagy az intervallum végpontjaiban lehet. Tehát meg kell határoznunk a kritikus pontokat, majd a függvény helyettesítési értékét a kritikus pontokban és az intervallum végpontjaiban, és ezek közül kiválasztani a legnagyobbat, illetve legkisebbet.

6.4. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 6x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[0, 4]$ intervallumban.

Megoldás. Az f függvény mindenhol differenciálható, tehát kritikus pontja csak ott lehet, ahol deriváltja nulla, azaz

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \iff x = 3.$$

Mivel $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$, $f(0) = 1$, és $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 1 = -7$, ezért az f függvény abszolút minimuma a $[0, 4]$ intervallumon -9, amelyet az $x = 3$ pontban vesz fel, míg abszolút maximuma -7, amit az $x = 4$ pontban vesz fel.

Most kimondunk egy olyan tételt, amely elegendő feltételt ad lokális szélsőérték létezésére az első derivált segítségével. Ehhez először is bevezetjük a következő fogalmat:

6.4. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumon valamely $\delta > 0$-ra, és $f'(a) = 0$. Ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (a - \delta, a)$ esetén és $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, a + \delta)$ esetén, vagy fordítva, akkor azt mondjuk, hogy f' *előjelet vált a-ban.* Ha fentiek szigorú egyenlőtlenséggel teljesülnek, akkor a-ban f'-nem *szigorú előjelváltása* van.

6.5. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az a egy környezetében, és f' az a-ban előjelet vált, akkor ott f-nek lokális szélsőértéke van. Pontosabban,*

i) ha f' az a helyen negatívból pozitívba vált, akkor ott minimum van;

ii) ha f' az a helyen pozitívból negatívba vált, akkor maximum van.

6.5. Példa. Keressük meg az $f(x) = x^3 - x$ függvény lokális szélsőértékeit.

*Megoldás***.** Korábban megállapítottuk, hogy az f függvénynek hol vannak a kritikus pontjai: az $x = \pm\sqrt{3}/3$ helyeken. A szélsőértékek meghatározására egy táblázatot szoktunk készíteni, amiben minden intervallumnak, és maguknak a kritikus pontoknak egy-egy oszlop felel meg, és egy sorban az f' előjelét írjuk le, az alatta levő sorban pedig az f viselkedését. A kritikus pontok alapján meghatározott intervallumokban egy-egy tesztpont segítségével meghatározzuk az f' deriváltfüggvény előjelét, és ennek alapján a szélsőértéket. Amennyiben egy intervallumban a derivált előjele pozitív, ott a függvény monoton növő, ha pedig negatív, akkor monoton csökkenő. Ezeket az eseteket egy felfelé, illetve lefelé mutató nyíllal szemléltetjük. A nyilak kirajzolják, hogy a kritikus pontokban milyen szélsőértéke van (amennyiben van ilyen).

	$x < -\sqrt{3}/3$	$x = -\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3 < x < \sqrt{3}/3]$	$x = \sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3 < x$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$

A táblázatból leolvasható, hogy az $x = -\sqrt{3}/3$ helyen lokális minimum van, az $x = \sqrt{3}/3$ helyen pedig lokális maximum van.

Fontos megjegyezni (bár ezt itt részletesen nem tárgyaljuk), hogy a fenti tétel csak elegendő feltételt ad a lokális szélsőérték létezésére. Ez a feltétel nem szükséges, amit példával lehet igazolni.

Magasabb rendű deriváltak és a konvexitás kapcsolata

Ha egy f függvény f' deriváltfüggvénye maga is differenciálható az a helyen, akkor az mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható a-ban*, és f' differenciálhányadosának értékét az f *második* vagy *másodrendű differenciálhányadosának* nevezzük, és $f''(a)$-val, vagy a kicsit a komplikáltabb $\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=a}$ szimbólummal jelöljük. Az (első) deriválthoz hasonlóan definiáljuk az f függvény *második deriváltfüggvényét* vagy *másodrendű differenciálhányados függvényét*, azaz azt a függvényt, amely pontosan ott van értelmezve, ahol f kétszer differenciálható, és amelynek értéke minden ilyen helyen megegyezik f második differenciálhányadosával.

6.6. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény másodrendű differenciálhányados függvényét.

Megoldás. Az f első deriváltja

$$f'(x) = 2x,$$

ami szintén polinomfüggvény, azaz mindenhol értelmezve van és differenciálható is. Deriváltja

$$f''(x) = (2x)' = 2.$$

6.7. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény másodrendű differenciálhányados függvényét.

Megoldás. Az f első deriváltja

$$f'(x) = \cos x,$$

ami szintén mindenhol értelmezve van és differenciálható is. Deriváltja

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

A fenti két példa mindkettő olyan volt, hogy a megadott függvény nemcsak mindenhol kétszer differenciálható, de a másodrendű deriváltfüggvényük akár harmadszor (sőt, igazából akárhányszor) differenciálható. A fentiekkel analóg módon, rekurzióval definiálhatjuk egy f függvény n-edik (vagy *n-edrendű*) differenciálhányadosát az a helyen, illetve az n-edik deriváltfüggvényét is. Ezeket a harmadrendűig bezárólag $f'''(a)$-val, illetve $f'''(x)$-el jelöljük. A harmadiknál magasabb rendű deriváltakat (érthető okokból) már másképp jelöljük: $f^{(n)}(a)$, illetve $f^{(n)}(x)$, vagy $\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=a}$

6.8. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény negyedrendű differenciálhányados függvényét.

Megoldás.

$$f'(x) = \cos x,$$

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x.$$

A magasabb rendű deriváltakra sokszor szükségünk lesz. Felhasználásukra egyik legfontosabb példa a függvényvizsgálatban a konvexitás/konkavitás meghatározása lesz.

6.6. Definíció. Legyen az f függvény értelmezve az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy

i) az f az I intervallumon *konvex*, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ esetén minden $a \leq x \leq b$ számra
$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a);$$

i) az f az I intervallumon *konkáv*, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ esetén minden $a \leq x \leq b$ számra
$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a).$$

ii)

6.7. Megjegyzés. A konvexitás (konkavitás) szemléletes geometriai jelentése az, hogy az f függvény grafikonja mindig a grafikon két pontját összekötő húr alatt (fölött) helyezkedik el.

A konvexitás/konkavitás fogalmának szigorú változata teljesül akkor, ha mindenhol szigorú egyenlőtlenség van a definícióban.

Az f függvény konvexségének ismeretére ahhoz van szükség, hogy grafikonját minőségileg helyesen fel tudjuk rajzolni.

6.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény kétszer differenciálható az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában.*

i) Az f pontosan akkor konvex az (a, b) intervallumon, ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén.

ii) Az f pontosan akkor konkáv az (a, b) intervallumon, ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén.

6.9. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény milyen intervallumon konvex, illetve konkáv.

Megoldás. A fenti tétel alapján a második derivált előjelét kell meghatároznunk:
$$f''(x) = 2 > 0,$$
ami minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív, azaz az f függvény (szigorúan) konvex a teljes $(-\infty, +\infty)$

valós egyenesen.

6.10. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = x^3 - x$ függvény milyen intervallumon konvex, illetve konkáv.

Megoldás. Megint csak a második derivált előjelét kell megvizsgálnunk.

$$f''(x) = 6x,$$

amely egy lineáris függvény, ami pontosan akkor negatív, ha $x < 0$, és akkor pozitív, ha $x > 0$. Ennek alapján az f függvény (szigorúan) konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon, és szigorúan konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon.

Vegyük észre, hogy az $x = 0$ speciális szerepet játszik: itt vált konvexitást/konkavitást a függvény. Az ilyen pontokat *inflexiós pontoknak* nevezzük.

6.9. Definíció. Az f függvénynek az a helyen *inflexiós pontja* van, ha a-ban folytonos, és ott konvexitást/konkavitást vált, azaz létezik olyan $\delta > 0$, hogy f a $(a-\delta, a]$-n konvex és az $[a, a+\delta)$-n konkáv, vagy megfordítva.

6.10. Tétel (Szükséges feltétel inflexiós pont létezésére)**.** *Legyen f kétszer differenciálható az a egy környezetében. Ha f-nek a-ban inflexiós pontja van, akkor $f''(a) = 0$.*

Tehát egy f függvénynek csak olyan (folytonossági) pontban lehet inflexiós pontja, ahol vagy nem kétszer differenciálható, vagy második deriváltja nulla.

6.11. Példa. Keressük meg az $f(x) = x^3 + x^2$ függvény inflexiós pontjait és határozzuk meg konvexitási/konkavitási intervallumait.

Megoldás. Ehhez megint csak az f függvény második deriváltjának előjelét kell megvizsgálnunk.

$$f''(x) = 6x - 2,$$

ami mindenhol létezik, azaz a függvény minden $x \in \mathbb{R}$ helyen kétszer differenciálható, így inflexiós pontja csak ott lehet, ahol $f'' = 0$, azaz

$$6x - 2 = 0 \iff x = 1/3.$$

Mivel f'' lineáris függvény, ezért könnyű látni, hogy $f'' \geq 0$ pontosan akkor, ha $x \geq 1/3$, és $f'' \leq 0$, ha $x \leq 1/3$. A konvexitás/konkavitás vizsgálatát általában egy monotonitáshoz hasonló táblázatban szoktuk elvégezni.

	$x < 1/3$	$x = 1/3$	$1/3 < x$
f''	$- \frown$	infl. pont	$+ \smile$

A táblázatban az f'' előjele mellett a "$\smile$" jelzi, ha a függvény konvex, és "$\frown$", ha konkáv. Mivel $x = 1/3$-nál a függvény tényleg konvexitást vált, ezért az inflexiós pont.

6.11. Megjegyzés. A fenti tétel nem ad elegendő feltétel inflexiós pont létezésére, mert pl. az $f(x) = x^4$ függvény esetén $f''(x) = 12x^2$, így $f''(0) = 0$, de könnyű látni, hogy $f'' \geq 0$ minden x-re, azaz a függvény mindenhol konvex, ezért az $x = 0$ helyen nincs inflexiós pontja. Ezért fontos, hogy minden inflexiós pont jelöltet meg kell vizsgálni és eldönteni, hogy ott tényleg vált-e a függvény konvexitást.

A teljes függvényvizsgálat menete

A teljes függvényvizsgálat, vagy *függvénydiszkusszió* általában a következő lépésekből áll, bár ezek nem feltétlenül mind elvégezhetőek:

1. Keressük meg a függvény értelmezési tartományát, tengelymetszeteit (ha lehetséges), esetleges szimmetriáit (páros, páratlan, periodikus, stb.)
2. Vizsgáljuk meg, hogy a függvény hol folytonos, hol vannak és milyen típusúak a szakadási pontjai. Számoljuk ki a féloldali határértékeket a szakadási pontokban, illetve a határértéket a $\pm\infty$ végtelenben.
3. Hol differenciálható a függvény? Keressük meg a kritikus pontokat.
4. Határozzuk meg a monotonitási intervallumokat, lokális és globális szélsőértékhelyeket, és a szélsőértékeket
5. Hol kétszer differenciálható a függvény? Keressük meg a konvexitási/konkavitási intervallumokat és az inflexiós pontokat.
6. Vázoljuk föl a függvény grafikonját, és adjuk meg értékkészletét.

6.12. Megjegyzés. Az 1. pont nem mindig elvégezhető, mert a tengelymetszetek kiszámítása olyan egyenletekre vezethet, amelyeket nem tudunk megoldani.

A 4. és 5. lépést általában egy vagy kettő menettáblázat segítségével szoktuk elvégezni, sokszor egyben.

6.12. Példa. Végezzük el az $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ függvény teljes menetvizsgálatát!

Megoldás. A megoldást fenti pontok szerint végezzük el.

1. Függvényünk polinomfüggvény (kiszorozhatjuk a zárójeleket), tehát értelmezési tartománya a teljes valós egyenes, azaz $D_f = \mathbb{R}$.

   Az f nullhelyei az $x = 1, -2$, és az f az $y = -4$ pontban metszi az y-tengelyt, mert $f(0) = -4$.

   Vegyük észre azt is, hogy az f függvénynek nincsenek egyszerű szimmetriái, azaz se nem páros, se nem páratlan, és nem is periodikus.

2. Az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ helyen folytonos, hiszen polinom.

   Még meg kell határoznunk az f határértékét a $\pm\infty$ helyeken.

   $$\lim_{x\to\infty} (x-1)(x+2)^2 = \infty,$$

   Hasonlóan:

   $$\lim_{x\to-\infty} (x-1)(x+2)^2 = -\infty.$$

3. Az f mindenhol differenciálható (mert polinom), és deriváltja

   $$\begin{aligned} f'(x) &= ((x-1)(x+2)^2)' = (x-1)'(x+2)^2 + (x-1)((x+2)^2)' \\ &= (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) = 3x(x+2). \end{aligned}$$

   Kritikus pontjai ott vannak, ahol $f' = 0$, azaz

   $$3x(x+2) = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } x = -2.$$

4. A monotonitási intervallumokat és szélsőértékeket a konvexitással és inflexiós pontokkal egyszerre határozzuk meg egyetlen menettáblázat segítségével.

5. Az f kétszer (valójában akárhányszor) differenciálható mindenhol. Második deriváltja

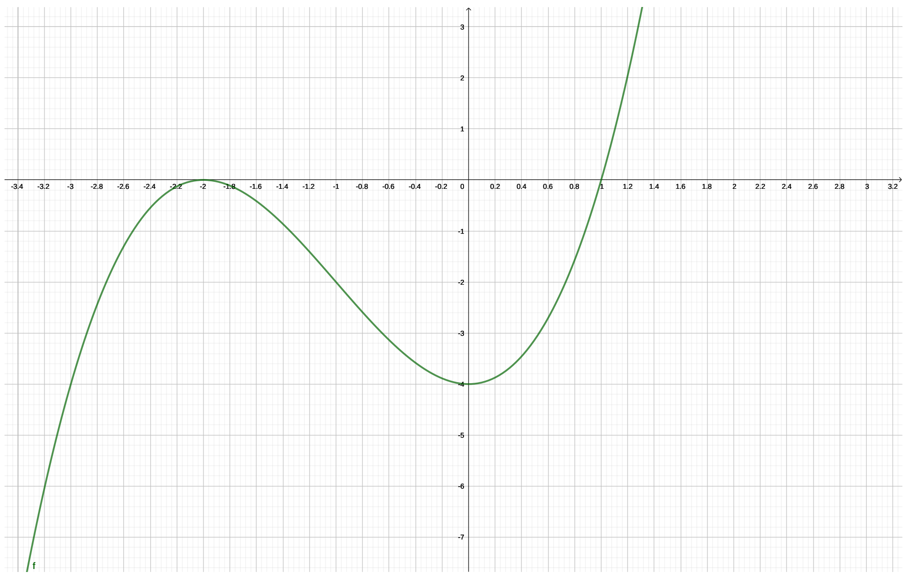
   $$f''(x) = (3x(x+2))' = (3x^2+6x)' = 6x + 6 = 6(x+1),$$

   ezért inflexiós pontja csak ott lehet, ahol $f'' = 0$, azaz

   $$6(x+1) = 0 \iff x = -1.$$

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow\frown$	lok. max. $f(-2) = 0$	$\searrow\frown$	lok. min. $f(0) = -4$	$\searrow\smile$	infl. pont $f(-1) = -2$	$\nearrow\smile$

6. Az f függvény grafikonja a következő:



A grafikonból leolvasható, hogy f értékkészlete $\mathbb{R}$, azaz $R_f = \mathbb{R}$.

Önellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ függvény monotonitási intervallumait.
2. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény lokális szélsőértékeit.
3. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 2x^2 + x$ függvény abszolút szélsőértékeit az $[1, 4]$ intervallumon.
4. Végezzük el az $f(x) = xe^2$ függvény teljes menetvizsgálatát.
5. Végezzük el az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény teljes menetvizsgálatát.

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.

2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.