Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

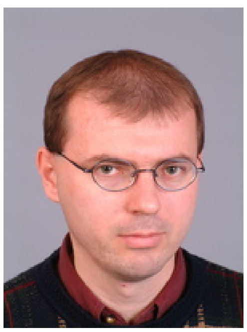
Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

4. Olvasólecke

Egyváltozós függvények folytonossága

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Folytonosság fogalma
- Szakadási helyek típusai
- Féloldali folytonosság
- Intervallumon folytonos függvények
- Elemi függvények folytonossága, példák nem elemi függvényekre
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Folytonosság fogalma

Függvények folytonosságán szemléletes módon azt értjük, hogy a függvény grafikonját ”meg tudjuk rajzolni egy ceruzavonással, anélkül, hogy felemelnénk a ceruzánkat a papírról”. Mit is jelent ez matematikailag precíz módon? Bár ez az intuitív kép azt sugallja, hogy a folytonosság valami intervallumon teljesülő tulajdonság, valójában a pontos matematikai meghatározása pontbeli.

4.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a szám egy környezetén, beleértve az a-t is. Ha $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy f *folytonos* az a helyen.

4.2. Megjegyzés. Az f függvény folytonossága azt jelenti, hogy f-nek az a helyen létezik határértéke és az véges, továbbá az a-beli határérték megegyezik az a-beli helyettesítési értékkel.

Vegyük észre, hogy – ahogy azt már előre jeleztük – az intuíciónkkal ellentétben, az egyváltozós függvények folytonossága pontbeli tulajdonság.

A függvények határértékének bevezetésekor megvizsgáltuk több konkrét függvény határértékét, és megállapítottuk például, hogy, ha f polinomfüggvény, akkor mindenhol létezik határértéke, és a határérték megegyezik f helyettesítési értékével. Tehát a polinomfüggvények minden valós x helyen folytonosak.

Bár nem bizonyítottuk, a trigonometrikus függvények közül a $\sin x$, $\cos x$ is folytonosak minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ugyanez igaz az a^x exponenciális függvényre is a teljes valós egyenesen, illetve az x^α hatványfüggvényekre is (értelmezési tartományuk belső pontjaiban).

A következő tételek írják le azt, hogy mi a folytonosság és az alapműveletek, illetve függvényösszetétel és inverz képzés kapcsolata a folytonossággal.

4.3. Tétel (Folytonosság és alapműveletek)**.** *Tegyük fel, hogy az f és g függvények folytonosak az a helyen. Ekkor $f \pm g$, cf, $f \cdot g$, és ha $g(a) \neq 0$, akkor f/g is folytonosak az a helyen.*

A 4.3. tétel és a fent elmondottak azonnali következménye, hogy az ún. *racionális törtfüggvények* is folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában. Az

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

függvényt *racionális törtfüggvénynek* nevezzük, ha P és Q polinomok. Például az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

függvény racionális törtfüggvény. Egy racionális törtfüggvény minden olyan valós x helyen értelmezve van, ahol $Q(x) \neq 0$, azaz ahol a nevező nem nulla. A **??**. tétel iv) pontja szerint R értelmezési tartományának minden pontjában létezik határértéke, és az megegyezek helyettesítési értékével, azaz R értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

További következménye a 4.3. tételnek, hogy a $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ és $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ függvények is folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában, hiszen két folytonos függvény hányadosaként vannak definiálva.

4.4. Tétel (Összetett függvény folytonossága). *Ha az $f \circ g$ összetett függvény értelmezve van az a egy környezetében, g folytonos az a helyen, és f folytonos a $g(a)$ helyen, akkor $f \circ g$ is folytonos az a helyen.*

A 4.4. tételből következik, hogy pl. az $f(x) = \sin^2 x$ vagy $f(x) = e^{\cos x}$ alakú összetett függvények minden valós x helyen folytonosak, mert a külső és belső függvény is folytonos mindenhol.

4.5. Tétel (Inverz függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában és szigorúan monoton (a, b)-n. Ekkor, ha $c = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$ és $d = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$, akkor f inverze is folytonos a (c, d) nyílt intervallumon.*

A 4.5. tétel következményeként, a ciklometrikus (inverz trigonometrikus) függvények közül az $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arcctg} x$ is folytonosak minden $x \in \mathbb{R}$-re. Az $\arcsin x$ és $\arccos x$ is folytonosak értelmezési tartományuk minden belső(!) pontjában. A végpontokat majd nemsokára külön tárgyaljuk. Hasonló módon, a logaritmus függvények mindig folytonosak mindenhol az értelmezési tartományukban.

4.6. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a 4.5. tételben indirekt módon benne foglaltatik az az állítás, mely szerint egy intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete is intervallum (azaz nem maradnak ki köztes pontok). Ez egyáltalán nem nyilvánvaló, hanem bizonyítást igényel. Ez az állítás igen hasznos.

Szakadási helyek típusai

Ha egy f függvény az a helyen nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy ott *szakadási helye van.* A szakadási helyeknek három fajtáját különböztetjük meg.

4.7. Definíció (Megszüntethető szakadás). Ha az f függvénynek az a helyen létezik véges határértéke, de az nem egyenlő az f helyettesítési értékével, vagy f nincs értelmezve az a helyen, akkor f-nek az a-ban *megszüntethető szakadása van.*

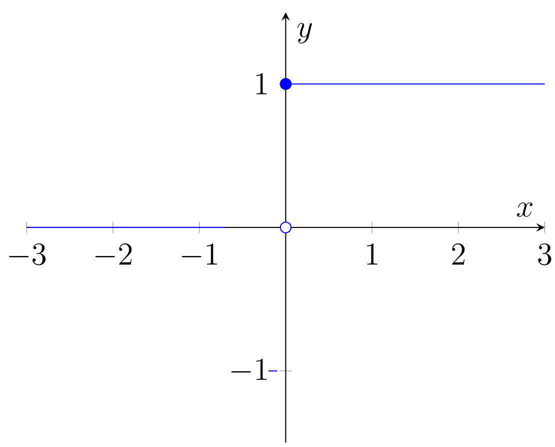
Megszüntethető szakadásra már láttunk példát az $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ esetében az $x = 1$ helyen. Megmutattuk ugyanis, hogy $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, de ott a függvény nyilván nincs értelmezve.

Ezt a fajta szakadási helyet azért nevezzük *megszüntethetőnek*, mert a függvényt egyetlen pontban (az a helyen) átdefiniálva (ha értelmezve van, de helyettesítési értéke nem egyenlő a határértékkel), vagy kiegészítve (ha f nincs definiálva a-ban), folytonossá tehetjük. Esetünkben, az $f(1) := 2$-vel kiegészítve f definícióját olyan függvén kapunk, ami folytonos az 1 helyen.

4.8. Definíció (Elsőfajú szakadás vagy ugrás)**.** Ha az f függvénynek léteznek és végesek a féloldali határértékei az a helyen, de azok nem egyenlőek, akkor az a-ban f-nek *elsőfajú szakadása* vagy *ugrása* van.

Elsőfajú szakadásra jó példa a lépcsősfüggvény, lásd 4.1. ábra:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$



4.1. ábra. Az $f(x) =$ lépcsősfüggvény grafikonja

Könnyen látható, hogy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0,$$

és

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

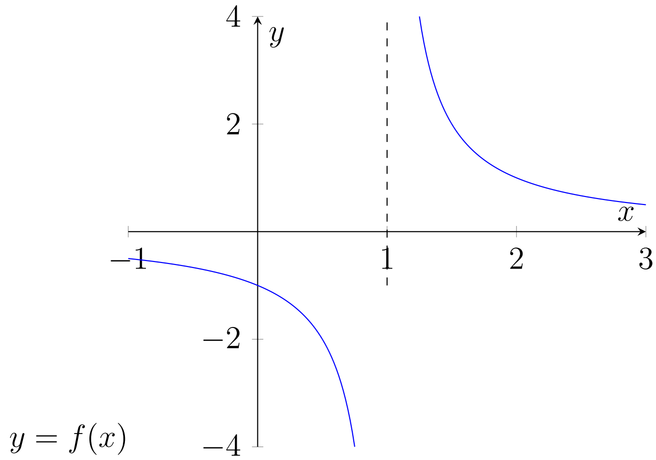
amelyek nem egyenlőek.

További példaként gondolhatunk az $f(x) = \lfloor x \rfloor$ egészrész, vagy $f(x) = \{x\}$ törtrész függvényre, amelyeknek minden egész helyen ugrásuk van.

Az ugrás rosszabb szakadás, mint a megszüntethető szakadás, mert nem lehet tőle megszabadulni a függvény egyetlen pontban való (át-)definiálásával.

4.9. Definíció (Másodfajú szakadás)**.** Ha az f függvénynek az a helyen valamelyik féloldali határértéke nem véges vagy nem létezik, akkor f-nek az a-ban *másodfajú szakadása van.*

Ilyenre példa az $f(x) = 1/(x-1)$, vagy $f(x) = 1/x^2$ az $x = 0$ helyen. "Csúnyább" példaként gondolhatunk az $f(x) = \sin(1/x)$ függvényre az $x = 0$ helyen, amelynek semelyik féloldali határértéke nem létezik a 0-ban.



4.2. ábra. Az $f(x) = 1/(x-1)$ függvény grafikonja

Természetesen a másodfajú szakadást sem tudjuk megszüntetni a függvény egy pontbeli (a-beli) megváltoztatásával; ezért az elsőfajú és másodfajú szakadásokat összefoglalóan *nem megszüntethető szakadási pontoknak* nevezzük.

Féloldali folytonosság

A folytonosság fogalma a határértékét definícióján alapszik, aminek korábban megadtuk féloldali változatait is. Ezért, természetes módon, a folytonosságnak is megvannak a megfelelő féloldali verziói, amik a féloldali határértéket használják.

Ezek nem csupán elméleti jelentőségűek, hanem nagyon is szükségünk lesz rájuk később a függvénydiszkusszionál. Korábban például láttuk, hogy egyes függvények (pl. $\sqrt{x}$) esetén problémáink voltak, ha az értelmezési tartománynak voltak végpontjai; ilyen pontokban a függvény nem tud folytonos lenni a szokásos értelemben, mert nincs a pont egy környezetében értelmezve. Azonban, intuíciónk szerint, sokszor itt is rendelkezik a folytonossággal valami megszorítóbb értelemben.

4.10. Definíció (Féloldali folytonosság)**.** Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a szám egy jobboldali (baloldali) félkörnyezetében. Ha $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$), akkor azt mondjuk, hogy f *az a helyen balról (jobbról) folytonos.*

4.1. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény az $x = 0$ helyen jobbról folytonos.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = [0, +\infty)$, így f értelmezve van a 0 egy jobboldali félkörnyezetében. Vizsgáljuk meg az f jobboldali határértékét a 0 helyen: azt kell megmutatnunk, hogy ez létezik, és értéke $\sqrt{0} = 0$. Ezt a definícióból mutatjuk meg. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Keressünk hozzá alkalmas $\delta > 0$ küszöbszámot, amelyre, ha $0 < x < \delta$, akkor

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Világos, hogy a $\delta = \varepsilon^2$ megfelelő választás.

Tehát $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, azaz az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény az $x = 0$ helyen jobbról folytonos.

4.2. Példa. Mutassuk meg, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

lépcsősfüggvény az $x = 0$ helyen balról folytonos, de jobbról nem.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$, ezért az $x = 0$ pont környezetében értelmezve van. A féloldali határértékek a 0-ban a következők:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0),$$

míg

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0),$$

azaz mindkét féloldali határérték létezik és véges, de csak a baloldali egyenlő a függvény helyettesítési értékével a 0 helyen, tehát a függvény balról folytonos, jobbról nem.

Nyilvánvalóan igaz a következő tétel:

4.11. Tétel. *Az f függvény pontosan akkor folytonos az a helyen, ha ott balról és jobbról is folytonos.*

Intervallumon folytonos függvények

Most már bevezetjük az intervallumon való folytonosság fogalmát.

4.12. Definíció. Azt mondjuk hogy az f függvény *folytonos az* (a, b) *nyílt intervallumon*, ha pontbeli értelemben folytonos minden $x \in (a, b)$ helyen.

Jelölés: $C(a, b)$ az (a, b) intervallumon folytonos függvények halmaza.

Ha az intervallum zárt, akkor a végpontokban nem lehet megkövetelni a függvény folytonosságát, hiszen az sem biztos, hogy a függvény értelmezve van a végpontok egy környezetében. Ezért ott csak megfelelő féloldali folytonosságot követeljük meg.

4.13. Definíció. Azt mondjuk hogy az f függvény *folytonos az* $[a, b]$ *zárt intervallumon*, ha pontbeli értelemben folytonos az (a, b) nyílt intervallumon, jobbról folytonos az a helyen és balról folytonos a b helyen.

Jelölés: $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza.

4.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek az a helyen *globális* vagy *abszolút maximuma (minimuma)* van, ha tetszőleges $x \in I$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$. Ha mindig szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor *szigorú globális maximumról (minimumról)* beszélünk.

4.3. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2 + 1$ függvénynek az $x = 0$ helyen szigorú globális minimuma van.

Megoldás. Az f értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Mivel ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$, így tetszőleges $x \neq 0$ esetén

$$f(x) = x^2 + 1 > 1 = f(0),$$

azaz az $x = 0$ helyen valóban szigorú globális minimuma van f-nek.

Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények több nagyon lényeges tulajdonsággal rendelkeznek. Ezek közül számunkra a következő lesz a legfontosabb:

4.15. Tétel (Weiertstrass-tétel)**.** *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos és felveszi szélsőértékeit.*

Elemi függvények folytonossága, példák nem elemi függvényekre

A fenti három tétel és következményeik motiválják (részben) az *elemi függvények* definícióját.

4.16. Definíció. Azokat a függvényeket, amelyek véges sok konstansból és egy független változóból az alapműveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), trigonometrikus függvények, hatványozás, exponenciális és logaritmus függvény, inverz trigonometrikus függvények véges sok alkalmazásával megkaphatók *elemi függvényeknek* nevezzük.

Az elemi függvények lényegében a szokásos alapfüggvények segítségével képlettel leírható függvények. Például elemi függvény

$$f(x) = \frac{e^{\sin x} - \arcsin(2x-1) + x^2 - 1}{\ln(3\operatorname{ctg} x - x^9)},$$

vagy

$$g(x =) = \ln(\arccos(x^2 - 3x + 1)),$$

bármennyire komplikáltnak is tűnik.

Természetesen léteznek nem elemi függvények is. Ezek közül a legegyszerűbbek például az $f(x) = |x|$ abszolút érték függvény, az $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *egészrész függvény*, $f(x) = \{x\}$ *törtrész függvény*, vagy az olyan függvények, amelyeket szakaszonként definiálunk, mint például az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

lépcsős függvény. Nem elemi függvény például az ún. *Dirichlet-függvény* sem, amit sokszor használnak (ellen-)példaként

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális}, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális}. \end{cases}$$

Az elemi függvények mind folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában, természetesen a végpontokban (ha vannak ilyenek) a megfelelő féloldali értelemben.

4.17. Tétel. *Az elemi függvények értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.*

Önellenőrző kérdések

1. Hol folytonos az $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ függvény?

2. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény minden pontban folytonos (azaz mutassuk meg, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$, ha tudjuk, hogy $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$).

3. Hol folytonos az
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ 4x+1, & \text{ha } x \leq 2 \end{cases}$$
függvény?

4. Hol folytonos és milyen szakadási pontjai vannak az
$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{ha } x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ \sin x, & \text{ha } x \leq 2 \end{cases}$$
függvénynek?

5.

6. Hol folytonos és milyen szakadási pontjai vannak az
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális}, \\ x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$
függvénynek?

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.