Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

3. Olvasólecke

Függvények határértéke

Készítette:

Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Függvények határértéke
- Féloldali hátárérték
- Folytonosság
- Elemi függvények folytonossága, példák nem elemi függvényekre
- Intervallumon folytonos függvények
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Függvények határértéke

A határérték pontbeli fogalom, azaz egy f függvénynek egy adott $x = a$ ponthoz köthető tulajdonsága. Lényegében azt jelenti, hogy ha x "nagyon közel" van a-hoz (de nem egyenlő vele), akkor az $f(x)$ közel van egy véges A értékhez. Amennyiben ilyen A szám létezik, azt az f függvény a-beli *határértékének* nevezünk.

3.1. Definíció (Cauchy-féle definíció)**.** Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében, esetleg az a kivételével. Ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz választható olyan $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$, hogy minden $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *létezik határértéke az a helyen* és annak értéke A.

Azt a tényt, hogy f-nek létezik határértéke az a helyen és annak értéke A, a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad \text{vagy a rövidebb } f(x) \to A, \text{ ha } x \to a$$

szimbólumokkal jelöljük.

A fentivel ekvivalens a következő definíció, ami sorozatokat használ:

3.2. Definíció (Heine-féle definíció)**.** Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében, esetleg az a kivételével. Ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges $x_n \to a$ ($x_n \neq a$) sorozat esetén $f(x_n) \to A$, ha $n \to \infty$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *létezik határértéke az a helyen* és annak értéke A.

A két definíció ekvivalenciáját (amit itt nem bizonyítunk) *átviteli elvnek* is szokták nevezni az analízisben, és nagyon hasznos eszköz állítások bizonyításában.

3.1. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = c$ konstans függvénynek tetszőleges a helyen létezik határértéke, és annak értéke c.

*Megoldás***.** A 3.1 definíciót fogjuk használni. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Az a feladatunk, hogy keressünk hozzá alkalmas $\delta > 0$ küszöbszámot, ami teljesíti a 3.1 definícióban kirótt feltételeket. Ez ebben az esetben könnyű, hiszen akármilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0,$$

azaz tetszőleges $\delta > 0$ szám megfelelő. Tehát az $f(x) = c$ konstans függvénynek minden pontban létezik határértéke, és az egyenlő a függvény helyettesítési értékével.

3.2. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x$ függvénynek tetszőleges a helyen létezik határértéke, és annak értéke a.

*Megoldás***.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Megint csak az a feladatunk, hogy keressünk hozzá alkalmas $\delta > 0$ küszöbszámot, ami teljesíti a 3.1 definícióban kirótt feltételeket, azaz ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

$$|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon.$$

Világos, hogy a $\delta = \varepsilon$ választás megfelelő.

3.3. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvénynek tetszőleges a helyen létezik határértéke, és annak értéke a^2.

Megoldás. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Keressünk hozzá alkalmas $\delta > 0$ küszöbszámot, ami teljesíti a 3.1 definícióban kirótt feltételeket! Természetesen, ha egy konkrét $\delta > 0$ megfelelő, akkor bármely nála kisebb szám is az. Ezért feltehetjük, hogy $\delta < 1$. Tehát olyan $0 < \delta < 1$-ra van szükségünk, amelyre ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

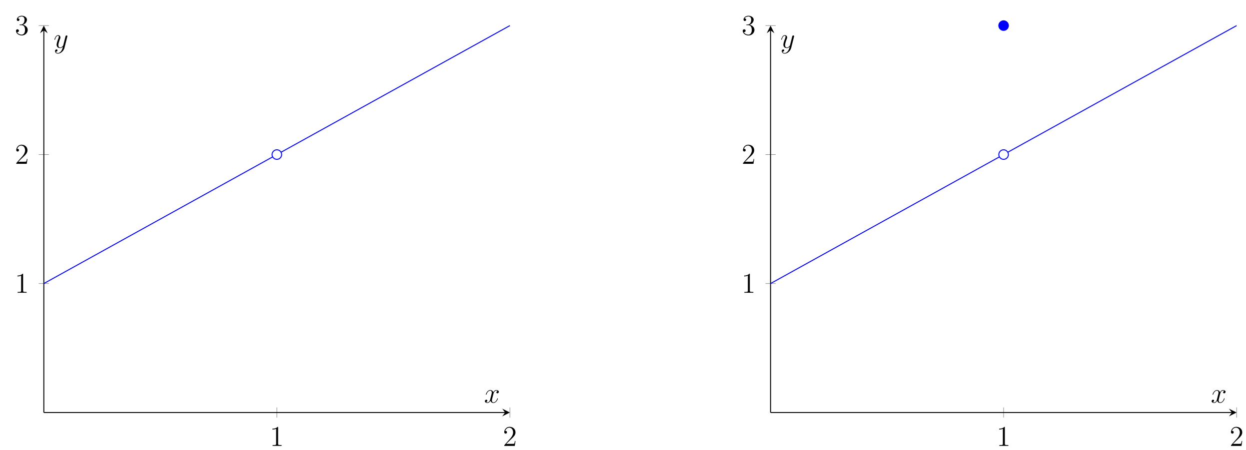
$$\begin{aligned} |f(x) - a^2| &= |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x+a||x-a| \\ &\le (2|a|+1)|x-a| < \varepsilon, \end{aligned}$$

mivel a $0 < \delta < 1$ feltevés miatt

$$|x + a| < 2|a| + 1.$$

A fenti egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha $\delta < \min\{1, \varepsilon/(2|a|+1)\}$.

Vegyük észre azt a fontos dolgot, hogy a határérték definíciójában (mind a kettőben) az f függvényről nem feltételezzük, hogy az a helyen értelmezve van (emiatt kell a $x \neq a$ feltevés). Ahhoz, hogy egy függvény egy adott a pont közelében egy véges értékhez legyen közel, nem szükséges, hogy ott értelmezve legyen, vagy ha értelmezve is van, ez a véges szám nem feltétlenül egyenlő a függvény a-beli helyettesítési értékével. Ez egyáltalán nem lényegtelen megjegyzés, hanem fontos szerepe lesz a folytonosság és a differenciálhányados definíciójában.



3.1. ábra. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ grafikonja, illetve annak egy ponttal való kiegészítése

Nem nehéz belátni, például a 3.1 definíció segítségével, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2,$$

azonban az $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ függvény az $x = 1$ helyen nincs értelmezve, amit a 3.1 ábra baloldali részén egy üres karika jelez. Ha kiegészítjük a függvény definícióját és tetszőleges értéket adunk neki az $x = 1$ helyen (teli kék karika a 3.1 ábra jobboldali részén), az nem befolyásolja se a határérték létezését, se annak értékét.

A határérték jóldefiniált, azaz ha egy f függvénynek az a pontban van határértéke, akkor az egyértelmű.

3.3. Tétel. *Ha* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *és* $\lim_{x\to a} f(x) = B$, *akkor* $A = B$

Bizonyítás. Ez a tétel egyszerű következménye a definíciónak és a háromszög egyenlőtlenségnek Indirekt módon tegyük fel, hogy $A \neq B$, és, mondjuk, $A < B$. Legyen $\varepsilon = (A+B)/2$. Mivel $\lim_{x\to a} f(x) = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 > 0$, hogy ha $0 < |x-a|\delta_1$, akkor $|f(x)-A| < \varepsilon$. Hasonlóan, mivel $\lim_{x\to a} f(x) = B$, ezért létezik olyan $\delta_2 > 0$, hogy ha $0 < |x-a|\delta_2$, akkor $|f(x) - B| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor, ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor

$$|B - A| = |B - f(x) + f(x) - A| \leq |f(x) - B| + |f(x) - A| < \varepsilon + \varepsilon = B - A,$$

ami ellentmondás. Tehát az indirekt feltevés hamis volt, így a tétel állítása igaz. □

Függvények határértékét csak ritkán számoljuk ki közvetlenül a definíció segítségével. Helyette inkább az elemi függvények határértékét és bizonyos egyszerű műveleti szabályokat használunk:

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *és* $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Ekkor*

i) az $f \pm g$ *összegnek létezik határértéke az a helyen, és* $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = A \pm B$;

ii) a (cf) *függvénynek létezik határértéke az a helyen, és* $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\cdot A$ *minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén;*

iii) az $f \cdot g$ *függvénynek létezik határértéke az a helyen, és* $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = A \cdot B$;

iv) ha $B \neq 0$, *akkor* f/g*-nek létezik határértéke az a helyen, és* $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \frac{A}{B}$.

3.4. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x + 1) = 0$.

Megoldás. A 3.4. tétel i)–iii) pontjai alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^3-2x+1) &= \lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 1\\ &= \lim_{x\to 1} x^3 - 2\lim_{x\to 1} x + 1\\ &= 1-2+1 = 0,\end{aligned}$$

ahol (a iii) pont szerint)

$$\lim_{x\to 1} x^3 = \left(\lim_{x\to 1} x\right)^3 = 1^3 = 1.$$

3.5. Példa. Számoljuk ki a következő határértéket

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-\sqrt{x}+2}{2x-3}.$$

Megoldás. Ebben a példában a 3.4. tétel minden pontját használjuk: Mivel függvényünk hányados, ezért a iv) pont alkalmazásához meg kell határoznunk külön-külön a számláló és a nevező határértékét, és meggyőződni, hogy a nevezőé nem nulla.

$$\lim_{x\to 4}(x^2-\sqrt{x}+2) = \lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4}\sqrt{x} + \lim_{x\to 4} 2 = 16-2+2 = 16.$$

$$\lim_{x\to 4}(2x-3) = \lim_{x\to 4} 2x - \lim_{x\to 4} 3 = 8-3 = 5 \neq 0,$$

tehát

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-\sqrt{x}+2}{2x-3} = \frac{\lim_{x\to 4}(x^2-\sqrt{x}+2)}{\lim_{x\to 4}(2x-3)} = \frac{16}{5}.$$

Végül mutatunk egy olyan példát, amikor a 3.4. tétel iv) pontja nem használható közvetlenül.

3.6. Példa. Határozzuk meg az alábbi limeszt.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$$

Megoldás. Itt az a probléma, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0. Ezért a iv) pont nem használható közvetlenül. Az ilyen (és más hasonló) kifejezéseket *határozatlan kifejezéseknek* is szoktuk nevezni (hasonlóan ahhoz, ahogy a sorozatok esetén tettük). Erre a konkrét esetre röviden a $\frac{0}{0}$ szimbólummal szoktunk hivatkozni.

Ez az eset azonban megoldható egy szokásos "trükkel". Szorozzuk meg és osszuk el a törtet a számláló "konjugáltjával":

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x}}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x}}{x-1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-1)-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az utolsó lépésben már tudtuk alkalmazni a iv)-es pontot, mert a nevező határértéke az $x-1$-el való egyszerűsítés után nem nulla.
└

A következő tételt némiképpen óvatosabban kell kezelni. Valójában kimondatlanul ezt már használtuk is az előző példában.

3.5. Tétel (Összetett függvény határértéke)**.** *Tegyük fel, hogy az $f\circ g$ összetett függvény értelmezve van az a szám egy környezetében, esetleg az a kivételével, illetve* $\lim_{x\to a} f(x) = A$*, és* $\lim_{t\to g(a)} f(t) = B$*. Ha $g(x)\neq A$ az a egy környezetében (esetleg az a kivételével), vagy $B = f(g(a))$, akkor* $\lim_{x\to a} f\circ g(x) = B$*.*

Féloldali határérték

Ha a határérték definíciójában megszorítjuk az x-nak a-hoz viszonyított helyzetét, akkor a féloldali határérték fogalmához jutunk.

3.6. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az (a,c) intervallumon valamely alkalmas $a<c$ számra. Ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz választható olyan $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$, hogy minden $0<x-a<\delta$ esetén $|f(x)-A|<\varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *létezik jobboldali határértéke az a helyen* és annak értéke A.

A jobboldali határérték annyi megszorítást tartalmaz a szokásos határértékhez képest, hogy itt csak az a-nál nagyobb számok megengedettek.

A baloldali határérték hasonlóan definiálható, de akkor a függvény egy (c,a) intervallumon van definiálva, és $0<a-x<\delta$, azaz x az a-nál mindig kisebb.

A féloldali határértékek jelölésére a következő szimbólumok egyikét szoktuk használni:

$$\text{Jobboldali határérték: } \lim_{x\to a^+} f(x) = A, \qquad \text{vagy} \qquad f(x)\to A, \text{ ha } x\to a^+.$$

$$\text{Baloldali határérték: } \lim_{x\to a^-} f(x) = A, \qquad \text{vagy} \qquad f(x)\to A, \text{ ha } x\to a^-.$$

3.7. Tétel. *Az f függvénynek pontosan akkor létezik határértéke az a helyen, ha ott létezik bal- és jobboldali határértéke is, és azok megegyeznek. Ekkor az f függvény a-beli határértéke megegyezik a féloldali határértékeinek közös értékével.*

A féloldali határértékre is ugyanazok a műveleti szabályok vonatkoznak, mint a szokásos határértékre, ezért ezeket itt most külön nem részletezzük.

Végtelen határérték, illetve határérték a végtelenben

3.8. Definíció (Végesbeli végtelen határérték)**.** Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a szám egy környezetében, esetleg az a kivételével. Azt mondjuk, hogy az f határértéke $+\infty$ $(-\infty)$ az a helyen, ha tetszőleges $K > 0$ $(k < 0)$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $f(x) > K$ $(f(x) < k)$.

A végesbeli végtelen határérték jelölésére a következő szimbólumok egyikét szoktuk használni:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \to +\infty, \text{ ha } x \to a.$$

3.7. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

*Megoldás***.** Legyen $K > 0$ tetszőleges rögzített szám. Az a feladatunk, hogy találjunk hozzá alkalmas δ küszöbszámot, ami teljesíti a 3.9. definíció feltételét, azaz, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > K,$$

ami nyilván teljesül, ha például a $\delta = 1/\sqrt{K}$ választással élünk.

A fenti definíciót meg szoktuk fogalmazni a féloldali határértékekre is; álljon itt példaként a jobboldali eset, amikor a féloldali határérték $+\infty$.

3.9. Definíció (Végesbeli végtelen jobboldali határérték)**.** Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az (a, c) intervallumon valamely $a < c$ számra. Azt mondjuk, hogy az f *jobboldali határértéke* $+\infty$ *$(-\infty)$ az a helyen*, ha tetszőleges $K > 0$ $(k < 0)$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < x - a < \delta$, akkor $f(x) > K$ $(f(x) < k)$.

Hasonlóan fogalmazható meg a baloldali határértékek esete is.

A jobboldali végtelen határértéket például a következő módon jelöljük:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \to +\infty, \text{ ha } x \to a^+.$$

A baloldali végtelen határérték jelölése hasonló.

3.8. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, és $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.

Megoldás. A jobboldali határértékhez legyen $K > 0$ rögzített. Keresünk olyan $\delta > 0$ számot, hogy ha $0 < x < \delta$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{x^3} < K.$$

Ehhez például a $\delta = 1/\sqrt[3]{K}$ választás megfelelő.

A baloldali határértékhez most legyen $K < 0$ tetszőleges rögzített szám. Olyan $\delta > 0$ küszöbszámot keresünk, amelyre ha $0 < -x < \delta$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{x^3} < K,$$

ami nyilvánvalóan teljesül, ha $\delta = 1/\sqrt[3]{K}$.

Végezetül bevezetjük a végtelenbeli véges és végtelen határértéket:

3.10. Definíció (Végtelenbeli véges határérték)**.** Legyen az f függvény értelmezve a $(c, +\infty)$ $((-\infty, c))$ intervallumon. Ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $M = M(\varepsilon) > 0$, hogy ha $x > M$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek van *határértéke a* $+\infty$*-ben* $(-\infty$*-ben)*, és annak értéke A.

A (pozitív) végtelenbeli véges határérték jelölése:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to +\infty.$$

A $-\infty$-beli határérték jelölése hasonló.

3.9. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keressünk hozzá alkalmas M küszöbszámot.

$$\left|\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 1\right| = \left|\frac{x}{1+x} - 1\right| = \left|\frac{-1}{1+x}\right| < \varepsilon, \text{ ha } M = \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

3.11. Megjegyzés. A végesbeli végtelen és végtelenbeli (véges és végtelen) határértékkel rendelkező függvényekkel kapcsolatos műveletekre is számos szabály van, hasonlóan a sorozatok esetéhez. Ezekkel itt is nagyon óvatosan kell bánni.

Önellenőrző kérdések

1. Számoljuk ki a $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ határértéket.
2. Számoljuk ki a $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ határértéket.
3. Számoljuk ki a $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ határértéket.
4. Számoljuk ki a $\lim_{x\to a} \sin x$ határértéket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.
5. Számoljuk ki a $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sin x/x}$ határértéket.

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.