Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

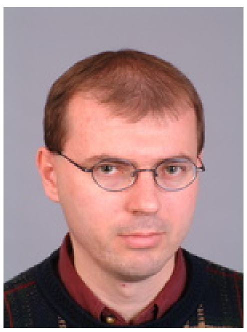
Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

2. Olvasólecke

Sorozatok határértéke, az e szám

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Számsorozatok fogalma és egyszerű tulajdonságai
- Sorozatok határértéke, nevezetes sorozatok határértéke
- A határérték egyszerű tulajdonságai
- Az e szám
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Számsorozatok fogalma és egyszerű tulajdonságai

2.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt *valós (végtelen) számsorozatnak* nevezünk.

Jelölések: $f_n = f(n)$ a sorozat n-edik *tagja* vagy *általános tagja*. Szokás még f helyett a_n, b_n stb. betűket is használni sorozat általános tagjainak jelölésére. Magára a sorozatra az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jelölést (vagy a rövidebb (a_n)-t) használjuk, de szokás meg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ szimbólum is.

Egyszerűbb sorozatokat megadhatunk az első pár tag felsorolásával, ha abból már nyilvánvaló, hogy mi a sorozat általános tagja.

i) $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

ii) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

A legtöbb esetben sorozatot úgy adunk meg, hogy felírunk egy formulát, ami meghatározza az általános tagját:

i) $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$;

ii) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

iii) $c_n = n \cdot \sin(1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

Lehet sorozatot megadni közvetettebb módon is, például legyen

$$p_n = \text{az } n\text{-nél nem nagyobb prímszámok száma},$$

vagy

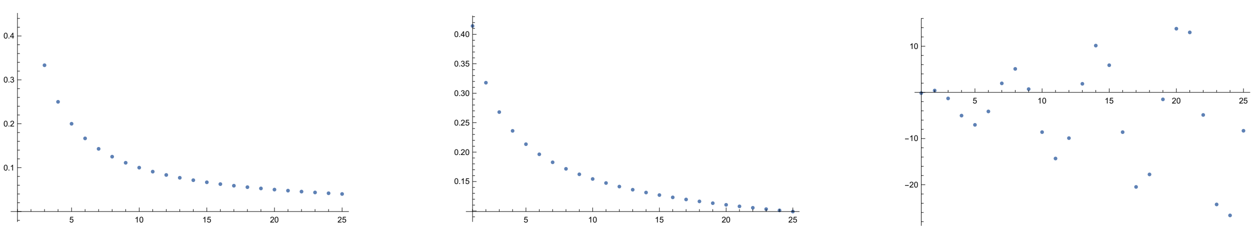
$$d_n = \text{az } n \text{ (pozitív) osztóinak száma}.$$

Nincs explicit formula, ami megadná p_n értékét tetszőlegesen nagy n-re. Hasonló példa lehet a $\sqrt{2}$ n-edik tizedesjegye.

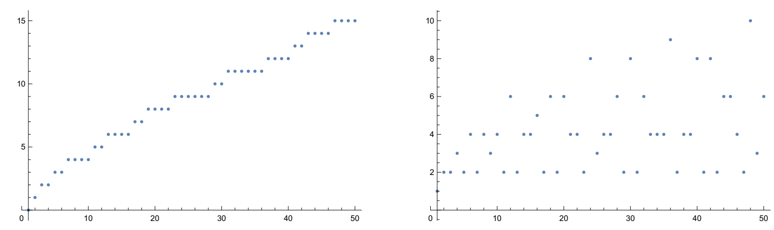
Sorozatok lehetséges megadási módja még az ún. *rekurzív definíció*, amikor lerögzítjük a sorozat első néhány tagját, majd adunk egy szabályt, ami a későbbi tagokat a korábbiak segítségével definiálja: Erre nevezetes példa a *Fibonacci sorozat*, azaz $f_1 = f_2 := 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ minden $n \geq 3$ pozitív egész számra. Ha kiszámoljuk a sorozat első pár tagját, akkor azt kapjuk, hogy

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13,\ f_8 = 21, \ldots$$

Sorozatokat lehet ábrázolni Descartes-koordináta-rendszerben úgy, mint a szokásos egyváltozós függvényeket:



2.1. ábra. Az $a_n = 1/n$, $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ és $c_n = n \sin n$ sorozatok $n = 1, \ldots, 25$ között



2.2. ábra. Az p_n és d_n sorozat $n = 1, \ldots, 50$ között

Sorozatok határértéke

Ha a sorozat tagjai az n index növekedésével egyre közelebb kerülnek egy A számhoz (mint pl. az $a_n = 1/n$ vagy $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ esetén), akkor a sorozat *konvergens*, és az A számot a sorozat *határértékének* nevezzük. Ezt precízen az alábbi definíció fejezi ki.

2.2. Definíció (Véges határérték definíciója)**.** Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*, ha létezik olyan A valós szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz választható olyan $N = N(\varepsilon)$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Az A számot az (a_n) sorozat *határértékének* nevezzük.

Annak jelölésére, hogy az (a_n) sorozat határértéke az A szám, alapvetően a következő két konvenció egyikét használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \text{vagy} \qquad a_n \to A, \text{ ha } n \to \infty.$$

2.1. Példa. Mutassuk meg, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$, $n =, 1, \ldots$ sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét.

*Megoldás***.** Az a_n sorozat tagjai mind pozitív számok, illetve könnyen látszik az is, hogy tagjai csökkenőek, azaz $a_m < a_n$, ha $n > m$. Továbbá, ha n nagy, akkor az $1/n$ kicsi. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy a_n konvergens, és határértéke 0. Most ezt megmutatjuk a definíció alapján. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített (kis) szám. Ehhez keresünk olyan N küszöbindexet (vagy másképpen küszöbszámot), hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - 0| = a_n < \varepsilon$. Nem nehéz látni, hogy ha $N = 1/\varepsilon$, akkor az megfelelő lesz.

2.3. Definíció. Ha egy (a_n) sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*.

A divergens sorozatok között kitüntetett szerepet játszanak azok, melyek "minden határon túl nőnek".

2.4. Definíció (Végtelen határérték definíciója)**.** Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a *végtelenhez tart* vagy *minden határon túl növekszik*, ha tetszőleges $K > 0$ esetén létezik olyan N szám, hogy minden $n > N$ indexre $a_n > K$.

Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$.

A $-\infty$-hez tartó sorozat fogalma hasonlóan definiálható.

2.5. Megjegyzés. Az olyan sorozatokat, amelyek divergensek, de se $+\infty$-hez, se $-\infty$-hez nem tartanak, szokás *oszcillálva divergens* sorozatoknak is nevezni.

Azoknak a sorozatoknak pedig amelyek konvergensek vagy $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez tartanak *létezik határértéke*, bár ez a határértékét nem feltétlenül véges.

Az alábbiakban kiszámítjuk egyes fontos sorozatok határértékét a definícióból, majd később ezeket fogjuk arra használni, hogy a határértékre vonatkozó műveleti szabályok segítségével más, bonyolultabb sorozatok határtértékén megtaláljuk. A 2.6. tételben látni fogunk példát olyan sorozatra is, amely $+\infty$-be tart.

2.6. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0, & \textit{ha } |c| < 1, \\ 1, & \textit{ha } c = 1, \\ +\infty, & \textit{ha } c > 1, \\ \textit{divergens,} & \textit{ha } c < -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $c = 1$, akkor nyilván $c^n = 1$ minden n-re.

Most tekintsük azt az esetet, amikor $c > 1$. Legyen $K > 0$ tetszőleges rögzített szám. Ekkor a Bernoulli egyenlőtlenség alapján

$$c^n = ((1 + (c-1)^n) \geq 1 + n(c-1) > K, \text{ ha például } n > \frac{K}{c-1},$$

tehát $c^n \to +\infty$, ha $n \to \infty$.

Most legyen $0 < c < 1$, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor

$$0 < c^n = \frac{1}{\frac{1}{c^n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{c} - 1 + 1\right)^n} \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{c} - 1\right)} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{c} - 1}.$$

Ha $c < -1$, akkor c^n váltakozva vesz fel 1-nél nagyobb, illetve -1-nél kisebb számokat, ezért oszcillálva divergens. $\square$

2.7. Tétel. *Tetszőleges rögzített c valós számra* $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $c > 0$ és jelölje c egészrészét $\lfloor c \rfloor$. Ekkor, ha $n > c$, akkor

$$0 < \frac{c^n}{n!} = \frac{c}{1} \cdot \frac{c}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{c}{\lfloor c \rfloor} \cdot \frac{c}{\lfloor c \rfloor + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \leq c^{\lfloor c \rfloor} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{c^{\lfloor c \rfloor}}{\varepsilon},$$

azaz $\frac{c^n}{n!} \to 0$, ha $n \to \infty$. □

2.8. Tétel. *Ha $c > 0$, akkor* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $c > 1$. Ekkor a számtani/mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$0 < \sqrt[n]{c} - 1 = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot c} - 1 \leq \frac{(n-1) + c}{n} - 1 = \frac{c-1}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{c-1}{\varepsilon}.$$

□

2.9. Tétel. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bizonyítás. A számtani/mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) + 2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

így

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ ha } n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

□

A határérték egyszerű tulajdonságai

Ha egy sorozat konvergens, akkor csak egy határértéke van.

2.10. Tétel. *Sorozat határértéke egyértelmű, azaz, ha $a_n \to A$ és $a_n \to B$, akkor $A = B$.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $a_n \to A$, $a_n \to B$ és $A \neq B$. Feltehetjük azt is, hogy $B > A$. Legyen $0 < \varepsilon < (B-A)/2$. Ekkor, mivel $a_n \to A$, létezik olyan N_1, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, illetve, mivel $b_n \to B$, olyan N_2, hogy minden $n > N_2$ esetén $|a_n - B| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ha $n > N$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|B - A| = |B - a_n + a_n - A| < |B - a_n| + |A - n_n| < \varepsilon + \varepsilon < B - A,$$

ami ellentmondás. □

2.11. Definíció. Az (a_n) sorozat *felülről (alulról) korlátos*, ha létezik olyan K (k) szám, hogy $a_n \leq K$ $(a_n \geq k)$ minden n-re. Ha az (a_n) sorozat felülről és alulról is korlátos, akkor azt mondjuk, hogy *korlátos.*

Példa felülről korlátos sorozatra: $a_n = 1/n$, itt például $K = 1$ felső korlát; $b_n = \sin n$, ahol a $K = 1$ szintén felső korlát. A $b_n = \sin n$ sorozat alulról is korlátos, és például $k = -1$ alsó korlátja.

2.12. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.*

2.13. Megjegyzés. Az, hogy egy sorozat korlátos nem elégséges, hanem csak szükséges feltétele a konvergenciának.

2.14. Tétel (Konvergens sorozatok határértéke és műveletek)**.** *Tegyük fel, hogy $a_n \to A$ és $b_n \to B$. Ekkor*

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

ii) $\lim_{n\to\infty} ca_n = cA$ *tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *esetén,*

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

iv) ha $B \neq 0$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$.

2.2. Példa. Számítsuk ki a következő határértéket $\lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{5n}$.

Megoldás. A 2.14. tételt használva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n} = \frac{2}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{3}{5} \lim_{n\to\infty} 1 = \frac{3}{5}.$$

2.3. Példa. Számítsuk ki a következő határértéket $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

2.15. Megjegyzés. Nem konvergens sorozatok esetében a műveletekkel sokkal óvatosabban kell bánni. Ekkor is vannak olyan esetek, amik jól viselkednek, például, ha $a_n \to A$ és $b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, akkor $a_n/b_n \to 0$. Azonban, ha például $a_n, b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, akkor a konkrét sorozatok közelebbi vizsgálata nélkül nem eldönthető, hogy, hogy $a_n - b_n$ vagy a_n/b_n hogyan viselkedik. Az ilyen "szimbolikusan" $(+\infty) - (+\infty)$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$ stb. sorozatokat *határozatlan kifejezéseknek* nevezzük, és vizsgálatukhoz sokszor bonyolultabb módszerek szükségesek.

Nagyon fontos eszköz sorozatok határértékének meghatározására az ún. *Rendőr-elv* vagy (az angol szakirodalomban) *szendvics szabály*. Ez azt mondja ki, hogy ha két konvergens sorozat, amelynek határértéke egyenlő, közrefog egy harmadik sorozatot, akkor ez a harmadik sorozat is konvergens és határértéke ugyancsak egyenlő a két közrefogó sorozat közös határértékével.

2.16. Tétel (Rendőr-elv)**.** *Tegyük fel, hogy $a_b \le b_n \le c_n$ minden n-re, és $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n$, akkor a (b_n) sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.*

2.4. Példa. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ határértéket.

Megoldás. Ennek a feladatnak a megoldásához egy standard "trükköt" használunk: megszorozzuk és elosztjuk a függvényét a konjugáltjával:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3\sqrt{n}} = 0,$$

így
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=0,\ \text{mivel}\ 0\le\sqrt{n+2}-\sqrt{n}.$$

2.5. Példa. Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ határértéket.

Megoldás. Vegyük észre, hogy
$$\underbrace{1\cdots 1}_{\frac{n}{2}\text{-ször}}\cdot\underbrace{\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}\text{-ször}}=\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}<n!=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n},$$

így
$$\sqrt[n]{\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}}<\frac{\sqrt{n}}{den}\sqrt[n]{2}<\sqrt{n}.$$

Az e szám

A nevezetes e szám precíz bevezetése előtt szükségünk van a következő előkészületekre.

2.17. Definíció. Egy $H\subset\mathbb{R}$ nemüres valós számhalmazt *felülről (alulról)* korlátosnak nevezünk, ha létezik olyan K (k) szám, hogy $h\le K$ $(h\ge k)$ minden $h\in H$-ra. Ekkor K (k) a H halmaz egy *felső (alsó)* korlátja.

Ha a H halmaz alulról és felülről is korlátos, akkor azt mondjuk, hogy *korlátos.*

Nyilván, ha K a H egy felső korlátja, akkor bármilyen $K'>K$ is az. Hasonlóan, ha k a H egy alsó korlátja, akkor bármely $k'<k$ is az.

2.18. Definíció. Ha a $H\subset\mathbb{R}$ nemüres számhalmaz felülről korlátos, és létezik olyan K szám, hogy K a H felső korlátja, de bármely $K'<K$ már nem felső korlát, akkor a K-t a H halmaz *legkisebb felső korlátjának* vagy *felső határának*, illetve *szuprémumának* nevezzük. Jelölése $\sup H$.

Nemüres, alulról korlátos H számhalmaz *legnagyobb alsó korlátját* vagy *alsó határát*, illetve *infimumát* hasonló módon definiáljuk. A legnagyobb alsó korlát jelölése $\inf H$.

A valós számok *Teljességi axiómája* kimondja a legkisebb felső korlát létezését felülről korlátos nemüres halmazokra:

Teljességi axióma: *Tetszőleges felülről korlátos nemüres számhalmaznak létezik legkisebb felső korlátja.*

A Teljességi axiómából következik, hogy alulról korlátos, nemüres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

2.19. Megjegyzés. A legkisebb felső korlát (legnagyobb alsó korlát) vagy maga is eleme H-nak (akkor ez a legnagyobb vagy legkisebb elem), vagy van hozzá tetszőlegesen közel eleme H-nak. Ez például a felső határ esetében úgy látható, hogy ha létezne olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy H-nak nincs eleme $K - \varepsilon_0$ és K között ($K = \sup H$), akkor $K - \varepsilon_0$ a H-nak egy K-nál kisebb felső korlátja lenne, ami ellentmondás.

2.20. Definíció. Az (a_n) sorozat *monoton növő* (*monoton csökkenő*), ha tetszőleges $m < n$ esetén $a_m \leq a_n$ ($a_m \geq a_n$).

Példa monoton csökkenő sorozatra: $1/n$, monoton növő sorozatra: $b_n = n^2 + 1$.

2.21. Tétel. *Ha az (a_n) sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens, mégpedig legkisebb felső korlátjához tart.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám. Ha A jelöli az a_n sorozat legkisebb felső korlátját, akkor $A - \varepsilon$ már nem felső korlát. Ezért létezik olyan N index, hogy $a_N > A - \varepsilon$. Ha $n > N$, akkor a sorozat monoton növekedése miatt $a_n \geq a_N > A - \varepsilon$, azaz teljesül az A számra, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$. □

2.22. Tétel. *A $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, tehát konvergens.*

Bizonyítás. A Binomiális tétel alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Ha $1 \leq i \leq n$, akkor

$$\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n \cdot n \cdots n}\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} < 3$$

a mértani sorozat összegképlete alapján. Azaz 3 egy felső korlát.

Most megmutatjuk, hogy f szigorúan monoton növő, azaz ha $m < n \in \mathbb{N}$, akkor $f(m) < f(n)$. A számtani-mértani közép egyenlőtlenség alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

ahonnan mindkét oldal $n + 1$-edik hatványra emelésével adódik a kívánt összefüggés. □

2.23. Definíció. A Euler-féle e számot a következőképpen definiáljuk

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\ldots.$$

2.24. Megjegyzés. Az e alapú $\ln x = \log_e x$ logaritmus és e alapú e^x exponenciális függvény központi szerepet játszik a matematikában.

Sokat használjuk feladatokban a következő tételt:

2.25. Tétel. *Ha valamely* (g_n) *sorozatra* $\lim_{n\to\infty}|g_n| = \infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{g_n}\right)^{g_n} = e.$$

Speciálisan a $g_n = n/a$ választással kapjuk, hogy $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

2.6. Példa. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ határértéket.

Megoldás. A 2.25. tételt használva a $g_n = n/3$ választással kapjuk, hogy

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right]^2 = (e^3)^2 = e^6.$$

2.7. Példa. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ határértéket.

Megoldás. A 2.25. tételt használva a $g_n = n^2+1$ választással kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right]^{\frac{n^2}{n^2+1}} = e,$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}=e, \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1.$$

Önellenőrző kérdések

1. Konvergens-e az $a_n = \frac{2n-1}{3n}$ sorozat? Ha igen, adjuk meg határértékét a definíció segítségével.
2. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2+n}$ határértéket.
3. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^3 - n - n^2}{n^{2021}}$ határértéket.
4. Igazoljuk a 2.12. tételt, azaz, hogy konvergens sorozat korlátos.
5. Mi az $a_n = \left(1 - \frac{\sin n}{n^3-1}\right)^{n^3}$ sorozat határértéke, ha $n \to \infty$?

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.