Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

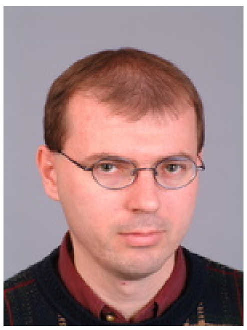
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Európai Unió
Európai Szociális Alap
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

10. Olvasólecke

Taylor-formula

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

Olvasási idő: kb. 1 óra

Egyváltozós Taylor-polinomok

Természetes igény, hogy bonyolultabb függvényeket egyszerűbbekkel közelítsünk. Sok gyakorlati probléma megoldásához egy függvény értékét nem feltétlenül kell pontosan ismernünk, elegendő annak bizonyos pontosságú közelítése is. A régi szögfüggvény-, és logaritmustáblázatok például ilyen közelítéseket tartalmaztak. Egy egyszerű számológép is csak néhány tizedesjegyig adja meg a használt függvényeket. Számítógépes programokkal lehetőség van arra is, hogy lényegében tetszőlegesen sok tizedesjegyig közelítsük egy függvény értékét, ahogy azt a problémánk megoldása megköveteli.

Első kérdés, hogy milyen függvényeket tekintünk "egyszerűnek", azaz milyen függvényekkel akarunk másokat közelíteni. Erre az első, és talán legtermészetesebb választás a polinomok.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $a \in I$. Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható az a helyen. Keressünk olyan T_n n-edfokú polinomot, ami jól közelíti f-et a-ban abban az értelemeben, hogy $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$ minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén. (Jelölésbeli konvenció: $f^{(0)} = f$.)

Ha a fenti polinomot $T(x) = c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n$ formában keressük, akkor rövid számolással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x_0) &= c_0, \\ f'(x_0) &= c_1, \\ f''(x_0) &= 2c_2, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot c_n. \end{aligned}$$

Tehát a c_i együtthatókat kifejezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a), \\ c_1 &= \frac{f'(a)}{1!}, \\ c_2 &= \frac{f''(a)}{2!}, \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

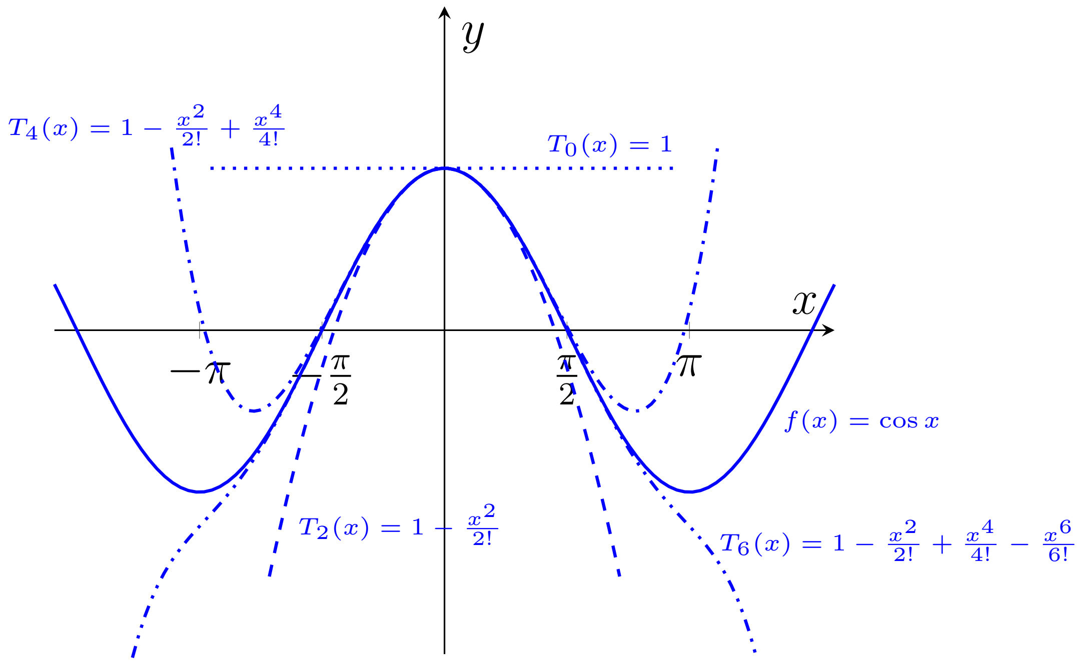
10.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in I$. Ha f n-szer differenciálható a-ban, akkor a

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \end{aligned}$$

polinomot az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *a körüli n-edik Taylor-polinomjának* nevezzük. Abban a speciális esetben, amikor $a = 0$, szokás a fenti polinomot *f n-edik Maclaurin-polinomjának is hívni.*

10.2. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a nulladik Taylor-polinom egyszerűen a konstans függvény, amelynek értéke $f(a)$. Az első Taylor-polinom az érintőt határozza meg, azaz gráfja az f a-beli érintője).

A 10.1. ábra illusztrálja, hogy hogyan közelítik az $f(x) = \cos x$ függvényt az $x_0 = 0$ körüli nulladik, második, negyedik és hatodik Taylor-polinomjai.



10.1. ábra. Az $f(x) = \cos x$ függvényt az $x_0 = 0$ körüli nulladik, második, negyedik és hatodik Taylor-polinomjai

10.3. Megjegyzés. A T_n Taylor-polinomra tejesül, hogy ez az egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amelynek az i-edik deriváltja az a helyen éppen $f^{(i)}(a)$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén.

10.1. Példa. Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény ötödik Taylor-polinomját $a = 0$ körül.

Megoldás. Szükségünk van a következő deriváltakra:

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\sin x)'' &= -\sin x \\
(\sin x)''' &= -\cos x \\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x \\
(\sin x)^{(5)} &= \cos x,
\end{aligned}
$$

Az $a = 0$ pont behelyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= 0 \\
(\sin x)'(0) &= \cos(0) = 1 \\
(\sin x)''(0) &= -\sin(0) = 0 \\
(\sin x)'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\
(\sin x)^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0 \\
(\sin x)^{(5)}(0) &= \cos(0) = 1,
\end{aligned}$$

így a $\sin x$ függvény $a = 0$ körüli ötödik Taylor-polinomja (Maclaurin-polinomja):

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

10.4. Megjegyzés. A 10.1. példa számolásában nyilvánvaló, hogy a $\sin x$ függvény n-edrendű deriváltjai az n szerint ismétlődnek. Ennek alapján, tetszőleges n pozitív egész számra igaz, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény $a = 0$ körüli $2n + 1$-edik Taylor polinomja:

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

10.2. Példa. Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény ötödik Taylor-polinomját $a = 0$ körül.

Megoldás. Szükségünk van a következő deriváltakra:

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\cos x)'' &= -\cos x \\
(\cos x)''' &= \sin x \\
(\cos x)^{(4)} &= \cos x \\
(\cos x)^{(5)} &= -\sin x,
\end{aligned}$$

Az $a = 0$ pont behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\cos(0) &= 1 \\
(\cos x)'(0) &= -\sin(0) = 0 \\
(\cos x)''(0) &= -\cos(0) = -1 \\
(\cos x)'''(0) &= \sin(0) = 0
\end{aligned}$$

$$(\cos x)^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$
$$(\cos x)^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0,$$

Tehát a $\cos x$ függvény $a = 0$ körüli ötödfokú Taylor-polinomja (Maclaurin-polinomja):

$$T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(Figyeljük meg, hogy itt az ötödfokú tag együtthatója zérus!)

10.5. Megjegyzés. A 10.2. példa számolásában megint csak nyilvánvaló, hogy a $\cos x$ függvény n-edrendű deriváltjai az n szerint ismétlődnek. Ennek alapján, tetszőleges n pozitív egész számra igaz, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény $a = 0$ körüli $2n$-edik Taylor polinomja:

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

10.3. Példa. Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény n-edik Taylor-polinomját $a = 0$ körül.

Megoldás. Mivel $(e^x)^{(n)} = e^x$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $(e^x)^{(n)}(0) = e^0 = 1$ minden nemnegatív egész n-re. Ezért az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ körüli n-edik Taylor-polinomja

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

tetszőleges n pozitív egész szám esetén.

Felmerül az a természetes kérdés, hogy az a körüli n-edik Taylor-polinom milyen jól közelíti az $f(x)$ értékét valamely $x \in I$ pontban.

Az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

függvényt az f függvény *a körüli n-edik maradéktagjának* vagy *hibatagjának* nevezzük. Azt mutatja, hogy az f függvény a körüli Taylor-polinomja milyen pontosan közelíti f-et az I intervallumon. A maradéktag sok módon kifejezhető, ezekből a legfontosabb példa a következő.

10.6. Tétel (Taylor-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény $(n+1)$-szer differenciálható az I nyílt intervallumon, és $a \in I$. Ekkor tetszőleges $x \in I$ esetén létezik olyan ξ szám x és a között, hogy*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

10.7. Megjegyzés. Az

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* hívjuk.

A Lagrange-féle maradéktag a gyakorlatban jól használható konkrét közelítések hibájának felső becslésére, ahogy azt az alábbi példákban is látni fogjuk.

10.4. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény $a = 0$ körüli ötödik Taylor-polinomja legfeljebb mekkora hibával közelíti a függvényt az $I = (-1, 1)$ intervallumon.

Megoldás. A 10.1. példa alapján a $\sin x$ függvény $a = 0$ körüli ötödik Taylor-polinomja (Maclaurin-polinomja):

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

A 10.6. tétel (Taylor-tétel) alapján, ha x a $(-1, 1)$ intervallumban van, akkor a hiba (abszolút értéke) legfeljebb

$$|R_5(x)| = \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)\right| \le \sup_{\xi \in (-1,1)} \frac{|\sin^{(6)}(\xi)|}{6!}|1-0|^6 < \frac{1}{6!} \approx 0,00138\ldots.$$

10.5. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény $a = 0$ körüli ötödik Taylor-polinomja legfeljebb mekkora hibával közelíti a függvényt az $I = (-1, 1)$ intervallumon.

Megoldás. A 10.2. példa alapján a $\cos x$ függvény $a = 0$ körüli ötödfokú Taylor-polinomja (Maclaurin-polinomja):

$$T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

A hiba a $(-1,1)$ intervallumon a 10.6. tétel (Taylor-tétel) alapján:

$$|R_5(x)| = \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \le \sup_{\xi\in(-1,1)} \frac{|\cos^{(6)}(\xi)|}{6!}|1-0|^6 < \frac{1}{6!} \approx 0,00138\ldots.$$

Többváltozós Taylor-polinomok

Az egyváltozós esethez hasonlóan, a többváltozós esetben is természetes kérdés, hogy hogyan közelíthetünk egy függvényt adott fokszámú (többváltozós) polinomokkal. Az egyváltozós esetben erre a Taylor-tétel adott egy lehetséges választ. Az alábbiakban ennek kétváltozós formáját ismerjük meg.

Az alábbiakban, még a legegyszerűbb kétváltozós esetben is olyan szigorú feltételekkel mondjuk ki a definíciót, hogy a Taylor-polinom a lehető legegyszerűbb legyen. A gyakorlatban előforduló f függvények nagy része ilyen (elemi függvények), tehát a praktikus alkalmazásokhoz ez az egyszerűsített definíció legtöbbször elegendő. Megjegyezzük, hogy az általános fogalom ennél jóval bonyolultabb.

10.8. Definíció (Kétváltozós Taylor-polinom)**.** Tegyük fel, hogy $n \ge 1$ egész szám, és az $f(x,y)$ függvény összes legfeljebb n-edrendű parciálisderivált függvénye létezik és folytonos az (a,b) pont egy nyílt környezetében. Ekkor az f függvény (a,b) *körüli n-edrendű Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned}T_n(x,y) &= f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\\ &\quad + \frac{1}{2!}(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2)\\ &\quad \vdots\\ &\quad + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial f^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a,b)(x-a)^i(y-b)^{n-i}.\end{aligned} \tag{10.1}$$

A 10.1. formulában a

$$\frac{\partial f^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a,b)$$

szimbólum olyan n-edrendű parciális deriváltat jelöl, amelyben az x szerint i-szer, az y szerint pedig $(n-i)$-szer differenciáltunk. Nyilván ilyenből pont $\binom{n}{i}$ darab van. A parciálisderivált függvénye folytonosságára vonatkozó fenti feltételek mellett ezek a deriválások sorrendjétől függetlenül mind egyenlőek (a,b)-ben (ezt egy Young-tételhez hasonló többváltozós tétel garantálja, amit itt nem tárgyalunk).

10.9. Megjegyzés. Ha $(a,b) = (0,0)$ az origó, akkor szokás Taylor-polinom helyett (az egyváltozós esethez hasonlóan) *Maclaurin-polinomot* is mondani.

Vegyük észre, hogy a fenti kétváltozós Taylor-polinom hasonló módon van definiálva az egyváltozóshoz, annyi eltéréssel, hogy az i-edik derivált helyét átveszi egy olyan tag, amiben az összes i-edrendű parciális derivált szerepel.

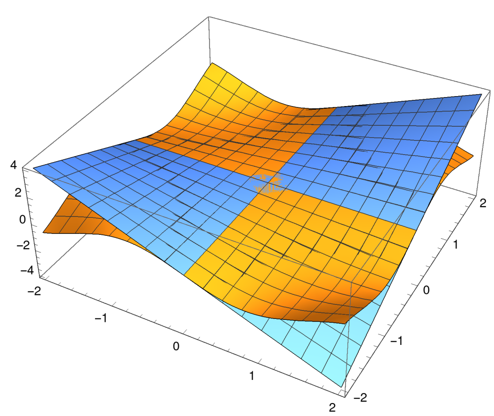
10.6. Példa. Írjuk fel az $f(x,y) = \sin xy$ függvény másodrendű Taylor-polinomját a $(0,0)$ pont körül.

Megoldás. Könnyen látható, hogy f mindkét változója szerint akárhányszor deriválható mindenhol $\mathbb{R}^2$-ben. Szükségünk van a parciális deriváltakra:

$$\begin{aligned}
f'_x &= y\cos xy, & f'_x(0,0) &= 0,\\
f'_y &= x\cos xy, & f'_x(0,0) &= 0,\\
f''_{xx} &= -y^2\sin xy, & f''_{xx}(0,0) &= 0,\\
f''_{xy} &= \cos xy + y(-\sin xy)x, & f''_{xy}(0,0) &= 1,\\
f''_{yy} &= -x^2\sin xy, & f''_{yy}(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Tehát, mivel $f(0,0) = 0$, így

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\cdot 2xy = xy.$$



10.2. ábra. Az $f(x,y) = \sin xy$ (sárga) és a $T_2(x,y) = xy$ Taylor-polinom (kék) függvény gráfja

Most már kimondhatjuk a kétváltozós függvényekre vonatkozó Taylor-tételt (megint csak nagyon erős feltételek mellett):

10.10. Tétel (Kétváltozós Taylor-formula)**.** *Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény minden legfeljebb $(n+1)$-edrendű parciálisderivált függvénye létezik és folytonos az (a,b) pont egy T környezetében. Ekkor tetszőleges $(x,y) \in T$ esetén létezik olyan (ξ_1,ξ_2) pont az (x,y) és (a,b) pontokat összekötő szakaszon, hogy teljesül az*

$$f(x,y) = T_n(a,b) + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(\xi_1,\xi_2)(x-a)^i(y-b)^{n+1-i}$$

összefüggés.

10.11. Megjegyzés. Az

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(\xi_1,\xi_2)(x-a)^i(y-b)^{n+1-i} \tag{10.2}$$

kifejezést *n-edik Lagrange-féle maradéktagnak* szokás nevezni.

Figyeljük meg hogy a fenti kétváltozós Lagrange-féle maradéktag nagyon hasonló az egyváltozóshoz, annyi különbséggel, hogy az $(n+1)$-edik derivált szerepét az összes $(n+1)$-edik parciális deriváltat tartalmazó tag veszi át.

10.7. Példa. Határozzuk meg, hogy az $f(x,y) = \sin xy$ függvény $(0,0)$ körüli másodrendű Taylor-polinomja mekkora hibával közelíti a függvényt az $|x|, |y| \leq \frac{1}{2}$ tartományon.

*Megoldás***.** Szükségünk van a következő harmadrendű parciális deriváltakra:

$$\begin{aligned}
f'''_{xxx} &= -y^2\cos xy,\\
f'''_{xxy} &= -2y\sin xy - y^2x\cos xy,\\
f'''_{xyy} &= -x\sin xy - x\sin xy - x^2y\cos xy,\\
f'''_{yyy} &= -x^3\cos xy.
\end{aligned}$$

Az 10.10. tétel szerint

$$\begin{aligned}
|R_2(x,y)| &= \left|\frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\frac{\partial f^3}{\partial x^i \partial y^{3-i}}(\xi_1,\xi_2)(x-0)^i(y-0)^{3-i}\right|\\
&\leq \frac{1}{6}\left|\left(f'''_{xxx}(\xi_1,\xi_2)x^3 + 3f'''_{xxy}(\xi_1,\xi_2)x^2y + 3f'''_{xyy}(\xi_1,\xi_2)xy^2 + f'''_{yyy}(\xi_1,\xi_2)y^2\right)\right|\\
&\leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\cdot 0.1^2 + 3\frac{9}{8}\cdot 0.1^2 + 3\frac{9}{8}\cdot 0.1^3 + \frac{1}{8}\cdot 0.1^3\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{57}{6} 0.1^3 < 0.01.$$

Ez persze durva felső becslés, lehet ennél finomabban is becsülni (házi feladat!). A fenti gondolatmenet alapján a másodrendű Taylor-polinom 0.01 hibán belül becsli az f függvényt a megadott tartományon.

Önellenőrző kérdések

1. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény n-edik Taylor-polinomját az $a = 0$ körül.
2. Írjuk fel az $f(x) = \ln(1 + x)$ függvény n-edik Taylor-polinomját az $a = 0$ körül.
3. Legfeljebb mekkora hibával közelíti az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény $a = 0$ körüli ötödik Taylor-polinomja a függvény értékét az $|x| < 0.1$ intervallumon?
4. Írjuk fel az $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ függvény másodrendű Taylor-polinomját az origó körül.
5. Legfeljebb mekkora hibával közelíti az $f(x, y) = \sin x \sin y$ függvényt az origó körüli másodrendű Taylor-polinomja az $|x| < 0.1, |y| < 0.1$ négyzeten?

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.