Első téma – a 20. század tudománytörténete

1.1 – matematika, formális rendszerek, mesterséges intelligencia

A 20. század elejére a matematika elméleti megalapozásának kérdése került a középpontba. A kérdés az volt, hogy a matematikai tárgyak (számok, halmazok, geometriai alakzatok stb.) micsodák, és a matematikai műveletek milyen viszonyban állnak a tiszta logikával. Ez a kérdés kapott precíz megfogalmazást 1920-ban az úgynevezett **Hilbert-program** kimunkálásakor.

A Hilbert-program

David Hilbert a 20. század elején a matematikai tudás és gondolkodás egészét csak akkor vélte megalapozhatónak, ha bizonyítható, hogy minden matematikai állítás reprezentálható egy formális rendszerben, amelyben logikai eszközökkel megállapítható, hogy az illető állítás igaz-e. A program legfontosabb elvárásai a matematikai megalapozhatóság felé a következők:

- *Formalizálhatóság*: minden matematikai állítás megfogalmazható és kezelhető egy szintaktikailag pontosan definiált, axiomatikus felépítésű formális nyelvben.
- *Konzisztencia*: bizonyítható legyen, hogy ebben a formális rendszerben nem vezethető le ellentmondás.
- *Teljesség*: bizonyítható legyen, hogy ebben a formális rendszerben minden igaz állítás levezethető a rendszeren belül.
- *Eldönthetőség*: bizonyítható legyen, hogy bármely matematikai állítás esetében a rendszeren belül algoritmikus módon (egyszerű logikai lépések segítségével) kimutatható az állítás igazsága vagy hamissága.

A 19. század végére az aritmetika axiomatikus megfogalmazást kapott. Ez azt jelenti, hogy minden aritmetikai probléma leírható volt egy olyan nyelvben, amely véges számú, igaznak elfogadott tételt (axiómát) és meghatározott számú levezetési szabályt tartalmazott. Ilyen a **Peano-aritmetika** (mindössze 5 axiómával). Ezen kívül Cantor

Szegedi Tudományegyetem

Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.

www.u-szeged.hu

www.szechenyi2020.hu

halmazelmélete eszközöket biztosított arra, hogy bármely tetszőleges tulajdonságot – ideértve a matematikai tulajdonságokat is – kifejezhető legyen a halmazok fogalmaiban. A század végén Gottlob Frege olyan formális logikai rendszert dolgozott ki, amelyben egy egyszerű felépítésű szimbolikus nyelv és néhány levezetési szabály segítségével reprezentálhatók voltak a természetes nyelvi következtetések. Frege és követői abban bíztak, hogy ez a formális rendszer képes lesz magában foglalni a matematika egészét, axiómákkal és bizonyításokkal együtt.

A Russell-paradoxon

Amennyiben úgy tartjuk, hogy egy halmaznak bármilyen elemei lehetnek, illetve bármilyen tulajdonság alkalmas arra, hogy egy halmazt definiáljon, akkor a következő gondolatmenet érvényes lesz.

Egy halmaz elemei lehetnek más halmazok is. Ezért megkülönböztethetjük egymástól a halmazokat abból a szempontból, hogy tartalmazzák-e elemként önmagukat, vagy sem. A legtöbb halmaz persze olyan, hogy elemként nem tartalmazza önmagát: a csavarhúzók halmaza nem csavarhúzó, ezért nincs benne a csavarhúzók halmazában, a háromszögek halmaza nem háromszög stb. Nevezzük az ilyen halmazokat *nem-öntartalmazó* halmazoknak. Ám vannak olyan halmazok is, amelyek elemei között önmaguk is ott vannak. Például: az ebben a tananyagban megemlített halmazok halmazában elemként szerepel az ebben a tananyagban megemlített halmazok halmaza, hiszen éppen most említettük. Legyenek az ilyen halmazok az *öntartalmazó* halmazok. A kérdés mármost az, hogy vajon az összes nem-öntartalmazó halmaz halmaza öntartalmazó, vagy nem-öntartalmazó.

Ha öntartalmazó, akkor elemként ott van a nem-öntartalmazó halmazok között, vagyis nem-öntartalmazó. Ha ellenben nem-öntartalmazó, akkor nem eleme a nem-öntartalmazó halmazoknak, tehát öntartalmazó. Ha öntartalmazó, akkor ne-öntartalmazó, ha nem-öntartalmazó, akkor öntartalmazó.

A 20. század legelején azonban Bertrand Russell megmutatta, hogy a hagyományos halmazelmélet inkonzisztens, mert megkonstruálható benne egy olyan gondolatmenet, amely ellentmondásos konzekvenciákkal jár. Ez a **Russell-paradoxon**. A Russell-paradoxon nem járt paralizáló következményekkel, inkább élénkítette azokat az erőfeszítéseket, amelyek egy konzisztens, axiomatikusan felépíthető halmazelmélet felépítésére irányultak. Ezeknek eredménye lett a **Zermelo-Fraenkel halmazelmélet** (bevett rövidítéssel: ZFC), amely bizonyíthatóan mentes a Russell-paradoxontól, és a matematika nagy része (és a hétköznapokban használt matematika egésze) megfogalmazható benne.

Szegedi Tudományegyetem

Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.

www.u-szeged.hu

www.szechenyi2020.hu

1931-ben Kurt Gödel bizonyította úgynevezett *nemteljességi* tételeit. **Az első nemteljességi tétel** értelmében egy olyan formális rendszerben, amelyben kifejezhető az elemi aritmetika egy bizonyos része, amennyiben a rendszer konzisztens, mindig lesz a rendszer nyelvén megfogalmazható, ám a rendszeren belül nem eldönthető aritmetikai állítás. **A második nemteljességi tétel** szerint az aritmetika egy bizonyos részét kifejezni képes formális rendszer konzisztenciája az adott rendszeren belül nem bizonyítható. Ezek a tételek megmutatták, hogy a Hilbert-program nem teljesíthető.

Alan Turing 1936-ban dolgozta ki az „**univerzális Turing-gép**" fogalmát (ő még nem így nevezte). A Turing-gép nem egy valódi szerkezet, hanem egy „absztrakt automata", azaz egy elméleti modell, amely mindazonáltal elvi előképe a később megépített számítógépeknek. A Turing-gép egy végtelenített, cellákra osztott memóriaszalagból, egy vezérlőegységből, amely a gép programját tartalmazza és egy író-olvasó fejből, amely képes a szalag celláiban megjelenő szimbólumok olvasására és felülírására. A program egyszerű utasításokat tartalmaz arra nézve, hogy mi a teendője az eszköznek adott szimbólum megjelenésekor (előre vagy hátra mozogjon, átírja-e a szimbólumot más szimbólummá). A Turing gép voltaképpen a formális rendszerek szimbólummanipulációs kapacitását modellezi.

Ugyancsak Turing nevéhez köthető az az elgondolás, hogy amennyiben egy formalizálható probléma elemi lépések egymásutánjában megoldható, úgy egy Turing-gép képes azt megoldani. Ez a **Church – Turing tézis** (Alonso Church ennek ekvivalensét terjesztette elő, amelyben nem a Turing-gép elrendezését használta). Ennek következtében az ***algoritmus*** fogalma definiálható a Turing-gép segítségével.

1943-ban Warren McCullogh és Walter Pitts publikáltak egy tanulmányt, amelyben az idegsejtek ingerülettovábbító mechanizmusának lényegét kísérleték meg egy logikai kalkulus révén modellezni. Ez tekinthető a **mesterséges neurális hálózatok** kifejlesztése felé tett első lépésnek. 1958-ban Frank Rosenblatt

Szegedi Tudományegyetem

Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.

www.u-szeged.hu

www.szechenyi2020.hu

megtervezte a *Perceptron*t, vagyis az első működő neurális hálózat-elvű rendszert, amely képes volt egyszerű vizuális mintafelismerésre.

1956-ban Alan Newell, Herbert Simon és Cliff Shaw elkészítette a *Logic Theorist* nevű programot, amely képes volt a „gépi gondolkodásra”, amennyiben bizonyításokat szerkesztett matematikai tételekhez (némelyik bizonyítás elegánsabb volt, mint a már ismert bizonyítások). Ugyanebben az évben egy konferencián, amelyen a Logic Theorist is bemutatkozott a közönség előtt, John McCarthy új fogalmat hozott a forgalomba az új kutatási terület megnevezésére: **mesterséges intelligencia**.

1997-ben a *Deep Blue* nevű sakkprogram legyőzte az akkori világbajnokot, Gari Kaszparovot…

Szegedi Tudományegyetem

Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.

www.u-szeged.hu

www.szechenyi2020.hu