

Az SZTE Kutatóegyetemi Kiválósági Központ tudásbázisának
kiszélesítése és hosszú távú szakmai fenntarthatóságának
megalapozása a kiváló tudományos utánpótlás biztosításával



Eötvös Lóránd Kollégium
Eötvös Reggelek
2012. november 21.
Elágazó folyamatok, elágazó részecskerendszerek
KEVEI PÉTER



TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0012 projekt



Előadás vázlata

1 Elágazó folyamatok

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben
- 2 Elágazó részecskerendszerek

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók
 - Eszközök

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók
 - Eszközök

Definíció

Francis Galton (1873): a családnév fönnmaradásának valószínűsége angol nemesi családoknál

ξ = fiúgyermek száma

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

persze $\sum p_k = 1$.

Definíció

Francis Galton (1873): a családnév fönnmaradásának valószínűsége angol nemesi családoknál
 ξ = fiúgyermek száma

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

persze $\sum p_k = 1$. Legyen

$Z_n = \#\{\text{utódok száma az } n\text{-edik generációban}\}$. Ekkor

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i,$$

ahol ξ_i függetlenek, és ugyanolyan eloszlásúak mint ξ .

Kihalás valószínűsége

$\{ \text{a folyamat kihal} \} \iff \{ \text{az angol nemesünk minden} \\ \text{fiúgyermekének a családfája kihal} \}$
legyen ez a valószínűség q . Ekkor

Kihalás valószínűsége

{ a folyamat kihal } $\iff$ { az angol nemesünk minden fiúgyermekének a családfája kihal }
legyen ez a valószínűség q . Ekkor

$$q = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + p_3 q^3 + \dots$$

Generátorfüggvény

Legyen:

$$f(x) = Ex^\xi = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$$

a hatványsor konvergenciasugara ≥ 1 . f monoton növő,
 $f(0) = p_0, f(1) = 1$.

Generátorfüggvény

Legyen:

$$f(x) = Ex^\xi = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$$

a hatványsor konvergenciasugara ≥ 1 . f monoton növvő,
 $f(0) = p_0$, $f(1) = 1$. Az előzőek szerint a kihalás valószínűsége
megoldása az

$$f(x) = x$$

egyenletnek.

Generátorfüggvény

Legyen:

$$f(x) = Ex^\xi = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$$

a hatványsor konvergenciasugara ≥ 1 . f monoton növvő,
 $f(0) = p_0$, $f(1) = 1$. Az előzőek szerint a kihalás valószínűsége megoldása az

$$f(x) = x$$

egyenletnek. Pontosan akkor van megoldás a $[0, 1)$ -en, ha $f'(1) > 1$.

Generátorfüggvény

Legyen:

$$f(x) = Ex^\xi = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$$

a hatványsor konvergenciasugara ≥ 1 . f monoton növvő,
 $f(0) = p_0$, $f(1) = 1$. Az előzőek szerint a kihalás valószínűsége megoldása az

$$f(x) = x$$

egyenletnek. Pontosan akkor van megoldás a $[0, 1)$ -en, ha $f'(1) > 1$.

$$f'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + np_n + \cdots$$

a fiúgyermek számának várható értéke: $\mathbf{E}\xi = m = f'(1)$.

Kihalási tétel

Tétel

Ha az utódok számának várható értéke ≤ 1 , akkor a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Ha ez a várható érték > 1 , akkor a kihalás valószínűsége az $f(x) = x$ egyenlet megoldása $[0, 1)$ -en.

Kihalási tétel

Tétel

Ha az utódok számának várható értéke ≤ 1 , akkor a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Ha ez a várható érték > 1 , akkor a kihalás valószínűsége az $f(x) = x$ egyenlet megoldása $[0, 1)$ -en.

Sőt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n = k\} = 0$ minden $k \geq 1$ esetén, és $\mathbf{P}\{\lim_n Z_n = 0\} = q = 1 - \mathbf{P}\{\lim_n Z_n = \infty\}$.

Kihalási tétel

Tétel

Ha az utódok számának várható értéke ≤ 1 , akkor a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Ha ez a várható érték > 1 , akkor a kihalás valószínűsége az $f(x) = x$ egyenlet megoldása $[0, 1)$ -en.

Sőt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n = k\} = 0$ minden $k \geq 1$ esetén, és

$\mathbf{P}\{\lim_n Z_n = 0\} = q = 1 - \mathbf{P}\{\lim_n Z_n = \infty\}$.

$m < 1$ szubkritikus, $m = 1$ kritikus, $m > 1$ szuperkritikus eset

Legyen $p_k^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy az n -edik generációban pontosan k utód van, és legyen $f_n(x) = \sum_k p_k^{(n)} x^k = Ex^{Z_n}$ az n -edik generáció generátorfüggvénye.

Legyen $p_k^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy az n -edik generációban pontosan k utód van, és legyen $f_n(x) = \sum_k p_k^{(n)} x^k = Ex^{Z_n}$ az n -edik generáció generátorfüggvénye.

Mivel $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_{n-1}^{(i)}$

$$f_n(x) = Ex^{Z_n} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i E\left(x^{Z_n} | Z_1 = i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i f_{n-1}(x)^i = f(f_{n-1}(x))$$

Legyen $p_k^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy az n -edik generációban pontosan k utód van, és legyen $f_n(x) = \sum_k p_k^{(n)} x^k = Ex^{Z_n}$ az n -edik generáció generátorfüggvénye.

Mivel $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_{n-1}^{(i)}$

$$f_n(x) = Ex^{Z_n} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i E\left(x^{Z_n} | Z_1 = i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i f_{n-1}(x)^i = f(f_{n-1}(x))$$

Tehát $f_n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots f(x) \dots)))}_{n\text{-szer}}$. Innen adódik, hogy

$$f'_n(1) = f'(1)^n = m^n. \text{ (Malthus-szabály)}$$

Kihalás sebessége

$m < 1$:

$$\begin{aligned} m^n = EZ_n &= 1p_1^{(n)} + 2p_2^{(n)} + 3p_3^{(n)} + \dots \\ &\geq p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + p_3^{(n)} + \dots = \mathbf{P}\{Z_n > 0\} \end{aligned}$$

azaz a folyamat exponenciális sebességgel kihal.

Kihalás sebessége

$m < 1$:

$$\begin{aligned} m^n = EZ_n &= 1p_1^{(n)} + 2p_2^{(n)} + 3p_3^{(n)} + \dots \\ &\geq p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + p_3^{(n)} + \dots = \mathbf{P}\{Z_n > 0\} \end{aligned}$$

azaz a folyamat exponenciális sebességgel kihal.

$m = 1$: Ha $\text{Var}(\xi) = \sigma^2 < \infty$, akkor (Kolmogorov, 1938)

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim \frac{2}{n\sigma^2}$$

következmények

$$m = 1, \text{Var}(\xi) = \sigma^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} E[Z_n | Z_n > 0] &= \sum_k \mathbf{P}\{Z_n = k | Z_n > 0\} k = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \sum_k k \mathbf{P}\{Z_n = k\} \\ &= \frac{EZ_n}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \end{aligned}$$

következmények

$$m = 1, \text{Var}(\xi) = \sigma^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} E[Z_n | Z_n > 0] &= \sum_k \mathbf{P}\{Z_n = k | Z_n > 0\} k = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \sum_k k \mathbf{P}\{Z_n = k\} \\ &= \frac{EZ_n}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } E[Z_n | Z_n > 0] \sim \frac{n\sigma^2}{2}.$$

következmények

$$m = 1, \text{Var}(\xi) = \sigma^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} E[Z_n | Z_n > 0] &= \sum_k \mathbf{P}\{Z_n = k | Z_n > 0\} k = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \sum_k k \mathbf{P}\{Z_n = k\} \\ &= \frac{EZ_n}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} = \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } E[Z_n | Z_n > 0] \sim \frac{n\sigma^2}{2}.$$

Tétel (Yaglom, 1947)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{Z_n}{n} > z | Z_n > 0\right\} = e^{-\frac{2z}{\sigma^2}}.$$

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók
 - Eszközök

Élethosszok

Minden egyed véletlentől függő ideig él, és halálakor hagy utódokat. Az élethosszok egymástól, és az utódok számától is függetlenek, és azonos eloszlásúak, közös $\Gamma(x) = \mathbf{P}\{Y \leq x\}$ eloszlással.

Élethosszok

Minden egyed véletlentől függő ideig él, és halálakor hagy utódokat. Az élethosszok egymástól, és az utódok számától is függetlenek, és azonos eloszlásúak, közös $\Gamma(x) = \mathbf{P}\{Y \leq x\}$ eloszlással.

Legyen Z_t az egyedszám t -ben.

A generátorfüggvény:

$$F(t; x) = Ex^{Z_t}.$$

Élethosszok

Minden egyed véletlentől függő ideig él, és halálakor hagy utódokat. Az élethosszok egymástól, és az utódok számától is függetlenek, és azonos eloszlásúak, közös $\Gamma(x) = \mathbf{P}\{Y \leq x\}$ eloszlással.

Legyen Z_t az egyedszám t -ben.

A generátorfüggvény:

$$F(t; x) = Ex^{Z_t}.$$

Felújítási egyenlet:

$$\begin{aligned} F(t; x) &= Ex^{Z_t} \\ &= [1 - \Gamma(t)]x + \int_0^t \Gamma(ds) \left[p_0 + p_1 Ex^{Z_{t-s}} + p_2 (Ex^{Z_{t-s}})^2 + \dots \right] \\ &= [1 - \Gamma(t)]x + \int_0^t f(F(t-s; x)) \Gamma(ds) \end{aligned}$$

Egy kis markovitás

Egy folyamat akkor Markov-folyamat, ha a jövőjére vonatkozóan a jelenének és teljes múltjának ismeretében csak a jelene a fontos.

Egy kis markovitás

Egy folyamat akkor Markov-folyamat, ha a jövőjére vonatkozóan a jelenének és teljes múltjának ismeretében csak a jelene a fontos.

Az X nemnegatív véletlen változó örökifjú, ha minden $x, y > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\{X > x + y | X > y\} = \mathbf{P}\{X > x\}.$$

Egy kis markovitás

Egy folyamat akkor Markov-folyamat, ha a jövőjére vonatkozóan a jelenének és teljes múltjának ismeretében csak a jelene a fontos.

Az X nemnegatív véletlen változó örökifjú, ha minden $x, y > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\{X > x + y | X > y\} = \mathbf{P}\{X > x\}.$$

Egy véletlen változó pontosan akkor örökifjú, ha eloszlása exponenciális, azaz $\mathbf{P}\{X > x\} = e^{-\lambda x}$, valamilyen $\lambda > 0$ számra.

Egy kis markovitás

Egy folyamat akkor Markov-folyamat, ha a jövőjére vonatkozóan a jelenének és teljes múltjának ismeretében csak a jelene a fontos.

Az X nemnegatív véletlen változó örökifjú, ha minden $x, y > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\{X > x + y | X > y\} = \mathbf{P}\{X > x\}.$$

Egy véletlen változó pontosan akkor örökifjú, ha eloszlása exponenciális, azaz $\mathbf{P}\{X > x\} = e^{-\lambda x}$, valamilyen $\lambda > 0$ számra.

Az előbb definiált elágazó folyamat Markov $\iff$ ha az élettartamok exponenciális eloszlásúak, ekkor

$$F(t; F(s; x)) = F(t + s; x)$$

Kihalás

Mint a diszkrét esetben:

Tétel (Kihalási tétel)

Ha az utódok számának várható értéke ≤ 1 , akkor a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Ha ez a várható érték > 1 , akkor a kihalás valószínűsége az $f(x) = x$ egyenlet megoldása $[0, 1)$ -en.

Előadás vázlata

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben
- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók
 - Eszközök

Folytonos Galton–Watson folyamat + részecskék mozgása

Folytonos Galton–Watson folyamat + részecskék mozgása

A folyamat kritikus $\Rightarrow$ kihal az egész

Ezért fölteszük, hogy végtelen kezdeti populációból indulunk (általában Poisson).

Folytonos Galton–Watson folyamat + részecskék mozgása

A folyamat kritikus $\Rightarrow$ kihal az egész

Ezért fölteszük, hogy végtelen kezdeti populációból indulunk (általában Poisson).

Kérdés: Mi lesz a populációval, ha $t \rightarrow \infty$.

Mi ez az egész?

N_t a populáció t időpontban. Véletlen diszkrét pontthalmaz az egyenesen. Igazából ő egy atomos mérték.

Egy mértéket meghatározza az, ha ismerjük elég sok függvény integrálját. (pl. Fourier transzformált, Laplace transzformált)

Előadás vázlat

- 1 Elágazó folyamatok
 - A Galton–Watson folyamat
 - Folytonos időben

- 2 Elágazó részecskerendszerek
 - Definíciók
 - Eszközök

Laplace transzformált

$h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ kompakt tartójú folytonos függvény, és legyen $\mathcal{C}$ ezek halmaza. Az N_t véletlen mérték Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; h \mapsto \mathbf{E} e^{-\int h dN_t}.$$

Ez meghatározza az eloszlást.

Γ az élethossz eloszlásfüggvénye, f az utódeloszlás generátorfüggvénye, W_t a mozgás. Tegyük föl, hogy az $x \in \mathbb{R}$ pontban van egy részecskénk a 0 időpontban. Jelölje τ az a véletlen időpontot amikor az első részecske meghal.

$$E_x e^{-\int h dN_t} = \mathbf{P}\{\tau > t\} E_x e^{-h(W_t)} \\ + \int_0^t \left[\int f(E_y e^{-\int h dN_{t-s}}) P_x(W_s \in dy) \right] \Gamma(ds)$$

Poisson pontfolyamat

N : megszámmlálható sok véletlen pont az egyenesen, azaz egy atomos mérték. N Poisson pontfolyamat $\mathbb{R}$ -en Lebesgue intenzitással, ha

- tetszőleges A halmazra, $N(A)$ (az A halmazba eső pontok száma) Poisson eloszlású $|A|$ paraméterrel, azaz
$$\mathbf{P}\{N(A) = k\} = \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|};$$
- $N(A)$ és $N(B)$ függetlenek valahányszor $A \cap B = \emptyset$

PPF konstrukció

$\mathbb{R} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i + 1]$. Legyenek $\{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ független, 1 paraméterű Poisson eloszlású vv-k. Az $(i, i + 1]$ intervallumba dobjunk le függetlenül, egyenletes eloszlás szerint N_i db pontot. A kapott ponthalmaz egy Poisson pontfolyamat.

PPF konstrukció

$\mathbb{R} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i + 1]$. Legyenek $\{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ független, 1 paraméterű Poisson eloszlású vv-k. Az $(i, i + 1]$ intervallumba dobjunk le függetlenül, egyenletes eloszlás szerint N_i db pontot. A kapott pontthalmaz egy Poisson pontfolyamat. Legyen $A \subset (0, 1]$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{N(A) = k\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{N(A) = k | N_0 = j\} \mathbf{P}\{N_0 = j\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{N(A) = k | N_0 = i + k\} \mathbf{P}\{N_0 = i + k\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} |A|^k (1 - |A|)^i \frac{e^{-1}}{(k+i)!} \\ &= \frac{|A|^k}{k!} e^{-1+1-|A|} = \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|}. \end{aligned}$$

Laplace trfo

Számoljuk ki a Laplace-transzformáltat, ha Poisson pontfolyamatból (Λ) indulunk. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ rögzített (nagy) véges mértékű halmaz, és induljunk ki pontfolyamat A -ra vett megszorításából. Jelölje L_x a Laplace trfo-t amikor egyetlen x pontbeli részecskéből indulunk.

Laplace trfo

Számoljuk ki a Laplace-transzformáltat, ha Poisson pontfolyamatból (Λ) indulunk. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ rögzített (nagy) véges mértékű halmaz, és induljunk ki pontfolyamat A -ra vett megszorításából. Jelölje L_x a Laplace trfo-t amikor egyetlen x pontbeli részecskéből indulunk.

$$\begin{aligned} E_{\Lambda} e^{-\int h dN_t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|} E_{\Lambda} \left[e^{-\int h dN_t} |N(A) = k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|} \left(\frac{1}{|A|} \int_A L_x dx \right)^k \\ &= e^{-\int_A (1-L_x) dx} \end{aligned}$$

Laplace trfo

Számoljuk ki a Laplace-transzformáltat, ha Poisson pontfolyamatból (Λ) indulunk. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ rögzített (nagy) véges mértékű halmaz, és induljunk ki pontfolyamat A -ra vett megszorításából. Jelölje L_x a Laplace trfo-t amikor egyetlen x pontbeli részecskéből indulunk.

$$\begin{aligned} E_{\Lambda} e^{-\int h dN_t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|} E_{\Lambda} \left[e^{-\int h dN_t} |N(A) = k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!} e^{-|A|} \left(\frac{1}{|A|} \int_A L_x dx \right)^k \\ &= e^{-\int_A (1-L_x) dx} \end{aligned}$$

$A \uparrow \mathbb{R}$ határátmenettel látjuk, hogy a formula $\mathbb{R}$ esetén is érvényes.

Tegyük föl, hogy a mozgás eltolásinvariáns, azaz

$$\mathbf{P}_0\{W_t \in A\} = \mathbf{P}_x\{W_t \in A + x\}. \text{ Sőt,}$$

$$\mathbf{P}_x\{W_t \in dy\} = p_t(y - x)dy.$$

Tegyük föl, hogy a mozgás eltolásinvariáns, azaz

$\mathbf{P}_0\{W_t \in A\} = \mathbf{P}_x\{W_t \in A + x\}$. Sőt,

$\mathbf{P}_x\{W_t \in dy\} = p_t(y - x)dy$.

Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} E_x g(W_t) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(y) p_t(y - x) dy dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}} E_x g(W_t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy.$$

Láttuk

$$\begin{aligned} E_x e^{-\int^t h dN_t} &= [1 - \Gamma(t)] E_x e^{-h(W_t)} \\ &\quad + \int_0^t \left[E_x f(E_{W_s} e^{-\int^s h dN_{t-s}}) \right] \Gamma(ds) \end{aligned}$$

Integráljuk mindkét oldalt a Lebesgue mérték szerint.

$$\int_{\mathbb{R}} E_x g(W_t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy.$$

Láttuk

$$\begin{aligned} E_x e^{-\int h dN_t} &= [1 - \Gamma(t)] E_x e^{-h(W_t)} \\ &\quad + \int_0^t \left[E_x f(E_{W_s} e^{-\int h dN_{t-s}}) \right] \Gamma(ds) \end{aligned}$$

Integráljuk mindkét oldalt a Lebesgue mérték szerint.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} E_x e^{-\int h dN_t} dx &= [1 - \Gamma(t)] \int e^{-h(x)} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \left[f(E_x e^{-\int h dN_{t-s}}) \right] \Gamma(ds) dx \end{aligned}$$

Ha az élethossz exponenciális eloszlású, akkor a felújítási egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy

Ha az élethossz exponenciális eloszlású, akkor a felújítási egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} E_x \left(1 - e^{-\int h dN_t} \right) dx = \int \left(1 - e^{-h(x)} \right) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(f(E_x e^{-\int h dN_s}) - E_x e^{-\int h dN_s} \right) ds dx$$

Ha az élethossz exponenciális eloszlású, akkor a felújítási egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} E_x \left(1 - e^{-\int h dN_t} \right) dx = \int \left(1 - e^{-h(x)} \right) dx \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(f(E_x e^{-\int h dN_s}) - E_x e^{-\int h dN_s} \right) ds dx$$

Persze ezt se tudjuk megoldani, de látjuk, hogy a jobb oldal t -ben monoton csökken.

Láttuk, hogy

$$E_{\Lambda} e^{-\int h dN_t} = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} (1 - E_x e^{-\int h dN_t}) dx \right\},$$

és az előzőek szerint a jobb oldalon a kitevő monoton t -ben, tehát

Láttuk, hogy

$$E_{\Lambda} e^{-\int h dN_t} = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} (1 - E_x e^{-\int h dN_t}) dx \right\},$$

és az előzőek szerint a jobb oldalon a kitevő monoton t -ben, tehát

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\Lambda} e^{-\int h dN_t} \text{ létezik}$$

tehát N_t -nek van határeloszlása.

Eredmények

Tegyük föl, hogy az élettartamok exponenciális eloszlásúak, és

Eredmények

Tegyük föl, hogy az élettartamok exponenciális eloszlásúak, és

- minden részecske egy szimmetrikus mozgást végez (α -stabil), $\alpha \in (0, 2]$: mobilitási paraméter, minél kisebb α annál gyorsabb a mozgás

Eredmények

Tegyük föl, hogy az élettartamok exponenciális eloszlásúak, és

- minden részecske egy szimmetrikus mozgást végez (α -stabil), $\alpha \in (0, 2]$: mobilitási paraméter, minél kisebb α annál gyorsabb a mozgás
- az utódeloszlás generátorfüggvénye $f(x) = x + c(1 - x)^{1+\beta}$, $\beta \in (0, 1]$: szaporasági paraméter.

Tétel (Gorostiza & Wakolbinger, 1991)

Ha $d \leq \alpha/\beta$ akkor a folyamat kihal, míg ha $d > \alpha/\beta$ akkor konvergál egy nemtriviális eloszláshoz.

Guanajuato



Guanajuato



CIMAT



Irodalom I



Athreya K.B. and Ney P.E.
Branching Processes.