A variációs módszerek alkalmazásai

Tartalomjegyzék

Jelölések ... 3
I. Variációs elvek ... 6
I.1. Variációs elvek alkalmazásai, gépi látás ... 6
I.2. Adat- és simasági tagok ... 8
I.2.1. Horn-Schunck optikai áramlás nem linearizált adattaggal ... 8
I.2.2. Kass-Witkin-Terzopoulos paraméteres aktív kontúr ... 8
I.2.3. Mumford-Shah szegmentáció ... 9
I.3. A Level Set formalizmus ... 9
I.4. Variációszámítás: egyszerű bevezető ... 11
I.4.1. Kétváltozós függvények ... 13
I.4.2. További alapesetek ... 14
I.4.3. Alkalmazási példa: a Horn-Schunck egyenletek ... 15
I.4.4. Alkalmazási példa: a linearizált hullámegyenlet ... 17
II. Alkalmazás a differenciálgeometriában ... 19
II.1. Bevezetés ... 20
II.2. Térgörbék ... 20
II.2.1. Térgörbék leírása, ívhossz ... 20
II.2.2. Az egyenes ... 21
II.2.3. Térgörbék görbülete ... 22
II.3. Felületek ... 22
II.3.1. Felületek leírása, ívhossz, metrikus tenzor ... 22
II.3.2. Kovariáns és kontravariáns mennyiségek ... 23
II.3.3. Transzformációs szabályok és invariáns mennyiségek ... 25
II.3.4. A Christoffel szimbólumok ... 26
II.3.5. Felületi görbék görbülete ... 27
II.3.6. Főgörbületek, összeg- és szorzatgörbület ... 29
II.3.7. Theorema egregium és a görbületi tenzor ... 30
II.3.8. Az összeggörbület és a normál-egységvektor divergencia ... 31
II.3.9. Többdimenziós terek ... 32
II.3.10. Példa: a gömbfelület Gauss görbülete ... 35
II.3.11. Példa: görbületek számítása Monge-folton ... 38
III. Alkalmazás a fizikában ... 40
III.1. Bevezetés ... 41
III.2. Klasszikus fizika: a legkisebb hatás elve ... 41
III.2.1. Szabad részecske mozgásegyenlete ... 42
III.2.2. Az energia ... 43
III.2.3. A klasszikus fizika kritikája ... 43
III.3. Relativisztikus fizika ... 44
III.3.1. A relativisztikus szabad részecske klasszikus határesete ... 45
III.3.2. A szabad részecske energiája ... 46
III.3.3. Részecske görbült térben (klasszikus határeset) ... 47

III.4. Tezoranalzis ... 48
III.4.1. Kovariáns derivált ... 50
III.4.2. A görbületi tenzor ... 52
III.4.3. Hasznos formulák ... 53
III.5. A gravitációs egyenlet ... 54
III.5.1. A gravitációs tér egyenlete ... 55
III.5.2. Az energia-impulzus tenzor ... 66
III.5.3. Az energia-inpulzus tenzor eredete ... 67
IV. Alkalmazások a gépi látásban ... 68
IV.1. Aktív kontúrok ... 68
IV.1.1. Paraméteres kontúrok ... 68
IV.1.2. Gradient Vector Flow ... 69
IV.1.3. Geometriai kontúrok és felületek ... 70
IV.1.4. A geodéziai aktív kontúr ... 71
IV.1.5. Régió alapú aktív kontúr ... 73
IV.1.6. Aktív felületek ... 75
IV.1.7. Az aktív felületek egy alkalmazása: 3D rekonstrukció ... 79
IV.1.8. A lokális régió alapú aktív kontúr ... 83
IV.1.9. A lokális régió alapú aktív kontúr egy alkalmazása ... 84
IV.2. Optikai áramlás ... 85
IV.2.1. Az optikai áramlás variációs módszereinek fejlődése ... 86
IV.2.2. A keresztkorrelációs optikai áranlás ... 87
IV.2.3. A keresztkorrelációs funkcionál Euler-Lagrange egyenlete ... 89
IV.2.4. Numerikus formula a keresztkorrelációs optikai áramláshoz ... 91
IV.3. Képrekonstrukció, képkorrekció ... 93
IV.3.1. A teljes variáció alapú képjavítás ... 94
IV.3.2. A duális változó módszere ... 96
IV.3.3. Képtartalom–rekonstrukció (inpainting) ... 97
V. Mellékletek ... 99
V.1. Projektív és affin homográfia ... 99
V.2. Implementációs kérdések ... 102
V.2.1. A vetítési függvények lyukkamera modell esetén ... 102
V.2.2. Az inplementáció részletei: az evolúciós egyenlet mennyiségei ... 102
Bibliográfia ... 106

Jelölések

Az alábbiakban a tananyagban leggyakrabban használt jelöléseket foglaljuk össze. Az általunk a vektor- és tenzoranalízis körébe tartozó összefüggésekben használt rendszer a kontínuumok mechanikájában elterjedt jelölésrendszer [1], és az egységesség miatt általában ezt használjuk, hacsak külön nem jelöljük az ettől való eltérést.

Ω	Képtér, a képfüggvény értelmezési tartománya, folytonos kétdimenziós ponthalmaz: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
$\delta\Omega$	Az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány határpontjainak halmaza (a határpontok tetszőlegesen kicsiny nyílt környezete tartalmaz Ω -beli és azon kívüli pontokat is)
$d\Omega$	A képtér felületeleme kettős integrálként. A kettős integrált a felületeleme definiálja, ezért általában nem használunk két integráljelet: $\int_\Omega L d\Omega \equiv \iint_\Omega L d\Omega$
$dxdy$	A képtér felületeleme kétszeres integrálként
W	Lokális téglalap alakú integrálási tartomány, $W \subset \Omega$
dW	A lokális integrálás felületeleme kettős integrálként
$d\xi d\eta$	A lokális integrálás felületeleme kétszeres integrálként
I	Képfüggvény, intenzitásfüggvény. A képtér pontjain értelmezett: $I = I\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right) \in \Omega$
I_0 , I_1	A számokkal kiírt indexek egy képsorozat egymást követő elemeire utalnak
$I_z,\ f_W$	A parciális deriváltak egyik jelölése. Az optikai áramlás egyenleteiben pl. $z \in \left(x,y,t\right)$, a kvadratikus transzformáció egyenleteiben pl. $W \in \left(X,Y,Z\right)$. Megjegyezzük, hogy a rövidség kedvéért az indexhalmaz elemeit nem zárójelezzük (nem használjuk a $z \in \left(\left\{x\right\},\left\{y\right\},\left\{t\right\}\right)$ jelölést)
$f',\ f'',\ f^{(n)}$	Ritkán, egyváltozós, magasabb rendű deriváltakat tartalmazó kifejezésekben a vesszős derivált jelölés is előfordul $f' = \dfrac{df}{dx}, \ldots f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x}, \cdots$	A közönséges és parciális deriválás (operátorának) másik használatos jelölése
∇I	A kétdimenziós képfüggvény-gradiens jelölése, $\nabla I = \left[I_x \quad I_y \right]^T$
$\mathbf{u}$	Az elmozdulás mező $\mathbf{u} = \left[u \quad v \right]^T$, komponensei az optikai áramlás egyenleteiben a képkoordináták (ismeretlen) függvényei: $u = u\left(x, y\right)$, $v = v\left(x, y\right)$
α, β, γ	A súlyfaktorokat általában a görög ABC elejéről választott betűkkel jelöljük
$\not\circ$	A direkt (diadikus, tenzor) szorzat jelölésére nem használjuk a „lámpaszorzás" jelét, ha vektorok között nincs műveleti jel, akkor a műveletet direkt szorzásnak tekintjük
$\cdot$	A skaláris szorzat jelölésére a pontot használjuk, ortonormált koordinátarendszerben a koordinátaszorzatok összege, pl. $\nabla I \cdot \mathbf{u} = I_x u + I_y v$. Két diád skaláris szorzata: $\mathbf{tu} \cdot \mathbf{vw} = \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{tv}$, mivel a másodrendű tenzorok bázisát diádok alkotják, két másodrendű tenzor skaláris szorzata mátrix reprezentációban a szokásos mátrixszorzat
$\times$	A vektoriális szorzat jelölésére a keresztet használjuk
G	Folytonos síkgörbe $G \subset \mathbb{R}^2$ nem-paraméteres jelölés
$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$	A standard bázis $\mathbb{R}^3$-ban
$\mathbf{r}$	Az egyparaméteres síkgörbe jelölése $\mathbf{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j}$, koordinátákkal: $\left[x\left(t\right), y\left(t\right)\right]^T$. Az általános paraméterezés t-vel, az ívhossz szerinti s-sel jelölt. Az általános paraméter szerinti deriválást $\dot{\mathbf{r}}$-tal vagy $\mathbf{r}_t$-vel jelöljük
$\mathbf{e}$	Az egyparaméteres síkgörbe érintő egységvektora: $\mathbf{e} = e_{\tilde{x}}\mathbf{i} + e_{\tilde{y}}\mathbf{j}$, koordinátákkal: $\left[e_{\tilde{x}}, e_{\tilde{y}}\right]^T$. Egy vektor komponenseit indexben jelöljük, de a parciális deriváltaktól való megkülönböztetés céljából felülhullámozzuk
$\mathbf{S}$	A felület standard bázisban: $\mathbf{S}\left(u, v\right) = X\left(u, v\right)\mathbf{i} + Y\left(u, v\right)\mathbf{j} + Z\left(u, v\right)\mathbf{k}$

$\mathbf{S}_u$, $\mathbf{S}_v$ — Lokális koordinátabázis (természetes bázis, kovariáns bázis) a felületen, koordinátái a standard bázisban: $\mathbf{S}_u = X_u\mathbf{i} + Y_u\mathbf{j} + Z_u\mathbf{k}$, $\mathbf{S}_v = X_v\mathbf{i} + Y_v\mathbf{j} + Z_v\mathbf{k}$

$\mathbf{S}^u$, $\mathbf{S}^v$ — A lokális bázis duális bázisa (kontravariáns bázis, inverz bázis), amelyre igazak a következő azonosságok: $\mathbf{S}^u \cdot \mathbf{S}_u = \mathbf{S}^v \cdot \mathbf{S}_v = 1$, és $\mathbf{S}^u \cdot \mathbf{S}_v = \mathbf{S}^v \cdot \mathbf{S}_u = 0$

$\mathbf{w}\nabla$ — A tetszőleges $\mathbf{w}$ mennyiség (skalár, vektor, tenzor) jobb oldali gradiense $\mathbf{w}\nabla = \mathbf{w}_u\mathbf{S}^u + \mathbf{w}_v\mathbf{S}^v$. A bal oldali gradiens $\nabla\mathbf{w} = \mathbf{S}^u\mathbf{w}_u + \mathbf{S}^v\mathbf{w}_v$. A kétféle mennyiség skalárok esetén megegyezik, vektorok esetén pedig egymás transzponáltjai

$d\mathbf{u}$ — A differenciális elmozdítás vektora: $d\mathbf{u} = du\mathbf{S}_u + dv\mathbf{S}_v$. Kontrakciója egy skalár gradiensével: $\nabla f \cdot d\mathbf{u} = \left(f_u\mathbf{S}^u + f_v\mathbf{S}^v\right) \cdot \left(du\mathbf{S}_u + dv\mathbf{S}_v\right) = f_u du + f_v dv$ a $d\mathbf{u}$ irányba eső iránymenti (vagy abszolút) derivált

$\nabla\nabla f$ — A parciálisok kommutációja (szimmetria) miatt standard bázisban egy skalár második gradiensére mindig ugyanaz az eredmény adódik: $\nabla(\nabla f) = \nabla(f\nabla) = (\nabla f)\nabla = (f\nabla)\nabla$ ezt jelöljük a $\nabla\nabla f$ szimbólummal

$\mathbf{N} = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$ — A felület normálvektora, hossza $|\mathbf{N}|$, a paraméterezésnek is függvénye, invariáns mennyiség csak a normál egységvektor lehet

$\mathbf{n}$ — A felület normál egységvektora: $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$

$\nabla \cdot \mathbf{n}$ — A normál-egységvektor mező divergenciája, mivel skalár mennyiség: $div(\mathbf{n}) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$, megjegyzendő, hogy pontbeli értéke a pontbeli átlaggörbület mínusz kétszerese

I. Variációs elvek

A variációs elv a legkülönfélébb tudományágak matematikai megalapozásának alapvető eszköze. Alkalmazása olyan problémákra szokásos, ahol valamilyen mennyiség optimális megválasztásával egy egész tartományra vonatkozó érték – energiaintegrál, hibaintegrál, költségintegrál – minimumát keressük[1]. A keresett mennyiség az integrálási tartományon értelmezett függvény, az energiaintegrál integrandusa – az ú.n. Lagrange függvény – pedig az ismeretlen függvényből, és annak deriváltjaiból alkotott összetett függvény. Az integrál Lagrange függvényhez – és azon keresztül a keresett függvényekhez – egy valós értéket rendel. A függvényekhez valós értéket rendelő problémákkal általában a funkcionálanalízis foglalkozik. Ebben az értelemben a variációszámítás a funkcionálanalízis részterülete. A minimumkeresés eszköze a funkcionálhoz rendelt Euler-Lagrange differenciálegyenletek származtatása. Az egyenletek típusa a probléma dimenziójától, az ismeretlen függvények számától és az ismeretlen függvények deriváltjainak rendjétől függ: a közönséges másodrendű differenciálegyenlettől a magasabb fokú parciális differenciálegyenlet rendszerekig tart [2].

A Lagrange függvények valamilyen jól meghatározott fogalmat fejeznek ki. Ez lehet egy rendszer összes „energiája”, amit minimalizálni kell, de kifejezheti valaminek a megmaradását is, ekkor a megmaradó mennyiség változását minimalizáljuk.

I.1. Variációs elvek alkalmazásai, gépi látás

A variációs módszerek első jelentősebb „felhasználója” fizika volt. Tananyagunk nem kerülheti meg tehát a fizikai alkalmazásokat a III. fejezet a klasszikus és relativisztikus mechanika egyes eredményeinek variációs elvű megközelítésével foglalkozik. Mind a fizika, mind a gépi látás (IV. fejezet) geometriai alapismeretekre épít, így elkerülhetetlenné vált egy geometriai alapozó (II. fejezet) beiktatása, amely a klasszikus differenciálgeometria és a Riemann geometria egyes eredményeit foglalja össze, részben variációszámítási módszerek alkalmazásával.

Napjainkban a variációs elvek egyik nagy alkalmazója a gépi látás, ahol a variációszámításra építő módszereket a legsikeresebbek között tartanak számon. Jelen tananyag legjelentősebb része is a gépi látásból vett példákon nyugszik.

[1] Ritkábban előfordul maximum, illetve stacionárius (inflexiós) megoldás keresése is.

A gépi látás variációs módszerei: ilyenek az *aktív kontúr, aktív felület* (IV.1 fejezet), ezeket széles körben használják szegmentációra: közvetlen képi információk, de 3D objektumok is, rekonstrukcióra: 3D objektum és színtér rekonstrukcióra.

Hasonlóan eredményes területek a *képkorrekciós, képtartalom-rekonstrukciós* módszerek (IV.3 fejezet). A képkorrekciónál (restoration) alapprobléma a zajos, elmosódott képek javítása. A klasszikus szűrők és iteratív, nemlineáris hővezetési differenciálegyenleteken alapuló szűrési technikák [3] mellett itt is megjelent a variációs probléma megközelítés, a „total variation based” képkorrekció: Rudin, Osher és Fatemi [4]. Szemben más technikákkal, a korszerű, variációs elvekre alapozott képkorrekciós módszerek alkalmasak a finom textúra részletek modellezésére [5]. A képtartalom rekonstrukció (inpainting, interpoláció) feladata a hiányzó képrészletek helyettesítése a hiány környezetéből származó információ felhasználásával úgy, hogy a fontos képjellemzők pl. élek, megmaradjanak az interpolált területeken. A számos lehetséges variációs megközelítés [6] közül kiemelhető az aktív kontúrok és a „total variation based” technikák ötvözése [7].

Jelen tananyagban nem térünk ki rá, de megjegyezzük hogy fontos alkalmazási terület még a *képregisztráció* pl. a különböző szenzorok általi objektumreprezentációk illesztése (multispectral, multimodal registration) amely alapprobléma a különböző hullámhossz-tartományban készült légi felvételek és a különböző elven működő orvosi diagnosztikai eszközök alkotta képek esetén. A terület iránt érdeklődők számára ajánlottak a következők: [8,9].

A mozgáselemzés egyik alapvető területe, az *optikai áramlás* számítása. Alapvetően videósorozatok szomszédos képei közötti elmozdulás mező számítására alkalmazzák, de előfordul 3D színtér áramlás számítása is [10], és felhasználása a regisztrációban. Kialakulásakor a megmaradó mennyiségnek a kézenfekvő képintenzitást választották [23]. A későbbiekben a robusztusabb, pl. intenzitásváltozásra kevésbé érzékeny mennyiségek jelentek meg Lagrange függvényként. Bővebben a IV.2. fejezetben lesz szó róluk.

A gépi látás majdnem mindegyik variációs módszerére (de pl. a gravitációs egyenletekre is) jellemző, hogy a minimalizálási problémát leíró adattag mellett simasági tag (tagok) is megjelenik (megjelennek). Ennek oka többféle lehet. Tipikus ok lehet a képkészítéskor fellépő zajokkal szembeni védekezés, máskor a probléma alulhatározottsága – mint optikai áramlásnál az ú.n. apertúra probléma, vagy a 3D rekonstrukciónál a takart részletek kezelése – (is) megköveteli a simasági taggal megvalósított regularizációt.

I.2. Adat- és simasági tagok

Az alábbi néhány példa konkrét gépi látási problémák variációs megközelítéséből származik. Szemléltetik az adat és simasági tagok jelentését és használatuk módját. A funkcionálok jelölésére a gyakran használt E „energia” jelölést használjuk. Paraméterei az ismeretlen függvények.

I.2.1. Horn-Schunck optikai áramlás nem linearizált adattaggal

A variációs optikai áramlási funkcionál egyik legegyszerűbb alakja a képsorozat egymást követő két képének (0 és 1 indexekkel jelöltek) intenzitásfüggvényéből: I_0, I_1 és az elmozdulás mező komponenseinek parciális deriváltjaiból épül föl. A funkcionál ismeretlen mennyiségei az elmozdulás mező komponensei: $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$, amely a képsorozat 0 indexű képérnek pixeleire alkalmazva az 1 indexű képet (annak közelítését) állítja elő:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \int_\Omega (I_1 - I_0)^2 d\Omega + \alpha \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) d\Omega \\ I_1(x,y) &= I_0(x+u, y+v, t+1) \end{aligned} \tag{I.1}$$

Az első tag az adattag: $D = (I_1 - I_0)^2$, jelentése nyilvánvaló: akkor veszi fel minimumát, amikor a számított elmozdulás mező komponenseit az első képre alkalmazva a második kép legjobb közelítését kapjuk. A második tag a simasági tag: $S = \alpha\left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right)$, amely itt az elmozdulások megváltozására ró ki minimalizálási feltételt olyan helyeken, ahol az nem egyértelmű, csökkentve az elmozdulás mező divergenciáját. Az α súlyfaktor teremt egyensúlyt a kétféle követelménynek megfelelő hatás között.

I.2.2. Kass-Witkin-Terzopoulos paraméteres aktív kontúr

A paraméteres aktív kontúr egy egyszerű, élek detektálására alkalmas változata. Az ismeretlen függvény az egyparaméteres $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in [0,1]$ síkgörbe, amely mentén az I intenzitás-függvény változása: ∇I maximális, azaz a görbe két oldalán mért intenzitások különbsége maximális. Tartalmazza még a görbe paramétere szerinti első- és másodrendű deriváltjait is.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= \int_0^1 -\left|\nabla I(\mathbf{r})\right|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha(t)\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \beta(t)\left|\ddot{\mathbf{r}}\right|^2 dt \\ \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \end{aligned} \tag{I.2}$$

Az első tag az adattag, a funkcionál az intenzitáskülönbség-maximum pontokon áthaladó görbén veszi fel minimumát, ezért negatív előjelű. A görbe simaságáról a második „feszességi” és harmadik „merevségi” tag gondoskodik. A harmadik tag nélkül a görbe sarkok képzésére hajlamos. Ebben a felírásban a tagok hatásának kiegyensúlyozásáért felelő súlyok: $\alpha = \alpha(t),\ \beta=\beta(t)$ a görbe mentén változhatnak.

I.2.3. Mumford-Shah szegmentáció

A Mumford-Shah féle szegmentáció egyszerre állítja elő egy kép intenzitásfüggvényének tartományonkénti simított, zajoktól mentesített közelítését, és a tartományok határait. Ennek megfelelően az ismeretlen függvények a képfüggvény részletenkénti simított közelítése f, és a részleteket elhatároló szegmentáló síkgörbe G. A funkcionál tartalmazza még az intenzitásfüggvény gradiensét is:

$$E(f,G) = \alpha\iint_{\Omega}(f-I)^2 d\Omega + \beta\iint_{\Omega\setminus G}|\nabla f|^2 d\Omega + \gamma\oint_G ds \qquad \text{(I.3)}$$

Az egyes tagok közötti súlyfaktorok az *α, β, γ* meghatározzák, hogy melyik tag hatása mennyiben érvényesüljön a végeredményben. Az első tagot adattagként értelmezzük, amely akkor veszi fel minimumát, ha az előre rögzített függvénykör (gyakran tartományonként konstans) legmegfelelőbb függvényével közelítettünk. A második tag a közelítő függvényre kirótt simasági feltétel, azokat a megoldásokat részesíti előnyben, ahol a közelítő függvény tartományokon belüli teljes variációja (total variation) minimális, a harmadik a részleteket elhatároló görbére kirótt simasági feltétel: a lehetséges megoldások közül a legrövidebb hosszúságút preferálja.

I.3. A Level Set formalizmus

A kutatott területeken az optikai áramlás kivételével, numerikus módszerként a Level Set módszer [11] használt. Az alábbi összefoglaló felületekre vonatkozik, de az egyszerűbb síkgörbékre is azonos kifejezések adódnak.

Implicit megadású felületnek nevezzük az $\mathbf{S}$ függvényt, ha egy $U:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ függvény konstans szintfelületeként adott: $U(\mathbf{S}) = \acute{a}lland\acute{o}$ (az állandó értékét szokás nullának választani.). Az U neve Level Set függvény. Ekkor a felület normálvektora az U függvény adott pontbeli gradiense: $\mathbf{N} = \nabla U$, a felület normál-egységvektora pedig: $\mathbf{n} = \frac{\nabla U}{|\nabla U|}$. Ha egy felület-sorozatot az idő függvényeként képzelünk el, azaz $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\tau)$, τ a „mesterséges idő”, akkor a zéró átmenet felületet reprezentáló pontok alkotta „front” egyenlete:

$$U(\mathbf{S}(\tau), \tau) = 0 \tag{I.4}$$

(I.4) minden τ-ra fennáll. A front pontjaihoz rögzített (Lagrange) koordinátákra tehát mozgás közben írható:

$$\frac{dU}{d\tau} = 0 \tag{I.5}$$

Áttérve Euler koordinátákra az (I.4)-en közvetett deriválást hajtunk végre:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}_\tau = 0\,, \; \frac{\partial U}{\partial \mathbf{S}} = \nabla U \tag{I.6}$$

A front evolúciójának alakításában a front pontjainak az érintősíkban való elmozdulása nem vesz részt. Elvégezve az (I.6) vektorainak felbontását:

$$\nabla U \cdot \mathbf{S}_\tau = (\nabla U \cdot \mathbf{n})(\mathbf{S}_\tau \cdot \mathbf{n}) + \nabla U\big|_T \cdot \mathbf{S}_\tau\big|_T \tag{I.7}$$

A tangenciális komponenst elhagyva (I.6) és (I.7) egyenletekből kapjuk a front pontjainak normálvektor irányú elmozdulását leíró ú.n. normáláramlás (normal flow) egyenleteket, amelyek következők:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\mathbf{S}_\tau \cdot \mathbf{n}\left|\nabla U\right| = \beta\left|\nabla U\right| \\ \mathbf{S} \Leftrightarrow U = 0 \end{gathered} \tag{I.8}$$

Itt $\beta = -\mathbf{S}_\tau \cdot \mathbf{n}$ a normálirányú sebességkomponens, és felhasználtuk, hogy a ∇U az implicit felület normálvektorával párhuzamos, tehát $\mathbf{n} \cdot \nabla U = \left|\nabla U\right|$. Az (I.8) egyenletet elsőrendű Hamilton-Jacobi egyenletnek nevezik.

Az átlaggörbület kétszerese[2] κ, a Level Set függvénnyel kifejezhető: $\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla U}{\left|\nabla U\right|}\right)$, azaz a normál-egységvektor divergencia negatív előjellel.

Ha az U Level Set függvény speciálisan előjeles távolságfüggvény, amelyet u-val jelölünk, akkor $\left|\nabla u\right| \equiv 1 \Rightarrow \mathbf{N} \equiv \mathbf{n}$, és az átlaggörbület: $\kappa \equiv -\Delta u$.

[2] Síkgörbénél a görbület.

I.4. Variációszámítás: egyszerű bevezető

Funkcionálnak nevezzük valamely függvényosztály leképezését a valós számokra, pl. az $\mathcal{F} : f \to \mathbb{R},\ f \in C_{1[a,b]}$ funkcionál az $x \in [a,b]$ (zárt) intervallumon folytonosan deriválható függvényeket képezi le a valós számokra. A leképezést gyakran határozott integrállal[3] definiáljuk. A variációszámításban a függvényosztály azon elemét keressük, amelyre a funkcionál extrémális értéket: minimum, maximum vagy stacionárius vesz fel (általában minimumot keresünk). A feladat csak akkor válik teljesen meghatározottá, ha az f-re kirójuk a peremfeltételeket: $f(a) = A,\ f(b) = B$, $A,\ B$ konstansok.

Az extrémum keresésének módszere: ha a keresett, pl. a minimumot szolgáltató függvény f_0, akkor annak kicsiny megváltoztatása (perturbációja, variációja) δf, amely az integrálási határpontokon nulla, és első rendben nem változtatja meg a funkcionál értékét, azaz $\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(f_0 + \delta f) - \mathcal{F}(f_0) = 0$ (a későbbiekben az egyszerűség kedvéért a 0 indexet elhagyjuk). A legegyszerűbb esetet a következő alakban definiált funkcionálként szokás megadni:

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b L(f, f_x)\ dx \tag{I.9}$$

(I.9)-ben az L neve Lagrange függvény. Általános esetben közvetlenül is függhet az integrálási változótól: $L = L(f, f_x, x)$, de a gyakorlatban ez a ritkább, a levezetett eredményeket nem befolyásolja, ezért az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki. Az (I.9) variációja:

$$\delta\mathcal{F}(f) = \int_a^b L(f + \delta f, f_x + \delta f_x) - L(f, f_x)\ dx \tag{I.10}$$

(I.10)-ben kihasználtuk az integrálás műveletének és a deriválás operátorának linearitását. Egy függvény tetszőleges variációját így is megadhatjuk: $\delta f(x) = \varepsilon h(x),\ \varepsilon \ll 1$, és az ε nem függ az x-től, a $h(x)$ tetszőleges, de a $h(a) = h(b) = 0$ feltételnek teljesülnie kell a függvényosztályra kirótt $f(a) = A,\ f(b) = B$ peremfeltételek miatt. A felírás azért előnyös, mert a variációszámítás szélsőérték problémáját közönséges szélsőérték kereséssé redukálja.

[3] Függvények integrálja alatt itt a Riemann integrált értjük.

Taylor sorba fejtve az $L\left(f+\delta f, f_x+\delta f_x\right)$ Lagrange függvényt, és csak az elsőrendű tagokat megtartva:

$$L\left(f+\varepsilon h, f_x+\varepsilon h_x\right) \approx L\left(f, f_x\right)+h \left.\frac{\partial L}{\partial f}\right|_{\varepsilon=0}+h_x \left.\frac{\partial L}{\partial f_x}\right|_{\varepsilon=0} \tag{I.11}$$

Behelyettesítve (I.10)-be:

$$\delta \mathcal{F}\left(f\right)=\int_a^b h \left.\frac{\partial L}{\partial f}\right|_{\varepsilon=0}+h_x \left.\frac{\partial L}{\partial f_x}\right|_{\varepsilon=0} dx \tag{I.12}$$

Az (I.12) második tagján parciális integrálási lépést végrehajtva a szorzat deriválási szabálya: $\frac{d}{dx}\left(h \frac{\partial L}{\partial f_x}\right)=h_x \frac{\partial L}{\partial f_x}+h \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)$ alapján kapjuk (az $\varepsilon=0$ feltüntetése nélkül):

$$\delta \mathcal{F}\left(f\right)=\int_a^b h\left(\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f_x}\right) dx+\int_a^b \frac{d}{dx}\left(h \frac{\partial L}{\partial f_x}\right) dx \tag{I.13}$$

A (III.13)-ban a második tag az integrálszámításnak a primitív függvény és deriváltja közötti kapcsolatról szóló alaptétele szerint:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(h \frac{\partial L}{\partial f_x}\right) dx=\left[h \frac{\partial L}{\partial f_x}\right]_a^b=h\left(b\right) \frac{\partial L}{\partial f_x}\left(b\right)-h\left(a\right) \frac{\partial L}{\partial f_x}\left(a\right)=0 \tag{I.14}$$

Itt kihasználjuk, hogy $h\left(a\right)=h\left(b\right)=0$. Az (I.13)-ból marad:

$$\delta \mathcal{F}\left(f\right)=\int_a^b h\left(\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f_x}\right) dx \tag{I.15}$$

Extrémiumnál a $\delta \mathcal{F}=0$. A variációszámítás alaplemmája szerint viszont tetszőleges $h\left(x\right)$ függvényre az (I.15) csak akkor lehet nulla, ha az integrandus minden pontban nulla[4], azaz:

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f_x}=0 \tag{I.16}$$

Az (I.16) egyenletet Euler-Lagrange egyenletnek nevezzük. Nem elfajuló esetekben közönséges másodrendű differenciálegyenlet, amely megoldása szolgáltatja a funkcionál extrémumát. Az egyenlet kifejezi, a keresett függvény és deriváltja közötti kapcsolatot (azaz azt, hogy nem függetlenek egymástól). Az (I.16) levezetéséhez felvettük az integrálási

[4] Mert a tetszőlegesen megválasztható *h* megegyezhet a zárójeles kifejezéssel, és akkor egy négyzetfüggvény áll az integráljel alatt, amely integrálja csak akkor nulla, ha a teljes [a,b] intervallumon azonosan nulla. Attól zéró mértékű ponthalmaz felett elvileg eltérhetne, de ez a deriválhatóságának ellentmondana.

határfeltételeket: $f(a)=A,\ f(b)=B$. Szigorúan véve tehát peremérték feladatot kaptunk. Bizonyítható azonban, hogy formailag egyező egyenletek adódnak változó határok (kezdeti érték feladatok) megengedésével. További fontos észrevétel, hogy az (I.13) második tagja nem ad járulékot a funkcionál variációjához. Általában is igaz, hogy a Lagrange függvényhez mindig hozzáadható egy tetszőleges függvény teljes differenciálja anélkül, hogy az a végeredményt, azaz az (I.16) Euler-Lagrage egyenleteket befolyásolná.

Arról, hogy az első variációval kapott egyenletek minimalizáló vagy maximalizáló (stacionárius) függvény szolgáltatnak, a második variáció vizsgálatával lehet dönteni. Bizonyos esetekben egyszerűbb megfontolással is élhetünk, pl. ha a Lagrange függvény egy kvadratikus alak (gyakori az optikai áramlás esetében, ahol legalább a simasági tag kvadratikus, vagy abszolút érték), akkor biztosan minimalizáló függvényt kapunk.

I.4.1. Kétváltozós függvények

Legyen $\mathcal{F}: f(x,y) \to \mathbb{R},\ f \in C_{1\Omega},\ (x,y) \in \Omega$, ahol az Ω zárt, egyszeresen összefüggő tartomány, most a következő funkcionál extrémumát keressük:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\Omega} L(f, f_x, f_y)\, d\Omega \tag{I.17}$$

A (I.17)-ben az f függvény értéke a tartomány határain rögzített, az $\varepsilon h(x,y)$ függvénnyel variáljuk, tehát $h(x,y)\big|_{\delta\Omega} = 0$. Az extrémum szükséges feltétele:

$$\delta\mathcal{F}(f) = \int_{\Omega} h\frac{\partial L}{\partial f} + h_x\frac{\partial L}{\partial f_x} + h_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\, d\Omega = 0 \tag{I.18}$$

Ha az integrálási tartomány téglalap alakú, konstans határokkal, akkor a kettős integrál kétszeres integrállá alakítható:

$$\int_{\Omega} h\frac{\partial L}{\partial f} + h_x\frac{\partial L}{\partial f_x} + h_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\, d\Omega = \int_c^d \int_a^b h\frac{\partial L}{\partial f} + h_x\frac{\partial L}{\partial f_x} + h_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\, dx dy \tag{I.19}$$

Vegyük az (I.19) jobb oldalának második tagját, és végezzük el az ismert parciális integrálási lépést:

$$\int_c^d \left(\int_a^b h_x \frac{\partial L}{\partial f_x} dx \right) dy = \int_c^d \left(\left[h\frac{\partial L}{\partial f_x} \right]_a^b - \int_a^b h \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial f_x} dx \right) dy = \int_c^d \left(0 - \int_a^b h \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial f_x} dx \right) dy \tag{I.20}$$

Ugyanezt kapjuk az integrálási sorrend felcserélésével a harmadik tagra is:

$$\int_a^b\left(\int_c^d h_y\frac{\partial L}{\partial f_y}dy\right)dx=\int_a^b\left(\left[h\frac{\partial L}{\partial f_y}\right]_c^d-\int_c^d h\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial f_y}dy\right)dx=\int_a^b\left(0-\int_c^d h\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial f_y}dy\right)dx \quad \text{(I.21)}$$

Visszaírva az eredményeket (I,19)-be:

$$\int_\Omega h\frac{\partial L}{\partial f}+h_x\frac{\partial L}{\partial f_x}+h_y\frac{\partial L}{\partial f_y}d\Omega=\int_c^d\int_a^b h\left(\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial f_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial f_y}\right)dxdy \quad \text{(I.22)}$$

A variációszámítás lemmája szerint zárójeles kifejezésnek a teljes tartományon nullának kell lennie, ez a problémához rendelt (parciális) Euler-Lagrange differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial f_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial f_y}=0 \quad \text{(I.23)}$$

Tetszőleges alakú integrálási tartományra ugyanezek az egyenletek adódnak a Green-tétel felhasználásával[5].

I.4.2. További alapesetek

Ha a Lagrange függvény **magasabb rendű derivált**akat is tartalmaz, és a deriváltakra is kirójuk a peremfeltételeket, akkor a rendszámnak megfelelő mennyiségű parciális integrálási lépéssel jutunk el a tesztfüggvény kiemelhetőségéig. Tekintsük pl. a következő egyváltozós funkcionált:

$$\mathcal{F}(f)=\int_a^b L(f,f_x,f_{xx})dx \quad \text{(I.24)}$$

A másodrendű derivált variálásakor a következő tag jelenik meg: $\int_a^b h_{xx}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}dx$. Ismételjük meg erre a tagra kétszer a parciális integrálási lépést:

$$\begin{aligned}\int_a^b h_{xx}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}dx&=\int_a^b -h_x\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}dx+\left[h_x\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}\right]_a^b\\&=\int_a^b h\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}dx-\left[h\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}\right]_a^b+\left[h_x\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}\right]_a^b\end{aligned} \quad \text{(I.25)}$$

Az utolsó két tag a peremeken eltűnik, és csak az első tag marad. Az (I.24)-hez rendelhető Euler-Lagrange egyenlet tehát a negyedrendű:

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_x}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial f_{xx}}=0 \quad \text{(I.26)}$$

[5] A Green tétel is bizonyítható a teljes integrálási tartomány téglalapokkal való közelítésével.

Általában az:

$$\mathcal{F}\left(f\right)=\int_a^b L\left(f,f',f'',...f^{(n)}\right)dx \tag{I.27}$$

az ismeretlen függvény első *n* deriváltját is tartalmazó funkcionálhoz rendelhető differenciál-egyenlet:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial L}{\partial f^{(k)}}=0 \tag{I.28}$$

Végül a **több ismeretlen függvény**t tartalmazó esetben a függvényeket egymástól függetlenül variálva annyi egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert kapunk, ahány ismeretlen függvényünk van, így pl. az:

$$\mathcal{F}\left(f,g\right)=\int_a^b L\left(f,f_x,...g,g_x\right)dx \tag{I.29}$$

Euler-lagrange egyenletrendszere:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f_x}=0\\&...\\&\frac{\partial L}{\partial g}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial g_x}=0\end{aligned} \tag{I.30}$$

Ha az egyenletek bármelyike egy másik függvényt is tartalmaz, akkor csatolt egyenletrendszerről beszélünk.

A fenti esetek kombinációban is előfordulhatnak. Az optikai áramlási egyenletek általában két kétváltozós ismeretlen függvényt, az elmozdulás mező komponenseit tartalmazzák. Ennek megfelelően az Euler-Lagrange egyenletek parciális differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

I.4.3. Alkalmazási példa: a Horn-Schunck egyenletek

Vegyük példaként az (I.1) funkcionált. Ez a több ismeretlen függvényt tartalmazó kétváltozós esetek kombinációja. Az Euler-Lagrange egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial u_y}=0\\&\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial v_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial v_y}=0\end{aligned} \tag{I.31}$$

A Lagrange függvény konkrét alakjának: $L\left(u,v\right) = \left(I_1 - I_0\right)^2 + \alpha\left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right)$ behelyettesítése után kapjuk a következő parciális differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} \left(I_1 - I_0\right) I_{1x} &= \alpha\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ \left(I_1 - I_0\right) I_{1y} &= \alpha\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \end{aligned} \tag{I.32}$$

Az (I.32)-ben felhasználtuk, hogy az I_0 független az elmozdulás mező komponenseitől, továbbá, a $\frac{\partial I_1}{\partial u} = \frac{\partial I_1}{\partial x}$ és $\frac{\partial I_1}{\partial v} = \frac{\partial I_1}{\partial y}$ azonosságokat. Az egyenletrendszer nemlineáris az ismeretlen függvényekben, de az I_1 Taylor sorával: $I_0 \approx I_1 - I_{1x}u - I_{1y}v - I_t$ linearizálható, és kapjuk:

$$\begin{aligned} \left(I_{1x}u + I_{1y}v + I_t\right) I_{1x} &= \alpha\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ \left(I_{1x}u + I_{1y}v + I_t\right) I_{1y} &= \alpha\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \end{aligned} \tag{I.33}$$

Az (I.33) az $u_{xx} + u_{yy} \approx 4\overline{u} - 4u$ és $v_{xx} + v_{yy} \approx 4\overline{v} - 4v$ elsőrendű véges differencia-közelítésekkel (a felülvonás az adott pozíció négy szomszédján vett függvényértékek átlaga) egyszerű, lineáris egyenletrendszer alakját ölti:

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b}\,,\ \mathbf{b} = \mathbf{b}\left(\overline{\mathbf{u}}\right) \tag{I.34}$$

Az (I.34) mátrixának és vektorának elemei:

$$\begin{aligned} a_{11} &= I_{1x}^2 + 4\alpha \\ a_{12} &= a_{21} = I_{1x}I_{1y} \\ a_{22} &= I_{1y}^2 + 4\alpha \\ b_1 &= 4\alpha\overline{u} - I_{1x}I_t \\ b_2 &= 4\alpha\overline{v} - I_{1y}I_t \end{aligned} \tag{I.35}$$

A mátrixelemek konstansok, (I.35) egyszerű iterációs módszerekkel megoldható[6]. Ha az (I.1) adattagjában $\int\limits_\Omega \left(I_1 - I_0\right)^2 d\Omega$ az előre linearizált:

$$I_1 \approx I_0 + I_{0x}u + I_{0y}v + I_t \tag{I.36}$$

egyenletet használjuk, akkor formálisan az (I.33) egyenleteket kapjuk, de a képsorozat nulla indexű intenzitásfüggvényével. Az (I.35)-ben a különbség úgy jelenik meg, hogy a parciális képfüggvény deriváltakat: I_x és I_y a képsorozat előbbi, vagy az utóbbi képén számítjuk.

---

[6] Pl. Gauss-Seidel, vagy SOR (successive over-relaxation) módszerekkel.

I.4.4. Alkalmazási példa: a linearizált hullámegyenlet

A klasszikus fizika legkisebb hatásának (**III.2** fejezet) elve szerint a fizikai rendszerekre mozgásaira a potenciális és mozgási energiák különbsége adja meg a rendszer Lagrange függvényét. Kontinuumoknál – mint pl. a kifeszített húr, vagy lemez – a potenciális energia arányos a hossz (húrnál), illetve felületváltozással (lemeznél). A kétdimenziós esettel foglalkozunk az alábbi példában. A síklemez elemi felülete $dA_0 = dxdy$. A deformált lemezt a $z = z(x,y)$ függvénnyel adottnak tételezzük fel, amely elemi darabkájának felszíne: $dA = \sqrt{g}dxdy = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ (ahol g a megváltozott felület metrikus tenzora, lásd **II.3.11** példa). A lemez potenciális energiája ezzel:

$$U = k\int_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} - 1\ dA \tag{I.37}$$

Az (I.37)-ben a k arányossági tényező egy mértékegység-rendszertől függő állandó. Ha ρ a lemez anyagának sűrűsége, akkor – és ez az első közelítésünk – csak z irányú elmozdulás feltételezésével, a lemez egy elemi tömegének energiája: $\frac{\rho dA z_t^2}{2}$. Így a teljes mozgási energia:

$$T = \int_A \frac{z_t^2}{2}\rho dA \tag{I.38}$$

Második közelítésünk az (I.37) gyökfüggvényének közelítése kicsiny $z_x,\ z_y$ értékekre:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = f(z_x, z_y)\\
&\quad f(z_x, z_y) \approx f\big|_{z_x=z_y=0} + \frac{\partial f}{\partial z_x}\bigg|_{z_x=z_y=0} z_x + \frac{\partial f}{\partial z_x}\bigg|_{z_x=z_y=0} z_y\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{(\partial z_x)^2}\bigg|_{z_x=z_y=0} z_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z_x \partial z_y}\bigg|_{z_x=z_y=0} z_x z_y + \frac{\partial^2 f}{(\partial z_y)^2}\bigg|_{z_x=z_y=0} z_y^2\right]\\
&\qquad = \dots = 1 + \frac{1}{2}\left(z_x^2 + z_y^2\right)
\end{aligned} \tag{I.39}$$

A közelítő Lagrange függvényünk tehát:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left[\rho z_t^2 - k\left(z_x^2 + z_y^2\right)\right] \tag{I.40}$$

Végül az Euler-Lagrange egyenlet a jól ismert hullámegyenlet:

$$-\rho z_{tt} + k\left(z_{xx} + z_{yy}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{k} z_{tt} = \left(z_{xx} + z_{yy}\right) \tag{I.41}$$

Vagy a $\frac{\rho}{k} = \frac{1}{c^2}$ jelölés bevezetésével, és a szokásos felírással:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta z \tag{I.42}$$

ahol a Δ a Laplace operátor.

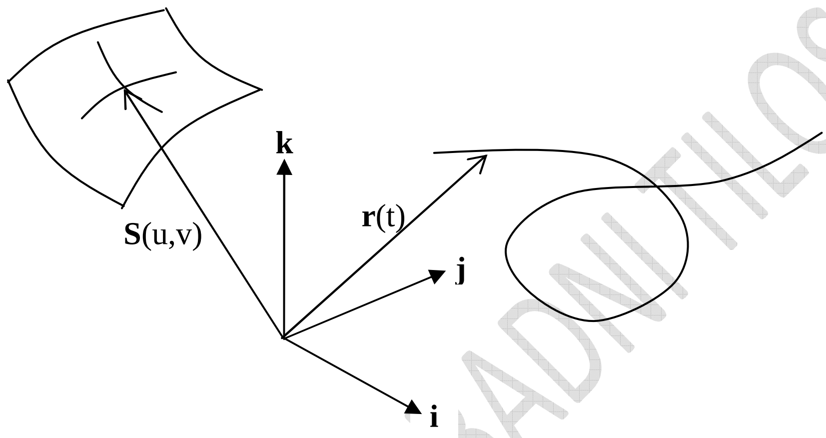
II. Alkalmazás a differenciálgeometriában

A fejezet felépítése a következő:

- A bevezetésben az alapvető differenciálgeometriai ismereteket foglaljuk össze: görbék és felületek leírása a differenciálgeometria módszerével. Térgörbék érintője és görbülete.
- A második részben a felületek differenciálgeometriájával foglalkozunk.
- A harmadik részben a geodetikus differenciálegyenletének levezetése, értelmezése.
- Az összefoglaló a felületek belső geometriájának néhány eleme.

II.1. Bevezetés

Vizsgálatunkat az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térbe ágyazott görbékkel és felületekkel kezdjük. A leíráshoz kiválasztjuk a tér egy pontját amelyben felvesszük a standard bázist. A bázisvektorokat a szokásos módon az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ betűkkel jelöljük.



II.1. ábra: Felület és térgörbe.

II.2. Térgörbék

II.2.1. Térgörbék leírása, ívhossz

Az egyparaméteres objektumok a görbék, t a görbeparaméter. A t és a görbe térbeli pontjai között egy-egyértelmű kapcsolatot tételezünk fel, ezt a kapcsolatot az $X(t), Y(t), Z(t) \in \mathbb{R}^3$ koordinátafüggvényekkel adjuk meg:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}(t) = X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k} \\ \text{vagy} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T \end{gathered} \tag{II.1}$$

A koordinátafüggvényektől legalább kétszeres folytonos deriválhatóságot követelünk meg. A térgörbe érintőjét a következő határértékkel definiáljuk[7]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \overset{jel}{=} \dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{X}(t)\mathbf{i} + \dot{Y}(t)\mathbf{j} + \dot{Z}(t)\mathbf{k} \tag{II.2}$$

[7] Természetesen feltesszük, hogy ez a határérték a görbe minden pontjában létezik, és sehol nem nulla. Az ilyen görbéket reguláris görbének nevezzük.

Az elemi görbeív hossza a t pontban, és ebből az ívhossz-függvény:

$$\begin{gathered} ds=\left|\dot{\mathbf{r}}\left(t\right)\right|dt=\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}\,dt=\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}dt=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2} \\ s\left(t\right)=\int_a^t ds=\int_a^t\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}=\int_a^t\left|\dot{\mathbf{r}}\left(\tau\right)\right|d\tau \end{gathered} \tag{II.3}$$

Az ívhossz szerinti paraméterezést *természetes paraméterezésnek* nevezzük: $\mathbf{r}\left(s\right)=\mathbf{r}\left(t\left(s\right)\right)$. Ekkor a görbe érintőjét vesszővel jelöljük, és egységvektort kapunk (alább $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=1$):

$$\mathbf{r}'=\dot{\mathbf{r}}\frac{dt}{ds}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\overset{jel}{=}\mathbf{e} \tag{II.4}$$

Az ívhossz szerinti paraméterezésre áttéréskor tulajdonképpen egy változó-transzformációt hajtottunk végre. Egy ilyen transzformációt megengedhetőnek nevezünk, ha az új paraméter a régi szigorúan monoton függvénye. Az ívhossz szerinti második derivált merőleges az érintőre:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}''=\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}}\right)\frac{dt}{ds}=\left(\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}-\dot{\mathbf{r}}\frac{1}{2\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3}2\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\right)\frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}=\frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2}\left[\ddot{\mathbf{r}}-\left(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{e}\right)\mathbf{e}\right] \\ \Rightarrow \mathbf{r}''\cdot\mathbf{e}=\frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2}\left[\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{e}-\left(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{e}\right)\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\right]=0 \end{gathered} \tag{II.5}$$

II.2.2. Az egyenes

Az egyenest az ívhosszat minimalizáló Euler-Lagrange egyenlettel is definiálhatjuk:

$$\min\int_A^B ds=\min\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\left|\dot{\mathbf{r}}\right|dt=\min\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}\;dt \tag{II.6}$$

Az Euler-Lagrange egyenletek ebből:

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}2\dot{\mathbf{r}}\right)=0 \;\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}}\right)=-\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3}2\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}=0 \;\Rightarrow \frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\left[\ddot{\mathbf{r}}-(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}\right]=0 \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}''=0 \end{gathered} \tag{II.7}$$

Felhasználtuk az érintő-egységvektor (II.4) jelölését. Végeredményünket az ívhossz szerinti második derivált kifejezésével (a (II.5) első sora) összevetve, az egyenes egyenlete: $\mathbf{r}''=\mathbf{0}$. Nézzük meg milyen eredményre vezet ha Lagrange függvénynek a (II.6) Lagrange függvényének négyzetét választjuk:

$$\min\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2 dt=\min\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\;dt \quad\Rightarrow\quad \ddot{\mathbf{r}}=0 \tag{II.8}$$

Ekkor az Euler-Lagrange egyenlet: $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, amely természetes paraméterezés esetén megegyezik az egyenes egyenletével. Ívhossz szerinti paraméterezés választásával tehát a (II.6) helyett minimalizálhatjuk az egyszerűbb (II.8)-at is.

II.2.3. Térgörbék görbülete

A térgörbe görbületi vektorának nevezhetjük tehát az ívhossz szerinti második deriváltat, görbületének pedig ezen vektornak az abszolút értékét. Határozzuk meg ezeket a mennyiségeket általános paraméterezés mellett:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'' &= \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\right) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\right) = \frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\frac{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|\ddot{\mathbf{r}} - \left(\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}\right)^{\bullet}\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2} = \frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\frac{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2} \\ &= \frac{1}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|}\frac{\left(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right)\ddot{\mathbf{r}} - \left(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}\times\left(\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}\right)}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^4} = \mathbf{e}\times\frac{\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3}\end{aligned} \tag{II.9}$$

A második sorban használtuk a kifejtési tételt. Mivel az $\mathbf{r}''$ merőleges az érintő vektorra ($\mathbf{r}'' \perp \dot{\mathbf{r}}$ vagy $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'$ a (II.5) szerint), ezért a görbület:

$$\left|\mathbf{r}''\right| = \left|\mathbf{e}\right|\frac{\left|\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}\right|}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}\right|}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3} \tag{II.10}$$

II.3. Felületek

A térgörbék egyetlen paraméterrel leírhatók. Ezzel szemben a felületek kétparaméteres objektumok.

II.3.1. Felületek leírása, ívhossz, metrikus tenzor

Hasonlóan a görbék (II.1) megadásához a felületeket kétváltozós koordinátafüggvényekkel adjuk meg[8]:

$$\mathbf{S}\left(u,v\right) = X\left(u,v\right)\mathbf{i} + Y\left(u,v\right)\mathbf{j} + Z\left(u,v\right)\mathbf{k} \tag{II.11}$$

A felületi görbéket az $u = u\left(t\right)$, $v = v\left(t\right)$ függvényekkel adhatjuk meg. Speciálisan az $u\left(t\right) = t$, $v\left(t\right) \equiv 0$ és a $v\left(t\right) = t$, $u\left(t\right) \equiv 0$ görbéket paramétervonalaknak (koordinátavonalaknak) nevezzük, az $\dot{u}\left(t\right)$, $\dot{v}\left(t\right)$ függvényeket pedig koordinátasebességeknek. Egy tetszőleges felületi görbe érintője:

[8] Az ú.n. Gauss-féle megadási mód.

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{du}\dot{u} + \frac{d\mathbf{S}}{dv}\dot{v} \overset{jel}{=} \mathbf{S}_u\dot{u} + \mathbf{S}_v\dot{v} \tag{II.12}$$

Azaz minden felületi görbe érintője az $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ *lokális bázisvektorokkal* kifejezhető. Vizsgálatainkban *reguláris* felületdarabra szorítkozunk, ahol az $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ lokális bázisok a felületdarab minden pontjában lineárisan függetlenek. A felületi görbe elemi ívének hossza a (II.3) alapján[9]:

$$\begin{aligned} ds &= \left|\dot{\mathbf{S}}(t)\right| dt = \sqrt{\dot{\mathbf{S}}\cdot\dot{\mathbf{S}}}\, dt = \sqrt{\left(\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}_u\right)\dot{u}^2 + 2\left(\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}_v\right)\dot{u}\dot{v} + \left(\mathbf{S}_v\cdot\mathbf{S}_v\right)\dot{v}^2}\, dt \\ &\overset{jel}{=} \sqrt{g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2}\, dt = \sqrt{g_{uu}du^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}dv^2} \overset{jel}{=} \sqrt{g_{ik}du^i du^k} \end{aligned} \tag{II.13}$$

(II.13)-ban bevezettük az $u^1 = u,\ u^2 = v\ \ (du^1 = du,\ du^2 = dv)$ felső indexezéssel jelölt koordinátákat, a $g_{ik} = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k,\ i,k \in \left\{u^1, u^2\right\}$ jelölést, az ú.n. metrikus tenzor komponenseket, és az Einstein által bevezetett összegzési konvenciót[10] , ahol a szimmetriák miatt:

$$g_{ik}du^i du^k = g_{u^1u^1}du^1du^1 + g_{u^1u^2}du^1du^2 + g_{u^2u^1}du^2du^1 + g_{u^2u^2}du^2du^2 = g_{uu}du^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}dv^2.$$

A továbbiakban gyakran ezt a tömör jelölésmódot használjuk és a későbbiekben az *i,..q* indexeket erre tartjuk fenn, míg az *u* és *v* indexeket a hagyományos módon használjuk.

II.3.2. Kovariáns és kontravariáns mennyiségek

A felület normálvektora: $\mathbf{N} = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$, hossza: $h = \left|\mathbf{N}\right|$[11], amely kifejezhető a metrikus tenzor komponenseivel (a vektoriális és skaláris szorzatokra vonatkozó összefüggésekből):

$$h^2 = \left|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right|^2 = \left|\mathbf{S}_u\right|^2\left|\mathbf{S}_v\right|^2\left(1 - \frac{\left(\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}_v\right)^2}{\left|\mathbf{S}_u\right|^2\left|\mathbf{S}_v\right|^2}\right) = g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2 \tag{II.14}$$

A normál-egységvektor: $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}}{\left|\mathbf{N}\right|} = \dfrac{\mathbf{N}}{h}$. A kifejtési tétel alkalmazásával számoljuk ki a következő mennyiségeket:

---

[9] Ugyancsak ez a görbék ívhosszának nem-descartesi (általános) koordinátákkal való kifejezése a síkon, mint speciális felületen is. De míg a síkon ez csak lehetőség, addig görbült felületen kényszer. Mindennek oka, hogy a (görbült) felületeken szükségszerű, hogy a lokális bázisok a paraméterek függvényei legyenek, míg a síkon ez lehetőség, azaz a teljes síkon bevezethetők olyan koordináták, amely mellett a lokális bázisok függetlenek a paraméterezéstől, így a deriválás műveletére nézve konstansok.

[10] Ebben a jelölésrendszerben az ismétlődő alsó és felső indexek összegzést (nem pedig hatványozást) jelentenek. Hatványozás helyett kiírhatjuk a tényezőt többször is.

[11] Ezzel a felület egy elemi darabkájának felszíne: *hdudv*.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\times\mathbf{S}_u &= \frac{1}{h}\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)\times\mathbf{S}_u = \frac{1}{h}\left(g_{uu}\mathbf{S}_v - g_{uv}\mathbf{S}_u\right) \overset{jel}{=} h\mathbf{S}^v \\ \mathbf{S}_v\times\mathbf{n} &= \frac{1}{h}\mathbf{S}_v\times\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right) = \frac{1}{h}\left(g_{vv}\mathbf{S}_u - g_{uv}\mathbf{S}_v\right) \overset{jel}{=} h\mathbf{S}^u \end{aligned} \qquad \text{(II.15)}$$

Az így definiált $\mathbf{S}^u$, $\mathbf{S}^v$ vektorokat kontravariáns vagy inverz bázisvektoroknak nevezzük, mert: $\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}^u = \mathbf{S}_v\cdot\mathbf{S}^v = 1$, és $\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}^v = \mathbf{S}_v\cdot\mathbf{S}^u = 0$. Pl.:

$\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}^v = \mathbf{S}_u\cdot\frac{1}{h^2}\left(g_{uu}\mathbf{S}_v - g_{uv}\mathbf{S}_u\right) = \frac{1}{h^2}\left(g_{uu}g_{uv} - g_{uv}g_{uu}\right) = 0$, illetve

$\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}^u = \mathbf{S}_u\cdot\frac{1}{h^2}\left(g_{vv}\mathbf{S}_u - g_{uv}\mathbf{S}_v\right) = \frac{1}{h^2}\left(g_{vv}g_{uu} - g_{uv}^2\right) = 1$, a (II.14) felhasználásával

A lokális bázis $\mathbf{S}_u$, $\mathbf{S}_v$ vektorait szokás kovariáns bázisnak is nevezni (amelyekre tehát igaz: $\mathbf{S}^i\cdot\mathbf{S}_k = \delta_k^i$ [12]). A kontravariáns bázis (II.9)-ben való bevezetése mátrixos alakban is felírható:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^u &= \frac{1}{h^2}\left(g_{vv}\mathbf{S}_u - g_{uv}\mathbf{S}_v\right) \\ \mathbf{S}^v &= \frac{1}{h^2}\left(g_{uu}\mathbf{S}_v - g_{uv}\mathbf{S}_u\right) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{S}^u\\ \mathbf{S}^v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{uu} & g_{uv}\\ g_{uv} & g_{vv}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{S}_u\\ \mathbf{S}_v\end{bmatrix} \qquad \text{(II.16)}$$

A metrikus tenzor inverz mátrixának komponenseit felső indexekkel jelöljük, és ezzel:

$$\begin{bmatrix} g_{uu} & g_{uv}\\ g_{uv} & g_{vv}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} g^{uu} & g^{uv}\\ g^{uv} & g^{vv}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\mathbf{S}^u &= g^{uu}\mathbf{S}_u + g^{uv}\mathbf{S}_v\\ \mathbf{S}^v &= g^{vu}\mathbf{S}_u + g^{vv}\mathbf{S}_v\end{aligned} \qquad \text{(II.17)}$$

Természetesen a metrikus tenzor inverze is szimmetrikus, ezért (II.17) tömören: $\mathbf{S}^i = g^{ik}\mathbf{S}_k$, és fordítva: $\mathbf{S}_i = g_{ik}\mathbf{S}^k$. Ezeket a műveleteket szokás az indexek fel- és lehúzásának nevezni. Az összegző indexek tetszőleges betűre cserélhetők.

Alkalmazzuk a fentieket az érintősík egy vektorára!

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{S}_i = v^i\left(g_{ik}\mathbf{S}^k\right) = \left(v^i g_{ik}\right)\mathbf{S}^k \overset{jel}{=} v_k\mathbf{S}^k \qquad \text{(II.18)}$$

Itt a $v_k = v^i g_{ik}$ a $\mathbf{v}$ vektor (kovariáns) komponense a kontravariáns bázisban. Számoljuk ki két vektor skaláris szorzatát:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v^i\mathbf{S}_i\cdot w^k\mathbf{S}_k = v^i w^k\left(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_k\right) = v^i w^k g_{ik} = v^i\left(w^k g_{ik}\right) = v^i w_i = v_k w^k \qquad \text{(II.19)}$$

Eredményül a descartesi koordinátákkal adott formulához hasonló képletet kapunk azzal a különbséggel, hogy kontravariáns koordinátákat a megfelelő kovariáns koordinátákkal

[12] A Kronecker delta jelölés.

szorozva képezzük az összeget. A vektorok komponenseit a bázisvektorok skaláris szorzatával kapjuk:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}^k = v^i\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}^k = v^k \text{ és } \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}_k = v_i\mathbf{S}^i\cdot\mathbf{S}_k = v_k \tag{II.20}$$

Így egy érintősíkbeli vektor kétféle felbontása:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^k\mathbf{S}_k = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}^k\right)\mathbf{S}_k\\ \mathbf{v} &= v_k\mathbf{S}^k = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}_k\right)\mathbf{S}^k\end{aligned} \tag{II.21}$$

II.3.3. Transzformációs szabályok és invariáns mennyiségek

Hogyan változnak a fenti mennyiségek koordináta-(változó-) transzformáció alkalmazásával? Tekintsük ehhez a kovariáns bázisvektorok és a (kontravariáns) koordinátadifferenciálok transzformációit az $u' = u'\left(u,v\right),\quad v' = v'\left(u,v\right)$ alkalmazásával[13]:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{u'} &= \frac{\partial u}{\partial u'}\mathbf{S}_{\mathbf{u}} + \frac{\partial v}{\partial u'}\mathbf{S}_v,\quad \mathbf{S}_{v'} = \frac{\partial u}{\partial v'}\mathbf{S}_u + \frac{\partial v}{\partial v'}\mathbf{S}_v\\ du' &= \frac{\partial u'}{\partial u}du + \frac{\partial u'}{\partial v}dv,\quad dv' = \frac{\partial v'}{\partial u}du + \frac{\partial v'}{\partial v}dv\end{aligned} \tag{II.22}$$

A kétféle transzformáció eltér egymástól. A (II.22) mátrixos formában is felírható:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{u'}\\ \mathbf{S}_{v'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'}\\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S}_u\\ \mathbf{S}_v\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}du'\\ dv'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v}\\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix} \tag{II.23}$$

A bázisvektorok differenciálja ezekkel:

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\mathbf{S}_{u'} & \mathbf{S}_{v'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du'\\ dv'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{S}_u & \mathbf{S}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'}\\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v}\\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{S}_u & \mathbf{S}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix} \tag{II.24}$$

A differenciál formulája ezek szerint a kétféle felírásban megegyezik, mert a mátrixok egymás inverzei (bizonyítható az $u = u\left(u'\left(u,v\right), v'\left(u,v\right)\right) \Rightarrow 1 = \frac{\partial u}{\partial u}\cdots$ azonosságokból). Az ilyen, paraméterezéstől független mennyiségeket invariáns mennyiségeknek nevezzük. Az összegzési konvencióval mindez egyszerűbben látszik:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{S}_{i'}du^{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\mathbf{S}_i\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}du^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\mathbf{S}_i du^i = \mathbf{S}_i du^i \tag{II.25}$$

A fenti transzformációkkal transzformálódó mennyiségeket – az alsó indexű: kovariáns illetve felső indexű kontravariáns – tenzoroknak (ill. tenzor komponenseknek) nevezzük. A

[13] Ebben a pontban a vessző nem (az ívhossz szerinti) deriválást, hanem az új változókat jelöli

bázisvektorok (az 1 indexes mennyiségek) elsőrendű tenzorok. Két bázisvektor direkt (diadikus szorzata) másodrendű tenzor, és így tovább.

Az invariáns mennyiségek ugyanannyi kontravariáns mint kovariáns mennyiség szorzataként állnak elő, így transzformációik összességükben kiejtik egymást.

II.3.4. A Christoffel szimbólumok

A (II.10) kiszámításához a (II.12) továbbderiválására is szükség lesz:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{S}} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{S}_u\dot{u} + \mathbf{S}_v\dot{v}\right) = \mathbf{S}_{uu}\dot{u}\dot{u} + \mathbf{S}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{S}_{vu}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{S}_{vv}\dot{v}\dot{v} + \mathbf{S}_u\ddot{u} + \mathbf{S}_v\ddot{v} \\ &= \mathbf{S}_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \mathbf{S}_l\ddot{u}^l\end{aligned} \tag{II.26}$$

Bontsuk ezt fel (II.18) mintájára (de ne feledjük, hogy ez a vektor nem az érintősíkban fekszik, így van normálvektor irányú komponense is):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{S}} &= \left(\ddot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{S}^u\right)\mathbf{S}_u + \left(\ddot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{S}^v\right)\mathbf{S}_v + \left(\ddot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n} \\ &= \left[\left(\mathbf{S}_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \mathbf{S}_i\ddot{u}^i\right)\cdot\mathbf{S}^l\right]\mathbf{S}_l + \left[\left(\mathbf{S}_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \mathbf{S}_i\ddot{u}^i\right)\cdot\mathbf{n}\right]\mathbf{n} \\ &= \left[\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{S}^l\right)\dot{u}^i\dot{u}^k + \delta_i^l\ddot{u}^i\right]\mathbf{S}_l + \left[\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k + 0\right]\mathbf{n} \\ &= \left(\Gamma_{ik}^l\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^l\right)\mathbf{S}_l + \left[\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k\right]\mathbf{n}\end{aligned} \tag{II.27}$$

(II.27)-ben bevezettük a $\Gamma_{ik}^l = \left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{S}^l\right)$ ú.n. Christoffel szimbólumokat. Alsó két indexükben szimmetrikusak: $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$. Transzformációs szabályuk nem egyezik meg a tenzorokéval (másodrendű deriváltból származnak, míg a tenzorok alapvetően elsőrendű deriváltakból származnak), ezért a szimbólum elnevezés. A teljesség kedvéért megadjuk a transzformációs szabályukat a II.3.3 jelöléseivel:

$$\begin{aligned}\Gamma_{l'k'}^{i'} &= \mathbf{S}_{l'k'}\cdot\mathbf{S}^{i'} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\mathbf{S}_p\right)}{\partial u^{k'}}\cdot\left(\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\mathbf{S}^r\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u^p}{\partial u^{l'}\partial u^{k'}}\mathbf{S}_p + \frac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\frac{\partial\mathbf{S}_p}{\partial u^{k'}}\right)\cdot\left(\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\mathbf{S}^r\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u^p}{\partial u^{l'}\partial u^{k'}}\mathbf{S}_p + \frac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^q}{\partial u^{k'}}\frac{\partial\mathbf{S}_p}{\partial u^q}\right)\cdot\left(\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\mathbf{S}^r\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u^p}{\partial u^{l'}\partial u^{k'}}\delta_p^r + \frac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^q}{\partial u^{k'}}\mathbf{S}_{pq}\cdot\mathbf{S}^r\right)\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{l'}\partial u^{k'}} + \frac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^q}{\partial u^{k'}}\Gamma_{pq}^r\right)\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r} = \frac{\partial u^p}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^q}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\Gamma_{pq}^r + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{l'}\partial u^{k'}}\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\end{aligned} \tag{II.28}$$

(A (II.28) végeredménye a 2. tagja miatt eltér a tenzorok transzformációs szabályától.) Hasonlóan definiáljuk a csupa alsó indexes szimbólumot: $\Gamma_{i,kl} = \left(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_{kl}\right)$. A kétféle szimbólum között a szokásos transzformáció teremt kapcsolatot:

$$\begin{aligned}\Gamma_{l,ik} &= \mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{S}_l = \mathbf{S}_{ik}\cdot(g_{lm}\mathbf{S}^m) = g_{lm}\Gamma^m_{ik}\\ \Gamma^l_{ik} &= \mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{S}^l = \mathbf{S}_{ik}\cdot(g^{lm}\mathbf{S}_m) = g^{lm}\Gamma_{m,ik}\end{aligned} \tag{II.29}$$

Végül fölírható a Christoffel szimbólumok és a metrikus tenzor kapcsolata a második két index szimmetriája miatt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} &= \frac{\partial\left(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_k\right)}{\partial u^l} = \Gamma_{k,il}+\Gamma_{i,kl}\\ \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} &= \frac{\partial\left(\mathbf{S}_l\cdot\mathbf{S}_i\right)}{\partial u^k} = \Gamma_{i,lk}+\Gamma_{l,ik} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = 2\Gamma_{i,kl}\\ \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} &= \frac{\partial\left(\mathbf{S}_k\cdot\mathbf{S}_l\right)}{\partial u^i} = \Gamma_{l,ki}+\Gamma_{k,li}\end{aligned} \tag{II.30}$$

Vagy az utolsó index felhúzásával:

$$\begin{aligned}\Gamma^m_{kl} &= \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i}\right),\ \text{vagy } i \text{ és } l \text{ megcserélésével:}\\ \Gamma^m_{ki} &= \frac{1}{2}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^l}\right)\end{aligned} \tag{II.31}$$

II.3.5. Felületi görbék görbülete

A görbületi vektor $\left|\dot{\mathbf{S}}\right|^4 = \left(g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\right)^2$ -szerese a (II.9) alapján:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}\times\left(\ddot{\mathbf{S}}\times\dot{\mathbf{S}}\right) &= \left(\dot{\mathbf{S}}\cdot\dot{\mathbf{S}}\right)\ddot{\mathbf{S}}-\left(\dot{\mathbf{S}}\cdot\ddot{\mathbf{S}}\right)\dot{\mathbf{S}}\\ &= g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\left\{\left(\Gamma^l_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k+\ddot{u}^l\right)\mathbf{S}_l+\left[\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k\right]\mathbf{n}\right\}\\ &\quad-\left[\left(\Gamma^l_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k+\ddot{u}^l\right)\mathbf{S}_l\cdot\left(\dot{u}^m\mathbf{S}_m\right)-0\right]\dot{u}^n\mathbf{S}_n\\ &= \left[g_{lm}\dot{u}^m\dot{u}^l\left(\Gamma^n_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k+\ddot{u}^n\right)-g_{lm}\dot{u}^m\dot{u}^n\left(\Gamma^l_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k+\ddot{u}^l\right)\right]\mathbf{S}_n\\ &\quad+g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\left[\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k\right]\mathbf{n}\end{aligned} \tag{II.32}$$

(II.32)-ben a görbületi vektort egy normálvektor irányú és egy érintősíkba eső komponensre bontottuk. A normálgörbület vektora:

$$\frac{\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k}{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\mathbf{n} \tag{II.33}$$

Ennek előjeles hossza a normálgörbület: $\dfrac{\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k}{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}$. Azokat a felületi görbéket, amelyek görbületi vektora csak a normálirányú komponensből áll geodetikus görbéknek nevezzük, és ezek az egyenesek általánosításai görbült terekben (felületeken). Ennek bizonyítására vegyünk egy felületi görbét, minimális ívhosszal. Ismeretlen függvényeink a koordinátafüggvények $u^i\left(t\right),\ i=1,2$

$$\min\int_a^b ds = \min\int_a^b \sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\,dt \qquad \text{(II.34)}$$

Az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\dot{u}^k - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}}\,g_{ik}\frac{\partial \dot{u}^i\dot{u}^k}{\partial \dot{u}^l}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\dot{u}^k + \frac{1}{2g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\frac{d\left(g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\right)}{dt}g_{ik}\left(\delta_l^i\dot{u}^k + \dot{u}^i\delta_l^k\right) - \frac{dg_{ik}}{dt}\left(\delta_l^i\dot{u}^k + \dot{u}^i\delta_l^k\right) - g_{ik}\frac{d}{dt}\left(\delta_l^i\dot{u}^k + \dot{u}^i\delta_l^k\right)\right]\\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

A kiemelt tényezőben az ívhossz szerepel a nevezőben, amely sehol nem nulla, ezért átszorozhatunk:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\dot{u}^k - \frac{dg_{lk}}{dt}\dot{u}^k - \frac{dg_{il}}{dt}\dot{u}^i - g_{lk}\ddot{u}^k - g_{il}\ddot{u}^i + \frac{1}{2g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\frac{d\left(g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\right)}{dt}\left(g_{lk}\dot{u}^k + g_{il}\dot{u}^i\right)\\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

Az első három tagot a bal oldalra visszük:

$$\begin{aligned}
\frac{dg_{lk}}{dt}\dot{u}^k + \frac{dg_{il}}{dt}\dot{u}^i - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\dot{u}^k + 2g_{lk}\ddot{u}^k &= \frac{1}{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\frac{d\left(g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k\right)}{dt}g_{lk}\dot{u}^k \quad \Rightarrow\\
\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i}\dot{u}^i\dot{u}^k + \frac{\partial g_{il}}{\partial \dot{u}^k}\dot{u}^k\dot{u}^i - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\dot{u}^k + 2g_{lk}\ddot{u}^k &= 2\frac{d\ln\left(\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\right)}{dt}g_{lk}\dot{u}^k \quad \Rightarrow\\
\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \dot{u}^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k + 2g_{lk}\ddot{u}^k &= 2f\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}, \dot{u}^i, \ddot{u}^i\right)g_{lk}\dot{u}^k\\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

A jobb oldalon az $f = \dfrac{d\ln\left(\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\right)}{dt}$ az argumentumában jelölt mennyiségek skalár függvénye, kifejtve: $\dfrac{1}{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^l\dot{u}^i\dot{u}^k + g_{ik}\ddot{u}^i\dot{u}^k + g_{ik}\ddot{u}^i\dot{u}^k\right)$, amely függvény az összes koordinátára ugyanaz.

Végül mindkét oldalt beszorozva g^{lm} inverz metrikus tenzorral, és kettővel osztva kapjuk az Euler-Lagrange egyenleteket:

$$\frac{1}{2}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \dot{u}^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^m = f\,\dot{u}^m \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{ik}^m\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^m = f\,\dot{u}^m$$

Itt felhasználtuk a Christoffel szimbólumra kapott (II.31) kifejezést. A (II.32)-ben geodetikus görbe mentén az érintősíkbeli tagok kiesnek, és csupán a normálvektor-irányú komponens marad, azaz a geodetikusoknak csak normálgörbületük van. A gyakorlatban a fenti egyenletek természetes paraméterezés melletti változata – amely a $\int_a^b g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k dt$ funkcionált minimalizálja – bír nagy jelentőséggel:

$$\Gamma^m_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^m = 0 \tag{II.35}$$

A (II.35) ugyanis a szabad tömegpont[14] általános koordináták melletti mozgásegyenlete, ahol a deriválás a klasszikus fizika idő, illetve a relativisztikus fizika sajátidő paramétere[15] szerint történik. Továbbá (lásd még: 29. lábjegyzet) formálisan ez az egyenes (II.8) egyenlete a síkon általános (pl. polár) koordináták mellett is.

II.3.6. Főgörbületek, összeg- és szorzatgörbület

A normálgörbület (II.33) $\kappa = \dfrac{\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k}{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}$ kifejezésének szélsőérték-helyeit a szokásos módon kapjuk. Bevezetjük az $L = \mathbf{S}_{uu}\cdot\mathbf{n}$, $M = \mathbf{S}_{uv}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{S}_{vu}\cdot\mathbf{n}$, $N = \mathbf{S}_{vv}\cdot\mathbf{n}$ jelöléseket[16]. Ezekkel:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\dot{u}}\left(\frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2}\right)\\
&= 2\frac{\left(L\dot{u} + M\dot{v}\right)\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right) - \left(L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2\right)\left(g_{uu}\dot{u} + g_{uv}\dot{v}\right)}{\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right)^2} = 0\\
&\frac{\partial}{\partial\dot{v}}\left(\frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2}\right)\\
&= 2\frac{\left(M\dot{u} + N\dot{v}\right)\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right) - \left(L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2\right)\left(g_{uv}\dot{u} + g_{vv}\dot{v}\right)}{\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right)^2} = 0
\end{aligned} \tag{II.36}$$

A nevezők pozitív értékek, azokkal átszorozhatunk (kettővel pedig oszthatunk):

$$\begin{aligned}
\left(L\dot{u} + M\dot{v}\right)\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right) - \left(L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2\right)\left(g_{uu}\dot{u} + g_{uv}\dot{v}\right) = 0\\
\left(M\dot{u} + N\dot{v}\right)\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right) - \left(L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2\right)\left(g_{uv}\dot{u} + g_{vv}\dot{v}\right) = 0
\end{aligned} \tag{II.37}$$

$\left(g_{uu}\dot{u}^2 + 2g_{uv}\dot{u}\dot{v} + g_{vv}\dot{v}^2\right)$-tel osztva, átrendezés után:

$$\begin{aligned}
\left(L\dot{u} + M\dot{v}\right) - \kappa\left(g_{uu}\dot{u} + g_{uv}\dot{v}\right) = 0 \to \left(L - \kappa g_{uu}\right)\dot{u} + \left(M - \kappa g_{uv}\right)\dot{v} = 0\\
\left(M\dot{u} + N\dot{v}\right) - \kappa\left(g_{uv}\dot{u} + g_{vv}\dot{v}\right) = 0 \to \left(M - \kappa g_{uv}\right)\dot{u} + \left(N - \kappa g_{vv}\right)\dot{v} = 0
\end{aligned} \tag{II.38}$$

---

[14] Mint látni fogjuk az általános relativitáselmélet szerint (a klasszikus fizika fogalmaival) az „erőtérben" mozgó tömegpont egyenlete is.
[15] Pontosabban azzal arányos, az arányossági tényező a fénysebesség.
[16] Jelölések Gauss szerint.

A (II.38) homogén, lineáris egyenletrendszer nem-triviális megoldásának létezéséhez az együtthatómátrix determinánsa nulla kell legyen. Ebből a feltételből a görbületek szélsőértékeire, az ú.n. főgörbületekre a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$\begin{aligned}
&\left(L-\kappa g_{uu}\right)\left(N-\kappa g_{vv}\right)-\left(M-\kappa g_{uv}\right)^2=0\rightarrow\\
&\left(g_{uu}g_{vv}-g_{uv}^2\right)\kappa^2+\left(2Mg_{uv}-Lg_{vv}-Ng_{uu}\right)\kappa+\left(LN-M^2\right)=0\Rightarrow\\
&\kappa_{1,2}=\frac{-\left(2Mg_{uv}-Lg_{vv}-Ng_{uu}\right)\pm\sqrt{\left(2Mg_{uv}-Lg_{vv}-Ng_{uu}\right)^2-4\left(g_{uu}g_{vv}-g_{uv}^2\right)\left(LN-M^2\right)}}{2\left(g_{uu}g_{vv}-g_{uv}^2\right)}
\end{aligned}\tag{II.39}$$

A szorzat és összeggörbületek:

$$\mathrm{K}=\kappa_1\kappa_2=\frac{LN-M^2}{g_{uu}g_{vv}-g_{uv}^2}=\frac{\det\left[\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right]}{\det\left[g_{ik}\right]},\quad \bar{\mathrm{K}}=\frac{Lg_{vv}-2Mg_{uv}+Ng_{uu}}{g_{uu}g_{vv}-g_{uv}^2}=\frac{Lg_{vv}-2Mg_{uv}+Ng_{uu}}{\det\left[g_{ik}\right]}\tag{II.40}$$

II.3.7. Theorema egregium és a görbületi tenzor

Vegyük most egy kovariáns bázis második deriváltját:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{ikl}&=\frac{\partial}{\partial u^l}\left[\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\mathbf{S}_i\right)\right]=\frac{\partial}{\partial u^l}\left[\Gamma_{ik}^m\mathbf{S}_m+\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}\right]\\
&=\frac{\partial\Gamma_{ik}^m}{\partial u^l}\mathbf{S}_m+\Gamma_{ik}^m\mathbf{S}_{ml}+\frac{\partial\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)}{\partial u^l}\mathbf{n}+\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}_l\\
&=\frac{\partial\Gamma_{ik}^m}{\partial u^l}\mathbf{S}_m+\Gamma_{ik}^m\left(\Gamma_{ml}^p\mathbf{S}_p\right)+\frac{\partial\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)}{\partial u^l}\mathbf{n}+\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}_l\\
&=\left(\frac{\partial\Gamma_{ik}^p}{\partial u^l}+\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^p\right)\mathbf{S}_p+\frac{\partial\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)}{\partial u^l}\mathbf{n}+\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}_l
\end{aligned}\tag{II.41}$$

Mivel $\mathbf{S}_{ikl}-\mathbf{S}_{ilk}=0$, azért:

$$\begin{aligned}
0=&\left(\frac{\partial\Gamma_{ik}^p}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{il}^p}{\partial u^k}+\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^p-\Gamma_{il}^m\Gamma_{mk}^p\right)\mathbf{S}_p\\
&+\left(\frac{\partial\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)}{\partial u^l}-\frac{\partial\left(\mathbf{S}_{il}\cdot\mathbf{n}\right)}{\partial u^k}\right)\mathbf{n}\\
&+\left(\mathbf{S}_{ik}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}_l-\left(\mathbf{S}_{il}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}_k
\end{aligned}\tag{II.42}$$

Mivel vektoregyenlettel állunk szemben, azért komponensenként is teljesülnie kell a bal oldalnak. Vegyük az érintősíkba eső komponenst[17] (az első és harmadik sorok). Az $\mathbf{n}_l=\dfrac{\partial\mathbf{n}}{\partial u_l}$, $\mathbf{n}_k=\dfrac{\partial\mathbf{n}}{\partial u_k}$ vektorok a normál-egységvektor deriváltjai, tehát az érintősíkban vannak. Felhasználjuk még a következő azonosságokat (merőlegességből):

[17] A normálirányú komponens a (II.42) miatt csak az általános tényt fejezi ki, hogy a normál-egységvektor parciális deriváltjai képzésekor a deriválás sorrendje felcserélhető.

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \to \frac{\partial\left(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n}\right)}{\partial u^k} = \mathbf{S}_{ik} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n}_k = 0 \to \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n}_k = -\mathbf{S}_{ik} \cdot \mathbf{n} \tag{II.43}$$

Felhasználjuk még az érintősíkba eső vektorok $\mathbf{v} = v_k \mathbf{S}^k = \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_k\right)\mathbf{S}^k$ (II.21) felbontását, így:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^p - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^p\right)\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_q\right]\mathbf{S}^q \\ &\quad + \left[\left(\mathbf{S}_{ik} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{S}_q\right) - \left(\mathbf{S}_{il} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{S}_q\right)\right]\mathbf{S}^q \\ &= \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^p - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^p\right) g_{pq} \right. \\ &\quad \left. - \left(\mathbf{S}_{ik} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{S}_{ql} \cdot \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{S}_{il} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{S}_{qk} \cdot \mathbf{n}\right)\right]\mathbf{S}^q \end{aligned} \tag{II.44}$$

A komponensek egyenlőségéből adódik a következő kulcsfontosságú összefüggés (Gauss):

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{S}_{ik} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{S}_{ql} \cdot \mathbf{n}\right) - \left(\mathbf{S}_{il} \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{S}_{qk} \cdot \mathbf{n}\right) = \\ &\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^p - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^p\right) g_{pq} \overset{jel}{=} R_{ilk}^p g_{pq} \end{aligned} \tag{II.45}$$

A (II.45)-ben bevezetett R_{ilk}^p negyedrendű tenzort görbületi tenzornak nevezzük. Válasszuk most az $i = k = u, \quad l = q = v$ esetet, ekkor a II.3.6-ban bevezetett jelölésekkel (továbbá a (II.14): $h^2 = \det[g_{ik}]$):

$$\begin{aligned} &LN - M^2 = \left(\frac{\partial \Gamma_{uu}^p}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{uv}^p}{\partial u} + \Gamma_{uu}^m \Gamma_{mv}^p - \Gamma_{uv}^m \Gamma_{mu}^p\right) g_{pv} \Rightarrow \\ &\mathrm{K} = \frac{LN - M^2}{h^2} = \frac{R_{uvu}^p g_{pv}}{h^2} \overset{kifejtve}{=} \frac{R_{uvu}^u g_{uv} + R_{uvu}^v g_{vv}}{g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2} \end{aligned} \tag{II.46}$$

Azaz a szorzat-(Gauss)görbület kiszámítható a metrikus tenzor (továbbá első és második deriváltjai) ismeretében, kizárólag érintősíkbeli mennyiségekből. A görbületi tenzor síkon azonosan nulla, hiszen ott a (II.45) bal oldala minden tényezője azonosan nulla.[18]

II.3.8. Az összeggörbület és a normál-egységvektor divergencia

Míg a szorzatgörbületben szereplő görbületi tenzor nagy szerepet játszik a felületek ú.n. belső geometriájában, addig az összeggörbület a beágyazott felületek geometriájában. Már az I.3 fejezetben szó volt a normál-egységvektor divergenciája és az összeggörbület közötti

[18] A (II.42) szerint átírva a skaláris szorzatok nullák, mert a normál-egységvektorok mindenhol párhuzamosak .

összefüggésről. Ennek levezetése következik az alábbiakban, a II.3.2 fejezet (II.14), (II.15) jelöléseivel, a kifejtési tétel használatával, direkt számolással $\mathbf{N} = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v,\ h = \left|\mathbf{N}\right|$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}\cdot\nabla &= \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{S}^u + \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{S}^v \\
&= \left(\frac{\mathbf{N}}{h}\right)_u \cdot \mathbf{S}^u + \left(\frac{\mathbf{N}}{h}\right)_v \cdot \mathbf{S}^v = \left(\frac{1}{h}\right)_u \mathbf{N}\cdot\mathbf{S}^u + \left(\frac{1}{h}\right)_v \mathbf{N}\cdot\mathbf{S}^v + \frac{1}{h}\left(\mathbf{N}_u\cdot\mathbf{S}^u + \mathbf{N}_v\cdot\mathbf{S}^v\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\mathbf{N}_u\cdot\mathbf{S}^u + \mathbf{N}_v\cdot\mathbf{S}^v\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left[-\mathbf{N}_u\cdot\left(\mathbf{n}\times\mathbf{S}_v\right) + \mathbf{N}_v\cdot\left(\mathbf{n}\times\mathbf{S}_u\right)\right] = \frac{1}{h^2}\left[-\mathbf{S}_v\cdot\left(\mathbf{N}_u\times\mathbf{n}\right) + \mathbf{S}_u\cdot\left(\mathbf{N}_v\times\mathbf{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left\{\mathbf{S}_v\cdot\left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)_u\right] - \mathbf{S}_u\cdot\left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)_v\right]\right\} \qquad \text{(II.47)} \\
&= \frac{1}{h^2}\left\{\mathbf{S}_v\cdot\left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_{uu}\times\mathbf{S}_v\right) + \mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_{vu}\right)\right] - \mathbf{S}_u\cdot\left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_{uv}\times\mathbf{S}_v\right) + \mathbf{n}\times\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_{vv}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{h^2}\left\{\mathbf{S}_v\cdot\left[-\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_{uu}\right)\mathbf{S}_v + \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_{uv}\right)\mathbf{S}_u\right] - \mathbf{S}_u\cdot\left[-\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_{uv}\right)\mathbf{S}_v + \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_{vv}\right)\mathbf{S}_u\right]\right\} \\
&= \frac{1}{h^2}\left(-Lg_{vv} + 2Mg_{uv} - Ng_{uu}\right) \\
&= -\frac{Lg_{vv} - 2Mg_{uv} + Ng_{uu}}{\det\left[g_{ik}\right]} = -\overline{\mathrm{K}}
\end{aligned}
$$

Azaz a normál-egységvektor divergenciája megegyezik az összeggörbület mínusz egyszeresével.

II.3.9. Többdimenziós terek

Először összefoglaljuk a fenti eredmények néhány következményét:

1. Konstans metrikus tenzor (triviálisan) euklideszi teret ír le.
2. A II.3.7 lehetőséget teremt a felületek tanulmányozására a beágyazottság feltételezése nélkül. Első lépésként a két dimenziós teret[19] tetszőlegesen paraméterezzük: különböző pontjaihoz más-más paraméterértékeket rendelve úgy, hogy a szomszédos pontok koordinátái differenciálisan kicsiny értékekkel különbözzenek egymástól. Második lépésként a teret metrikával látjuk el a metrikus tenzor koordinátafüggésének megadásával (pl. pontról-pontra történő hossz-és szögmérésekkel). Ezáltal a tér minden olyan tulajdonsága – beleértve annak (Gauss-)görbületét – meghatározható, amely a teret elhagyni nem tudó szereplők számára is fontosak lehetnek.
3. A Christoffel szimbólumok az ívhossz-minimalizáló funkcionálból adódó (II.35) geodetikus egyenlettel is definiálhatók. Ebből következik, hogy metrikus terekben a szimbólumok az alsó indexükben – a metrikus tenzor szimmetriájából folyóan – szimmetrikusak.

[19] Illetve általában annak egy véges tartományát.

4. A Christoffel szimbólumok (II.28) transzformációs képlete lehetővé teszi a (2D) tér tetszőleges pontjában olyan koordinátázás bevezetését, amelyben a Christoffel szimbólumok mind nullák, a (II.35) geodetikus egyenletek átmennek a $\ddot{u}^m = 0$. Szükség szerint egy további lineáris koordináta-transzformációval a pontbeli metrikus tenzor δ_{ik} alakra hozható. Ezen rendszer metrikája tehát lokálisan (az adott pont körül elsőrendűen differenciális méretekben) „izomorf” a síkkal. Ennek a véges kiterjesztése (a pontbeli metrikus tenzor véges tartományon való konstanssá tételével) a pontbeli érintősíkot definiálja. Lokálisan az eredeti 2D tér és pontbeli érintősíkjának pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető[20].
5. A vektorok a 4. pont érintősíkjának elemei. A paramétervonalak érintővektorai lokális (kovariáns) bázisokat definiálnak az érintősík többi vektorának. A metrikus tenzor komponensei ezen bázisvektorok skaláris szorzatai.

A 4. pont állítása, a Christoffel szimbólumokra vonatkozó tétel egyszerű konstrukcióval igazolható. A kiszemelt pontot lássuk el a 0 indexszel, koordinátái tehát $\left(u^i\right)_0$, a pontbeli Christoffel szimbólumok pedig jelöljük így: $\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0$. A speciális új, x^i -vel jelölt koordináták origóját helyezzük ebbe a pontba. A konstrukció szerint a régi és az új koordináták közötti kapcsolatot következőképpen definiáljuk:

$$x^i \overset{def}{=} u^i - \left(u^i\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 \left[u^k - \left(u^k\right)_0\right]\left[u^l - \left(u^l\right)_0\right] \tag{II.48}$$

Ekkor a 0 pontban:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x^i}{\partial u^m} = \delta^i_m + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 \left\{\delta^k_m \left[u^l - \left(u^l\right)_0\right] + \left[u^k - \left(u^k\right)_0\right]\delta^l_m\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^m}\right)_0 = \delta^i_m \\ &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^m \partial u^n} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 \left(\delta^k_m \delta^l_n + \delta^k_n \delta^l_m\right) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{mn} + \Gamma^i_{nm}\right)_0 = \left(\Gamma^i_{mn}\right)_0 \end{aligned} \tag{II.49}$$

A (II.28) transzformációs szabály alapján, az x^i -khez tartozó Christoffel szimbólumokat $\left(\tilde{\Gamma}^i_{kl}\right)_0$ -val jelölve az inverz transzformációra írhatjuk:

[20] Ez alapján a vektorok az eredeti térben is ábrázolhatók. Megjegyzendő még, hogy beágyazott terek esetében az megfeleltetés tipikus módja az érintősíkról való merőleges vetítés.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^i_{mn} = \left(\frac{\partial^2 x^r}{\partial u^m \partial u^n} + \frac{\partial x^p}{\partial u^m}\frac{\partial x^q}{\partial u^n}\tilde{\Gamma}^r_{pq}\right)\frac{\partial u^i}{\partial x^r} \\
&\qquad\qquad \underset{a\ 0\ \text{pontban (II.49)}}{\Rightarrow} \\
&\left(\Gamma^i_{mn}\right)_0 = \left[\left(\Gamma^r_{mn}\right)_0 + \delta^p_m \delta^q_n \left(\tilde{\Gamma}^r_{pq}\right)_0\right]\delta^i_r \\
&\left(\Gamma^i_{mn}\right)_0 = \left(\Gamma^r_{mn}\right)_0 + \left(\tilde{\Gamma}^i_{mn}\right)_0 \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \\
&\left(\tilde{\Gamma}^i_{mn}\right)_0 = 0
\end{aligned}
\tag{II.50}
$$

Azaz az új koordináták rendszerében az $\left(u^i\right)_0$ (vagy $x^i = 0$) pontban az új koordinátákhoz tartozó Christoffel szimbólumok mind nullák. A pontbeli metrikus tenzor koordináták változatlanok maradnak (az x^i rendszerben ugyanazok lesznek, mint az u^i rendszerben), hiszen transzformációjuk a (II.49) alapján az identitás-transzformáció: $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^m}\right)_0 = \delta^i_m$. Egy további *lineáris* transzformációval, amelyre nézve a Christoffel szimbólumok úgy transzformálódnak, mint a tenzorok (nulla voltukra tehát a lineáris transzformáció nincs hatással) a pontbeli metrikus tenzor a $g_{ik} = \delta_{ik}$ alakra hozható, így az adott pontban a síkkal (a 2D euklideszi térrel) izomorf rendszert kapunk, ahol a (II.35) geodetikus egyenletek az ismert, egyszerű: $\ddot{x}^i = 0$ alakúak. Ezt a koordinátarendszert geodetikus normálkoordináta-rendszernek nevezzük.

A fenti eredmények mindegyike, amely az érintősíkban igaz, általánosítható magasabb dimenziós terekbe is, azzal a különbséggel, hogy az érintőtér dimenziójának megfelelő számú lokális bázissal, metrikus tenzor komponenssel stb. kell számolnunk (pl. a három dimenziós érintőtér kovariáns bázisvektorai: $\mathbf{g}_{u^1}$, $\mathbf{g}_{u^2}$, $\mathbf{g}_{u^3}$, ha a tér paraméterezésére az $u^1,\ u^2,\ u^3$ koordinátákat használjuk).

A magasabb dimenziókban is érvényben maradó összefüggések az ú.n. Riemann geometria alkotóelemei. Pl. a (II.18)-ban bevezetett kontravariáns bázisok definiálhatók pusztán a $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = \delta^i_k$ képlettel, a Christoffel szimbólumok pedig a $\Gamma^l_{ik} = \left(\mathbf{g}_{ik} \cdot \mathbf{g}^l\right)$ összefüggéssel.

Az invariáns térfogatelem a (II.14) mintájára $\sqrt{g}\ du^1 du^2 \ldots$ lesz, ahol $g = \det\left[g_{ik}\right]$. Összesítve igazak maradnak a (II.13), a (II.16-25) a megfelelő dimenzióban, a geodetikus egyenletek (II.34-35), a transzformációs szabályok: II.3.3, (II.28), e fejezet öt pontos összefoglalójában írtak és következményeik. Magasabb dimenziókban is igaz, hogy a tér görbületi viszonyai a (II.45)-ben felületekre bevezetett $R^p_{ilk} = \dfrac{\partial \Gamma^p_{ik}}{\partial u^l} - \dfrac{\partial \Gamma^p_{il}}{\partial u^k} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^m_{il}\Gamma^p_{mk}$ görbületi tenzorral jellemezhetők[21], amely elsődlegesen a vektormezők deriválásakor lép fel (lásd III.4.2 pont). A felsorolt összefüggések semmit nem feltételeznek a görbült terek beágyazottságáról egy esetlegesen magasabb dimenziós (euklideszi) térbe.

Az alkalmazásokban gyakori, hogy a vektorokkal, tenzorokkal (Christoffel szimbólumokkal) felírt egyenletek nem tartalmazzák a bázisvektorokat, csupán komponenseiket. Az ilyen – nem invariáns mennyiségekkel felírt – a tárgyalásmódnál a kifejezések, végeredmények típusát a komponensek transzformációs szabályai határozzák meg.

Egy fontos megjegyzés teendő még a (II.27)-ben bevezetett Christoffel szimbólumokra: külső térbe való beágyazottság fel nem tételezése esetén a metrikus tenzor és emiatt a szimbólumok sem szükségszerűen szimmetrikusak az alsó indexükben (beágyazottság esetén ez a parciális deriváltak deriválási sorrend-függetlenségéből adódik). Nem szimmetrikus eset feltételesésével a $\Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}$ mennyiséget torziónak nevezzük. A torzióról feltehetjük, hogy nulla, de ennek ellenkezőjét is. Ez egy olyan szabadságfok, amellyel különböző típusú terek definiálhatók. Mindazonáltal a következő fizikai részben csak torziómentes terekkel foglalkozunk.

II.3.10. Példa: a gömbfelület Gauss görbülete

A gömb tökéletesen szimmetrikus objektum. A legegyszerűbb esetet, az $\mathbb{R}^3$-ba ágyazott R sugarú gömb Gauss görbületér határozzuk meg.

A gömb egyenlete a beágyazó térben, descartesi koordinátarendszert alkalmazva:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{II.51}$$

A pozitív z tartományra végezzük a számításokat. (II.51)-ből kifejezve a z koordinátát, és a dz koordinátadifferenciált:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 - x^2 + y^2} \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ dz &= -\frac{1}{z}\left(xdx + ydy\right) \end{aligned} \tag{II.52}$$

[21] Jelentős különbség viszont a tenzor független komponenseinek száma, amely 2D-ben mindössze 1, általában viszont alapvetően a metrikus tenzor szimmetriáiból fakadóan a lehetséges n^4 helyett csak $(n^4 - n^2)/12$.

Ebből az ívhossz-négyzet az $u^1 = x,\ u^2 = y$ koordinátázással (most hatványkitevők vannak felső pozíciókban)[22]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{z^2}\left(xdx + ydy\right)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\left(xdx + ydy\right)^2 \end{aligned} \tag{II.53}$$

A metrikus tenzor komponensek átrendezés után leolvashatók:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\left(xdx + ydy\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right)dy^2 + \frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \\ &= \frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}dx^2 + \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2}dy^2 + \frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \\ &\Rightarrow \\ g_{11} &= \frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2},\ g_{12} = g_{21} = \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2},\ g_{22} = \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned} \tag{II.54}$$

A vegyes indexű metrikus tenzor koordináták ebben a koordinátázásban nem nullák. Egyszerűbb szerkezethez jutunk az $u^1 = r,\ u^2 = \varphi$ polár rendszerre való áttéréssel:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\left(\varphi\right),\ y = r\sin\left(\varphi\right) \\ &\Rightarrow \\ dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = \cos\left(\varphi\right)dr - r\sin\left(\varphi\right)d\varphi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\left(\varphi\right)dr + r\cos\left(\varphi\right)d\varphi \end{aligned} \tag{II.55}$$

Ehhez a koordinátázáshoz egyszerűbb alakú metrikus tenzor tartozik (amelyhez egyszerűbb Christoffel szimbólumok tartoznak):

$$\begin{aligned} &xdx + ydy \\ &= r\cos\left(\varphi\right)\left[\cos\left(\varphi\right)dr - r\sin\left(\varphi\right)d\varphi\right] \\ &\ +r\sin\left(\varphi\right)\left[\sin\left(\varphi\right)dr + r\cos\left(\varphi\right)d\varphi\right] \\ &= rdr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &dx^2 + dy^2 \\ &= \left[\cos\left(\varphi\right)dr - r\sin\left(\varphi\right)d\varphi\right]^2 \\ &\ +\left[\sin\left(\varphi\right)dr + r\cos\left(\varphi\right)d\varphi\right]^2 \\ &= dr^2 + r^2d\varphi^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

[22] A (II.53) képletből jól látszik az x=y=0 pontban a síkkal való izomorfizmus.

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\left(xdx + ydy\right)^2 \\
&= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{r^2}{R^2 - r^2} dr^2 \\
&= \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\
&\Rightarrow \\
g_{11} &= \frac{R^2}{R^2 - r^2},\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = r^2 \\
g^{11} &= \frac{R^2 - r^2}{R^2},\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = \frac{1}{r^2}
\end{aligned}
\tag{II.56}
$$

A Christoffel szimbólumok (II.31):

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{\partial g_{11}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial r}\right) + 0 = \frac{r}{R^2 - r^2} \\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial r}\right) + 0 = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial r}\right) + 0 = -r\frac{R^2 - r^2}{R^2} \\
\Gamma^2_{11} &= 0 + \frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial r} + \frac{\partial g_{12}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi}\right) = 0 \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = 0 + \frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{22} &= 0 + \frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{II.57}
$$

A görbületi tenzorból a (II.43) alapján, és a metrikus tenzor vegyes indexű komponenseinek nulla értéke alapján elegendő meghatározni az R^2_{121} komponenst:

$$
\begin{aligned}
R^2_{121} &= \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial r} + \Gamma^m_{11}\Gamma^2_{m2} - \Gamma^m_{12}\Gamma^2_{m1} \\
&= 0 - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial r} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \left(\Gamma^2_{12}\right)^2 \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{r}{R^2 - r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}
\end{aligned}
\tag{II.58}
$$

Végül a szorzatgörbület (II.46):

$$
\mathrm{K}_{gömb} = \frac{R^u_{uvu} g_{uv} + R^v_{uvu} g_{vv}}{g_{uu} g_{vv} - g^2_{uv}} = \frac{0 + R^2_{121} g_{22}}{g_{11} g_{22} - 0} = \frac{\dfrac{r^2}{R^2 - r^2}}{\dfrac{R^2}{R^2 - r^2} r^2} = \frac{1}{R^2}
\tag{II.59}
$$

A gömbfelület tehát konstans (a koordinátaértékektől függetlenül, minden pontjában azonos) pozitív görbületű (kétdimenziós) tér. Hasonlóképpen belátható, hogy a kétpalástú hiperboloid:

$$z^2 = R^2 + x^2 + y^2 \tag{II.60}$$

a (nem pozitív definit):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 \tag{II.61}$$

metrikára nézve konstans negatív görbületű tér $-\dfrac{1}{R^2}$ görbülettel.

II.3.11. Példa: görbületek számítása Monge-folton

Határozzuk meg a kétváltozós függvényként adott felületdarab görbületi értékeit:

$$\mathbf{S}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k} \tag{II.62}$$

A lokális bázisok, és deriváltjaik:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x &= \mathbf{i} + f_x\mathbf{k} \\ \mathbf{S}_y &= \mathbf{j} + f_y\mathbf{k} \\ \mathbf{S}_{xx} &= f_{xx}\mathbf{k} \\ \mathbf{S}_{xy} &= f_{xy}\mathbf{k} \\ \mathbf{S}_{yy} &= f_{yy}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{II.63}$$

A metrikus tenzor komponensek:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 1 + f_x^2 \\ g_{xy} &= f_x f_y \\ g_{yy} &= 1 + f_y^2 \end{aligned} \tag{II.64}$$

A normálvektorok:

$$\begin{aligned} &\mathbf{N} = \mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y = \mathbf{i}\times\mathbf{j} + f_x\mathbf{k}\times\mathbf{j} + f_y\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &\sqrt{g} = \left|\mathbf{N}\right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{aligned} \tag{II.65}$$

A szorzatgörbület (II.40):

$$\mathrm{K} = \frac{\left(\mathbf{S}_{xx}\cdot\mathbf{N}\right)\left(\mathbf{S}_{yy}\cdot\mathbf{N}\right) - \left(\mathbf{S}_{xy}\cdot\mathbf{N}\right)^2}{\left|\mathbf{N}\right|^4} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2} \tag{II.66}$$

Az összeggörbölet (II.40):

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{K}} &= \frac{\left(\mathbf{S}_{xx}\cdot\mathbf{N}\right)g_{yy} - 2\left(\mathbf{S}_{xy}\cdot\mathbf{N}\right)g_{xy} + \left(\mathbf{S}_{yy}\cdot\mathbf{N}\right)g_{xx}}{\left|\mathbf{N}\right|^3} = \\ &= \frac{f_{xx}\left(1 + f_y^2\right) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}\left(1 + f_x^2\right)}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{II.67}$$

Ha az *f*-re az *xy* sík (mint 2D euklideszi tér) felett értelmezett függvényként tekintünk akkor a fentiek írhatók a következőképpen:

$$\mathrm{K} = \frac{\det\left[\nabla\nabla_{xy} f\right]}{\left[1 + \left(\nabla_{xy} f\right)^2\right]^2}$$

$$\bar{\mathrm{K}} = \left(1 + \left(\nabla_{xy} f\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\Delta_{xy} f + \nabla_{xy}^{\perp} f \cdot \nabla\nabla_{xy} f \cdot \nabla_{xy}^{\perp} f\right) \tag{II.68}$$

(II.68)-ban a Δ_{xy} az *xy* sík Laplace operátora, a $\nabla_{xy}^{\perp} = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\right]^T$ az *xy* sík-gradiensre merőleges irányú deriválás operátora, a $\nabla\nabla_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ pedig a második deriváltak operátora (Hesse-mátrix).

A fenti eredmények egy alkalmazása a jellegzetes képpontok (interest points) keresése: az egyik leggyakoribb képjellemző-keresési módszer a foltok (blobs) megtalálását teszi lehetővé a Hesse-mátrix determinánsa alapján, amely a (II.68) szerint a nagy szorzatgörbületi értékkel (és nagy lokális képfüggvény-gradienssel) rendelkező területek kiválasztását jelenti.

III. Alkalmazás a fizikában

A fejezet felépítése a következő:

- A bevezetésben a klasszikus fizikával kapcsolatos programunkat vázoljuk fel.
- A második részben az anyagi pont mozgásának klasszikus leírása kapcsán megismerkedünk a fizika alapvető fogalmaival.
- A harmadik részben a relativisztikus elmélet néhány elemét mutatjuk be.

III.1. Bevezetés

A mechanika a variációszámítás alkalmazásának egyik legfontosabb terepe. A mozgó anyagi pont[23] leírása lényegében megegyezik egy térgörbe (általános paraméterezés melletti) megadásával. A paraméter szerepét az „idő” veszi fel. Az, hogy milyen térgörbe szerinti mozgás valósul meg, a pontot ért hatások „erők” felelősek. A fizika fogalmai szerint a tömegpontra ható erő és a részecske gyorsulása közötti arányossági tényező a test tömege: $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. A következőkben azzal a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, amikor egyetlen pont mozgását vizsgáljuk állandó külső erőtérben. Jó közelítéssel ilyen helyzetnek tekinthető pl. egy bolygó mozgása a naprendszerben, ahol a többi bolygóval való kölcsönhatás elhanyagolható a központi égitest „gravitációs hatása” mellett, a bolygó és a központi égitest is pontszerűnek tekinthető e rendszerben.

Gyakran hallható, hogy a mechanika lényegében geometria. Célunk ennek a kijelentésnek a tartalmát megérteni. Nem foglalkozunk tehát alapos elemzéssel, csakis a cél eléréséhez szükséges mennyiségű fogalommal és eszközökkel ismerkedünk meg.

III.2. Klasszikus fizika: a legkisebb hatás elve

A klasszikus fizika térfelfogása euklideszi, a természeti jelenségek leírását egymástól független idő- és térkoordinátákkal kísérli meg, de matematikai eszköztárában jelentősen támaszkodik a variációs elvekre.

A *klasszikus mechanika* legkisebb hatásának elve szerint az anyagi pont mozgásakor kialakuló térgörbe (vagy pálya) a következő, hatásfüggvénynek nevezett integrált minimalizálja:

$$
\begin{gathered}
Q = \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 - mV\left(\mathbf{r}\right)dt \Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - mV\left(\mathbf{r}\right) \\
\left(\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right)
\end{gathered}
\qquad \text{(III.1)}
$$

A térgörbe időszerinti deriváltja a pont sebessége $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, a $V\left(\mathbf{r}\right)$ az erőtér potenciálja, amelyben a mozgás történik. A (III.1)-ből származó Euler-Lagrange egyenletet mozgásegyenletnek nevezzük, amely esetünkben:

$$
0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = -m\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{F} = -m\nabla V \qquad \text{(III.2)}
$$

[23] Vagy „részecske”

A (III.2) szerint a V potenciálú erőtérben a pontra ható erő a potenciál negatív gradiense és a tömeg szorzata. Az erő egyszerű eszközzel (rugós erőmérő) mérhető.

Példa – a gömbszimmetrikus erőtér: A mérések szerint egy nagytömegű (jelöljük a tömegét M -mel) testtől nagy távolságban – ahol már pontszerűnek tekinthető – egy hozzá képest kicsiny tömegű (jelöljük a tömegét m -mel) testre ható erő nagysága:

$$\left|\mathbf{F}\right| = G\frac{mM}{\mathbf{r}^2} \tag{III.3}$$

Az erő a nagytömegű test felé mutat, a G arányossági tényező a gravitációs állandó. Ebből a M által keltett erőtér potenciálja (egy konstans még hozzáadható, de ezzel a választással a ∞ -ben nulla), és az erő (ha $\mathbf{r}$ M -ből m -re mutat, $\mathbf{e}$, pedig ezen irány egységvektora):

$$\begin{gathered} V\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{GM}{\left|\mathbf{r}\right|} = -\frac{GM}{\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}},\ \mathrm{mert} \\ \mathbf{F} = -m\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(-G\frac{M}{\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}}\right) = -G\frac{mM}{\mathbf{r}^2}\frac{\mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}\right|} = -G\frac{mM}{\mathbf{r}^2}\mathbf{e} \end{gathered} \tag{III.4}$$

III.2.1. Szabad részecske mozgásegyenlete

A legegyszerűbb mozgásegyenlet az erőtől mentes mozgás, amely Lagrange függvénye a (III.1), potenciáltól mentesített változata:.

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{III.5}$$

Ez a Lagrange függvény formailag teljesen megegyezik a (II.8) ívhossz szerinti paraméterezés melletti egyenes egyenletével (erről szól a II.2.2 fejezet). Az ebből származó egyenletek: $m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = const$. Ha koordinátás alakban írjuk fel, általános koordinátákkal, akkor formálisan a (II.34) problémára jutunk, amelynek természetesen a (II.35): $\Gamma_{ik}^m\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^m = 0$ a megoldása. Mivel a klasszikus fizika tere a háromdimenziós euklideszi tér, azért a *teljes térben* bevezethetők Descartes koordináták, ahol a metrikus tenzor komponensek az $\dot{\mathbf{r}}^2 = g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k = 1\left(\dot{u}^1\right)^2 + 1\left(\dot{u}^2\right)^2 + \ldots + 0\dot{u}^1\dot{u}^2 + \ldots = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2$ (az $u^1 = X,\ u^2 = Y,\ u^3 = Z$ jelölésekkel) általános képletből leolvashatóan konstansok (mátrixa pedig az egységmátrix). Mivel a Christoffel szimbólumok a (II.30) szerint a metrikus tenzor deriváltjaiból számolhatók ezért descartesi koordinátákban nullák. Ekkor a mozgásegyenletek koordinátás alakja (II.35) három, egyszerű formájú koordinátaegyenlettel adható meg:

$$\begin{gathered} \Gamma_{ik}^m\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^m = 0 \Leftrightarrow \\ \ddot{X} = \ddot{Y} = \ddot{Z} = 0 \end{gathered} \tag{III.6}$$

III.2.2. Az energia

Visszatérve a Lagrange függvényre, látható, hogy nem függ explicit módon az időtől $\left(\frac{\partial L}{\partial t}=0\right)$, ezért teljes időszerinti deriváltja ezt a tagot nem tartalmazza, általánosan:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} \tag{III.7}$$

Behelyettesítve ebbe a megvalósuló mozgás mentén teljesülő Euler-Lagrange egyenleteket ($\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}=0\rightarrow\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$), kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\\ \frac{dL}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right)\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\mathbf{r}}-L\right)=0\end{aligned} \tag{III.8}$$

Azaz a megvalósuló mozgás mentén:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\mathbf{r}}-L=const \tag{III.9}$$

A (III.9) mennyiséget, amely tehát a mozgás közben állandó, energiának nevezzük.

Alkalmazzuk ezt a klasszikus fizika tömegpontjának (III.1) Lagrange függvényére: $L=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-mV\left(\mathbf{r}\right)$

$$m\dot{\mathbf{r}}^2-\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-mV\left(\mathbf{r}\right)\right)=const\;\Rightarrow\;\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2+mV\left(\mathbf{r}\right)=const=E \tag{III.10}$$

(III.10)-ben szokás az első tagot mozgási energiának, a másodikat helyzeti (potenciális) energiának, összegüket (teljes) energiának nevezni és *E*-vel jelölni, amely tehát egy mozgásállandó[24].

III.2.3. A klasszikus fizika kritikája

A szabad részecskétől elvárnánk, hogy két pont között olyan pályán mozogjon, amely a legrövidebb hosszúságú. Persze egyenesen mozog, de mozgása közben miért nem a (II.6)-ot,

[24] Fontos megjegyezni, hogy az energia – mint mozgásállandó – megmaradása, és a legkisebb hatás – mint a lehetséges mozgások közül a megvalósuló mozgás kiválasztási elve – ekvivalensek abban az értelemben, hogy származtathatók egymásból.

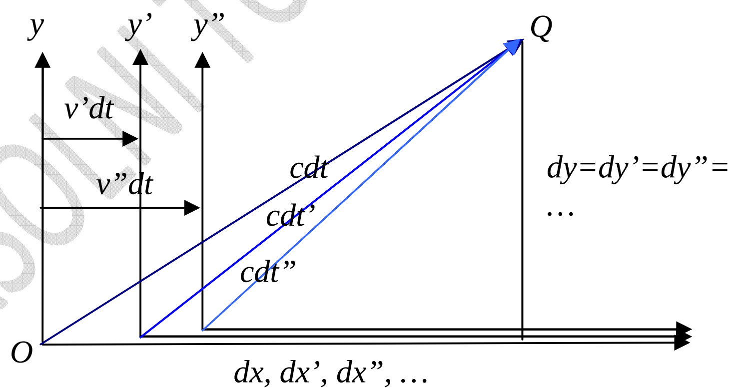
miért a (II.8)-at minimalizálja. A kettő csak akkor ekvivalens, ha az idő megegyezik[25] az ívhosszal.

Az erőtérben mozgó pont nem érzékel semmiféle erőt, a rendszerében „utazó”mondhatja, hogy „egyenesen” halad. A külső megfigyelő számára viszont láthatóan nem egyenes pályán halad, amely a külső megfigyelő számára „erőtér” megjelenésében nyilvánul meg.

A fentiek azt sugallhatják, hogy a klasszikus fizika rendszere valamilyen értelemben tökéletlen. A következő fejezetben ezen problémák feloldására kínálunk megoldást.

III.3. Relativisztikus fizika

Segítségünkre lehet a fénysebesség állandóságának jelensége, amely szerint a fény minden, egymáshoz képest mozgó rendszerben állandónak tapasztalt. Próbáljunk meg ebből a tényből kiindulni. A jelenség az egy térdimenziót (a relatív mozgások iránya által kijelölt) és időt tartalmazó rendszerekben is jelentkezik, ezért feltehető, hogy a haladási irányra merőleges dimenziókban semmi nem történik[26]. Egy merőleges (tehát változatlan) dimenzió menti koordinátatengely segítségével tehát (ld. III.1. ábra). A feltételezés szerint az egymáshoz képest mozgó rendszerek (közös) origójából (*O*) egy fénysugár indul, amely egy kicsiny (a vesszőtlen rendszerben *dt*) idő mulva egy *Q* pontba érkezik.



III.1. ábra: Invariáns ívelemek.

A *dy*-nal jelölt koordináta-különbségek azonosságának feltételezésével a következő azonosságok írhatók a derékszögű háromszögekre:

$$c^2dt^2 - dx^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt''^2 - dx''^2 \qquad \text{(III.11)}$$

[25] Pontosabban arányos

[26] Ez nyilvánvaló ha feltesszük a tér és idő homogenitását, továbbá a Lorentz transzformációból is látszik, amelynek azonban konkrét alakjára nem lesz szükségünk.

Ebből azonnal látszik, hogy fel kell adnunk az egyidejűség eszméjét, a különböző rendszerekben az idők különbözőképpen múlnak. Ha a koordinátarendszereinket nem úgy választjuk, hogy a haladási irány mentén vesszük fel az *x* tengelyeket, akkor tetszőleges helyzetű koordinátarendszer választással pl. a vesszőtlen rendszerre: $dx^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$, és így az általános helyzetű koordinátarendszerekben a (III.11) a következő alakot ölti:

$$c^2dt^2 - \left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right) = c^2dt'^2 - \left(dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2\right) = ... \overset{jel}{=} ds^2 \qquad \text{(III.12)}$$

Mivel a $ds^2 = c^2dt^2 - \left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right) = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2$ mennyiség[27] minden koordinátarendszerben ugyanakkora (azaz a rendszer választásától független invariáns mennyiség), választhatjuk a tér metrikájának, hasonlóan, ahogy a (II.3) euklideszi ívhosszat a klasszikus esetben. A (III.12) metrikát általában pszeudó-euklideszi metrikának nevezik[28].

Ha egy tömegpont („részecske") ívhosszát a hozzákötött koordinátarendszerben írjuk fel, amelyben tehát térkoordinátái mindvégig (azonosan) nullák, az ívhossz (III.12) kifejezése:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right)\Big|_{X\equiv 0, Y\equiv 0, Z\equiv 0} = c^2dt^2 \overset{jel}{=} c^2d\tau^2 \qquad \text{(III.13)}$$

Ekkor az ívhossz kifejezése csak a részecske saját rendszerében folyó idővel arányos. Ezt a kitüntetett (ívhosszal arányos) időt nevezik sajátidőnek, és τ-val jelölik. Egy rendszerben folyó idő és a rendszerből tekintve *v* sebességgel mozgó részecske sajátideje között, a:

$$\begin{gathered} c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - \left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right) \Rightarrow \\ d\tau = \sqrt{1 - \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{c^2dt^2}}\; dt = \sqrt{1 - \frac{d\mathbf{r}^2}{c^2dt^2}}\; dt = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\; dt \end{gathered} \qquad \text{(III.14)}$$

teremt kapcsolatot.

III.3.1. A relativisztikus szabad részecske klasszikus határesete

A fenti pszeudó-euklideszi metrikára alapozott ívhossz minimalizáló hatásintegrál:

$$-mc\int ds \overset{\substack{\text{sajátidővel}\\ \text{kifejezve}}}{=} -mc\int c\,d\tau \overset{\substack{\text{abból a rendszerből,}\\ \text{amelben sebessége } \mathbf{v}}}{=} -mc^2\int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\; dt \qquad \text{(III.15)}$$

[27] A *dX, dY, dZ* koordinátájú pontot a (3D) tér *d***r** vektorával jelöltük.
[28] Néhol a (korrektebb) hiperbolikus metrika kifejezést is használják.

A *-mc* egy arányossági tényező, amely a végeredményre nincs hatással, de a $\left|\mathbf{v}\right| \ll c$ határesetben biztosítja a klasszikus fizikával való visszamenőleges egyezőséget. Ehhez a $\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$ mennyiséget fejtsük sorba a $\mathbf{v}=0$ körül:

$$\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \approx \left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\mathbf{v}=0} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{\mathbf{v}=0} \cdot \mathbf{v}$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\left(-\frac{\mathbf{I}}{c^2}\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{vv}}{c^4}\cdot\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\mathbf{v}=0} \cdot \mathbf{v} \tag{III.16}$$
$$= 1-\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}$$

(III.16)-ban **I** az identitás-(egység)tenzor. Ezzel a helyettesítéssel a (III.15) relativisztikus ívhossz minimalizáló hatásintegrál kis sebességekre átmegy a klasszikus szabad részecske hatásintegráljába:

$$-mc^2\int\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}dt \approx -mc^2\int dt + \int\frac{m\mathbf{v}^2}{2}dt \tag{III.17}$$

a (III.5) Lagrange függvénnyel[29] ($\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$) egybevetve, eredményünk magyarázatul szolgál arra, hogy a klasszikus esetben az idő (kis sebességeknél minden rendszerben folyó idő jó közelítéssel megegyezik a sajátidővel[30]) szolgálhat ívhosszként a (valódi) ívhossz közelítéseként: $ds^2 = c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - \left(dX^2+dY^2+dZ^2\right) \approx c^2dt^2 \quad \Rightarrow \quad ds = cd\tau \approx cdt$.

III.3.2. A szabad részecske energiája

A (III.9) alapján a szabad részecske energiája mozgása közben állandó, értéke: $E=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}-L$.

Határozzuk meg ezt a mennyiséget relativisztikus esetben. A (III.15) utolsó alakjából a Lagrange függvény: $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$, és ebből:

[29] Az első (konstans) tagot tartalmazó integrál nem ad járulékot a levezethető mozgásegyenletekhez, ezért elhagyható, és választható a második tag önmagában.
[30] Pontosabban az ívhossz sajátidővel arányos mennyiség, a fénysebességgel, mint arányossági tényezővel.

$$
E = m\frac{\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = m\frac{\mathbf{v}^2 + c^2\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}
$$
$$
= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \tag{III.18}
$$

Nyugalomban levő részecske energiája ezek szerint (a híres tömeg-energia ekvivalencia):

$$
E_0 = mc^2 \tag{III.19}
$$

A mozgó szabad részecske energiája tehát a nyugalmi és mozgási energiák összege, ebből a mozgási energia, és annak klasszikus közelítése (levezetése a (III.16)-hoz hasonlóan történik):

$$
E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} - 1\right)
$$
$$
\overset{|\mathbf{v}|\ll c}{\Rightarrow} E_{kin} \approx \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \tag{III.20}
$$

III.3.3. Részecske görbült térben (klasszikus határeset)

A III.3.1 fejezet szerint a klasszikus fizika szabad részecskét leíró hatásintegrálja a (III.11) ívhossz minimalizáló integráljának $|\mathbf{v}| \ll c$ határesete. Felmerülhet a kérdés, hogy a (III.1) hatásnak – azaz az erőtérben mozgó részecske esetének – a tér milyen metrikája feleltethető meg. Induljunk ki ehhez a szabad részecske (III.15) ívhossz minimalizáló integráljából, és egészítsük ki az erőtér $V(\mathbf{r})$ potenciáljával[31] (és az így adódó ívhosszat, a pszeudó-euklideszitől való megkülönböztetés miatt felülhullámozzuk):

$$
-mc\int d\tilde{s} = -m\int\left(V + c^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\right)dt \Rightarrow
$$
$$
d\tilde{s} = -\left(\frac{V}{c} + c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\right)dt \Rightarrow \tag{III.21}
$$
$$
d\tilde{s}^2 = \left[\left(\frac{V}{c}\right)^2 + 2V\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\right]dt^2 + \left(c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2\right) \overset{|\mathbf{v}|\ll c}{\approx} \left(c^2 + 2V\right)dt^2 - d\mathbf{r}^2
$$

[31] Azaz most az mc^2 konstans eltéréssel – amely a végeredményt (a levezethető mozgásegyenletet) nem befolyásolja – a (III.1)-et írjuk fel.

A (III.21) utolsó sora szögletes zárójelében a $\frac{V}{c}$ elhagyható a második tag mellett. A (III.2) gömbszimmetrikus erőtér esetére:

$$d\tilde{s}^2 \approx \left(1 - 2\frac{GM}{c^2\left|\mathbf{r}\right|}\right)c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 \qquad \text{(III.22)}$$

Az eredményeket összefoglalva a következő megállapításokat tehetjük, amelyek elvezetnek az einsteini gravitációelmélethez:

1. Szabad részecske a $ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2$ metrikájú pszeudó-euklideszi tér egyenesén mozog. Ez az ívhossz a részecske sajátidejével, $\left|\mathbf{v}\right| \ll c$ esetben ez nagyjából megegyezik az összes többi rendszerben folyó idővel.
2. Gyenge gravitációs erőtérben, ahol a kialakuló mozgásokra a $\left|\mathbf{v}\right| \ll c$ feltétel igaz, a részecske pedig a $d\tilde{s}^2 = \left(c^2 + 2V\right)dt^2 - d\mathbf{r}^2$ metrikájú (enyhén görbült) tér geodetikusán – hiszen az a (III.21) ívhossz minimalizáló integrállal számolható – mozog. Az ezen a geodetikuson mérhető ívhossz ez esetben is nagyjából megegyezik az összes többi rendszerben folyó idővel.
3. A mozgásegyenletek koordinátás alakja minden esetben az általánosan, tetszőleges (pl. görbevonalú) koordinátákra is és görbült terekben is igaz, (II.35) alakú, ahol a pont az ívhossz (sajátidő) szerinti deriválást, illetve kis sebességek esetén tetszőleges rendszerben folyó idő szerinti deriválást jelenti.

III.4. Tezoranalzis

A továbbiakban a magasabb dimenziós érintőterek mennyiségeivel foglalkozunk. Ettől kezdve a lokális (kovariáns) bázisvektorokra a $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \mathbf{g}_3 \cdots$ jelölést használjuk. A metrikus tenzor komponensei: $g_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k$, $i,k = 1,2,3\ldots$. A kontravariáns bázisok: $\mathbf{g}^1,\ \mathbf{g}^2,\ \mathbf{g}^3 \ldots$, amelyek a $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k$ egyenlettel definiáltak.

Egy vektor[32] kétféle felírása: $\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i = v_k\mathbf{g}^k$. Ha vektoraink kitöltik a rendelkezésre álló teret, akkor általában a hely (koordináták bevezetésével a koordináták) függvényei pl.: $\mathbf{v}\left(u^1, u^2, \ldots\right) \overset{jel}{=} \mathbf{v}\left(u^m\right) = v^i\left(u^m\right)\mathbf{g}_i\left(u^m\right)$.

Egy másodrendű tenzor négyféleképpen írható: $\mathbf{T} = t^{ik}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k = t^i{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}^k = t_i{}^k\mathbf{g}^i\mathbf{g}_k = t_{ik}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^k$. A másodrendű tenzorok tehát felírhatók a bázisvektorokból alkotott diádok lineáris kombinációjaként, a kombinációs tényezők a tenzor komponensei. A diádok és egy vektor skaláris szorzatai: $\mathbf{uv}\cdot\mathbf{w} = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\right)\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{w}\cdot\mathbf{uv} = \left(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{v}$, két diád skaláris szorzata pedig: $\mathbf{xy}\cdot\mathbf{vw} = \left(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{xw}$, vagy $\mathbf{vw}\cdot\mathbf{xy} = \left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}\right)\mathbf{vy}$. Hasonlóan definiálhatunk magasabb rendű mennyiségeket is. Ha a tér pontjaihoz tenzorokat rendelünk, akkor tenzormezőről beszélünk.

Egy másodrendű $\mathbf{T}$ tenzor szimmetrikus, ha $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$, antiszimmetrikus, ha $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{w} = -\mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$, minden $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorra. A tenzorkoordináta szimmetrikus tenzornál:

$$\begin{aligned} v^i\mathbf{g}_i\cdot t_{kl}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\cdot w^j\mathbf{g}_j &\overset{szimmetrikus}{=} w^i\mathbf{g}_i\cdot t_{kl}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\cdot v^j\mathbf{g}_j \Rightarrow \\ t_{kl}v^iw^j\left(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^k\right)\left(\mathbf{g}^l\cdot\mathbf{g}_j\right) &= t_{kl}w^iv^j\left(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^k\right)\left(\mathbf{g}^l\cdot\mathbf{g}_j\right) \\ t_{kl}v^iw^j\delta_i^k\delta_j^l &= t_{kl}w^iv^j\delta_i^k\delta_j^l \\ t_{kl}v^kw^l &= t_{kl}w^kv^l \\ t_{kl}v^kw^l &= t_{lk}v^kw^l \Rightarrow t_{kl} = t_{lk} \end{aligned} \tag{III.23}$$

A (III.23)-ban kihasználtuk a szimmetrikus tenzor definícióját, és azt, hogy az összegző indexek tetszőlegesen választhatók. Hasonlóan megfontolások alapján a szimmetrikus tenzorok koordinátái:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= t_{ki} \\ t^{ik} &= t^{ki} \\ t^i{}_k &= t_k{}^i \end{aligned} \tag{III.24}$$

Antiszimmetrikus tenzor koordinátái:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= -t_{ki} \\ t^{ik} &= -t^{ki} \\ t^i{}_k &= -t_k{}^i \end{aligned} \tag{III.25}$$

Szimmetrikus tenzorra példa a metrikus tenzor (inverz metrikus tenzor), amely komponensei a bázisok skaláris szorzatai (jelöljük ideiglenesen $\mathbf{g} = g_{lk}\mathbf{g}^l\mathbf{g}^k$ -vel):

[32] A vektorok invariáns mennyiségek, ezért szükségképpen egy kontravariáns és egy kovariáns mennyiség szorzataként írhatók, ld. 2.3.3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} &= v^i\mathbf{g}_i \cdot g_{lk}\mathbf{g}^l\mathbf{g}^k \\
&= v^i g_{lk}\left(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^l\right)\mathbf{g}^k = v^i g_{lk}\delta_i^l\mathbf{g}^k = v^i g_{lk}\delta_i^l\mathbf{g}^k = v^l g_{lk}\mathbf{g}^k \\
&= v_k\mathbf{g}^k \Rightarrow \\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} &= \mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{III.26}
$$

Szokás ezért a metrikus (inverz metrikus) tenzor komponenseit az egység vagy identitás tenzor kovariáns (kontravariáns) komponenseinek nevezni.

III.4.1. Kovariáns derivált

Egy tetszőleges **X** mező jobb és bal oldali gradiense[33]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}\nabla &\overset{def}{=} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial u^i}\mathbf{g}^i\left(\overset{jel}{=}\mathbf{X}_i\mathbf{g}^i\right) \\
\nabla\mathbf{X} &\overset{def}{=} \mathbf{g}^i\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^i}
\end{aligned}
\tag{III.27}
$$

Ha nem skalármezőről van szó, akkor hasonlóan képezhető a divergencia:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}\cdot\nabla &\overset{def}{=} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial u^i}\cdot\mathbf{g}^i \\
\nabla\cdot\mathbf{X} &\overset{def}{=} \mathbf{g}^i\cdot\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial u^i}
\end{aligned}
\tag{III.28}
$$

Vektormező esetén a kétféle divergencia megegyezik. Végül a rotáció:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\times\nabla &\overset{def}{=} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^i}\times\mathbf{g}^i \\
\nabla\times\mathbf{v} &\overset{def}{=} \mathbf{g}^i\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^i}
\end{aligned}
\tag{III.29}
$$

Számoljuk ki egy vektormező (jobb oldali) gradiensét:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\nabla &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial\left(v^k\mathbf{g}_k\right)}{\partial u^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial v^k}{\partial u^i}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i + v^k\frac{\partial\mathbf{g}_k}{\partial u^i}\mathbf{g}^i \\
&= \frac{\partial v^k}{\partial u^i}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i + v^k\left(\Gamma_{ki}^m\mathbf{g}_m\right)\mathbf{g}^i = \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^l\Gamma_{li}^k\right)\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i \\
&\overset{jel}{=} v_{:i}^k\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i \\
&\Rightarrow v_{:i}^k = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} + \Gamma_{li}^k v^l
\end{aligned}
\tag{III.30}
$$

Az utolsó sor kifejezését a vektormező *kovariáns deriváltjának* nevezzük, amely tehát a vektormező gradiensének kifejezése abban a lokális koordinátarendszerben kifejezve, amely pontban a deriváltakat képezzük. Meghatározhatjuk ugyanezt a kovariáns vektor-

[33] A kontravariáns bázisvektorral kifejezett mennyiség. Ez szükségszerű, a szorzat invarianciájának megkövetelése miatt.

komponensekre is. Ehhez szükségünk lesz a következő azonosságból fakadó összefüggésre (utolsó sor):

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial \delta_k^l}{\partial u^i} = \frac{\partial\left(\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_k\right)}{\partial u^i} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial u^i} \cdot \mathbf{g}_k &= -\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial u^i} \cdot \mathbf{g}^l \Rightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial u^i} \cdot \mathbf{g}_k &= -\Gamma_{ki}^m \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}^l \\
\frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial u^i} \cdot \mathbf{g}_k &= -\Gamma_{ki}^m \delta_m^l = -\Gamma_{ki}^l \Rightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial u^i} &= -\Gamma_{mi}^l \mathbf{g}^m
\end{aligned}
\tag{III.31}
$$

Tehát:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\nabla &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial\left(v_k \mathbf{g}^k\right)}{\partial u^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial v_k}{\partial u^i}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i + v_k \frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial u^i}\mathbf{g}^i \\
&= \frac{\partial v_k}{\partial u^i}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i - v_k\left(\Gamma_{mi}^k \mathbf{g}^m\right)\mathbf{g}^i = \left(\frac{\partial v_k}{\partial u^i} - v_l \Gamma_{ki}^l\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i \\
&\overset{jel}{=} v_{k:i}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i \\
&\Rightarrow v_{k;i} = \frac{\partial v_k}{\partial u^i} - \Gamma_{ki}^l v_l
\end{aligned}
\tag{III.32}
$$

Hasonlóan képezhetők a magasabb rendű tenzorok kovariáns derivált kifejezései, pl.:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\nabla &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial\left(t_{kl}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\right)}{\partial u^i}\mathbf{g}^i \\
&= \frac{\partial t_{kl}}{\partial u^i}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^i + t_{kl}\frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial u^i}\mathbf{g}^l\mathbf{g}^i + t_{kl}\mathbf{g}^k\frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial u^i}\mathbf{g}^i \\
&= \frac{\partial t_{kl}}{\partial u^i}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^i - t_{kl}\left(\Gamma_{mi}^k\mathbf{g}^m\right)\mathbf{g}^l\mathbf{g}^i - t_{kl}\mathbf{g}^k\left(\Gamma_{mi}^l\mathbf{g}^m\right)\mathbf{g}^i \\
&= \left(\frac{\partial t_{kl}}{\partial u^i} - t_{ml}\Gamma_{ki}^m - t_{km}\Gamma_{li}^m\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^i \\
&\Rightarrow t_{kl;i} = \frac{\partial t_{kl}}{\partial u^i} - t_{ml}\Gamma_{ki}^m - t_{km}\Gamma_{li}^m
\end{aligned}
\tag{III.33}
$$

A másodrendű tenzorok egy különleges esete figyelmet érdemel, ennek a kovariáns deriváltja nulla. Ez a speciális tenzor – nem meglepő módon – az identitás-(vagy metrikus)tenzor:

$$
\begin{aligned}
g_{kl;i} &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - g_{ml}\Gamma_{ki}^m - g_{km}\Gamma_{li}^m \\
&= \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - g_{ml}\frac{1}{2}g^{nm}\left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^n}\right) - g_{km}\frac{1}{2}g^{nm}\left(\frac{\partial g_{nl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial u^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial u^n}\right) \\
&= \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \frac{1}{2}\delta_l^n\left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^n}\right) - \frac{1}{2}\delta_k^n\left(\frac{\partial g_{nl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial u^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial u^n}\right) \\
&= \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{III.34}
$$

A második sorban elvégeztük a Christoffel szimbólumok (II.31) szerinti behelyettesítését. Eredményünk azt jelenti, hogy a kovariáns deriválás műveletére nézve a metrikus tenzor konstansként viselkedik, azaz szabadon mozgatható a kovariáns deriválás művelete alá-alól.

III.4.2. A görbületi tenzor

Képezhetjük egy vektormező második gradiensét is (III.32)-ből:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\nabla\nabla &= \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial u^i} - v_l\Gamma^l_{ki}\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i\right]\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial u^j}\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial u^i} - v_l\Gamma^l_{ki}\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i\right]\right\}\mathbf{g}^j \\
&= \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial u^i\partial u^j} - \frac{\partial v_l}{\partial u^j}\Gamma^l_{ki} - v_l\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j}\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
&\quad -\left(\frac{\partial v_k}{\partial u^i} - v_l\Gamma^l_{ki}\right)\left(\Gamma^k_{mj}\mathbf{g}^m\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j + \mathbf{g}^k\Gamma^i_{mj}\mathbf{g}^m\mathbf{g}^j\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial u^i\partial u^j} - \frac{\partial v_l}{\partial u^j}\Gamma^l_{ki} - v_l\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial v_m}{\partial u^i}\Gamma^m_{kj} + v_l\Gamma^l_{ki}\Gamma^m_{kj} - \frac{\partial v_k}{\partial u^m}\Gamma^m_{ij} + v_l\Gamma^l_{km}\Gamma^m_{ij}\right)\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
&\overset{jel}{=} v_{k;i;j}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
\Rightarrow v_{k;i;j} &= \frac{\partial^2 v_k}{\partial u^i\partial u^j} - \frac{\partial v_l}{\partial u^j}\Gamma^l_{ki} - v_l\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial v_m}{\partial u^i}\Gamma^m_{kj} + v_l\Gamma^l_{ki}\Gamma^m_{kj} - \frac{\partial v_k}{\partial u^m}\Gamma^m_{ij} + v_l\Gamma^l_{km}\Gamma^m_{ij}
\end{aligned} \tag{III.35}$$

Vagy a (III.30)-ból:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\nabla\nabla &= \left[\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^l\Gamma^k_{li}\right)\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i\right]\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial u^j}\left[\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^l\Gamma^k_{li}\right)\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i\right]\right\}\mathbf{g}^j \\
&= \left(\frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i\partial u^j} + \frac{\partial v^l}{\partial u^j}\Gamma^k_{li} + v^l\frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^j}\right)\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
&\quad +\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^l\Gamma^k_{li}\right)\left(\Gamma^m_{kj}\mathbf{g}_m\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j - \mathbf{g}_k\Gamma^i_{mj}\mathbf{g}^m\mathbf{g}^j\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i\partial u^j} + \frac{\partial v^l}{\partial u^j}\Gamma^k_{li} + v^l\frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^j} + \frac{\partial v^m}{\partial u^i}\Gamma^k_{mj} + v^l\Gamma^m_{li}\Gamma^k_{mj} - \frac{\partial v^k}{\partial u^m}\Gamma^m_{ij} - v^l\Gamma^k_{lm}\Gamma^m_{ij}\right)\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
&\overset{jel}{=} v^k{}_{;i;j}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
\Rightarrow v^k{}_{;i;j} &= \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i\partial u^j} + \frac{\partial v^l}{\partial u^j}\Gamma^k_{li} + v^l\frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^j} + \frac{\partial v^m}{\partial u^i}\Gamma^k_{mj} + v^l\Gamma^m_{li}\Gamma^k_{mj} - \frac{\partial v^k}{\partial u^m}\Gamma^m_{ij} - v^l\Gamma^k_{lm}\Gamma^m_{ij}
\end{aligned} \tag{III.36}$$

Képezzük most a $v^k{}_{;i;j} - v^k{}_{;j;i}$ mennyiséget:

$$\begin{aligned}
v^k{}_{;i;j} - v^k{}_{;j;i} &= v^l\frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^j} - v^l\frac{\partial \Gamma^k_{lj}}{\partial u^i} + v^l\Gamma^m_{li}\Gamma^k_{mj} - v^l\Gamma^m_{lj}\Gamma^k_{mi} \\
&= v^l\left(\frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{lj}}{\partial u^i} + \Gamma^m_{li}\Gamma^k_{mj} - \Gamma^m_{lj}\Gamma^k_{mi}\right) \\
&= v^l R^k_{lji}
\end{aligned} \tag{III.37}$$

Ez a különbség egyáltalán nem tartalmazza a vektormező deriváltjait (hasonlóan a parciális deriváltak különbségéhez), csupán a vektormező és a (II.45) alakú görbületi tenzor adott pontbeli értékét.

Most rögzíthető egy stratégia: egy vektor első deriváltját mindig saját iránya mentén, azután egy másik (rögzített) irány mentén vegyük. Ha ezt minden irányra elvégezzük, és az eredményeket összegezzük (vagy átlagoljuk), akkor egy kisebb dimenziószámú, aggregált értéket kapunk:

$$\begin{aligned} v^l R^k_{lki} &= v^k{}_{;i;k} - v^k{}_{;k;i} \\ &\overset{jel}{=} v^l R_{li} \\ \Leftrightarrow R_{li} &= \frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{lk}}{\partial u^i} + \Gamma^m_{li}\Gamma^k_{mk} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^k_{mi} \end{aligned} \tag{III.38}$$

A (III.38)-ban bevezetett R_{li} tenzor az ú.n. Ricci tenzor szimmetrikus (a metrikus tenzor és a Christoffel szimbólumok hasonló tulajdonságából öröklődően), másodrendű tenzor. Végül a skaláris görbület így definiálható (szimmetriák miatt 2D-ben ez a Gauss görbület kétszerese):

$$R \overset{def}{=} g^{li} R_{li} \tag{III.39}$$

III.4.3. Hasznos formulák

Bevezetjük a következő jelöléseket:

1. A metrikus tenzor determinánsa: $\det\left[g_{il} \right] \overset{jel}{=} g$
2. A metrikus tenzor g_{il} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns: g^*_{il}

A metrikus tenzor determinánsának deriváltja:

$$\frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{il}} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} = g^*_{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} = g g^{li} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} \quad \Rightarrow \quad g^{li} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \tag{III.40}$$

A (III.34)-ből:

$$0 = g_{kl;i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ki} - g_{km}\Gamma^m_{li} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g_{km}\Gamma^m_{li} \tag{III.41}$$

Hasonlóan:

$$0 = g^{kl}{}_{;i} = \frac{\partial g^{kl}}{\partial u^i} + g^{ml}\Gamma^k_{mi} + g^{km}\Gamma^l_{mi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g^{kl}}{\partial u^i} = -g^{ml}\Gamma^k_{mi} - g^{km}\Gamma^l_{mi} \tag{III.42}$$

A Christoffel szimbólumok „divergenciájának” néhány kifejezése (II.30)-ból, az előző eredményt is felhasználva:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{ki} &= \frac{1}{2} g^{li}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^l}\right) \\ &= \frac{1}{2} g^{li}\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \\ &= \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^k}\end{aligned} \tag{II.43}$$

Vektormező divergenciája (III.30)-ból:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\nabla &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i}\cdot \mathbf{g}^i = \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^l \Gamma^k_{li}\right)\delta^i_k = \frac{\partial v^i}{\partial u^i} + v^k\Gamma^i_{ki} \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial u^i} + v^k \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(v^i\sqrt{g}\right)}{\partial u^i} \\ vagy &: \\ v^i_{;i} &= \frac{\partial v^i}{\partial u^i} + v^k \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(v^i\sqrt{g}\right)}{\partial u^i}\end{aligned} \tag{III.44}$$

Az inverz metrikus tenzor determinánsának deriváltja az inverz tenzor komponenseivel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u^k} &= \frac{\partial \dfrac{1}{g^{-1}}}{\partial g^{il}}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} = -\frac{1}{g^{-2}}\frac{\partial g^{-1}}{\partial g^{il}}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} = -\frac{1}{g^{-2}} g^{li*}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} = -\frac{1}{g^{-2}} g^{-1} g_{li}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} \\ &= -\, g g_{li}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} \quad\Rightarrow\quad g_{li}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k} = -\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^k} = -\frac{\partial \ln g}{\partial u^k}\end{aligned} \tag{III.45}$$

III.5. A gravitációs egyenlet[34]

A gravitációs egyenlet variációs elvből származtatható a következő funkcionál minimalizálásával:

$$\int R\sqrt{-g}\; d\Omega + 2\alpha\int \Lambda\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right)\sqrt{-g}\; d\Omega = \int R_{ik} g^{ik}\sqrt{-g}\; d\Omega + 2\alpha\int \Lambda\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right)\sqrt{-g}\; d\Omega \tag{III.46}$$

Az ismeretlen függvények a(z inverz) metrikus tenzor komponensek. A $\sqrt{-g}$ normálási tényező (a metrikus tenzor determinánsából képzett Jacobi determináns), a negatív előjel biztosítja, hogy a gyökjel alatt pozitív mennyiség álljon[35], a $\sqrt{-g}\; d\Omega$ az invariáns

[34] Csak annak, akit érdekel…
[35] Ugyanis a (III.11) ívhossz metrikus tenzorának determinánsa negatív.

négyestérfogat-elem. A Λ skalár potenciálból származó energia-impulzus tenzor az anyag állapotára jellemző, előre adott (ismertnek tekintett) mennyiség. Az integrálást a teljes téridőre végezzük. Mivel a görbületi tenzor a metrikus tenzor második deriváltjait tartalmazza azért az integrálási peremen (hipersíkon) megköveteljük mind a g^{ik} mennyiségek, mind ezen mennyiségek deriváltjainak eltűnését. Ugyanezen okból a származtatott egyenletek elvileg negyedrendűek a metrikus tenzorban, de mivel a másodrendű tagok lineárisan szerepelnek a görbület kifejezésében, végül mégsem jutunk negyedfokú egyenletekre. Mint látni fogjuk, az egyenletek másodrendűek. (III.46) szerkezetileg megegyezik a gyakori adattag – (energia-impulzus tenzor) - simasági tag (görbület), amely az adattag hatását annak környezetére terjeszti ki szerkezettel.

III.5.1. A gravitációs tér egyenlete

A (III.46) első tagja:

$$\int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g}\ d\Omega \tag{III.47}$$

Az ehhez tartozó egyenlethez a szokásos megközelítéssel[36] a következő módon juthatunk:

1. A (III.47)-ben a metrikus tenzort és a Christoffel szimbólumokat függetleneknek tételezzük fel és erre a rendszerre határozzuk meg az Euler-Lagrange egyenleteket.
2. Kiderül, hogy Christoffel szimbólumokhoz tartozó Euler-Lagrange egyenletek egy teljes vektordivergenciát adnak meg, amely a Gauss-Osztogradszki tétellel az integrációs tartományt határoló hiperfelületre vett integrállá alakítható.
3. Tekintve, hogy ezen a hiperfelületen a metrikus tenzor második deriváltjai eltűnnek, a Christoffel szimbólumokhoz (mint ismeretlen függvényekhez) nem tartoznak Euler-Lagrange egyenletek, a Christoffel szimbólumok nem adnak járulékot a metrikus tenzorhoz tartozó egyenletekhez (azaz a végeredmény szempontjából a Christoffel szimbólumokból épülő R_{ik} -k konstansként viselkednek.

A másodrendű mennyiségekhez keresünk tehát egy teljes divergenciamennyiséget, amely tehát nem ad járulékot a levezetendő egyenletekhez:

$$\int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g}\ d\Omega = \int G\sqrt{-g}\ d\Omega + \int \frac{\partial\left(\sqrt{-g}w^l\right)}{\partial u^l}\ d\Omega \tag{III.48}$$

[36] Palatini nyomán

Első feladatunk a G mennyiség meghatározása, mert (R helyett) erre az egyszerűbb alakra is felírhatjuk az Euler-Lagrange egyenleteket:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{kl}}{\partial u^i}+\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{ml}-\Gamma^m_{kl}\Gamma^l_{mi}\right)\\
&\text{ahol:}\\
&\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial u^l}=\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ki}\right)}{\partial u^l}-\Gamma^l_{ki}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial u^l}\\
&\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{kl}}{\partial u^i}=\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{kl}\right)}{\partial u^i}-\Gamma^l_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial u^i}
\end{aligned}\tag{III.49}$$

(III.49) teljes deriváltjait elhagyva (ezek nem adnak járulékot az eredményhez), számítsuk ki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial u^l} &= g^{ik}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\right)}{\partial u^l}+\sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}\\
&=-\frac{1}{2}g^{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial u^l}+\sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}\\
&=\frac{1}{2}g^{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(gg_{pq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial u^l}\right)+\sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}\\
&=-\frac{1}{2}g^{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g}\sqrt{-g}g_{pq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial u^l}+\sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}\\
&=-\frac{1}{2}g^{ik}\sqrt{-g}g_{pq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial u^l}+\sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}\\
&=\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}-\frac{1}{2}g^{ik}g_{pq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial u^l}\right)\\
&=\sqrt{-g}\left[-g^{mk}\Gamma^i_{ml}-g^{im}\Gamma^k_{ml}+\frac{1}{2}g^{ik}g_{pq}\left(g^{mq}\Gamma^p_{ml}+g^{pm}\Gamma^q_{ml}\right)\right]\\
&=\sqrt{-g}\left[-g^{mk}\Gamma^i_{ml}-g^{im}\Gamma^k_{ml}+\frac{1}{2}g^{ik}\left(\delta^m_p\Gamma^p_{ml}+\delta^m_q\Gamma^q_{ml}\right)\right]\\
&=\sqrt{-g}\left(-g^{mk}\Gamma^i_{ml}-g^{im}\Gamma^k_{ml}+g^{ik}\Gamma^p_{pl}\right)
\end{aligned}\tag{III.50}$$

Itt felhasználtuk (III.45)-öt: $\frac{\partial g}{\partial u^k}=-gg_{li}\frac{\partial g^{il}}{\partial u^k}$ és (III.42)-t: $\frac{\partial g^{kl}}{\partial u^i}=-g^{ml}\Gamma^k_{mi}-g^{km}\Gamma^l_{mi}$. Ezzel a (III.49)-ből marad:

$$\sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}\left(\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{kl}}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{ml} - \Gamma^m_{kl}\Gamma^l_{mi}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} G\sqrt{-g} &= -\Gamma^l_{ki}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial u^l} + \Gamma^l_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial u^i} + \sqrt{-g}g^{ik}\left(\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{ml} - \Gamma^m_{kl}\Gamma^l_{mi}\right) \\ &= \sqrt{-g}\Big[-\Gamma^l_{ki}\left(-g^{mk}\Gamma^i_{ml} - g^{im}\Gamma^k_{ml} + g^{ik}\Gamma^p_{pl}\right) + \Gamma^l_{kl}\left(-g^{mk}\Gamma^i_{mi} - g^{im}\Gamma^k_{mi} + g^{ik}\Gamma^p_{pi}\right) \\ &\qquad + g^{ik}\left(\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{ml} - \Gamma^m_{kl}\Gamma^l_{mi}\right)\Big] \\ &= \sqrt{-g}\left[\Gamma^l_{ki}g^{mk}\Gamma^i_{ml} + \Gamma^l_{ki}g^{im}\Gamma^k_{ml} - \Gamma^l_{ki}g^{ik}\Gamma^p_{pl} - \Gamma^l_{kl}g^{im}\Gamma^k_{mi} + g^{ik}\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{ml} - g^{ik}\Gamma^m_{kl}\Gamma^l_{mi}\right] \\ &= \sqrt{-g}\left[\Gamma^l_{ki}g^{im}\Gamma^k_{ml} - \Gamma^l_{kl}g^{im}\Gamma^k_{mi}\right] \\ &= \sqrt{-g}\left[\Gamma^l_{ki}g^{im}\Gamma^k_{ml} - \Gamma^l_{kl}g^{im}\Gamma^k_{mi}\right] \quad \Rightarrow \\ G &= g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right) \end{aligned} \tag{III.51}$$

Az a mennyiség pedig, amely a teljes deriváltakat tartalmazza, a következő divergenciát szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \left(R - G\right)\sqrt{-g} &= \frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ki}\right)}{\partial u^l} - \frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{kl}\right)}{\partial u^i} \\ &= \frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ki}\right)}{\partial u^l} - \frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{lk}\Gamma^m_{km}\right)}{\partial u^l} \\ &= \frac{\partial\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\Gamma^l_{ki} - g^{lk}\Gamma^m_{km}\right)\right]}{\partial u^l} \quad \Rightarrow \\ w^l &= \sqrt{-g}\left(g^{ik}\Gamma^l_{ki} - g^{lk}\Gamma^m_{km}\right) \end{aligned} \tag{III.52}$$

A (III.47) variációs feladatot visszavezettük tehát a következő, másodrendű egyenleteket szolgáltató feladatra:

$$\begin{aligned} \min\int R\sqrt{-g}\; d\Omega &= \min\int G\sqrt{-g}\; d\Omega \\ &= \min\int \sqrt{-g}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)d\Omega \end{aligned} \tag{III.53}$$

Ha a metrikus tenzort $\mathbf{G}$-vel jelöljük, akkor a variációs feladatot formálisan a következő alakra kell hoznunk:

$$\begin{aligned} &\min\int L\left(\mathbf{G},\mathbf{G}\nabla\right)\, d\Omega \Rightarrow \int\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{G}} - \frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u^r}}\right)\cdot\cdot\mathbf{H}d\Omega \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{G}} - \frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u^r}}\right)\cdot\cdot\mathbf{H} \overset{jel}{=} \mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{H} \end{aligned} \tag{III.54}$$

Ahol $\mathbf{Q}$ a problémához rendelt differenciálegyenlet, amely tetszőleges $\mathbf{H}$ mellett null tenzor. A $\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{H} = q_{ik}h^{ik}$ alakban is írható. A fentiek alapján az L Lagrange függvénynek választható az $R\sqrt{-g}$ vagy a $G\sqrt{-g}$ is. Az egyszerűbb $G\sqrt{-g}$ Lagrange függvényből indulunk. A műveleteket az inverz metrikus tenzor komponensei szerint végezzük, de – a szokásos (Palatini-féle) származtatástól eltérően – nem fogjuk a Christoffel szimbólumokat és a metrikus tenzor komponenseket függetlennek tekinteni. A következő levezetés meglehetősen komplikált, csak a teljesség kedvéért közöljük. Először a metrikus tenzor komponensei szerinti tagokat határozzuk meg három részre: i), ii), iii) bontva, majd a metrikus tenzor parciális deriváltjai szerintieket (ezek a Christoffel szimbólumokban lépnek fel).

$$\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g^{pq}} = \frac{\partial}{\partial g^{pq}}\left[\sqrt{-g}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{pq}}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right) + \sqrt{-g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial g^{pq}}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right) + \sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)}{\partial g^{pq}}$$

---

i)
$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{pq}} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{pq}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(g^{-1}\right)^{-1}}{\partial g^{pq}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g^2\frac{\partial g^{-1}}{\partial g^{pq}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g^2g^{pq*}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g^2g^{-1}g_{pq} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}gg_{pq}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-1)\sqrt{-g}\sqrt{-g}g_{pq} \qquad = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{pq}\end{aligned}$$

ii) $\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial g^{pq}} = \delta^i_p\delta^k_q\left(=\delta^k_p\delta^i_q\right)$

A harmadik tag kiszámításához a metrikus és inverz metrikus tenzorra vonatkozó azonosságból indulunk ki, és kihasználjuk ezen tenzorok szimmetriatulajdonságait:

$$g_{kl}g^{lm} = \delta^m_k \Rightarrow \begin{cases}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{mi}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g^{mi}}{\partial u^l}g_{mk} - \frac{\partial g^{mi}}{\partial u^k}g_{lm} + g^{mi}g_{ks}g_{lt}\frac{\partial g^{st}}{\partial u^m}\right)\\ \frac{\partial g_{kl}}{\partial g^{pq}}g^{lm} = -g_{kl}\frac{\partial g^{lm}}{\partial g^{pq}} \Rightarrow \frac{\partial g_{kt}}{\partial g^{pq}}\left(=\frac{\partial g_{tk}}{\partial g^{pq}}\right) = -g_{kl}g_{mt}\frac{\partial g^{lm}}{\partial g^{pq}} = -g_{kl}g_{mt}\delta^l_p\delta^m_q = -g_{kp}g_{qt}\end{cases}$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial g^{pq}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{mi}}{\partial u^l}g_{mp}g_{qk} + \frac{\partial g^{mi}}{\partial u^k}g_{mp}g_{ql} + \left(\delta^m_p\delta^i_q g_{ks}g_{lt} - g^{mi}g_{kq}g_{ps}g_{lt} - g^{mi}g_{ks}g_{lq}g_{pt}\right)\frac{\partial g^{st}}{\partial u^m}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{mi}}{\partial u^l}g_{mp}g_{qk} + \frac{\partial g^{mi}}{\partial u^k}g_{mp}g_{ql} - \delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} + g^{mi}g_{kq}\frac{\partial g_{pl}}{\partial u^m} + g^{mi}g_{lq}\frac{\partial g_{kp}}{\partial u^m}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^l}g^{mi}g_{qk} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial u^k}g^{mi}g_{ql} - \delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} + g^{mi}g_{kq}\frac{\partial g_{pl}}{\partial u^m} + g^{mi}g_{lq}\frac{\partial g_{kp}}{\partial u^m}\right)\\ &= \frac{1}{2}g^{mi}\left[\left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial u^m} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial u^l}\right)g_{qk} + \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial u^m} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial u^k}\right)g_{ql}\right] - \frac{1}{2}\delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\end{aligned}$$

Megjegyzendő a p és q szerinti szimmetria, amely akár tagonként érvényesíthető. Így pl.:

$\delta^i_q\dfrac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} = \delta^i_p\dfrac{\partial g_{kl}}{\partial u^q} \Leftrightarrow \delta^i_q\dfrac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} - \delta^i_p\dfrac{\partial g_{kl}}{\partial u^q} = 0$ .További átalakításokkal egyszerűsítünk:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}g^{mi}\left[\left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial u^m} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial u^l}\right)g_{qk} + \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial u^m} - \frac{\partial g_{mp}}{\partial u^k}\right)g_{ql} - \frac{\partial g_{km}}{\partial u^p}g_{ql} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial u^p}g_{qk} - g_{mq}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\right]\\ &= g^{mi}g_{qk}\Gamma_{l,mp} + g^{mi}g_{ql}\Gamma_{k,mp} + \frac{1}{2}\left(g_{ql}g_{km} + g_{qk}g_{lm}\right)\frac{\partial g^{mi}}{\partial u^p} - \frac{1}{2}\delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\\ &= g^{mi}g_{qk}\Gamma_{l,mp} + g^{mi}g_{ql}\Gamma_{k,mp} - \frac{1}{2}\left(g_{ql}g_{km} + g_{qk}g_{lm}\right)\left(\Gamma^m_{sp}g^{si} + \Gamma^i_{sp}g^{sm}\right) - \frac{1}{2}\delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\\ &= g^{mi}g_{qk}\Gamma_{l,mp} + g^{mi}g_{ql}\Gamma_{k,mp} - \frac{1}{2}\left(g^{si}g_{ql}\Gamma_{k,sp} + g^{si}g_{qk}\Gamma_{l,sp}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{ql}g_{km} + g_{qk}g_{lm}\right)\Gamma^i_{sp}g^{sm} - \frac{1}{2}\delta^i_q\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial g^{pq}} &= \frac{1}{2} g^{si}\left(g_{ql}\Gamma_{k,sp} + g_{qk}\Gamma_{l,sp}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{ql}\delta^s_k + g_{qk}\delta^s_l\right)\Gamma^i_{sp} - \frac{1}{2}\delta^i_q \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} \\
&= \frac{1}{2} g^{si}\left(g_{ql}\Gamma_{k,sp} + g_{qk}\Gamma_{l,sp}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{ql}\Gamma^i_{kp} + g_{qk}\Gamma^i_{lp}\right) - \frac{1}{2}\delta^i_q \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} \\
&= \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\left(g^{si}\Gamma_{k,sp} - \Gamma^i_{kp}\right) + g_{qk}\left(g^{si}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^i_{lp}\right)\Big] - \frac{1}{2}\delta^i_q \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}
\end{aligned}
$$

A p és q akár tagonként felcserélhető ezt a 3. és 4. sorokban majd kihasználjuk:

$$
\begin{aligned}
&3: \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial g^{pq}} = \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\left(g^{si}\Gamma_{k,sp} - \Gamma^i_{kp}\right) + g_{qk}\left(g^{si}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^i_{lp}\right)\Big] - \frac{1}{2}\delta^i_p \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^q} \\
&4: \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial g^{pq}} = \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\left(g^{si}\Gamma_{k,sp} - \Gamma^i_{kp}\right) + g_{pk}\left(g^{si}\Gamma_{l,sq} - \Gamma^i_{lp}\right)\Big] - \frac{1}{2}\delta^i_q \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p} \\
&\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)}{\partial g^{pq}} &= \frac{1}{2}\Big[g_{qi}\left(g^{sl}\Gamma_{m,sp} - \Gamma^l_{mp}\right)\Gamma^m_{kl} + g_{qm}\Gamma^m_{kl}\left(g^{sl}\Gamma_{i,sp} - \Gamma^l_{ip}\right)\Big] - \frac{1}{2}\delta^l_q \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^p}\Gamma^m_{kl} \\
&+ \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\Gamma^l_{mi}\left(g^{sm}\Gamma_{k,sp} - \Gamma^m_{kp}\right) + g_{qk}\left(g^{sm}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^m_{lp}\right)\Gamma^l_{mi}\Big] - \frac{1}{2}\delta^m_q \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\Gamma^l_{mi} \\
&- \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\left(g^{sl}\Gamma_{m,sp} - \Gamma^l_{mp}\right)\Gamma^m_{ki} + g_{qm}\Gamma^m_{ki}\left(g^{sl}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^l_{lp}\right)\Big] + \frac{1}{2}\delta^l_p \frac{\partial g_{ml}}{\partial u^q}\Gamma^m_{ki} \\
&- \frac{1}{2}\Big[g_{qi}\Gamma^l_{ml}\left(g^{sm}\Gamma_{k,sp} - \Gamma^m_{kp}\right) + g_{pk}\left(g^{sm}\Gamma_{i,sq} - \Gamma^m_{iq}\right)\Gamma^l_{ml}\Big] + \frac{1}{2}\delta^m_q \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^p}\Gamma^l_{ml}
\end{aligned}
$$

g^{ik} -val beszorozva iii):

$$
\begin{aligned}
g^{ik}\frac{\partial\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)}{\partial g^{pq}} &= \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\left(g^{sl}\Gamma_{m,sp} - \Gamma^l_{mp}\right)\Gamma^m_{ql} + g_{qm}\Gamma^m_{kl}\left(g^{sl}\Gamma^k_{sp} - g^{ik}\Gamma^l_{ip}\right)\Big] - \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^p}\Gamma^m_{kq} \\
&+ \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\Gamma^l_{mi}\left(g^{sm}\Gamma^i_{sp} - g^{ik}\Gamma^m_{kp}\right) + \left(g^{sm}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^m_{lp}\right)\Gamma^l_{mq}\Big] - \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\Gamma^l_{qi} \\
&- \frac{1}{2}\Big[g_{ql}\left(g^{sl}\Gamma_{m,sp} - \Gamma^l_{mp}\right) g^{ik}\Gamma^m_{ki} + g_{qm} g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left(g^{sl}\Gamma_{l,sp} - \Gamma^l_{lp}\right)\Big] + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q} g^{ik}\Gamma^m_{ki} \\
&- \frac{1}{2}\Big[\Gamma^l_{ml}\left(g^{sm}\Gamma_{q,sp} - \Gamma^m_{qp}\right) + \left(g^{sm}\Gamma_{p,sq} - \Gamma^m_{qp}\right)\Gamma^l_{ml}\Big] + \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^p}\Gamma^l_{ql} \\
&= \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\Gamma_{m,sp} g^{sl}\Gamma^m_{ql} - \Gamma^l_{mp}\Gamma^m_{ql} + g^{sl}\Gamma^k_{sp}\Gamma_{q,kl} - \Gamma_{q,kl} g^{ik}\Gamma^l_{ip}\Big] - \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^p}\Gamma^m_{kq} \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\Gamma_{q,mi} g^{sm}\Gamma^i_{sp} - \Gamma_{q,mi} g^{ik}\Gamma^m_{kp} + g^{sm}\Gamma_{l,sp}\Gamma^l_{mq} - \Gamma^m_{lp}\Gamma^l_{mq}\Big] - \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^p}\Gamma^l_{qi} \\
&+ \frac{1}{2} g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q} - \left(\Gamma_{m,qp} - \Gamma_{q,mp}\right)\right] + \Gamma^m_{qp}\Gamma^l_{ml} - \frac{1}{2} g^{sm}\Gamma^l_{ml}\left(\Gamma_{q,sp} + \Gamma_{p,sq}\right) + \Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql} \\
&= \\
&- \Gamma^m_{lp}\Gamma^l_{mq} - g^{sl}\Gamma_{q,sk}\Gamma^k_{lp} + g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^k_{lq} + g^{sl}\Gamma_{q,kl}\Gamma^k_{sp} - g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^p}\Gamma^l_{kq} \\
&+ \frac{1}{2} g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q} - \left(\Gamma_{m,qp} - \Gamma_{q,mp}\right)\right] + \Gamma^m_{qp}\Gamma^l_{ml} - \frac{1}{2} g^{sm}\Gamma^l_{ml}\left(\Gamma_{q,sp} + \Gamma_{p,sq}\right) + \Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}
\end{aligned}
$$

i), ii), iii)$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g^{pq}} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{pq}}\, g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)+\frac{\partial g^{ik}}{\partial g^{pq}}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)+g^{ik}\,\frac{\partial\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)}{\partial g^{pq}} \\
&= \\
&+\Gamma^m_{qp}\Gamma^l_{ml}-\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^k_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}+g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&-\Gamma^m_{lp}\Gamma^l_{mq}-g^{sl}\Gamma_{q,sk}\Gamma^k_{lp}+g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^k_{lq}+g^{sl}\Gamma_{q,kl}\Gamma^k_{sp}-g^{ik}\,\frac{\partial g_{li}}{\partial u^p}\,\Gamma^l_{kq} \\
&+\Gamma^l_{mp}\Gamma^m_{ql}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{pq}-\frac{1}{2}g_{pq}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right) \\
&= \\
&-\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^k_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&-g^{sl}\Gamma_{q,sk}\Gamma^k_{lp}+g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^k_{lq}+g^{sl}\Gamma_{q,kl}\Gamma^k_{sp}-g^{ik}\,\frac{\partial g_{li}}{\partial u^p}\,\Gamma^l_{kq} \\
&-\frac{1}{2}g_{pq}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right) \\
&= \\
&-\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^k_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&+g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^k_{lq}-g^{ik}\,\frac{\partial g_{li}}{\partial u^p}\,\Gamma^l_{kq}-\frac{1}{2}g_{pq}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)
\end{aligned}
$$

Azaz:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g^{pq}} &= -\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^k_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^m_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^q}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&+g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^k_{lq}-g^{ik}\,\frac{\partial g_{li}}{\partial u^p}\,\Gamma^l_{kq}-\frac{1}{2}g_{pq}g^{ik}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{ki}\right)
\end{aligned}
}
$$

A Christoffel szimbólumok deriválását az inverz metrikus tenzor parciális deriváltjai szerint is el kell végeznünk, de a szimbólumok kifejezése a metrikus tenzor parciális deriváltjait tartalmazza. Első lépésként tehát át kell írnunk a Christoffel szimbólumokat. Ehhez mindössze a $g_{kl}g^{lm}=\delta^m_k$ azonosság áll rendelkezésünkre:

$$g_{kl}g^{lm} = \delta_k^m \Rightarrow \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^s}\, g^{lm} = -g_{kl}\, \frac{\partial g^{lm}}{\partial u^s} \Rightarrow \frac{\partial g_{kt}}{\partial u^s}\left(= \frac{\partial g_{tk}}{\partial u^s}\right) = -g_{kl}g_{mt}\, \frac{\partial g^{lm}}{\partial u^s}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Gamma_{kl}^{i} = \frac{1}{2}\, g^{mi}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g^{mi}}{\partial u^l}\, g_{mk} - \frac{\partial g^{mi}}{\partial u^k}\, g_{lm} + g^{mi}g_{ks}g_{lt}\, \frac{\partial g^{st}}{\partial u^m}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}^{i}}{\partial \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} = \frac{1}{2}\Big(g^{mi}g_{ks}g_{lt}\delta_p^s\delta_q^t\delta_m^r - g_{mk}\delta_p^m\delta_q^i\delta_l^r - g_{lm}\delta_p^m\delta_q^i\delta_k^r\Big) = \frac{1}{2}\Big(g^{ri}g_{kp}g_{lq} - g_{pk}\delta_q^i\delta_l^r - g_{lp}\delta_q^i\delta_k^r\Big) \overset{g^{st}=g^{ts}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(g^{mi}g_{ks}g_{lt}\delta_p^t\delta_q^s\delta_m^r - g_{mk}\delta_p^m\delta_q^i\delta_l^r - g_{lm}\delta_p^m\delta_q^i\delta_k^r\Big) = \frac{1}{2}\Big(g^{ri}g_{kq}g_{lp} - g_{pk}\delta_q^i\delta_l^r - g_{lp}\delta_q^i\delta_k^r\Big) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} = \frac{\partial}{\partial u^r}\left[\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{ik}\left(\Gamma_{mi}^{l}\Gamma_{kl}^{m} - \Gamma_{ml}^{l}\Gamma_{ki}^{m}\right)}{\partial \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}}\right]$$

$$g^{ik}\,\frac{\partial\left(\Gamma_{mi}^{l}\Gamma_{kl}^{m} - \Gamma_{ml}^{l}\Gamma_{ki}^{m}\right)}{\partial \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} = \frac{1}{2}\, g^{ik}\left(g^{rl}g_{mp}g_{iq} - g_{pm}\delta_q^l\delta_i^r - g_{ip}\delta_q^l\delta_m^r\right)\Gamma_{kl}^{m} + \Gamma_{mi}^{l}\,\frac{1}{2}\, g^{ik}\left(g^{rm}g_{kq}g_{lp} - g_{pk}\delta_q^m\delta_l^r - g_{lp}\delta_q^m\delta_k^r\right)$$

$$-\frac{1}{2}\, g^{ik}\left(g^{rl}g_{mp}g_{lq} - g_{pm}\delta_q^l\delta_l^r - g_{lp}\delta_q^l\delta_m^r\right)\Gamma_{ki}^{m} - \Gamma_{ml}^{l}\,\frac{1}{2}\, g^{ik}\left(g^{rm}g_{kp}g_{iq} - g_{pk}\delta_q^m\delta_i^r - g_{ip}\delta_q^m\delta_k^r\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\left(-\delta_p^k\delta_q^l\delta_m^r\right)\Gamma_{kl}^{m} - \Gamma_{mi}^{l}\delta_p^i\delta_q^m\delta_l^r + \Gamma_{mi}^{l}\left(g^{rm}g_{lp}\delta_q^i - g^{ir}g_{lp}\delta_q^m\right)$$
$$-\left(-g_{qp}\delta_m^r g^{lk}\right)\Gamma_{kl}^{m} - \Gamma_{ml}^{l}\left(g^{rm}g_{qp} - \delta_p^r\delta_q^m - \delta_p^r\delta_q^m\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Gamma_{kl}^{r}\left(g_{qp}g^{lk} - 2\delta_p^k\delta_q^l\right) - \Gamma_{kl}^{l}\left(g_{qp}g^{rk} - 2\delta_p^r\delta_q^k\right)\Big]$$

$$= \Gamma_{ql}^{l}\delta_p^r - \Gamma_{pq}^{r} + \frac{1}{2}\, g_{qp}\left(\Gamma_{kl}^{r}g^{lk} - \Gamma_{kl}^{l}g^{rk}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} = \left(\frac{\partial \Gamma_{qm}^{m}}{\partial u^p} - \frac{\partial \Gamma_{pq}^{r}}{\partial u^r}\right) - \frac{1}{2}\, g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial \Gamma_{km}^{m}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^{r}}{\partial u^r}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{qp}}{\partial u^r}\left(\Gamma_{kl}^{r}g^{lk} - \Gamma_{kl}^{l}g^{rk}\right) + \frac{1}{2}\, g_{qp}\left(\Gamma_{kl}^{r}\,\frac{\partial g^{lk}}{\partial u^r} - \Gamma_{kl}^{l}\,\frac{\partial g^{rk}}{\partial u^r}\right)$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial u^r} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial u^r} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(g^{-1}\right)^{-1}}{\partial u^r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{-1}\right)^{-2}\frac{\partial\left(g^{-1}\right)}{\partial u^r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\, g^2\,\frac{\partial\left(g^{-1}\right)}{\partial u^r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\, g^2g^{-1}g_{ts}\,\frac{\partial g^{ts}}{\partial u^r}$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ts}\,\frac{\partial g^{ts}}{\partial u^r} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ts}\,\frac{\partial g_{ts}}{\partial u^r}$$
$$= \sqrt{-g}\Gamma_{rm}^{m}$$
$$\Rightarrow$$

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}}=\left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{qp}}{\partial u^r}\left(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\right)+\frac{1}{2}g_{qp}\left(\Gamma^r_{kl}\frac{\partial g^{lk}}{\partial u^r}-\Gamma^l_{kl}\frac{\partial g^{rk}}{\partial u^r}\right)+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^m_{rm}\left(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\right)
$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} &= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\Big)\Big(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\Big)\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\left[\Gamma^r_{kl}\left(-\Gamma^l_{rm}g^{km}-\Gamma^k_{rm}g^{lm}\right)+\Gamma^l_{kl}\left(\Gamma^r_{rm}g^{km}+\Gamma^k_{rm}g^{rm}\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^m_{rm}\left(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} &= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)\\
&+\frac{1}{2}\Big(g_{qm}\Gamma^m_{pr}+g_{pm}\Gamma^m_{qr}\Big)\Big(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\Big)\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\left[\Gamma^r_{kl}\left(-\Gamma^l_{rm}g^{km}-\Gamma^k_{rm}g^{lm}\right)+\Gamma^l_{kl}\left(\Gamma^r_{rm}g^{km}+\Gamma^k_{rm}g^{rm}\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^m_{rm}\left(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} &= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)\\
&+\frac{1}{2}\Big(g_{qm}\Gamma^m_{pr}+g_{pm}\Gamma^m_{qr}\Big)\Big(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\Big)\\
&-\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^r_{kl}\Gamma^l_{rm}g^{km}-\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^r_{kl}\Gamma^k_{rm}g^{lm}\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^l_{kl}\Gamma^r_{rm}g^{km}+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{rm}g^{rm}\\
&+\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\frac{1}{2}g_{qp}\Gamma^m_{rm}\Gamma^l_{kl}g^{rk}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} &= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)\\
&+\frac{1}{2}\Big(g_{qm}\Gamma^m_{pr}+g_{pm}\Gamma^m_{qr}\Big)\Big(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\Big)\\
&-g_{qp}\Gamma^r_{kl}\Gamma^l_{rm}g^{km}+g_{qp}\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{kl}g^{lk}\end{aligned}$$

Végül:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}} &= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}\right)-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}\right)\\
&+\Gamma^m_{pm}\Gamma^l_{ql}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-g_{qp}g^{lk}\left(\Gamma^r_{km}\Gamma^m_{rl}-\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{kl}\right)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\Big)\Big(\Gamma^r_{kl}g^{lk}-\Gamma^l_{kl}g^{rk}\Big)\end{aligned}}$$

A két mennyiség különbsége a (III.53) funkcionálok Euler-Lagrange egyenletei:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g^{pq}}-\frac{\partial}{\partial u^{r}}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\frac{\partial g^{pq}}{\partial u^{r}}}\right) &= -\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^{k}_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\Gamma^{m}_{pm}\Gamma^{l}_{ql}+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&\quad +g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq}-\frac{1}{2}g_{pq}g^{ik}\left(\Gamma^{l}_{mi}\Gamma^{m}_{kl}-\Gamma^{l}_{ml}\Gamma^{m}_{ki}\right) \\
&\quad -\left(\frac{\partial\Gamma^{m}_{qm}}{\partial u^{p}}-\frac{\partial\Gamma^{r}_{pq}}{\partial u^{r}}\right)+\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^{m}_{km}}{\partial u^{l}}-\frac{\partial\Gamma^{r}_{kl}}{\partial u^{r}}\right) \\
&\quad -\Gamma^{m}_{pm}\Gamma^{l}_{ql}+\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{pq}+g_{qp}g^{lk}\left(\Gamma^{r}_{km}\Gamma^{m}_{rl}-\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{kl}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right)\left(\Gamma^{r}_{kl}g^{lk}-\Gamma^{l}_{kl}g^{rk}\right) \\
&= \\
&\quad \left(\frac{\partial\Gamma^{r}_{pq}}{\partial u^{r}}-\frac{\partial\Gamma^{m}_{qm}}{\partial u^{p}}\right)+\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^{r}_{kl}}{\partial u^{r}}-\frac{\partial\Gamma^{m}_{km}}{\partial u^{l}}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^{k}_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&\quad +g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq}-\frac{1}{2}g_{pq}g^{lk}\left(\Gamma^{r}_{ml}\Gamma^{m}_{kr}-\Gamma^{l}_{ml}\Gamma^{m}_{kl}\right) \\
&\quad +g_{qp}g^{lk}\left(\Gamma^{r}_{km}\Gamma^{m}_{rl}-\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{kl}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right)\left(\Gamma^{r}_{kl}g^{lk}-\Gamma^{l}_{kl}g^{rk}\right) \\
&= \\
&\quad \left(\frac{\partial\Gamma^{r}_{pq}}{\partial u^{r}}-\frac{\partial\Gamma^{m}_{qm}}{\partial u^{p}}+\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{pq}\right)-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^{r}_{kl}}{\partial u^{r}}-\frac{\partial\Gamma^{m}_{km}}{\partial u^{l}}+\Gamma^{m}_{rm}\Gamma^{r}_{kl}-\Gamma^{r}_{km}\Gamma^{m}_{rl}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^{k}_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&\quad +g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right)\left(\Gamma^{r}_{kl}g^{lk}-\Gamma^{l}_{kl}g^{rk}\right)
\end{aligned}
$$

Az utolsó két sor:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^{k}_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&\quad +g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right)\left(\Gamma^{r}_{kl}g^{lk}-\Gamma^{l}_{kl}g^{rk}\right) \\
&= -\frac{1}{2}g^{sl}\Gamma^{k}_{lk}\left(\Gamma_{q,sp}+\Gamma_{p,sq}\right)+\frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)\right] \\
&\quad +g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq}-\frac{1}{2}\Gamma^{r}_{kl}g^{lk}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right)+\frac{1}{2}\Gamma^{l}_{kl}g^{rk}\left(\Gamma_{q,pr}+\Gamma_{p,qr}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left[\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\left(\Gamma_{m,qp}-\Gamma_{q,mp}\right)-\left(\Gamma_{q,pm}+\Gamma_{p,qm}\right)\right]+g^{sl}\Gamma_{k,sp}\Gamma^{k}_{lq}-g^{ik}\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\Gamma^{l}_{kq} \\
&= \frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{m}_{ki}\left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}-\frac{\partial g_{mp}}{\partial u^{q}}\right)+g^{ik}\Gamma^{l}_{kq}\left(\Gamma_{l,ip}-\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{ik}\Gamma^{l}_{kq}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}+\frac{\partial g_{lp}}{\partial u^{i}}-\frac{\partial g_{ip}}{\partial u^{l}}-2\frac{\partial g_{li}}{\partial u^{p}}\right)=-\Gamma^{l}_{kq}\Gamma^{k}_{lp}
\end{aligned}
$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g^{pq}}-\frac{\partial}{\partial u^r}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial u^r}}\right)=\left(\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial u^r}-\frac{\partial\Gamma^m_{qm}}{\partial u^p}+\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{pq}-\Gamma^l_{kq}\Gamma^k_{lp}\right)-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}\left(\frac{\partial\Gamma^r_{kl}}{\partial u^r}-\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial u^l}+\Gamma^m_{rm}\Gamma^r_{kl}-\Gamma^r_{km}\Gamma^m_{rl}\right)$$

$$=R_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}g^{lk}R_{kl}$$

$$=R_{pq}-\frac{1}{2}g_{qp}R$$

Tehát a (III.47) $\left(\text{az } \int R\sqrt{-g}\ d\Omega\right)$ funkcionált minimalizáló Euler-Lagrange egyenletek, feltéve, hogy a metrikus tenzor determinánsa ($\sqrt{-g}$) sehol sem nulla és így oszthatunk vele:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=0 \tag{III.55}$$

Érdekes – a már említett tény –, hogy ugyanez az eredmény adódik, ha a Ricci tenzort konstansnak vesszük az Euler- Lagrange egyenletek származtatásakor.

III.5.2. Az energia-impulzus tenzor

A (III.55) egyenlet tisztán geometriai megfontolásból származik, a (III.46) funkcionál „simasági” tagjából. Tulajdonképpen ez a tag terjeszti ki a lokális adattag az ú.n. energia-impulzus tenzor hatását a téridő távoli tartományaira. Az adattagot is tartalmazó egyenletek a

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\alpha T_{ik} \tag{III.56}$$

A (III.46)-ot szokás még a következőképpen, skalár potenciállal is megadni, azért mert így csupa skalár áll az integrál mögött:

$$\int\left(R+2\alpha\Lambda\right)\sqrt{-g}\ d\Omega \tag{III.57}$$

Ekkor a második taghoz tartozó Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{gathered}2\alpha\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial u^l}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}}\right):=-\alpha\sqrt{-g}T_{ik}\\ \Rightarrow\\ T_{ik}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial u^l}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}}\right)\end{gathered} \tag{III.58}$$

Einstein *feltevése* szerint az adattagként szereplő skalármező metrikus tenzorra vonatkozó $\frac{2}{\sqrt{-g}}$ -vel normált Euler-Lagrange egyenletei az energia-impulzus tenzort kell jelentsék, de a tenzor definíciója nem ez, hanem a következő pontban definiált mennyiség.

III.5.3. Az energia-inpulzus tenzor eredete

A fizika szerint az anyagi rendszer (lokálisan) egy $\phi = \phi\left(u^k\right)$ skalármező $L\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial u^k}\right) \overset{jel}{=} L\left(\phi, \phi_k\right)$ Lagrange függvényével írható le. Ezt figyelembe véve a részecske energiájára vonatkozó III.2.2 fejezet megfontolását a téridő tartományára is megismételhetjük (felírjuk az Euler-Lagrange függvényeket, illetve a Lagrange függvény teljes deriváltját):

$$\begin{aligned}
&1. \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial L}{\partial \phi_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial L}{\partial \phi_k} \\
&2. \quad \frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial L}{\partial \phi}\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial u^i} = \frac{\partial L}{\partial \phi}\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_{ki} \\
&\Rightarrow \\
&\frac{\partial L}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial L}{\partial \phi_k}\right)\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_{ki} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_i\right) \\
&\Rightarrow \\
&0 = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_i\right) - \frac{dL}{du^i} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_i\right) - \delta_i^k\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_k}\phi_i - \delta_i^k L\right) \\
&\quad \overset{jel}{=} \frac{\partial T_i^k}{\partial u^k}
\end{aligned} \tag{III.59}$$

A (III.56) összefüggéssel definiált divergenciától mentes mennyiség neve energia-impulzus tenzor[37].

[37] A fenti bevezetéssel definiált tenzor nem feltétlenül szimmetrikus, (a Ricci tenzor az!), de szimmetrizálható.

IV. Alkalmazások a gépi látásban

A fejezet felépítése a következő:

- Aktív kontúrok és felületek.
- Optikai áramlás.
- Képrekonstrukció/képkorrekció

IV.1. Aktív kontúrok

Az aktív kontúrok elsődleges felhasználása a képszegmentáció, valamely jellemzője alapján, amely legegyszerűbb esetben lehet az intenzitás (színes képeknél a szín), de egyéb jellemzők is: tartományok átlagos intenzitása textúrák irányultsága stb. Az aktív kontúrokat síkgörbeként (nyílt vagy zárt) fogjuk fel, amelyek egy megfelelően megfogalmazott funkcionál extrémumát szolgáltatják. A funkcionálhoz rendelt Euler-Lagrange egyenletek a görbe pontjainak mozgását határozzák meg. A görbék folytonos objektumok, ezért olyan területeken, ahol nincs a mozgást meghatározó mennyiség, ott a „hiányzó adatok pótlását” is elvégzik, pl. az élek detektálására alkalmas kontúrok a szakadásokat, elmosódott él részleteket pótolják.

Az Euler-Lagrange egyenletek numerikus megoldása lehetséges Lagrange koordinátákkal, ekkor a kontúron pontokat szemelünk ki, amelyek új pozícióját az egyenletek határozzék meg. A pontok ilyenkor eltávolodhatnak, ezért gondoskodni kell a görbe mentén való egyenletes újraosztásukról. További probléma, hogy külön kezelés nélkül nem lehetséges a topológia változásának követése. Erre egy lehetséges megoldás az Euler koordináták használata, amely a Level Set módszerek alapja.

IV.1.1. Paraméteres kontúrok

Történetileg az aktív kontúr Kass-Witkin-Terzopoulos munkájával [12] vette kezdetét Az (I.2) aktív kontúr élek detektálását teszi lehetővé. Az első (adattag, külső erőtér, vagy „external force” potenciális energiája jele: E_{ext}) cseréjével többféle feladatra tehető alkalmassá, pl.:

- Az intenzitásfüggvény (I vagy $-I$) választásával vonalak
- További $\left(\dot{r}_{Left} - \dot{r}_{Right}\right)^2$ (sztereó bal és jobb oldali képei közötti kontúrokra) taggal bővítve sztereó rekonstrukcióra

A származtatott Euler-Lagrange egyenletek konstans α és β tényezőkre:

$$\nabla E_{ext} - \alpha \ddot{r} + \beta \ddddot{r} = 0 \tag{IV.1}$$

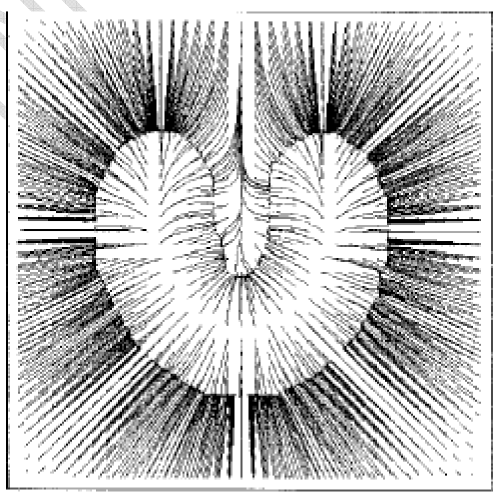
Ahol a ∇E_{ext} a választott adattag(ok) gradiense. A (IV.1) egyenlet a megoldás-görbén érvényes, a kontúr általános helyzetében attól eltér. A görbe pontjait tehát úgy kell elmozgatni, hogy a bal oldal abszolút értéke minden pontban csökkenjen (azaz „gradient descent” irányban). Ez τ „mesterséges idő” bevezetésével a

$$\nabla E_{ext} - \alpha \ddot{r} + \beta \ddddot{r} = -\frac{\partial r}{\partial \tau} \tag{IV.2}$$

egyenletre vezet, amely megfelelő integrálási sémával, véges differenciákkal[38], a pontok számától függő méretű konstans együtthatós lineáris egyenletrendszer megoldására vezet iterációnként. A megállítás feltétele a (IV.1) szerint a zéró jó megközelítése a görbe minden pontjában.

A Kass-Witkin-Terzopoulos aktív kontúr evolúcióját pontbeli mennyiségek vezérlik. Emiatt fontos a kontúr kezdeti helyzetének megadása, amelynek legalább néhány pontjában a megoldáshoz (pl. az élekhez) közelinek kell lennie, a többi pontja „semleges területen” is lehet. A kezdeti távolság némileg növelhető a kép előzetes feldolgozásával, pl. Gauss szűrővel.

IV.1.2. Gradient Vector Flow



IV.1. ábra: A gradiens kiterjesztése a teljes képtérre.

[38] A paraméteres kontúrok általában pontjaik Lagrange koordinátás megadásával történik (ezen pontok mozgásegyenlete a (IV.2)). A pontok mozgásuk közben általában eltávolodnak egymástól. Ez a jelenség rendszeres újrainicializálással kezelhető.

A Chenyang Xu és Jerry L. Prince [13] által bevezetett módszer lehetővé teszi az éleket detektáló paraméteres kontúrok tetszőleges helyzetből való indítását azáltal, hogy előzetes képfeldolgozással a képfüggvény gradiensét megfelelő módon kiterjeszti az egész képtartományra (IV.1 ábra) a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mu\left|\nabla \mathbf{v}\right|^2 + \left|\nabla I\right|^2 \left|\mathbf{v} - \nabla I\right|^2 d\Omega \\ &u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \overset{jel}{=} \left|\nabla \mathbf{v}\right|^2 \end{aligned} \qquad \text{(IV.3)}$$

funkcionált minimalizáló, a kontúr mozgatását biztosító $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ (külső erőtér, a (IV.2)-ben a ∇E_{ext}) vektormezővel. A (IV.3) első tagja a vektormező simaságát biztosítja, a Horn-Schunck optikai áramlási egyenletek (II.1) simasági tagjával egyezik meg. A második tag az adattag szerepét játssza, amely az élek közelében domináns, és minimumát a kép gradiensével megegyező vektormező esetén veszi fel. A származtatott Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{aligned} &\mu\Delta u - \left(u - I_x\right)\left(I_x^2 + I_y^2\right) = 0 \\ &\mu\Delta v - \left(u - I_y\right)\left(I_x^2 + I_y^2\right) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV.4)}$$

(IV.4) egyenletrendszer a:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \tau} = \mu\Delta u - \left(u - I_x\right)\left(I_x^2 + I_y^2\right) \\ &\frac{\partial u}{\partial \tau} = \mu\Delta v - \left(u - I_y\right)\left(I_x^2 + I_y^2\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV.5)}$$

általánosított hővezetési egyenlet egyensúlyi (steady-state) állapota (τ az időparaméter). A numerikus megoldás a szokásos véges differenciákkal kapható, a $\Delta t \le \dfrac{\Delta x \Delta y}{4\mu}$ időbeli lépésekkel. A Gauss piramis használatával a folyamat felgyorsítható.

A fenti egyenletek magasabb dimenziókra direkt módon általánosíthatók.

IV.1.3. Geometriai kontúrok és felületek

A paraméteres kontúrok alapvető hibája, hogy a megoldás-görbe pontos helyzete a paraméterezéstől függ. Vegyünk például a következő (IV.7) egyszerű funkcionált, és hajtsunk végre rajta változó-transzformációt a $\tau = f\left(t\right) \;\Rightarrow\; t = f^{-1}\left(\tau\right)$, kapcsolattal. Ebből[39]:

[39] A továbbiakban a deriválás változóját alsó indexben jelöljük

$$d\tau = \frac{df}{dt}dt \overset{jel}{=} \varphi dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{\frac{df}{dt}}d\tau = \frac{1}{\varphi}d\tau \tag{IV.6}$$

és

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 \Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_t\right)dt = \right) \int_0^1 \Phi\left(\mathbf{r}\left(t\right),\mathbf{r}_t\left(t\right)\right)dt \overset{\tau=f(t)}{\Rightarrow} \\ &\int_{f(0)}^{f(1)} \Phi\left(\mathbf{r}\left(f^{-1}\left(\tau\right)\right),\varphi\left(f^{-1}\left(\tau\right)\right)\mathbf{r}_\tau\left(f^{-1}\left(\tau\right)\right)\right)\frac{1}{\varphi\left(f^{-1}\left(\tau\right)\right)}d\tau \left(= \int_{f(0)}^{f(1)} \Phi\left(\mathbf{r},\varphi\mathbf{r}_\tau\right)\frac{1}{\varphi}d\tau \right) \end{aligned} \tag{IV.7}$$

(IV.7) második sora nyílván más egyenletekre vezet, mint az első sor, és tetszőleges görbén veheti fel minimumát.

A „belső” geometriai lényeg a természetes (ívhossz szerinti) paraméterezéssel fogható meg, illetve a választott differenciális görbejellemzőknek invariánsoknak kell lenniük (az érintő-egységvektor: $\mathbf{e}$, vagy a pontbeli normálvektor az $\mathbf{n}$, az integrálást a teljes G görbére végezzük) pl:

$$\begin{aligned} &ds = \left|\mathbf{r}_t\right|dt \quad \Rightarrow \\ &\int_G \Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right)ds = \int_G \Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_s\right)ds = \\ &\int_G \Phi\left(\mathbf{r},\frac{1}{\left|\mathbf{r}_t\right|}\mathbf{r}_t\right)dt = \int_G \Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right)\left|\mathbf{r}_t\right|dt \end{aligned} \tag{IV.8}$$

Síkgörbéknél a normál-egységvektor és az érintő-egységvektor között egyértelmű kapcsolat áll fenn: $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}$ (ahol $\mathbf{k}$ a sík normálvektora), ezért mindegy, hogy melyiket szerepeltetjük funkcionálunkban. Aktív felületek esetén ez a mennyiség mindig a normál-egységvektor:

$$\int_F \Phi\left(\mathbf{S},\mathbf{n}\right)dA = \iint_{u,v} \Phi\left(\mathbf{S},\mathbf{n}\right)\left|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right|dudv \tag{IV.9}$$

(IV.9)-ben az integrálást a teljes felületre (F) végezzük, az invariáns felületelem pedig a $dA = \left|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right|dudv$.

IV.1.4. A geodéziai aktív kontúr

Caselles, Kimmel és Sapiro [14] az (I.2) éldetektálásra alkalmas paraméteres kontúr $\beta \equiv 0$ melletti változatát egy, a matematikai mechanikából vett analógia alapján geometriai kontúrként írták fel:

$$\int_G g\left(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|\right)\left|\mathbf{r}_t\right|dt \tag{IV.10}$$

ahol a $g\left(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|\right)$ a képfüggvény gradiensének szigorúan monoton csökkenő függvénye, pl.

$$g\left(\left|\nabla I\right|\right) = \frac{1}{1+\left|\nabla \hat{I}\right|^{p}} \tag{IV.11}$$

p értéke 1 vagy 2, $\hat{I}$ -a képfüggvény Gauss-szűrt változata[40].

A (IV.10) funkcionál minimalizálása értelmezhető egy felületi minimális görbe kereséseként (egy Riemann tér geodetikusának megkeresésével), a (II.13) szerint ugyanis a $\int \sqrt{g_{uu}\dot{u}^2+2g_{uv}\dot{u}\dot{v}+g_{vv}\dot{v}^2}\,dt$ ívhossz kifejezése az $u = x,\ v = y$ paraméterválasztással, és a $g_{ik}\left(x,y\right) = g^2(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|)\delta_{ik} \ \Leftrightarrow\ g_{xx} = g_{yy} = g^2(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|),\ g_{xy} = 0$ metrikus tenzorral az ívhossz ($\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}_t$):

$$\int \sqrt{g^2(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}dt = \int g(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|)\left|\mathbf{r}_t\right|dt \tag{IV.12}$$

éppen a (IV.10) , amely kifejezést az euklideszi ívhosszal (II.6) összehasonlítva (ahol $g_{xx} = g_{yy} = 1,\ g_{xy} = 0$) joggal nevezhetjük súlyozott ívhossznak. Szemléletes jelentése a következő: a görbe „kedvező” helyeken haladva (ahova törekszik), nagy szakaszaival (euklideszi ívhosszban mérve) is kismértékben járul hozzá a funkcionál értékének növeléséhez, míg „kedvezőtlen pozíciókban” (ahonnan ezért eltávolodni igyekszik) nagymértékben növeli azt.

Tehát a (IV.10) minimumát keressük. Természetesen a (II.34) most is megfelelő lenne, de túlságosan általános formula, továbbá szeretnénk elkerülni a Christoffel szimbólumok használatát, és maradni a görbét leíró $\mathbf{r}\left(t\right)$ és differenciális invariánsainak használatánál. A $g\left(\left|\nabla I\left(\mathbf{r}\right)\right|\right)$ összetett függvény helyett írhatjuk a $g\left(\mathbf{r}\right)$-t, és így az Euler-Lagrange egyenletek levezetése ($\nabla g \equiv \frac{dg}{d\mathbf{r}} \overset{jel}{=} g_{\mathbf{r}}$) jelöléssel $\min \int_G g\left(\mathbf{r}\right)\left|\mathbf{r}_t\right|dt \ \Rightarrow$:

[40] A g függvény argumentumának választható maga a képfüggvény is. Ekkor a minimalizáló görbe a legsötétebb részeken halad

$$\begin{aligned}\frac{dg}{d\mathbf{r}}-\frac{d}{dt}\left(g\frac{d\left|\mathbf{r}_t\right|}{d\mathbf{r}_t}\right)&=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\frac{d}{dt}\left(g\frac{d\sqrt{\mathbf{r}_t\cdot\mathbf{r}_t}}{d\mathbf{r}_t}\right)=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\frac{d}{dt}\left(g\frac{\mathbf{r}_t}{\left|\mathbf{r}_t\right|}\right)=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\frac{d}{dt}\left(g\mathbf{e}\right)\\
&=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\mathbf{e}\frac{dg}{dt}-g\frac{d\mathbf{e}}{dt}=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\mathbf{e}g_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_t-g\mathbf{e}_s\frac{ds}{dt}\\
&=g_{\mathbf{r}}\left|\mathbf{r}_t\right|-\mathbf{e}g_{\mathbf{r}}\cdot\left(\left|\mathbf{r}_t\right|\mathbf{e}\right)-g\kappa\mathbf{n}\left|\mathbf{r}_t\right|\\
&=\left|\mathbf{r}_t\right|\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{ee}\right)\cdot g_{\mathbf{r}}-g\kappa\mathbf{n}\right]=\left|\mathbf{r}_t\right|\left[\left(\mathbf{nn}+\mathbf{ee}-\mathbf{ee}\right)\cdot g_{\mathbf{r}}-g\kappa\mathbf{n}\right]\\
&=\left|\mathbf{r}_t\right|\left(g_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n}-g\kappa\right)\mathbf{n}=0\end{aligned}\tag{IV.13}$$

A levezetés első sorában bevezettük az érintő-egységvektort: $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{r}_t}{\left|\mathbf{r}_t\right|}$, a második sorban kihasználtuk, hogy a g az $\mathbf{r}$, az $\mathbf{e}$ pedig az ívhossz (s) összetett függvénye, és $\frac{ds}{dt}=\left|\mathbf{r}_t\right|$. A harmadik sorban a síkgörbékre vonatkozó Frenet képletet: $\mathbf{e}_s=\kappa\mathbf{n}$, amely elemi geometriai megfontolásokból is azonnal adódik (κ a görbület, $\mathbf{n}$ a normál-egységvektor). Végül a negyedik sorban az identitás tenzort írtuk fel a lokális $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ koordinátarendszerbeli alakban: $\mathbf{I}=\mathbf{nn}+\mathbf{ee}$. Az $\left|\mathbf{r}_t\right|$ minden pontban pozitív, ezért oszthatunk vele, így az evolúciós egyenletek ($\kappa=-div\left(\mathbf{n}\right)$):

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau}=\left(g\kappa-g_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}=-\left(g_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n}+g\,div\left(\mathbf{n}\right)\right)\mathbf{n}\tag{IV.14}$$

I.3 pont alapján a Level Set egyenletek[41]:

$$\begin{aligned}U_\tau&=-\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau}\cdot\mathbf{n}\left|\nabla U\right|\\
&=\left|\nabla U\right|\left[\left(\nabla g\right)\cdot\frac{\nabla U}{\left|\nabla U\right|}+g\nabla\cdot\left(\frac{\nabla U}{\left|\nabla U\right|}\right)\right]\\
&=\left|\nabla U\right|\nabla\cdot\left(g\frac{\nabla U}{\left|\nabla U\right|}\right)\end{aligned}\tag{IV.15}$$

Megjegyzés: A $g\equiv 1$ esetén a görbe euklideszi hosszát minimalizáljuk ekkor a (IV.13) a $\kappa\mathbf{n}=0$ egyenletbe megy át, amely az egyenes (II.7) egyenlete: $\mathbf{r}''\equiv\mathbf{e}_s=\kappa\mathbf{n}$, és előjeles távolságfüggvény $\left|\nabla U\right|\equiv 1$ választása esetén a (IV.15) Level Set egyenlete az $u_\tau=\alpha\Delta u,\ \left(\alpha=1\right)$ választással a hővezetési egyenlet.

IV.1.5. Régió alapú aktív kontúr

A síkbeli Gauss-Osztogradszkij tétel:

[41] A Level Set egyenletek az evolúciós egyenletekből mindig formálisan származtathatók az I.3 pont alapján.

$$\int_A div(\mathbf{v})\ dA = \oint_{G(=\partial A)} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\ ds = \oint_G \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\left|\mathbf{r}_t\right|dt \tag{IV.16}$$

ahol az A a zárt G görbe által határolt tartomány, $\mathbf{v}$ tetszőleges vektormező. Keressük a fenti integrálokat minimalizáló görbét. A levezetést most célszerű koordinátás alakban végezni:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_t = x_t\mathbf{i} + y_t\mathbf{j} \ \Rightarrow\ \left|\mathbf{r}_t\right|\mathbf{n} = -y_t\mathbf{i} + x_t\mathbf{j} \\
&\mathbf{v}(\mathbf{r}) = u(x,y)\mathbf{i} + v(x,y)\mathbf{j} \\
&\Rightarrow\ \left|\mathbf{r}_t\right|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = -y_t u + x_t v
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

Az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{gathered}
x : -y_t u_x + x_t v_x - \frac{d}{dt}v = -y_t u_x + x_t v_x - v_x x_t - v_y y_t = -y_t div(\mathbf{v}) \\
y : -y_t u_y + x_t v_y + \frac{d}{dt}u = -y_t u_x + x_t v_x + u_x x_t + u_y y_t = x_t div(\mathbf{v}) \\
\Rightarrow \\
\mathbf{n} div(\mathbf{v}) = 0
\end{gathered} \tag{IV.18}$$

Az utolsó sort az $\left|\mathbf{r}_t\right|$-vel osztással kaptuk. Tetszőleges $f(x,y)$ függvényhez választható megfelelő $\mathbf{v} = u(x,y)\mathbf{i} + v(x,y)\mathbf{j}$ sebességmező, hogy a $div(\mathbf{v}) = f(x,y)$ teljesüljön (pl. az $\Omega = [0,a]\times[0,b]$ képtartományon egy ilyenek a következők: $u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x f(\xi,y)\ d\xi$ és $v(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^y f(x,\eta)\ d\eta$, amelyekkel $div(\mathbf{v}) = f(x,y)$). Ezek szerint az $\int_A f dA$ Euler-Lagrange egyenletei, illetve az evolúciós és Level Set egyenletek:

$$\begin{gathered}
f\,\mathbf{n} = 0\ \Rightarrow \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} = -f\mathbf{n} \\
\Leftrightarrow \\
U_\tau = \left|\nabla U\right| f
\end{gathered} \tag{IV.19}$$

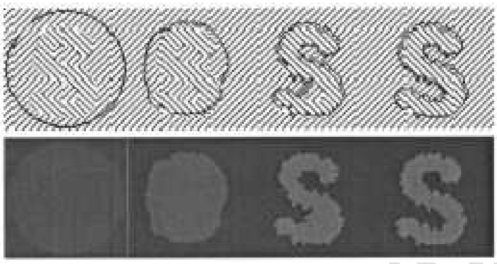
A fenti eredmények alkalmazása pl. az (I.3) Mumford-Shah féle szegmentáció, vagy annak egy egyszerűsített változata, a Chan-Vese minimális variáció [15], a következő funkcionállal:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_G}\left(I - c_1\right)^2 dA + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_G}\left(I - c_2\right)^2 dA \tag{IV.20}$$

Ahol Ω_G a zárt szeparáló görbe által közrefogott régió c_1 intenzitás-átlaggal, $\Omega\setminus\Omega_G$ a görbén kívüli tér c_2 intenzitás-átlaggal. Az Euler-Lagrange egyenletek (IV.19) szerint:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(I-c_1\right)^2-\left(I-c_2\right)^2\right]\mathbf{n}\\&=\frac{1}{2}\left(I^2-2c_1I+c_1^2-I^2+2c_2I-c_2^2\right)\mathbf{n}\\&=\left(c_2-c_1\right)\left(I-\frac{c_1+c_2}{2}\right)\mathbf{n}\end{aligned} \tag{IV.21}$$

(IV.21) nagy erénye, hogy az $f=\left(c_2-c_1\right)\left(I-\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)$ adatmetrika könnyen cserélhető intenzitástól különböző metrikákra, pl. textúrázott régióknál a textúrák irányultságára jellemző mennyiségre, a kép gradiensének irányára:



IV.2. ábra: Szegmentáció a textúrák irányultsága alapján

A módszer általánosítható több régióra és kombinálható egyéb módszerekkel, pl. – ha élek is léteznek – a geodéziai kontúrral is. Hátrányaként említhető, hogy minden iterációs lépés után újra kell számolni a régiók átlagait, amely különösen nem-triviális metrikák esetén hosszadalmas.

IV.1.6. Aktív felületek

Induljunk ki a (IV.9)-nél egyszerűbb:

$$\int\limits_F \Phi\left(\mathbf{S}\right)dA=\iint\limits_{u,v}\Phi\left(\mathbf{S}\right)\left|\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right|dudv \tag{IV.22}$$

funkcionálból. Mielőtt hozzáfogunk az Euler-Lagrange egyenletek levezetéséhez először határozzuk meg a felületelem lokális bázisok szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left|\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right|}{\partial\mathbf{S}_u}&=\frac{\partial\sqrt{\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)\cdot\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)}}{\partial\mathbf{S}_u}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left|\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right|}2\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right)}{\partial\mathbf{S}_u}\\&=-\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{S}_u\right)}{\partial\mathbf{S}_u}=-\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\left(\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\cdot\mathbf{S}_u\right)}{\partial\mathbf{S}_u}\\&=-\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\left(=\mathbf{S}_v\times\mathbf{n}\right)\end{aligned} \tag{IV.23}$$

$$\frac{\partial\left|\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v\right|}{\partial\mathbf{S}_v}=\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\left(=-\mathbf{S}_u\times\mathbf{n}\right)$$

ahol $\mathbf{n}$ a normál-egységvektor.

Vezessük még be a $h = \left|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right|$ jelölést. Így az egyenletek:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= h\Phi_{\mathbf{S}} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi\frac{\partial h}{\partial \mathbf{S}_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi\frac{\partial h}{\partial \mathbf{S}_v}\right) = h\Phi_{\mathbf{S}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}} + \left(\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times + \mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_{vu}\right]_\times\right) - \left(\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \Phi\left(\mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times + \mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_{uv}\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}} + \left(\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \left(\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}} - \left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{n}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{n}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}} - h\mathbf{S}^u\left(\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{S}_u\right) - h\mathbf{S}^v\left(\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{S}_v\right) + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_u\mathbf{S}^u - \mathbf{S}_v\mathbf{S}^v\right) + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&= h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{nn} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)
\end{aligned}
\tag{IV.24}
$$

(IV.24)-ben negyedik sorában felhasználtuk a (II.15) eredményt, az utolsó sorban pedig, hogy tetszőleges $a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v + c\mathbf{n}$ vektorra:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_u\mathbf{S}^u - \mathbf{S}_v\mathbf{S}^v\right)\cdot\mathbf{S}_u = \mathbf{S}_u - \mathbf{S}_u - \mathbf{0} = \mathbf{0} \\
&\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_u\mathbf{S}^u - \mathbf{S}_v\mathbf{S}^v\right)\cdot\mathbf{S}_v = \mathbf{S}_v - \mathbf{0} - \mathbf{S}_v = \mathbf{0} \\
&\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_u\mathbf{S}^u - \mathbf{S}_v\mathbf{S}^v\right)\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{n} \\
&\Rightarrow \\
&\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_u\mathbf{S}^u - \mathbf{S}_v\mathbf{S}^v\right)\cdot\left(a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v + c\mathbf{n}\right) = c\mathbf{n} \\
&= \mathbf{nn}\cdot\left(a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v + c\mathbf{n}\right)
\end{aligned}
\tag{IV.25}
$$

Bontsuk még fel a (IV.24) utolsó sorát is komponenseire:

$$
\begin{aligned}
0 &= h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{nn} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right) \\
&\equiv \left[h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{nn} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)\right]\cdot\mathbf{S}_u\ \mathbf{S}^u \\
&\quad + \left[h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{nn} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)\right]\cdot\mathbf{S}_v\ \mathbf{S}^v \\
&\quad + \left[h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{nn} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \mathbf{n}_v\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)\right]\cdot\mathbf{n}\ \mathbf{n} \\
\\
&= \left\{\mathbf{0} + \Phi\left[\mathbf{n}_u\cdot\left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{S}_u\right) - \mathbf{0}\right]\right\}\ \mathbf{S}^u \\
&\quad + \left\{\mathbf{0} + \Phi\left[\mathbf{0} - \mathbf{n}_v\cdot\left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{S}_u\right)\right]\right\}\ \mathbf{S}^u \\
&\quad + \left\{h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n} + \Phi\left[\mathbf{n}_u\cdot\left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{n}\right) - \mathbf{n}_v\cdot\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{n}\right)\right]\right\}\ \mathbf{n} \\
\\
&= \left(-h\Phi\mathbf{n}_u\cdot\mathbf{n}\right)\ \mathbf{S}^u \\
&\quad + \left(h\Phi\mathbf{n}_v\cdot\mathbf{n}\right)\ \mathbf{S}^v \\
&\quad + \left\{h\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n} + \Phi\left[\mathbf{n}_u\cdot\left(\mathbf{S}_v\times\mathbf{n}\right) - \mathbf{n}_v\cdot\left(\mathbf{S}_u\times\mathbf{n}\right)\right]\right\}\ \mathbf{n} \\
\\
&= h\left[\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n} + \Phi\left(\mathbf{n}_u\cdot\mathbf{S}^u + \mathbf{n}_v\cdot\mathbf{S}^v\right)\right]\ \mathbf{n} \\
&= h\left[\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n} + \Phi\, div\left(\mathbf{n}\right)\right]\ \mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{IV.26}
$$

Ismét felhasználtuk a (II.15) eredményt, és azt a tény, hogy $\mathbf{n}$ a normál-egységvektor, ezért parciális deriváltjaira merőleges, skaláris szorzatuk nulla. Mivel a $div\left(\mathbf{n}\right)$ az összeggörbület mínusz kétszerese, azért (IV.26) formálisan teljes mértékben megegyezik az egydimenziós (IV.13-14) egyenletekkel, az evolúciós egyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = -\left(\Phi_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} + \Phi div\left(\mathbf{n}\right)\right)\mathbf{n} \tag{IV.27}$$

Ha az általánosabb (IV.9) egyenletekből indulunk ki, akkor a (IV.26) $h\left[\Phi_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} + \Phi div\left(\mathbf{n}\right)\right]\ \mathbf{n}$ Euler-Lagrange egyenletekhez a $-\frac{\partial}{\partial u}\left(h\Phi_{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(h\Phi_{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_v}\right)$ tag járul.

Először kiszámoljuk a normál-egységvektor megfelelő deriváltjait, felhasználva (IV.23) eredményét:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{h}\left(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right) \quad \Rightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_u} &= \left(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right)\left[-\frac{1}{h^2}\left(-\mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right)\right] - \frac{1}{h}\left[\mathbf{S}_v\right]_\times \\
&= -\frac{1}{h}\left[\left[\mathbf{S}_v\right]_\times - \left(\mathbf{nn}\right) \cdot \left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right] \\
&= -\frac{1}{h}\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \left[\mathbf{S}_v\right]_\times \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_v} &= \frac{1}{h}\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \left[\mathbf{S}_u\right]_\times
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

Ebből először is következik, hogy az additív tagoknak is kizárólag normálirányú komponense van, hiszen pl $\frac{1}{h}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right] \cdot \mathbf{S}_v = \left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$, továbbá az egyetlen olyan tag, amely additív tagok része, és nem a (IV.28)-ra végződik, az $\left(\left[\mathbf{S}_{uv}\right] - \left[\mathbf{S}_{vu}\right]\right)$ tényezőt tartalmazza. Ezek szerint az additív tagot így kapjuk:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h\Phi_{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h\Phi_{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_v}\right)\right] \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{n} \tag{IV.29}$$

A (IV.28) normál-egységvektorral szorozva, ismét fölhasználva (II-15)-öt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{h}\left(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right) \quad \Rightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_u} \cdot \mathbf{n} &= -\frac{1}{h}\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \left(\mathbf{S}_v \times \mathbf{n}\right) = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \mathbf{S}^u = -\mathbf{S}^u \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{S}_v} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{h}\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \left(\mathbf{S}_u \times \mathbf{n}\right) = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn}\right) \cdot \mathbf{S}^v = -\mathbf{S}^v
\end{aligned} \tag{IV.30}$$

(IV.29)-ben felhasználva:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\mathbf{S}_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\mathbf{S}_v}\right)\right]\cdot\mathbf{n}$$

$$=\frac{\partial h\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}\cdot\mathbf{S}^u+\frac{\partial h\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}\cdot\mathbf{S}^v-h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left[\frac{\partial\left(-\frac{1}{h}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(\frac{1}{h}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)}{\partial v}\right]\cdot\mathbf{n}$$

$$=\mathbf{S}^u\cdot\frac{\partial h\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\frac{\partial h\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}-h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left[\frac{\partial\left(-\frac{1}{h}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot\left[\mathbf{S}_v\right]_\times\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(\frac{1}{h}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot\left[\mathbf{S}_u\right]_\times\right)}{\partial v}\right]\cdot\mathbf{n}$$

$$=\mathbf{S}^u\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial v}+h\left(\mathbf{S}^u\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}\right)$$
$$+h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left[\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial u}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot h\mathbf{S}^u-\frac{\partial\left(\mathbf{nn}\right)}{\partial u}\cdot\mathbf{S}^u\right]+h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left[\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial v}\left(\mathbf{I}-\mathbf{nn}\right)\cdot h\mathbf{S}^v-\frac{\partial\left(\mathbf{nn}\right)}{\partial v}\cdot\mathbf{S}^v\right]-h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{0}$$

$$=\mathbf{S}^u\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial v}+h\left(\mathbf{S}^u\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}\right)$$
$$+h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial u}h\mathbf{S}^u-\mathbf{0}-\mathbf{n}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial u}\cdot\mathbf{S}^u\right)+h\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial v}h\mathbf{S}^v-\mathbf{0}-\mathbf{n}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial v}\cdot\mathbf{S}^v\right)$$

$$=\mathbf{S}^u\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\Phi_{\mathbf{n}}\frac{\partial h}{\partial v}+h\left(\mathbf{S}^u\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}\right)$$
$$-\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{S}^u+\frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{S}^v\right)-h\left(\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)$$

$$=h\left[\mathbf{S}^u\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial u}+\mathbf{S}^v\cdot\frac{\partial\Phi_{\mathbf{n}}}{\partial v}-\left(\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\right]$$

$$=h\left[\mathbf{S}^u\cdot\Phi_{\mathbf{nS}}\cdot\mathbf{S}_u+\mathbf{S}^v\cdot\Phi_{\mathbf{nS}}\cdot\mathbf{S}_v+\mathbf{S}^u\cdot\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{n}_u+\mathbf{S}^v\cdot\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{n}_v-\left(\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\right]$$

$$=h\left[\mathbf{S}^u\cdot\left(\Phi_{\mathbf{nS}}+\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{n}\nabla\right)\cdot\mathbf{S}_u+\mathbf{S}^v\cdot\left(\Phi_{\mathbf{nS}}+\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{n}\nabla\right)\cdot\mathbf{S}_v-\left(\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\right]$$

$$=h\left[Tr\big|_T\left(\Phi_{\mathbf{nS}}+\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{n}\nabla\right)-\left(\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\right] \qquad \text{(IV.31)}$$

Vagy a divergencia és gradiens jelöléssel: $h\left[Tr\big|_T\left(\Phi_{\mathbf{nS}}+\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot grad\left(\mathbf{n}\right)\right)-\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\,div\left(\mathbf{n}\right)\right]$,

ahol a $Tr\big|_T\left(\mathbf{Q}\right)$ a $\mathbf{Q}$ tenzor érintősíkbeli nyoma (trace).

Mindezek alapján a (IV.9) probléma Euler-Lagrange egyenletei:

$$h\left[\Phi_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}+\left(\Phi-\Phi_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}\right)div\left(\mathbf{n}\right)+Tr\big|_T\left(\Phi_{\mathbf{nS}}+\Phi_{\mathbf{nn}}\cdot grad\left(\mathbf{n}\right)\right)\right]\ \mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad \text{(IV.32)}$$

A gyakorlatban a (IV.32) elsőrendű deriváltjait tartalmazó közelítő evolúciós egyenleteket használják, amelyek tehát:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = -\left[\Phi_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} + \left(\Phi - \Phi_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}\right) div\left(\mathbf{n}\right)\right]\mathbf{n} \qquad \text{(IV.33)}$$

A $\Phi_{\mathbf{n}}$ a Φ Lagrange függvény „normálirányú gradiense”, azaz a Descartes-i koordinátákkal kifejezett alakban a normál-egységvektor komponensei szerinti deriváltakból álló vektor, azaz a $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ esetén reprezentánsa a $\left[\Phi_{\mathbf{n}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial a} & \frac{\partial \Phi}{\partial b} & \frac{\partial \Phi}{\partial c} \end{bmatrix}^T$.

IV.1.7. Az aktív felületek egy alkalmazása: 3D rekonstrukció

A (IV.33) egy általános, az aktív felület evolúcióját leíró egyenlet. A problémára megfelelőképpen definiált „probléma-specifikus” Φ választással különböző feladatok oldhatók meg. A Feugeras és Keriven által kidolgozott többkamerás rekonstrukció egy több kamerával megfigyelt színtér objektumait aktív felülettel szegmentálja. Az általuk definiált funkcionál az aktív felület minden állapotára[42] egy hibaértéket állít elő a kamerákon látható képrészletek megfeleltetése alapján. A megoldás-felületen ez a felületi integrál minimális értékű lesz. Az alábbiakban ennek az alapjait ismertetjük a legegyszerűbb lineáris képrészlet-megfeleltetésekkel[43], amely a megfigyelt felület pontjainak kicsiny környezetét a felület érintősíkjával, a kamera vetítési függvényeit a megfigyelt pont kicsiny térbeli környezetében lineáris függvénnyel közelíti. A gyakorlatban leggyakoribb lyukkamera modell alapjait az V.1 mellékletben találjuk.

Definíciók és jelölések:

A megfigyelt színtér háromdimenziós euklideszi tér: $\mathbb{R}^3$. Ennek standard bázisát a három, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektor $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ alkotja. Ennek a térnek az objektumait figyeljük meg. Az objektumok felületükkel reprezentáltak, felületük a három dimenziós térbe ágyazott kétdimenziós sokaság. Paraméteresen, általános koordinátákkal kifejezve:

$$\mathbf{S}\left(u,v\right) = X\left(u,v\right)\mathbf{i} + Y\left(u,v\right)\mathbf{j} + Z\left(u,v\right)\mathbf{k} \qquad \text{(IV.34)}$$

A térkoordinátákat nagybetűvel jelöljük. A vetítési függvény a tér minden, három koordinátával jellemzett $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ pontjához két, kisbetűvel jelölt $\left(x,y\right)$ képkoordinátát

[42] Azaz az evolúció egymás utáni lépései során előálló felületekre.
[43] Az ú.n. affin homográfiával megfeleltetett képrészletek.

rendel. A különböző vetítési függvényeket alsó indexükkel különböztetjük meg. Ha a vetítési függvény az (IV.34) felület pontjait vetíti, akkor – a térkoordinátákon keresztül – a felület paramétereinek (is) függvénye. Az i -edik vetítési függvény alakja tehát:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\left(X\left(u,v\right),Y\left(u,v\right),Z\left(u,v\right)\right) = \overline{x}_i\left(u,v\right) \\ y_i &= y_i\left(X\left(u,v\right),Y\left(u,v\right),Z\left(u,v\right)\right) = \overline{y}_i\left(u,v\right) \end{aligned} \tag{IV.35}$$

A későbbiekben a felülvonást elhagyjuk. A fejezet további részében az i és j indexek – és csak ezek – nem deriválásra, hanem a képindexre utalnak. A vetítési függvények konkrét alakját gyakran a lyukkamera modell alapján veszik fel, amely a kamera térbeli pozícióját, irányát, és az ú.n. belső paramétereit tartalmazza, de mi egy általános (IV.35) alakot tételezünk fel.

Feltesszük, hogy a felület egy megfigyelt pontja körüli kicsiny nyílt koordinátakörnyezet képei is teljes egészükben léteznek a vetületeken. Ez a tulajdonság a függvények differenciálhatóságának feltétele. A vetítési függvényekről feltesszük továbbá, hogy minden $\left(u,v\right)$ pontban létezik az inverzük.

Képrészletek megfeleltetése:

A (IV.35) egyenletekkel adott függvényeket tehát $\left(u,v\right)$-ben sorba fejthetjük. A sorból csak az elsőrendű tagokat tartjuk meg. A megfigyelt pont körüli differenciálokat így jelöljük:

$$\begin{aligned} dx_i &= x_i\left(u+du,v+dv\right)-x_i\left(u,v\right) \\ dy_i &= y_i\left(u+du,v+dv\right)-y_i\left(u,v\right) \end{aligned} \tag{IV.36}$$

A differenciálokat első rendben közelítjük. Mátrixos formalizmusban:

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} & \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial u} & \dfrac{\partial y_i}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \; d\mathbf{x}_i \approx \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{u} \tag{IV.37}$$

Itt $\mathbf{J}_i$ mátrixa a leképezés Jacobi mátrixa. A közelítés jelét a továbbiakban elhagyjuk, és egyenlőségjelet használunk.

Egy másik, j indexszel azonosított transzformáció közelítése formailag teljesen megegyezik az (IV.37)-tel. A felületen mért $d\mathbf{u}$ elmozdítást az egyik egyenletből kifejezve és azt a másikba helyettesítve a képrészletek közötti összefüggést kapjuk. Az inverz:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{J}_i^{-1} \cdot d\mathbf{x}_i \tag{IV.38}$$

A képrészletek közötti transzformáció:

$$d\mathbf{x}_j = \mathbf{J}_j \cdot \mathbf{J}_i^{-1} \cdot d\mathbf{x}_j \overset{jel}{=} \mathbf{A}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i \tag{IV.39}$$

Az $\mathbf{A}_{ij}$ komponensei itt még paraméteres formában adottak, célunk, hogy invariáns formában adjuk meg. Ehhez figyelembe vesszük, hogy az (IV.35) szerint a vetítési függvények a felület pontjainak térkoordinátái (IV.34) szerinti összetett függvények, és így a differenciáloperátorok között, egy tetszőleges f függvényre alkalmazva a következő összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial Z} = \mathbf{S}_u \cdot \nabla f \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Z} = \mathbf{S}_v \cdot \nabla f \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Alkalmazva ezeket a vetítési függvényekre a $\mathbf{J}_i$, $\mathbf{J}_j$ komponensek:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u \cdot \nabla x_i & \mathbf{S}_v \cdot \nabla x_i \\ \mathbf{S}_u \cdot \nabla y_i & \mathbf{S}_v \cdot \nabla y_i \end{bmatrix} \tag{IV.41}$$

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u \cdot \nabla x_j & \mathbf{S}_v \cdot \nabla x_j \\ \mathbf{S}_u \cdot \nabla y_j & \mathbf{S}_v \cdot \nabla y_j \end{bmatrix} \tag{V.42}$$

Az (IV.41) és (IV.42) összefüggéseket az (V.39)-be helyettesítve az $\mathbf{A}_{ij}$ komponensei:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J}_i)}\left[(\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_j)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_i) - (\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_j)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_i)\right] \\ a_{12} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J}_i)}\left[-(\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_j)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_i) + (\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_j)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_i)\right] \\ a_{21} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J}_i)}\left[(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_j)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_i) - (\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_j)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_i)\right] \\ a_{22} &= \frac{1}{\det(\mathbf{J}_i)}\left[-(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_j)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_i) + (\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_j)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_i)\right] \end{aligned} \tag{IV.43}$$

A (IV.43)-ban: $\det(\mathbf{J}_i) = (\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_i)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_i) - (\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_i)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_i)$. Az összes komponens felírható a felület normál egységvektorával, pl. ez utóbbi determináns átalakítása:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{S}_u \cdot \nabla x_i)(\mathbf{S}_v \cdot \nabla y_i) - (\mathbf{S}_v \cdot \nabla x_i)(\mathbf{S}_u \cdot \nabla y_i) = \\ &\nabla x_i \cdot (\mathbf{S}_u\mathbf{S}_v) \cdot \nabla y_i - \nabla x_i \cdot (\mathbf{S}_v\mathbf{S}_u) \cdot \nabla y_i = \\ &-\nabla x_i \cdot (\mathbf{S}_v\mathbf{S}_u - \mathbf{S}_u\mathbf{S}_v) \cdot \nabla y_i = \\ &-\nabla x_i \cdot [\mathbf{N}]_\times \cdot \nabla y_i = -|\mathbf{N}||\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i| \end{aligned} \tag{IV.44}$$

(IV.44)-ben a második sorban átzárójeleztünk, felhasználtuk a diádok vektorral való szorzatának azonosságát, a harmadik sorban a tenzorok linearitási tulajdonságát (disztributivitás) használtuk fel. A negyedik sorban az $\mathbf{S}_v\mathbf{S}_u - \mathbf{S}_u\mathbf{S}_v$ mennyiségben felismertük a felület normálvektorának kifejezését, az $\left[\mathbf{N}\right]_{\times}$ tenzort (jelentése: $\left[\mathbf{N}\right]_{\times} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{N} \times \mathbf{w}$ minden $\mathbf{w}$-re), végül a normálvektor hosszát kiemelve jutottunk a záró kifejezéshez, ahol a függőleges vonalak közé írt mennyiség: $\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i\right|$ a három alkotó vektor vegyes szorzata.

A mátrixkomponenseknek (IV.43) a determinánshoz hasonló átalakítása (IV.44) után a normálvektor hossza a hányadosokból kiesik, és a megmaradó mennyiségek mind invariánsok: a felület elsőrendű differenciális invariánsa a normál egységvektor és a vetítési függvények elsőrendű invariánsai, a gradiensek. A végeredmény így írható:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left|\nabla x_j \mathbf{n} \nabla y_i\right|}{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i\right|} & \dfrac{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla x_j\right|}{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i\right|} \\ \dfrac{\left|\nabla y_j \mathbf{n} \nabla y_i\right|}{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i\right|} & \dfrac{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_j\right|}{\left|\nabla x_i \mathbf{n} \nabla y_i\right|} \end{bmatrix} \tag{IV.45}$$

A sztereó probléma Lagrange függvénye:

Ha az aktív felület evolúciója során pontosan illeszkedik egy objektumra, akkor minden pontjában a látott képrészletek között – elsőrendű közelítésben – (IV.39) érvényes a (IV.45) mátrixszal. A pontok kicsiny környezetében tehát a képrészletek (IV.39) transzformációval számított megfeleltetésére a következő normalizált keresztkorreláció kicsiny értéket vesz fel:

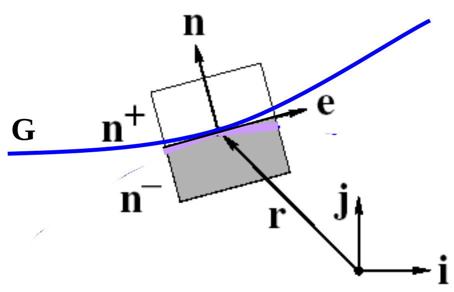
$$\Phi\left(\mathbf{S},\mathbf{n}\right) = \sum 1 - NCC_{ij} = \sum \left(1 - \frac{\int_{W_i} I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i}{\sqrt{\int_{W_i} I_i^2\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i \int_{W_i} I_j^2\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i}} \right) \tag{IV.46}$$

Az (IV.46)-ban a $\sum$ arra utal, hogy összegzést végzünk az összes olyan kamera párra (vagy azok egy részhalmazára), amelyből a nézett felületi pont látszik. A normalizált keresztkorreláció: NCC_{ij} a megfigyelt pont i, j vetületének kicsiny környezetei – a képrészletek – között számolt. A W_i korrelációs tartomány az i vetületen definiált, ennek képe a j vetületen az $\mathbf{A}_{ij}\left(W_i\right)$, amely minden, a tartományba eső $\Delta\mathbf{x}_i$ ponthoz annak $\Delta\mathbf{x}_j = \mathbf{A}_{ij}\left(\Delta\mathbf{x}_i\right)$ képét rendeli.

Amíg az aktív felület illeszkedése pontatlan, addig a teljes felületre számított (IV.46) nagyobb értéket mutat, amely a felület evolúciója során csökken, mialatt az a megoldásra fekszik. A felület (az ismeretlen $\mathbf{S}$) $\left[X \quad Y \quad Z\right]^T$ komponensei a vetítési függvényben (IV.35), az $\mathbf{A}_{ij}$ komponenseiben (a $\nabla\mathbf{x}_i$, $\nabla\mathbf{x}_j$ -ben), a normál-egységvektor az $\mathbf{A}_{ij}$ (IV.45) komponenseiben található. Az implementáció részletei a lyukkamera modellre az V.2 mellékletben találhatók.

A (IV.33)-ban megjelenő $\Phi div(\mathbf{n})$ tag – ha annak evolúcióját egyéb tényezők nem befolyásolják – egy zárt felület folyamatos zsugorodását okozza. Ezért a szegmentálandó objektumnak mindig a kezdeti felület belsejében kell lennie.

IV.1.8. A lokális régió alapú aktív kontúr



IV.3. ábra: Lokális descartesi koordináták a G görbe mentén. Az **r** helyvektorral kijelölt pontban a lokális koordinátarendszert az **e** érintő- és **n** normál-egységvektorok definiálják (**n** = **k** x **e**). A szeparációt a lokális normálirányú koordináták alapján végezzük, az egymásnak megfeleltetett régiók az $\mathbf{n}^+$ és az $\mathbf{n}^-$.

A (IV.9) síkbeli megfelelője a (IV.8). Ez tulajdonképpen a görbe menti lokális koordinátarendszert expliciten tartalmazó funkcionál (IV.3 ábra), amely lehetővé teszi a görbe menti lokális régiók használatát. (IV.8) elsőrendű tagokat tartalmazó (közelítő) Euler-Lagrange egyenletei:

$$\begin{gathered} h\left[\Phi_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} + \left(\Phi - \Phi_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}\right) div\left(\mathbf{n}\right)\right]\mathbf{n} = 0 \\ \left(h = \left|\mathbf{r}_t\right|\right) \end{gathered} \tag{IV.47}$$

a megfelelő evolúciós egyenletek pedig:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = -\left[\Phi_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} + \left(\Phi - \Phi_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}\right) div\left(\mathbf{n}\right)\right]\mathbf{n} \tag{IV.48}$$

Ez tökéletesen megegyezik a (IV.33) egydimenziós változatával, mert:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{k}\right]_\times \\ \Rightarrow \\ \Phi_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = \Phi_{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{k}\right]_\times \cdot \mathbf{e} = \Phi_{\mathbf{n}} \cdot \left(\mathbf{k} \times \mathbf{e}\right) = \Phi_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \end{gathered} \tag{IV.49}$$

Azaz (IV.48) alternatív alakja:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = -\left[\Phi_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} + \left(\Phi - \Phi_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}\right) div\left(\mathbf{n}\right)\right]\mathbf{n} \tag{IV.50}$$

IV.1.9. A lokális régió alapú aktív kontúr egy alkalmazása

Ha a szegmentációs probléma nem hagyatkozhat élek megtalálására (pl. a képtartalom csak statisztikailag értelmezhető), akkor pl. a IV.1.4-ben ismertetett geodéziai aktív kontúr nem alkalmazható. A IV.1.5 régió alapú kontúr igen, de néhány hátránya azért van: a teljes régiók adatainak feldolgozása időigényes lehet, kettőnél több tartományra való általánosítása bonyolult, és nyílt görbék használata nem (vagy csak a körülményesen) lehetséges. Ilyen esetekben jöhet szóba a lokális régió alapú aktív kontúr. Tegyük fel, hogy a IV.3 ábra szerint kisebb és nagyobb átlagintenzitású rétegeket akarunk szétválasztani a különbségek maximalizálásával. Az ábra jelöléseivel a görbe menti régiókat a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{n}^{\pm} = \xi\mathbf{e} \pm \eta\mathbf{n} \tag{IV.51}$$

Egy maximalizáló Ψ és a Φ közötti kapcsolat lehet a $\Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right) = -\Psi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right)$, vagy a $\Phi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right) = \dfrac{1}{\Psi\left(\mathbf{r},\mathbf{e}\right)+\varepsilon}$, $\varepsilon \ll 1$. Ez utóbbi esetben az első deriváltak közötti összefüggés:

$$\Phi_{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\left(\Psi+\varepsilon\right)^2}\Psi_{\mathbf{u}},\ \mathbf{u} = \mathbf{r},\mathbf{e} \tag{IV.52}$$

A Ψ mennyiségei descartesi komponensekkel:

$$\Psi_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} \end{bmatrix},\ \Psi_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Psi}{\partial e_{\tilde{x}}} \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial e_{\tilde{y}}} \end{bmatrix}, \tag{IV.53}$$

Az érintő- és normál-egységvektor közötti összefüggés alapján:

$$\left[\mathbf{e}\right] = \begin{bmatrix} e_{\tilde{x}} \\ e_{\tilde{y}} \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\mathbf{n}\right] = \begin{bmatrix} -e_{\tilde{y}} \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \Rightarrow div\left(\mathbf{n}\right) = \frac{\partial e_{\tilde{x}}}{\partial y} - \frac{\partial e_{\tilde{y}}}{\partial x} \tag{IV.54}$$

A problémát tehát úgy specializáljuk, hogy egy különbségeket maximalizáló Ψ függvénynek választtjuk a következő – a lokális integrációs tartomány méretével normált – lokális integrált:

$$\Psi = \frac{1}{2pq}\int_W \left[I\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right) - I\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)\right]^2 dW \tag{IV.55}$$

Ekkor a tartományok:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}+\mathbf{n}^{+} &= \left(x+\xi e_{\tilde{x}} - \eta e_{\tilde{y}}\right)\mathbf{i} + \left(y+\xi e_{\tilde{y}} + \eta e_{\tilde{x}}\right)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}+\mathbf{n}^{-} &= \left(x+\xi e_{\tilde{x}} + \eta e_{\tilde{y}}\right)\mathbf{i} + \left(y+\xi e_{\tilde{y}} - \eta e_{\tilde{x}}\right)\mathbf{j} \\ W \subset \Omega:&\ \ \xi \in \left[-p,p\right],\ \eta \in \left[0,q\right] \end{aligned} \tag{IV.56}$$

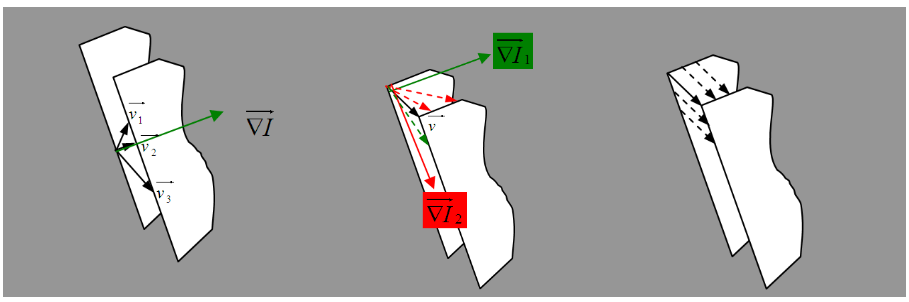
Fontos észrevenni, hogy az integrálási határokat konstansnak választva, a (IV.55) paraméteres integrál a funkcionált minimalizáló görbét definiáló mennyiségekre nézve, mivel a ξ és η integrálási változók és az integrálási határok függetlenek $x,\ y,\ e_{\tilde{x}},\ e_{\tilde{y}}$ mennyiségektől. A Ψ deriváltjainak képzésekor tehát felcserélhetjük a deriválás és az integrálás műveletét. Így a az első derivált a következők, bevezetve még a $\left(\Delta I\right)=I\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)-I\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)$ jelölést a közös tényezőkre:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi}{\partial x}&=\frac{1}{pq}\int_{W}\left(\Delta I\right)\left[I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)-I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)\right]dW\\
\frac{\partial\Psi}{\partial e_{\tilde{x}}}&=\frac{1}{pq}\int_{W}\left(\Delta I\right)\left[\xi I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)+\eta I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)-\xi I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)+\eta I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)\right]dW\\
\frac{\partial\Psi}{\partial y}&=\frac{1}{pq}\int_{W}\left(\Delta I\right)\left[I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)-I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)\right]dW\\
\frac{\partial\Psi}{\partial e_{\tilde{y}}}&=\frac{1}{pq}\int_{W}\left(\Delta I\right)\left[-\eta I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)+\xi I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{+}\right)-\eta I_{x}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)-\xi I_{y}\left(\mathbf{r}+\mathbf{n}^{-}\right)\right]dW
\end{aligned}
\tag{IV.57}
$$

IV.2. Optikai áramlás

A képfeldolgozásban a variációs módszerek történetileg az optikai áramlásban jelentek meg a szürke árnyalatos képsorozatok feldolgozására az intenzitás állandóság feltételezésével. A feltételezés szerint a képtartalom olyan képrészletek elmozdulása miatt változik, amelyek intenzitása eközben nem változik. Szigorúan véve ez a feltételezés akkor igaz, ha a megfigyelt színtér objektumai Lamberti felületekkel rendelkeznek, a megvilágítás pedig térben és időben állandónak tekinthető.

Adott egy videofelvétel két egymást követő kockája (képpárja). Az optikai áramlás alapfeladata annak az $\mathbf{u}=\left[u\left(x,y\right)\quad v\left(x,y\right)\right]^{T},\ \left(x,y\right)\in\Omega$ elmozdulás mezőnek a pontról-pontra történő meghatározása, amelyet a képpár első képének pixeleire alkalmazva a második képet (pontosabban annak egy közelítését[44]) kapjuk.



[44] A második képen megjelenhetnek takarásból előbukkanó részletek, amelyek az első képen nem láthatók.

IV.4. ábra: Az elmozdulás mező meghatározottsága nem kielégítő. A simasági feltétel (jobbra) hivatott az egyértelműséget biztosítani, azáltal, hogy az egyértelműen meghatározott (ritka) pontokból kiterjeszti a mezőt az alulhatározott területekre is.

Az optikai áramlás problémakör további jellegzetessége, hogy az optikai kényszer önmagában nem teszi egyértelműen meghatározottá a feladatot. Ez az ú.n. apertúra probléma. Az elmozdulás mező két komponense *u* és *v*, az optikai kényszer azonban egy egyenletet szolgáltat a képtartalom gradiens irányú elmozdulás-komponensére. Ez azt jelenti, hogy egyértelmű megoldást csak élek metszésénél vagy sarkoknál kapunk, a legjellegzetesebb képtartalomnál, az éleknél egyszeres alulhatározottsággal, homogén[45] részleteknél teljes határozatlansággal kell számolnunk. Az optikai kényszer általi meghatározottsági arányokra a képtartalom struktúra tenzor analízisével kaphatunk információt [16]. A probléma kezelésére ismert módszer egy további, ú.n. simasági feltétel kirovása (III.1.ábra). A simasági feltételek megadási módja az optikai áramlás módszerek egyfajta osztályozását teszik lehetővé [17]. Lokális simasági feltételek képezik az alapját az egyik csoportnak, amely a Lucas-Kanade [18] módszerre, a globális simasági feltételek pedig variációs módszerek prototípusára, a Horn-Schunck módszerre [19] vezethetők vissza.

IV.2.1. Az optikai áramlás variációs módszereinek fejlődése

Az (I.1) egyenletben szereplő intenzitásállandóságot kifejező adattagot szokás az elmozdulás mező szerinti Taylor sorba fejteni. Ekkor kapjuk az optikai áramlás (intenzitásállandóságot kifejező) linearizált egyenleteit[46]:

$$\nabla I \cdot \mathbf{u} + I_t = 0 \tag{IV.58}$$

Létezik az (IV.58) linearizált egyenlet olyan változata is, amely további tagok hozzáadásával kezelni képes a direkt megvilágításban $p = p\left(x, y\right)$, és a szórt fény intenzitásában $q = q\left(x, y\right)$ megjelenő változásokat: Negahdaripour [20], Kim és mások [21]:

$$\nabla I \cdot \mathbf{u} + I_t + pI + q = 0 \tag{IV.59}$$

A (IV.59) bal oldala pl. négyzetre emelve alkalmas adattagnak, de az ismeretlen *p* és *q* függvények olyan mértékben növelik az alulhatározottságot, hogy a gyakorlatban alkalmazhatatlan. Arra azonban alapvetően megfelel, hogy referenciaként használva osztályozzuk a különböző javaslatokat.

[45] Pontosabban: az adott optikai kényszerre vonatkozóan homogén részleteknél.
[46] Horn és Schunck eredetileg a linearizált optikai kényszert használta.

Brox és mások [22] a megvilágítás változására kevésbé érzékeny mennyiséggel, a kép-gradienssel bővített adattag használatával értek el jelentős javulást:

$$D = \sqrt{\left(I_1 - I_0\right)^2 + \alpha\left(\nabla I_1 - \nabla I_0\right)^2 + \varepsilon^2} \qquad \text{(IV.60)}$$

A képfüggvény és gradiense közötti egyensúlyért arányossági tényező felel. Az L_2 norma használatát nagyobb zajtűrés indokolja [23], míg a $\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ az $\left|x\right|$ differenciálható változata. A gradiens képzése kiejti a képtérben lassan változó szórt fény hatását, ami megfelel a (IV.59) egyenlet $p = 0$ helyettesítéssel adódó változatának. Ezen a ponton egy általános észrevétel tehető a képfüggvény deriváltaknak adattagként való felhasználásával kapcsolatban. A képfüggvény parciális deriváltjai hányadosának tetszőleges függvénye invariáns a megvilágítás bármely differenciálható transzformációjára nézve, $\widehat{I}\left(x,y\right) \overset{def}{=} f\left(I\left(x,y\right)\right)$, ekkor:

$$\frac{\widehat{I}_x}{\widehat{I}_y} = \frac{f_I I_x}{f_I I_y} = \frac{I_x}{I_y} \qquad \text{(IV.61)}$$

Speciálisan a gradiens vektor iránya is a parciális deriváltak hányadosának függvénye, így ez is választható adattagként kielégítve a (IV.59) egyenletet is. Ugyanakkor ez az arány nagyon zajérzékeny, különösen a kis változatosságot mutató területeken.

Az előzőhöz hasonló megközelítéssel Mileva és mások [24] által színes képsorozatokra bevezetett adattag dikromatikus visszaverő felületekre [25] fotometrikus invariánsok használatát javasolja a színtér megvilágításában beálló változások kezelésére. Ilyen pl. az RGB színtér gömbi koordinátákban kifejezett szögének megmaradását leíró adattag, amely a (IV.59) $q = 0$ melletti alakját elégíti ki. Alkalmazhatóságát korlátozza, hogy csak színes képsorozatokra és fehér fénnyel megvilágított színtérre érvényes.

A fentieken kívül – többek között az Euler-Lagrange egyenletek egyszerű származtathatósága miatt – számos egyéb módszer is napvilágot látott.

IV.2.2. A keresztkorrelációs optikai áranlás

A keresztkorreláció fontos szerephez jut a statisztikai analízis olyan területein, ahol jelek összehasonlítása szükséges. A gépi látásban is minták keresésének alapvető eszköze. A *normalizált keresztkorrelációt* kétféleképpen definiálhatjuk: a centrális értékkel korrigált változat folytonos képfüggvények egymásnak megfeleltetett részleteire a következőképpen írható:

$$\frac{\int_W \left(I_0 - \overline{I}_0\right)\left(I_1 - \overline{I}_1\right) dW}{\sqrt{\int_W \left(I_0 - \overline{I}_0\right)^2 dW \int_W \left(I_1 - \overline{I}_1\right)^2 dW}},\ \overline{I}_i = \frac{\int_W I_i dW}{\int_W dW},\ i \in \left(0,1\right) \tag{IV.62}$$

A (IV.62) szerinti felírás kielégíti a (IV.59) egyenletet, de határozatlan $\frac{0}{0}$ alakot ölt minden olyan helyen, ahol a hasonlítandó részletek akárcsak egyike is homogén. Ezért célszerű a centrális értékkel nem korrigált változatot használni:

$$D_I = \frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\sqrt{\int_W I_0^2 dW \int_W I_1^2 dW}} \tag{IV.63}$$

Ez a változat a (IV.59) egyenletnek a $q = 0$ melletti változatát elégíti ki, és ebben az értelemben megfelel a színes képsorozatoknál a Mileva által bevezetett változatnak, de szürke árnyalatos képekre is használható.

A Funkcionál úgy alkotható meg, hogy a keresztkorrelációs mennyiségeket az egymást követő képek minden pontjának kicsiny környezetére számítjuk. Ezekkel a lokális mennységekkel képezhető a teljes képtartományra vonatkozó globális korreláció értéke. Kiegészítve mindezt a legegyszerűbb formában felírt simasági taggal a funkcionál a következő alakot ölti:

$$E\left(u,v\right) = -\int_\Omega D_I d\Omega + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) d\Omega \tag{IV.64}$$

Itt D_I a (IV.63) egyenletben definiált. Az I_0 és I_1 a képsorozat szomszédos képei, formálisan a (I.1)-ben definiáltak. A simasági taggal való kompatibilitás miatt az adattag előjele negatív, így a funkcionált a keresett sebességmező minimalizálja. Érdemes megjegyezni, hogy a keresztkorreláció általában –1 és +1 között változhat, de mivel az intenzitásértékek nem negatívak, a D_I lehetséges értékei most a 0 és +1 tartományba esnek.

Színes képekre többféle általánosítás is lehetséges, a legegyszerűbb az adattagot az RGB csatornák átlagával képezni:

$$E\left(u,v\right) = -\frac{1}{3}\int_\Omega \left(D_R + D_G + D_B\right) d\Omega + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) d\Omega \tag{IV.65}$$

Itt a D_R, D_G és D_B a csatornaintenzitások (IV.63)-mal egyező kifejezései.

IV.2.3. A keresztkorrelációs funkcionál Euler-Lagrange egyenlete

A fentiekkel ellentétben a keresztkorrelációs egyenletek származtatása meglehetősen bonyolult. Az alábbiakban a keresztkorrelációs adattaggal és standard simasági taggal adott (IV.64) funkcionálból származtatunk Euler-Lagrange egyenleteket. Feltesszük, hogy a keresett függvények analitikusak, a C_∞ függvényosztály elemei, és Taylor soruk legalább véges tartományban mindenhol konvergens.

Először, az elvek könnyebb megértése végett a legegyszerűbb, egy ismeretlen függvényt tartalmazó, egydimenziós esettel foglalkozunk. Lagrange függvénynek egy lokális integrállal adott formát választunk:

$$\mathcal{F}(u)=\int_a^b\left(\int_{x-p}^{x+p}L(u(\xi),\xi)d\xi\right)dx \qquad \text{(IV.66)}$$

Itt $x\in[a,b]$, $\xi\in[x-p,x+p]$ és $2p\ll b-a$ az ablakméret. A funkcionál első variációját a $h(\xi)$ próbafüggvénnyel képezzük, amelyre az ismeretlen függvényre kirótt megkötés (analitikus) érvényes:

$$\mathcal{F}(u+\varepsilon h)=\int_a^b\left(\int_{x-p}^{x+p}L(u(\xi)+\varepsilon h(\xi),\xi)d\xi\right)dx \qquad \text{(IV.67)}$$

Az extrémum létezésének szükséges feltétele:

$$\delta\mathcal{F}=\left.\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0=\int_a^b\left(\int_{x-p}^{x+p}\frac{\partial L}{\partial u}(u(\xi),\xi)h(\xi)d\xi\right)dx\overset{jel}{=}\int_a^b\left(\int_{x-p}^{x+p}\frac{\partial L}{\partial u}hd\xi\right)dx \qquad \text{(IV.68)}$$

(Ettől a ponttól kezdve a függvények argumentumának jelölését az egyszerűség kedvéért elhagyjuk, ahogy az utolsó egyenlőségjel után látható.) A problémát most az jelenti, hogy (IV.68)-ban a variáló függvény a lokális integrál alatt van: $h=h(\xi)$. Mivel azonban feltételezésünk szerint minden pontban analitikus, ezért tetszőleges x körül sorba fejthető: $h(\xi)=h(x)+h'(x)(\xi-x)+\frac{1}{2}h''(x)(\xi-x)^2+\dots$, ahol a variáló függvény és deriváltjai már az x pontban adottak. Behelyettesítés után kapjuk:

$$\delta\mathcal{F}=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}}{n!}\int_{x-p}^{x+p}(\xi-x)^n\frac{\partial L}{\partial u}d\xi\right)dx=0 \qquad \text{(IV.69)}$$

Az (IV.69) alakra már elvégezhetők a szükséges parciális integrálási lépések, ha a variáló függvényre és deriváltjaira kirójuk a szokásos peremfeltételeket:

$$h(a)=h(b)=h'(a)=h'(b)=h''(a)=h''(b)\ldots=0 \tag{IV.70}$$

A (IV.70) figyelembevételével elvégzett parciális integrálási lépések után marad:

$$\int_a^b h(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{x-p}^{x+p}(\xi-x)^n\frac{\partial L}{\partial u}d\xi\right)\right]dx=0 \tag{IV.71}$$

Amely a variációszámítás alaptétele alapján a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{x-p}^{x+p}(\xi-x)^n\frac{\partial L}{\partial u}d\xi\right)=0 \tag{IV.72}$$

Euler-Lagrange egyenletekre vezet. Megjegyzendő, hogy a) általánosabb esetben a lokális integrálás határai is lehetnek függvények: $p=p(x)$, és a határok nem szükségképpen szimmetrikusak, b) a (IV.66) helyett választható az ismeretlen függvény deriváltját is tartalmazó általánosabb:

$$\hat{\mathcal{F}}(u)=\int_a^b\left(\int_{x-p}^{x+p}L(u(\xi),u'(\xi),\xi)d\xi\right)dx \tag{IV.73}$$

funkcionál, amely a következő Euler-Lagrange egyenletre vezet:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{x-p}^{x+p}(\xi-x)^n\frac{\partial L}{\partial u}d\xi-\frac{d}{dx}\int_{x-p}^{x+p}(\xi-x)^n\frac{\partial L}{\partial u'}d\xi\right)=0 \tag{IV.74}$$

Másodszor, az tekintsük az egy ismeretlen függvényt tartalmazó, kétdimenziós esetet. Az egydimenziós esethez analóg módon a kétdimenziós tesztfüggvényt visszük ki a lokális integrálok elé:

$$\int_\Omega h(x,y)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{n!m!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\int_{W(x,y)}(\xi-x)^n(\eta-y)^m\frac{\partial L}{\partial u}dW\right)\right]d\Omega=0 \tag{IV.75}$$

A szögletes zárójelben szereplő kifejezésnek kell azonosan nullának lennie tetszőleges $h(x,y)$ mellett[47].

Végül a normalizált keresztkorrelációs egyenletekhez tekintsük az:

$$E(u,v)=-\int_\Omega\left(\frac{1}{N}\int_W I_0I_1dW\right)d\Omega+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\right)d\Omega$$
$$N(u,v)=\sqrt{\int_W I_0^2dW\int_W I_1^2dW} \tag{IV.76}$$

[47] Téglalap alakú tartományra ez triviális, a kettős integrál kétszeres integrállá alakításával, tetszőleges tartományra a Green tétel segítségével bizonyítható.

Funkcionált, ahol az $N(u,v)$ a normalizáló tényező. Az előző esethez képest annyi a változás, hogy az elmozdulás mező két ismeretlen komponensét két független εh és δg függvénnyel variálva két (független) egyenletet kapunk. Elvégezve még a lokális integrálási változók konverzióját a lokális, (téglalap alakú) integrálási tartomány közepére: $\xi - x \to \xi$, $\eta - y \to \eta$ helyettesítésekkel, figyelembe véve, hogy I_0 független az elmozdulás mezőtől, továbbá $I_{1u} = I_{1x}$, $I_{1v} = I_{1y}$, az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{n!m!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1x}\xi^n\eta^m dW - \int_W I_0 I_{1x}\xi^n\eta^m dW\right)\right] = \alpha\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{n!m!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1y}\xi^n\eta^m dW - \int_W I_0 I_{1y}\xi^n\eta^m dW\right)\right] = \alpha\left(v_{xx} + v_{yy}\right)
\end{gathered} \tag{IV.77}$$

A (IV.77) bal oldalának első közelítései ($z \in (x,y)$):

$$k_0 = \frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1z} dW - \int_W I_0 I_{1z} dW\right) \tag{IV.78}$$

vagy a „bilineáris” tagokig bezárólag:

$$\begin{aligned}
k_{1.5} = {} & \frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1z} dW - \int_W I_0 I_{1z} dW\right) \\
& - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1z}\xi dW - \int_W I_0 I_{1z}\xi dW\right)\right] \\
& - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1z}\eta dW - \int_W I_0 I_{1z}\eta dW\right)\right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 I_{1z}\xi\eta dW - \int_W I_0 I_{1z}\xi\eta dW\right)\right]
\end{aligned} \tag{IV.79}$$

IV.2.4. Numerikus formula a keresztkorrelációs optikai áramláshoz

Az Euler-Lagrange egyenletek tehát végtelen sorként állíthatók elő. Használható numerikus formula létrehozása végett első lépésként a sor első tagjával közelített (IV.78) analitikus formulából indulunk ki:

$$\frac{1}{\sqrt{\int_W I_0^2 dW \int_W I_1^2 dW}}\left(\frac{\int_W I_0 I_1 dW}{\int_W I_1^2 dW}\int_W I_1 \nabla I_1 dW - \int_W I_0 \nabla I_1 dW\right) = \alpha \Delta \mathbf{u} \qquad \text{(IV.80)}$$

Az egyenletek (az elmozdulás mező két komponensére) bal oldala a (IV.64) adattagjából, jobb oldala a (IV.64) simasági tagjából származik, a Δ a Laplace operátor. Az egyenlet nemlineáris, de további lépésekkel linearizálható. Feltéve, hogy a lokális korrelációs ablakok kisméretűek, ez a következő három lépéssel érhető el:

- Célszerűen az I_0 értékeit fejtjük Taylor sorba I_1 körül: $I_0 \approx I_1 - \mathbf{u} \cdot \nabla I_1 - I_t$. Itt meg kell jegyezni, hogy az induló feltételek alapján éppen az I_0 független az elmozdulás mezőtől, míg az I_1 nem. Azt feltételezzük tehát, hogy az I_0 az $\mathbf{u} \cdot \nabla I_1 + I_t$ tagok levonásával nyeri el ezt a függetlenséget.
- Feltesszük, hogy az elmozdulás mező értékei az integrálási ablakban állandók azaz a sebességkomponensek kihozhatók az integráljel elé. Ezt a lépést az előző lépéssel kombináljuk, így pl.:

$$\int_W I_0 I_1 dW \approx \int_W I_1^2 dW - u\int_W I_1 I_{1x} dW - v\int_W I_1 I_{1y} dW - \int_W I_1 I_t dW \qquad \text{(IV.81)}$$

- A (IV.80) bal oldalának $\sqrt{\int_W I_0^2 dW \int_W I_1^2 dW}$ osztóját nem linearizáljuk, értékét egy iteráción belül állandónak tekintjük. Gauss-piramis használata esetén természetesen minden szintváltáskor újraszámoljuk.

A felsorolt lépések közül az utolsó igényel bővebb magyarázatot. A következőkkel lehet érvelni: a) átszorzással látszik, hogy csak a simasági tagból származó mennyiség együtthatóját módosítja b) feltesszük, hogy a gyökös mennyiség nagyságrendje megegyezik az egyenletben szereplő többi mennyiség nagyságrendjével, de mivel az α gyakorlati értékei 0,005 és 0,02 közöttiek, ezért az α-val való szorzás után a szorzat nagyságrendileg kisebb hatással lesz a végeredményre.

A fenti átalakítások után végeredményünket a következő formában kapjuk:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\,,\ \mathbf{b} = \mathbf{b}(\bar{\mathbf{u}}) \qquad \text{(IV.82)}$$

(IV.82) együttható mátrixa konstans, a jobb oldal vektora a Laplace operátor közelítéséből adódó elmozdulás mező átlagértékek függvénye (a képtartomány minden pontjában a pont négypontos környezetében levő elmozdulás értékek átlaga). Végül a $\lambda = \frac{\alpha}{4}$ és

$Q=\sqrt{\int_W I_0^2 dW \int_W I_1^2 dW}$ helyettesítéssel, az integrálok diszkretizálásra utaló szummákkal a mátrix-vektor komponensek:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum I_1^2 \sum I_{1x}^2 - \left(\sum I_1 I_{1x}\right)^2 + \lambda Q \sum I_1^2 \\ a_{12} &= a_{21} = \sum I_1^2 \sum I_{1x} I_{1y} - \sum I_1 I_{1x} \sum I_1 I_{1y} \\ a_{22} &= \sum I_1^2 \sum I_{1y}^2 - \left(\sum I_1 I_{1y}\right)^2 + \lambda Q \sum I_1^2 \\ b_1 &= \lambda Q \overline{u} \sum I_1^2 + \sum I_1 I_{1x} \sum I_1 I_t - \sum I_1^2 \sum I_{1x} I_t \\ b_2 &= \lambda Q \overline{v} \sum I_1^2 + \sum I_1 I_{1y} \sum I_1 I_t - \sum I_1^2 \sum I_{1y} I_t \end{aligned} \tag{IV.83}$$

Az (I.1) Horn-Schunck funkcionálból származtatott egyenletek linearizálásával a megfelelő mátrix-vektor elemek így írhatók (I.35):

$$\begin{aligned} a_{11} &= I_{1x}^2 + \lambda \\ a_{12} &= a_{21} = I_{1x} I_{1y} \\ a_{22} &= I_{1y}^2 + \lambda \\ b_1 &= \lambda \overline{u} - I_{1x} I_t \\ b_2 &= \lambda \overline{v} - I_{1y} I_t \end{aligned} \tag{IV.84}$$

Összehasonlítva a két módszer eredményeit megfigyelhetjük, hogy a (IV.84) pontbeli értékeivel szemben a keresztkorrelációs módszernél lokális ablakokba eső összegeket kell számolni. Ezek az összegek – a szűrőknél használt eljárással azonos módon – „csúszó ablak” technikával hatékonyan kiszámolhatók[48]. Mivel a számítások időigényét alapvetően az iterációk időigénye határozza meg, az inicializálásokból adódó különbség hatása elhanyagolható. A (IV.83) alak alkalmas a szokásos iterációs módszerekkel: Jacobi, Gauss-Seidel, Successive Over-Relaxation (SOR) való megoldásra. A nagy elmozdulások kezelése standard technikákkal, mint a Gauss-piramis és „Image Warping” változtatás nélkül lehetséges: a nagyobb felbontású szintre áttéréskor az addig számolt elmozdulás mező értékével az egyik képet torzítjuk, és az így módosított változat szolgál a következő iteráció inputjává, azonosan zérus kezdeti elmozdulás mező mellett.

IV.3. Képrekonstrukció, képkorrekció

A képalkotó eszközök az ideális kameramodellnek megfelelő képalkotást csak megközelítik. A geometria eltéréséért az optikai rendszer felel, de az érzékelő (CCD, CMOS) felületére jutott információ további, nem geometriai jellegű torzulásokat szenved, amely alapvetően két jelenségre bontható: az ideális pontszerű inputra egy elmosott foltot kapunk, amelyet az ú.n.

[48] Inicializáláskor egy egész sorra kiszámítjuk az ablak magassága tartományba eső intenzitásértékek összegét. Ezután az egyes ablakokba eső értékek összegzéséhez felhasználhatjuk az előző ablak értékét: a kieső oszlop értékét levonjuk, a bejövő új oszlopét hozzáadjuk.

„point spread” függvénnyel (PSF) írnak le. Ezen kívül az erősítő elektronika egy bizonyos zajt visz képbe, „szemcséssé” téve azt. Ez utóbbi jelenség annál láthatóbb, minél nagyobb erősítésre van szükség (alulvilágított színtér esete). A zajos képek javítását képkorrekciós eljárásokkal lehet elérni. A képrekonstrukció a hiányos (elsősorban régi papírképek kiegészítése). Mindkét probléma leghatékonyabb kezelése variációs módszerekkel lehetséges. Ezek a módszerek a képek teljes variációját csökkentő „total variation” (TV) alapú technikák, amelyek alaptípusa kerül a továbbiakban bemutatásra.

IV.3.1. A teljes variáció alapú képjavítás

A Rudin, Osher, Fatemi [4] által jegyzett (ROF) módszer bemutatásával kezdünk. A módszer célja a zajos kép zajmentesített változatának előállítása úgy, hogy az alapvető struktúrákat a javított kép megőrizze:

IV.5. ábra: Az eredeti (balra) kép nulla átlagú, additív zajjal módosítva (középen), a TV képjavítás után (jobbra)

A zaj csökkentése megfelel a kép változékonyságának csökkentésével. A ROF funkcionál első tagja a „teljes variáció” ezt fejezi ki: $TV\left(I\right) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\Omega} \left|\nabla I\right| dxdy = \int\limits_{\Omega} \sqrt{I_x^2 + I_y^2} dxdy$ azaz a keresett képfüggvény (I) gradiense abszolút értékének a teljes képtartományra vett integrálja legyen minimális. Ez azonban nem elegendő, mert a származtatott egyenletek a képtartalom (élek, vonalak) kiegyenesítésére vezetnének.

Ha rendelkezünk a zaj szórásának (jelölje: σ) egy becslésével, akkor írhatjuk: $\sigma^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(I - I_0\right)^2 dxdy$. Minimalizáljuk tehát a tehát a teljes variációt a szórásra kirótt feltétel mellett. Ekkor egy feltételes variációs problémához jutunk, amely az ismert módon a következő funkcionál minimalizálására vezet:

$$\min_I \int_\Omega \sqrt{I_x^2 + I_y^2} + \frac{\lambda}{2}\left(I - I_0\right)^2 dxdy \tag{IV.85}$$

Ahol λ a Lagrange-multiplikátor.

Az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\left(I - I_0\right) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \\ &= \lambda\left(I - I_0\right) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla I}{\left|\nabla I\right|}\right) \end{aligned} \tag{IV.86}$$

A Lagrange-multiplikátor értékét is a (IV.86)-ból és a szórás $\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(I - I_0\right)^2 dxdy$ egyenletéből határozhatjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(I - I_0\right)^2 dxdy \\ \left(I - I_0\right)^2 &= \frac{1}{\lambda}\left(I - I_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2\sigma^2}\int_\Omega \left(I - I_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(I - I_0\right)\left(\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(I - I_0\right)\left(\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right)\right] dxdy \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2}\int_\Omega \left(\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right)\left(\frac{\partial\left(I - I_0\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(I - I_0\right)}{\partial y}\right) dxdy \\ &= 0 + \frac{1}{2\sigma^2}\int_\Omega \left(\frac{I_x I_{0x}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{I_y I_{0y}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) - \left(\frac{I_x^2 + I_y^2}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\int_\Omega \left(\frac{I_x I_{0x}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} + \frac{I_y I_{0y}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) - \sqrt{I_x^2 + I_y^2}\; dxdy \end{aligned} \tag{IV.87}$$

A parciális integrálási lépés teljes deriváltakat szolgáltató tagjai nullát adnak a homogén Neumann feltétel: $I_x\big|_{\partial\Omega} = I_y\big|_{\partial\Omega} = 0$ teljesülése esetén (ezt feltesszük, és a numerikus sémában érvényesítjük). Megjegyzendő még, hogy a (IV.85) funkcionál, a λ Lagrange-multiplikátor értelmezése nélkül egy olyan funkcionál minimalizálását jelenti, amely súlyozottan biztosítja a kép viszonylag kicsiny variációját a kiinduló képhez való hasonlóság mellett.

Ha egy (nem zajos) kép gyorsan változó részleteket (textúra) tartalmaz, akkor a feldolgozott kép a kép strukturális jellemzőjét, az eredeti és a feldolgozott kép különbsége a textúrát tartalmazza (struktúra-textúra dekompozíció).

Az egyenletek numerikus kezelésére sokféle módszer alakult ki. A legegyszerűbb esetek a $\left(\frac{\nabla I}{\left|\nabla I\right|}\right)$ nevezőjének a mindenhol értelmezett $\left|\nabla I\right| \approx \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1$ közelítését használják.

IV.3.2. A duális változó módszere

A hővezetés differenciálegyenlete az ú.n. diffúziós egyenlet a kontinuitási egyenletből:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \nabla \cdot \mathbf{J} \tag{IV.88}$$

származtatható, ahol **J** a hőáramlás ú.n. fluxusa (áramvektora). Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a rendszer egy pontjába/pontjából áramló hő felel a pont hőmérsékletének (Φ) megváltozásáért. A legegyszerűbb homogén, izotróp esetben a fluxus a hőmérsékletkülönbséggel, azaz a hőmérséklet függvény gradiensével arányos (egy konstans α arányossági tényezővel), de azzal ellentétes előjelű[49]:

$$\mathbf{J} = -\alpha \nabla \Phi \tag{IV.89}$$

Ez utóbbit a kontinuitási egyenletbe helyettesítve kapjuk a legegyszerűbb hővezetési egyenletet:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\alpha \Delta \Phi \tag{IV.90}$$

A (IV.86) egyenletekhez rendelhető evolúciós egyenletek:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla I}{\sqrt{\left(\nabla I\right)^2 + \varepsilon}} \right) - \lambda \left(I - I_0 \right) \tag{IV.91}$$

Jó eredmény érhető el a viszonylag nagy kezdeti ε alkalmazásával, majd folyamatos csökkentéssel, de lassú konvergenciára kell felkészülni. Ahogyan a (IV.90) egyenlethez jutottunk, úgy visszafelé is eljárhatunk, és a (IV.90) helyett a megoldhatjuk az ekvivalens (IV.88)-(IV.89) egyenletrendszert is. Esetünkben a konvergencia jelentősen fel is gyorsítható új változó bevezetésével, annak ellenére, hogy ez növeli a feladat ismeretlen függvényeinek

[49] A hő a melegebb (nagyobb hőmérsékletű) helyről a hidegebb felé halad.

számát (Chen, Golub, Mulet [26]). A (IV.86)-tal ekvivalens egyenletrendszer, a $\mathbf{J} = \dfrac{\nabla I}{\sqrt{\left(\nabla I\right)^2 + \varepsilon}}$ „áram-(flux)változó” bevezetésével:

$$\begin{aligned} &\lambda\left(I - I_0\right) - \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \\ &\mathbf{J}\sqrt{\left|\nabla I\right|^2 + \varepsilon} - \nabla I = 0 \end{aligned} \tag{IV.92}$$

A (IV.91) csatolt egyenletek pl. Newton módszerrel megoldhatók.

IV.3.3. Képtartalom–rekonstrukció (inpainting)

A képrekonstrukció a hiányzó képrészletek pótlása:

IV.6. ábra: Videó feliratozás eltüntetése képtartalom-rekonstrukcióval

A rekonstrukció első lépése azon felületek meghatározása, ahol a képtartalom kiegészítésre szorul. Ez valamilyen szegmentációs eljárással végezhető. Második lépés a hiányzó részletek kiegészítése. A meglevő képtartalmat a (IV.86) egyenletekkel, a hiányzó részeket a képi információt nem tartalmazó változattal: $-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = 0$ írjuk le. Az egyenlet értelmezéséhez végezzük el a deriválást:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \\ &= -\left[\frac{I_{xx}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} - \frac{I_x^2 I_{xx} + I_x I_y I_{xy}}{\left(I_x^2 + I_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{I_{yy}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} - \frac{I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{\left(I_x^2 + I_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\left[I_{xx} + I_{yy} - \frac{I_x^2 I_{xx} + 2 I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{\left(I_x^2 + I_y^2\right)}\right] \\ &= -\frac{1}{\left|\nabla I\right|}\left[\Delta I - \frac{\nabla I \cdot \left(\nabla\nabla I\right)\cdot \nabla I}{\left|\nabla I\right|^2}\right] = -\frac{1}{\left|\nabla I\right|}\left[\Delta I - \mathbf{n}\cdot\left(\nabla\nabla I\right)\cdot\mathbf{n}\right] \end{aligned} \tag{IV.93}$$

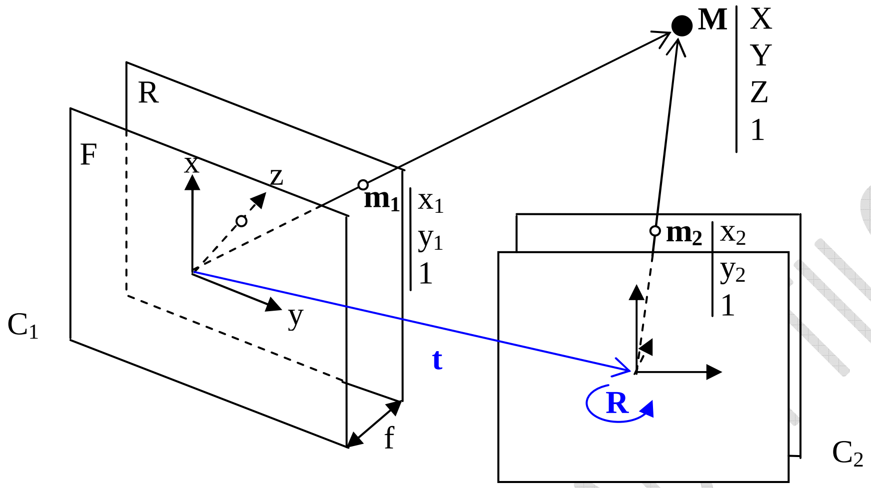
(IV.93)-ben a Δ a Laplace operátor, $\mathbf{n}$ a kép gradiensének irányába mutató egységvektor (az élek, vonalak normál-egységvektora). A megfelelő evolúciós egyenlet (α arányossági tényezővel):

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\left|\nabla I\right|}\left[\Delta I - \mathbf{n} \cdot \left(\nabla \nabla I\right) \cdot \mathbf{n}\right] \tag{IV.94}$$

Ha összevetjük a $\int \left|\nabla I\right|^2 d\Omega = \int I_x^2 + I_y^2 d\Omega$ funkcionálból, vagy a kontinuitási egyenletből származó (homogén,) izotróp hővezetési egyenlettel $\left(\frac{\partial I}{\partial \tau} = \alpha \Delta I\right)$, a (IV.94) olyan anizotrop hővezetési egyenlet, amely az éleken át nem vezet. A hiányzó képrészletek pótlása tehát a meglévő képi információt úgy propagálja a hiány belsejébe, hogy közben az éleket megőrzi.

V. Mellékletek

V.1. Projektív és affin homográfia



V.1. ábra: A lyukkamera modell: F a fokális sík, ennek origójában találkoznak a fényvonalak. Az R a retinális (szenzor) sík, erre képződik le a megfigyelt színtér. Egy térbeli pont helyvektora **M**, ennek a retinális síkokon a megfelelő vektorai $\mathbf{m}_1$ és $\mathbf{m}_2$

Fontos: a mellékletben az indexbe helyezett betűk a koordinátákra utalnak nem a parciális deriválásra. A skalár szorzat jele a mátrix reprezentációk között a szokásos mátrixszorzatra utal.

A projektív transzformáció (vagy projektív homográfia) a lyukkamera (pinhole camera) modell által, sík felületelemek leképezésének közelítésektől mentes módja. Minden kamera természetes módon paraméterezi az általa belátott teret, saját koordinátarendszere descartesi koordinátáival. Ezt a saját koordinátarendszert a kamera fokális síkja és az arra merőleges harmadik tengely, a z határozza meg. A kamera által szolgáltatott kép a tér egy vetítése a kamera retinális síkjára, majd még egy, a szenzor és a megjelenítő eszköz közötti transzformáció. Ennek a vetítésnek az operátora $\mathbf{P}$, amely homogén koordináták között teremt kapcsolatot $z\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$. Komponensei a kamera saját koordinátarendszerében a kameramodell alapján (a V.1. ábra szerinti 1. kamerára):

$$z_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x & p & o_x \\ 0 & q_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.1)}$$

(V.1)-ben az f a fókusztávolság q_x és q_y a szenzor és a megjelenítő eszköz közötti skálázási faktor, o_x, o_y az optikai tengely koordinátái a megjelenítő eszközön, a p nyírási tényező korszerű eszközöknél nulla, és amely mellet (V.1) átmegy az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_1} \begin{bmatrix} s_x & 0 & o_x \\ 0 & s_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{V.2}$$

egyenletekbe, itt $s_x = fq_x$, $s_y = fq_y$. Ebben a felírásban a jobb oldal első, 3x3 mátrixa a belső kamera-paraméterek mátrixa: $\mathbf{B}_1$, a második 4x1 mátrix a külső kameraparaméterek mátrixa saját koordinátarendszerében, szokásos jelöléssel $\mathbf{G}_1 = \left[\mathbf{I} \middle| \mathbf{0}\right]$, és $\mathbf{P}_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{G}_1$.

Jellemezze a kettes kamera helyzetét az első kamera koordinátarendszerében a $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_X & t_Y & t_Z \end{bmatrix}^T$ eltolás vektor és (az eltolás helyén vett) az $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_i} & \mathbf{R_j} & \mathbf{R_k} \end{bmatrix}$ elforgatási mátrix, ahol $\mathbf{R_i}$, $\mathbf{R_j}$, $\mathbf{R_k}$ az (első kamera) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorainak elforgatás utáni, első rendszerbeli koordinátáiból alkotott vektorok. Mivel az $\mathbf{R}$ forgatási mátrix, ezért inverze megegyezik transzponáltjával, így $\mathbf{G}_2 = \left[\mathbf{R}^T \middle| \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{t}\right]$, és $\mathbf{P}_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{G}_2$.

A projektív transzformációt sík felületelemre alkalmazva levezethető a vetületek közötti transzformáció képlete. Fontossága a sztereó látásban, a többkamerás 3D rekonstrukcióban közismert, ahol a képrészletek közötti megfeleltetés pontossága kulcstényező a módszer használhatóságát, robusztusságát tekintve.

<u>Először</u> a második kamera és az első kamera koordinátái között mindig fennáll az $\mathbf{M}_2 = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{t}$ összefüggés. <u>Másodszor</u> tegyük fel, hogy a két kamerával megfigyelt objektum *sík*. A sík egy tetszőleges pontjának valódi (nem homogén) koordinátái az első kamera koordinátarendszerében legyenek $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$. A sík normál egységvektorát $\mathbf{n}$-nel jelölve, a sík pontjaira igaz: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_1 = d$, ahol $d = const$ a sík távolsága (merőleges vetületének hossza) az első kamera koordinátarendszerének origójától (fokális pontjától) mérve. Ez utóbbi egyenletet d-vel osztva $1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_1 / d$. Ezzel beszorozhatjuk az

$\mathbf{M}_2 = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{t}$ egyenlet jobb oldalának második tagját: $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{t}\frac{1}{d}\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_1\right)$, hogy átrendezve kapjuk:

$$\mathbf{M}_2 = \left[\mathbf{R}^T \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{1}{d}\mathbf{tn}\right)\right] \cdot \mathbf{M}_1 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}_1 \qquad \text{(V.3)}$$

A zárójeles kifejezésre bevezettük a $\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{1}{d}\mathbf{tn}\right)$ jelölést, a $\mathbf{tn}$ a két vektor diadikus szorzata. Tehát a sík (és csakis a sík) pontjainak a két kamera által meghatározott koordinátarendszerekben mért 3D (térbeli) koordinátái között lineáris transzformáció: $\mathbf{M}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}_1$ áll fenn.

Ez utóbbi eredményt és a (V.2)-vel kombinálva[50], a képkoordinátákra adódik:

$$z_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \text{ és } z_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{K} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \qquad \text{(V.4)}$$

(V.4) első egyenletéből a térkoordinátákat kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve:

$$z_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} z_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ vagy } \frac{z_2}{z_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.5)}$$

Azaz a projektív transzformációval formailag egyező kifejezést kaptunk, eggyel kisebb dimenzióban. Az első képen mért $\begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \end{bmatrix}^T$ elmozdítás hatására, a második képen a következő pontba jutunk (bevezetjük még a $w = \frac{z_2}{z_1}$ jelölést):

$$w\left(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1\right) \begin{bmatrix} x_2\left(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1\right) \\ y_2\left(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1\right) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \qquad \text{(V.6)}$$

Az (V.6) egyenletek nemlineárisak: a w az x_2, y_2 kifejezések nevezőiben megjelenik. A $\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}_1^{-1}$ szorzat mátrixát szokás a (projektív) homográfia mátrixának nevezni. A projektív homográfia $\begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \end{bmatrix}^T$-ben linearizált változata az affin homográfia. Irodalom: [27]

[50] Az (V.2) speciálisan az első kamera koordinátarendszerében kifejezett, az egyszerűség kedvéért ezt a rendszert használtuk az eredmények levezetéséhez.

V.2. Implementációs kérdések

V.2.1. A vetítési függvények lyukkamera modell esetén

Az előző mellékletben szereplő lyukkamera modell a 3D tér $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ pontjait a kamerák képpontjaira képezi le (az *i*. kamera képén az $\begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}^T$ pontra). A (IV.35) vetítési függvények konkrét alakja a homogén koordinátás alakból adódóan törtfüggvény lesz:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{p^{(i)}{}_{11}X + p^{(i)}{}_{12}Y + p^{(i)}{}_{13}Z + p^{(i)}{}_{14}}{p^{(i)}{}_{31}X + p^{(i)}{}_{32}Y + p^{(i)}{}_{33}Z + p^{(i)}{}_{34}} \\ y_i &= \frac{p^{(i)}{}_{21}X + p^{(i)}{}_{22}Y + p^{(i)}{}_{23}Z + p^{(i)}{}_{24}}{p^{(i)}{}_{31}X + p^{(i)}{}_{32}Y + p^{(i)}{}_{33}Z + p^{(i)}{}_{34}} \end{aligned} \tag{V.7}$$

(V.7)-ben a $p^{(i)}{}_{lk}$ az *i*. projekció 3x4-es mátrixa *l*. sorának és *k*. oszlopának eleme. Az elemek meghatározása a kamera kalibrációs eljárással végzendő.

V.2.2. Az inplementáció részletei: az evolúciós egyenlet mennyiségei

A (IV.33) evolúciós egyenletet célszerű descartesi koordinátákkal leírni a standard bázisban, ahol az ismeretlen felület a három ismeretlen koordinátafüggvényével ($\mathbf{S} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$) adott. Ekkor a (IV.46) Lagrange függvény térkoordináták, és a felület normál-egységvektorának koordinátái szerinti parciális deriváltjait kell képezni. A térkoordináták a vetítési függvényben és a lineáris transzformáció (amely most az affin homográfia) (IV.45) mátrixában jelennek meg, és ugyanitt a normál-egységvektor koordináták is. Egy kamerapárra:

$$\Phi_{(i,j)}(\mathbf{S},\mathbf{n}) = 1 - \frac{\int_{W_i} I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\cdot\Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i}{\sqrt{\int_{W_i} I_i^2\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i \int_{W_i} I_j^2\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\cdot\Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i}} \tag{V.8}$$

(V.8)-ban az I_i és I_j képfüggvények argumentuma egy választott felületi pont körüli kicsiny tartomány. A választott pont[51] képi (pixeles) koordinátája az *i*. kamerán $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}^T$, ahol a képkoordináták az (V.7) egyenletek szerinti kapcsolatban vannak a felületi pont térbeli $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ koordinátáival.

[51] A level set módszer alkalmazásakor a (IV.33) evolúciós egyenletet fix térbeli rácson oldjuk meg. Ebben az esetben azon felületi pontok választása, ahol az egyenlet mennyiségeit számoljuk – szokásos módon – a térbeli rács (közeli) pontjaihoz legközelebb eső felületi pontok (és ezek az értékek rendelődnek a rácspontokhoz).

Mielőtt rátérnénk a Lagrange függvény deriváltjainak meghatározására, meg kell jegyezni, hogy az azt alkotó lokális integrálok integrálási változói függetlenek a keresett (ismeretlen) felület koordinátafüggvényeitől ($\mathbf{S} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$), és annak differenciális mennyiségeitől ($\mathbf{n} = n_X\mathbf{i} + n_Y\mathbf{j} + n_Z\mathbf{k}$), ezért (ezekre nézve) a probléma paraméteres integrálként kezelendő[52], azaz a deriválás operátora bevihető az integráljel mögé.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$C_{i,j} = \int_{W_i} I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\left(\Delta\mathbf{x}_i\right)\right) dW_i\,,$$

$$Q_i = \int_{W_i} I_i^2\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i,\; Q_j = \int_{W_i} I_j^2\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{x}_i\right) dW_i$$

Ezekkel a szükséges mennyiségek, a térkoordináták szerinti deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{(i,j)}}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{Q_iQ_j}}\Bigg[&\frac{\partial\mathbf{x}_i}{\partial p}\cdot\left(\frac{C_{i,j}}{Q_i}\int_{W_i} I_i\nabla I_i dW_i - \int_{W_i} I_j\nabla I_i dW_i\right) + \frac{\partial\mathbf{x}_j}{\partial p}\cdot\left(\frac{C_{i,j}}{Q_j}\int_{W_i} I_j\nabla I_j dW_i - \int_{W_i} I_i\nabla I_j dW_i\right)\\ &+\left(\frac{C_{i,j}}{Q_j}\int_{W_i} I_j\nabla I_j\cdot\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial p}\cdot\Delta\mathbf{x}_i dW_i - \int_{W_i} I_i\nabla I_j\cdot\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial p}\cdot\Delta\mathbf{x}_i dW_i\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{V.9}$$

$$p \in \left\{X, Y, Z\right\}$$

és a normál-egységvektor komponensek szerinti deriváltak:

$$\frac{\partial\Phi_{(i,j)}}{\partial n_q} = \frac{1}{\sqrt{Q_iQ_j}}\left(\frac{C_{i,j}}{Q_j}\int_{W_i} I_j\nabla I_j\cdot\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial n_q}\cdot\Delta\mathbf{x}_i dW_i - \int_{W_i} I_i\nabla I_j\cdot\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial n_q}\cdot\Delta\mathbf{x}_i dW_i\right) \tag{IV.10}$$

$$n_q \in \left\{n_X, n_Y, n_Z\right\}$$

Az (V.9), (V.10) egyenletekben megjelenő mennyiségek a következő pontokban értelmezettek: $I_i = I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right)$, $\nabla I_i = \nabla I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right) = \left[I_{ix}\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right)\;\; I_{iy}\left(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i\right)\right]^T$,

$I_j = I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\Delta\mathbf{x}_i\right)$, $\nabla I_j = \nabla I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\cdot\Delta\mathbf{x}_i\right) = \left[I_{jx}\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\cdot\Delta\mathbf{x}_i\right)\;\; I_{jy}\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij}\cdot\Delta\mathbf{x}_i\right)\right]^T$.

Továbbá az $\mathbf{A}_{ij}$ és deriváltjai: $\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial p}$, $\frac{\partial\mathbf{A}_{ij}}{\partial n_q}$ pontbeli mennyiségek, és csak a jelölésrendszer miatt nem emelhetők ki az integrálás művelete elé, mint a vetítési függvény gradiensének komponensei ($\frac{\partial\mathbf{x}_i}{\partial p}$, $\frac{\partial\mathbf{x}_j}{\partial p}$). Az integrálást az *i*. képen végezzük, célszerűen a választott felületi

[52] Éppen ezt a szétválasztást teszi lehetővé a (IV.9) funkcionálban explicit módon szerepeltetett normál-egységvektor.

pont képe körüli kicsiny négyzetben, az $\mathbf{A}_{ij} \cdots \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial p}$ mennyiségek ebben a felületi pontban értelmezettek. Ha a normalizált keresztkorrelációt egy az *i*. kép egy négyzetes tartományán végezzük, és a tartomány pontjait $\Delta \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}^T$ jelöljük, akkor $W_i = \left[-\xi, \xi\right] \times \left[-\eta, \eta\right]$. Az integrálokat diszkrét összegekkel közelítjük (pixelről-pixelre), de ekkor a *j*. képen az $\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{x}_i$-re általában nem egész értékek adódnak, az eredeti méretek is változnak, amit megfelelő interpolációval kezelni kell.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy (megfelelő textúrázottság esetén) az (V.8) normalizált keresztkorrelációs adattag helyett annak centrális értékkel korrigált (V.11) változatát használjuk:

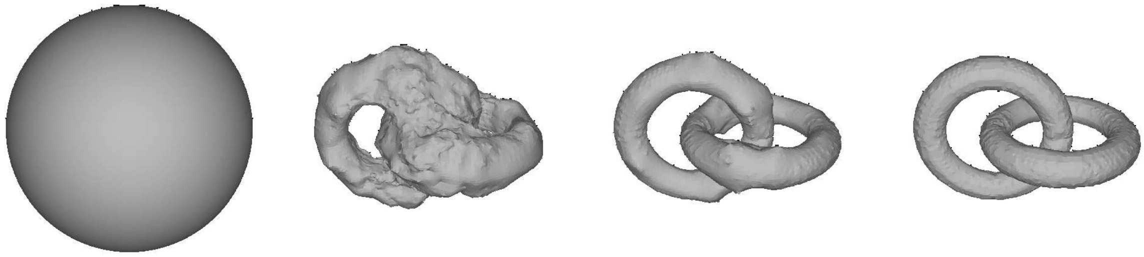
$$\Phi_{(i,j)}\left(\mathbf{S}, \mathbf{n}\right) = 1 - \frac{\int_{W_i} \left[I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i\right) - \overline{I}_i\right]\left[I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{x}_i\right) - \overline{I}_j\right] dW_i}{\sqrt{\int_{W_i} \left[I_i\left(\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i\right) - \overline{I}_i\right]^2 dW_i \int_{W_i} \left[I_j\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{A}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{x}_i\right) - \overline{I}_j\right]^2 dW_i}} \tag{V.11}$$

ahol az $\overline{I}_i$ és $\overline{I}_j$ a megfelelő intenzitás-átlagok (a *j*. képen ez általában egy paralelogramma alakú tartományt jelent), akkor az (V.9) és (V.10) egyenletekben az intenzitások formálisan a centrális értékkel korrigált alakra változnak, de a gradiensek kifejezése változatlan marad, pl. az (V.10): $\frac{\partial \Phi_{(i,j)}}{\partial n_q} = \frac{1}{\sqrt{Q_i Q_j}} \left(\frac{C_{i,j}}{Q_j} \int_{W_i} \left(I_j - \overline{I}_j\right) \nabla I_j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial n_q} \cdot \Delta \mathbf{x}_i dW_i - \int_{W_i} \left(I_i - \overline{I}_i\right) \nabla I_j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial n_q} \cdot \Delta \mathbf{x}_i dW_i \right)$ lesz.

Végül még egy megjegyzést érdemes tenni. Mindazon pontokban, amelyek nem láthatók legalább két kamerából, ott a (IV.33) egyenlet helyett célszerűen a $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = -div\left(\mathbf{n}\right)\mathbf{n}$ egyenlet oldandó meg, amely az adott pont vetületei (képei) közötti tökéletes korrelálatlanság feltételezésének implicit feltevése, és amely egyenlet a felületminimalizálás[53] egyenlete a $\Phi\left(\mathbf{S}, \mathbf{n}\right) \equiv 1$ melletti $\min \int_F dA = \min \iint_{u,v} \left|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\right| du dv$.

Az alábbi ábrán egy gyakran használt tesztobjektum rekonstrukciójának néhány evolúciós fázisa látható:

[53] A kifeszített szappanhab.



V.2. ábra: Egy gyakran használt objektum rekonstrukciójának fázisai.

Bibliográfia

[1] Simmonds, J.G. Tenzoranalízis dióhéjban. Műszaki Könyvkiadó 1985.

[2] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V. 1963. Calculus of Variations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[3] P. Perona and J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 12, pp. 629–639, 1990.

[4] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Phys. D, 60 (1992), pp. 259–268.

[5] L.A. Vese and S.J. Osher. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. J. Sci. Comput. 19:553–572, 2003.

[6] T. F. Chan and J. Shen, "Variational Image inpainting", ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/ camreport/cam02-63.pdf.

[7] S. Leung and S. Osher, Global Minimization of the Active Contour Model with TV-Inpainting and Two-Phase Denoising, in Variational, Geometric, and Level Set Methods in Computer Vision (VLSM), Springer-Verlag, vol. 3752, 2005, pp. 149–160.

[8] S. Henn and K. Witsch, Multimodal Image Registration Using a Variational Approach, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 25, Issue 4 (2003)

[9] G. Hermosillo, C. Chefd'hotel, O. Faugeras, Variational Methods for Multimodal Image Matching, International Journal of Computer Vision 50 (2002) 329-343.

[10] J.-P. Pons, R. Keriven, O. Faugeras, G. Hermosillo, Variational Stereovision and 3D Scene Flow Estimation with Statistical Similarity Measures, in: Proc. International Conf. on Computer Vision, Vol. 1, 2003, pp. 597-602.

[11] J.A. Sethian. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge University Press, 2002.

[12] Kass, A, Witkin, and D, Terzopoulos, Snake: Active Contour Models. International Journal of Computer Vision, vol. 1, no.4, pp321-331, 1988.

[13] Chenyang Xu and Jerry L. Prince. Gradient vector flow: A new external force for snakes. In Proceedings of the 1997 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '97), pp66–72. IEEE Computer Society, 1997.

[14] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro, Geodesic Active Contours. International Journal of Computer Vision, vol. 22(1), pp. 61–79, 1997.

[15] T. Chan and L. Vese, Active Contours Without Edges, IEEE Transactionson Image Processing, vol. 10(2), pp. 266–277, 2001.

[16] J. Bigün, G. H. Granlund, and J. Wiklund. Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intel ligence, 13(8):775-790, 1991.

[17] J. L. Barron, D. J. Fleet, S. S. Beauchemin, Performance of optical fow techniques, International Journal of Computer Vision 12 (1) (1994) 43-77.

[18] B. D. Lucas, T. Kanade, An iterative image registration technique with an application to stereo vision, in: DARPA Image Understanding Workshop, 1981, pp. 121-130

[19] B. K. P. Horn, B. G. Schunck, Determining optical flow, Artifcial Intelligence 17 (1981) 185-203.

[20] S. Negahdaripour, Revised definition of optical flow: integration of radiometric and geometric cues for dynamic scene analysis, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 20 (1996) 961-979.

[21] Y.-H. Kim, A. Martinez, A. Kak, Robust motion estimation under varying illumination, Image and Vision Computing 23 (2005) 365-375.

[22] T. Brox, A. Bruhn, N.Papenberg, J.Weickert, High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping, in: Proc. European Conf. on Computer Vision, Vol. IV, 2004, pp. 25-36.

[23] J. Weickert, A. Bruhn, T. Brox, N. Papenberg, Mathematical Models for Registration and Applications to Medical Imaging, Vol. 10 of Mathematics in Industry, Springer Berlin Heidelberg, 2006, Ch. A Survey on Variational Optic Flow Methods for Small Displacements, pp. 103-136.

[24] Y. Mileva, A. Bruhn, J. Weickert, Illumination-Robust Variational Optical Flow with Photometric Invariants, in: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4713, Springer, 2007, pp. 152-162.

[25] S. Shafer, Using color to separate reflection components, Color Research and Applications 10 (4) (1985) 210-218.

[26] Chan, T.F., Golub, G.H., Mulet, P.: A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration. SIAM J. Sci. Comput. 20, 1964–1977 (1999).

[27] R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge University Press, 2003.