GOSZTONYI KATALIN: EÖTVÖS JÓZSEF COLLEGIUM 2005-2010

ELTE Eötvös József Collegium (EJC) – alapítás éve: 1895, anyaintézmény: Eötvös Loránd Tudományegyetem, cím: 1118 Budapest, Ménesi út 11-13.

A matematikatörténet felhasználásának lehetőségei a matematikaoktatásban

Esettanulmány egy nyári táborról

A matematikatörténet (s általában a tudománytörténet) oktatásbeli felhasználásának lehetőségeivel kapcsolatban külföldön évtizedek óta folynak kiterjedt kutatások. Magyarországon azonban alig ismertek ezek a munkák, a szakirodalom jórészt nem hozzáférhető, s a témával kapcsolatos, elszórtan előforduló megnyilvánulások a legtöbbször felszínesek maradnak.

E tanulmány alapját egy nyári tábori matematikatörténet-program képezi, melyet önállóan dolgoztam ki és tartottam meg 2007 nyarán, lelkes matematika tanár szakos hallgatóként – akkor még a vonatkozó didaktikai szakirodalom ismerete nélkül. TDK-dolgozatom e tábor tapasztalatairól szólt. Most a külföldi eredmények kontextusában mutatom be saját kísérletemet.

Először a témáról szóló ICMI [1] -tanulmánykötet alapján összefoglalom a nemzetközi kutatások legfőbb vonalait, aztán a saját táborom programját ismertetem röviden, egy részletet (a nem-euklideszi geometriák születéséről szóló fejezetet) bővebben is kifejtve.

A nemzetközi tapasztalatok

A *History in Mathematics Education* című kötet az *ICMI Studies* című sorozat 6. köteteként, 2000-ben jelent meg, John Fauvel és Jan van Maanen szerkesztésében. A könyv az ICMI keretei közt 1976 óta működő, History and Pedagogy of Mathematics nevű nemzetközi kutatócsoport tíz éves kutatómunkájának eredménye – a kötet így reprezentatív képet igyekszik adni a témában a világ különböző pontjain elért eredményekről.[2] Célja annak a témának a körüljárása, hogyan jelenhet meg a matematikatörténet az oktatásban – beleértve annak minden szintjét az általános iskolától az egyetemig – mi lehet a szerepe, mennyiben segítheti elő az oktatás hatékonyságát.

A kötet számtalan aspektusból járja körül ezt a témát: szó esik politikai kontextusról (az egyes országok oktatási rendszerében mely szinteken, s hogyan jelenik meg a matematikatörténet), a téma filozófiai hátteréről, a matematikatörténeti és a tanulók gondolkodásában lejátszódó fejlődés közti különbségekről és párhuzamokról; arról, hogy milyen haszonnal járhat a történeti megközelítés, s hogy lehet az eredményességét vizsgálni; a matematikatörténet oktatásba integrálásának különböző formáiról és módjairól; az eredeti

[1] International Comission on Mathematical Instruction
[2] Fauvel-Maanen xiv. o.

források felhasználásának szerepéről; a különböző felhasználható médiumokról a drámajátéktól a régi műszereken át az internetig; s a matematikatörténet lehetséges szerepéről tanárképzésben. A fejezetek többségét számos esettanulmány tarkítja.

Több fejezet hangsúlyozza a matematikaoktatás reflektáltságának fontosságát: az egyes fejezetek bevezető szakaszai rendre kitérnek tárgyalt témájuk filozófiai, episztemológiai, pszichológiai, s egyéb hátterére, alapjaira. Éppen ezért tekinthetjük különösen hangsúlyosnak a kötet második fejezetét, mely a matematikatörténet oktatásbeli felhasználásának filozófiai, multikulturalimussal és interdiszciplinaritással összefüggő szempontjait tárgyalja. Azt az egész kötetre jellemző, meghatározó gondolatot bontja ki ez a fejezet, mely szerint a matematika nem pusztán örök igazságokat leíró, statikus, absztrakt, axiomatikus-deduktív módon szerveződő tudomány – legalább ennyire emberi tevékenység is: dinamikusan alakuló, változatos motivációkból táplálkozó, társadalmilag-kulturálisan beágyazott rendszer.

Ez a felfogás összhangban áll a matematikafilozófia 20. századi fejlődésével: míg a század elejének gondolkodását a logicista illetve formalista iskola határozta meg (az egyik platóni értelemben vett örök igazságoknak látja a matematika tételeit, a másik pedig jelentés nélküli, absztrakt jelek rendszerének), addig a század közepére – többek között Gödel munkásságának köszönhetően – ezek az irányzatok némileg háttérbe szorultak. Részben a kor harmadik nagy matematikafilozófiai iskolájának, az intuicizmusnak, továbbá Wittgensteinnek s másoknak a hatására, a tudományfilozófia fejlődésével összhangban előtérbe került az emberi tényező, a kulturális, szociális közeg szerepe a matematikáról való gondolkodásban. A filozófia a tudományokat s a matematikát egyre inkább történettel rendelkező, az egyes történelmi korszakok, kultúrák nyomait magán viselő, sokszor emberi döntések által befolyásolt rendszernek látja – elég itt Kuhn vagy Lakatos Imre munkásságára hivatkozni[3]. A matematika mint tevékenység, folyamat tűnik fel, mely (sokféle irányból érkező, matematikán belüli és kívüli szempontok által motivált) problémákat vet fel és igyekszik megoldani.

Az oktatás pedig le kell, hogy vonja a matematika felfogásának változásából eredő következményeket. A matematikát nem csupán készen kapott, örökérvényű szabályrendszerként kell a diákok elé tárnia, hanem be kell vezetnie őket a matematikai tevékenység mikéntjébe is: meg kell mutatnia, milyen jellegű problémákkal foglalkozik a matematika, hogyan kezeli őket, hogy halad előre egyik problémától a másikig.

A 20. század jelentős változásokat hozott abban a tekintetben is, hogyan értékeljük a különböző kultúrák hozzájárulását az egyetemes emberi kultúrához. A mai értelemben vett matematika jelentős részben az antik görög hagyományokra alapuló európai matematikai kultúra fejlődésének eredménye – más kultúrákban, társadalmakban sokszor egészen mást értenek hagyományosan matematikán; más társadalmi szerepet tölt be, más tárgyakkal foglalkozik, s más eszközöket használ ez a tudásterület. A történeti megközelítés képes felmutatni ezt a kulturális sokszínűséget – s az oktatásban ez nem csak mélyebb és árnyaltabb tudás kialakulását segítheti elő, hanem izgalmasabbá is teheti a tárgyat.

„A multikulturalizmus, abban az értelemben, amit itt próbáltunk közvetíteni, a sokszínűség felismerése és ünneplése" – írják a szerzők - „a mások munkájának tisztelete és értékelése, a különböző kontextusok, igények és célok elismerése, s annak tudatosítása, hogy a különböző kultúrák mind fontos elemekkel járultak hozzá ahhoz a tudásterülethez, melyet matematikának hívunk. Ezt tekintetbe véve, a multikulturális dimenzió matematika tanításába való beemelésével az oktatás humanista és demokratikus tradícióihoz is jelentős mértékben hozzájárulhatunk."[4]

A történeti megközelítés a matematika többi tudásterülethez való viszonyát is új színben tűntetheti fel. A modern matematikáról széles körben elterjedt az a kép, hogy nehéz, megerőltető tárgy, melyet absztraktsága és speciális szimbolikája az átlagember számára

[3] ld. pl. Kuhn: *A tudományos forradalmak szerkezete* ill. Lakatos: *Bizonyítások és cáfolatok*
[4] Fauvel-Maanen 51. o.

megközelíthetetlenné tesz. Elterjedt egyúttal egyfajta haszonelvű felfogás is, mely a matematikára csak alkalmazásainak kontextusában tekint. Ez a hagyomány, mely a matematikát egyrészt misztikus, absztrakt, nehéz tárgynak látja, másrészt az egyéb diszciplínák puszta eszközének, negatívan befolyásolja a tanulók matematikához való viszonyát, s nem segíti elő annak tanítását, tanulását.

A matematikatörténet beemelése az oktatásba, a problémaközpontú megközelítés, mely a matematikát emberi tevékenységként mutatja be, lehetővé teszi, hogy rávilágítsunk azokra a problémákra, melyek a matematika fejlődését motiválták. Ezek a problémák származhatnak a hétköznapi életből, egyéb tudományok igényeiből, a matematika belső fejlődéséből; felvetheti őket intellektuális kíváncsiság, esztétikai szempontok s még sok egyéb motívum is. A matematikatörténet segítségével felmutathatjuk a matematika különböző ágainak összefüggéseit (pl. aritmetika, algebra és geometria kapcsolatát Euklidesz vagy Descartes munkásságán keresztül), a matematika kapcsolatát a kultúra más területeivel (s nem csak a fizikával, hanem más természettudományokkal, gazdasággal, művészetekkel, vallással, filozófiával való összefüggéseit is).

Ezek az interdiszciplináris elemek érthetőbbé teszik a matematikát, s megmutatják annak sokszínű hasznát, szerepét a társadalomban; segítségükkel a matematikát nem elszigetelten, hanem az emberi kultúra szövetébe ágyazottan taníthatjuk.

A fenti elemzések segítettek feltárni a legfontosabb szempontokat, melyek a történeti megközelítés mellett szólnak – de a kötet számos helyen fejt ki további érveket[5]. A teljesség igénye nélkül egy szempontra hívnám még itt fel a figyelmet: arra, hogyan segítheti a matematikatörténet a tanár felkészülését, tevékenységét. Segíthet feltárni egy-egy új terület, téma bevezetésének motivációit, s ezt érthetőbbé tenni a tanulók számára is; segíthet megérteni a tanulók nehézségeit, azokat az akadályokat, melyek egy téma elsajátítását gátolják; rávilágíthat egy-egy téma valódi nehézségi fokára: látszólag egyszerű témákról mutathatja meg, milyen lépcsőfokokon keresztül alakultak ki mai formájukban, s mi mindenre épülnek rá. A matematikatörténet tanulmányozása a matematikai tevékenység természetének mélyebb megértéséhez vezetheti a tanárt; új magyarázatokkal, példákkal, alternatív megközelítési módokkal gazdagíthatja didaktikai eszköztárát; s segítheti hogy megértse, értékelje az egyes problémák megoldását akkor is, ha azok nem a modern matematikában elvárt nyelven és formában fogalmazódnak meg.

A matematika történeti megközelítése tehát számtalan módon lehet hasznos az oktatásban. De természetesen tekintettel kell lenni a korlátokra és a veszélyekre is, melyeket ez a megközelítés magában rejt[6]. Semmiképp nem alakulhat át a matematika tanítása a matematika történetének tanításává, hiszen nagyon sokféle szempont határozza meg, hogy mit érdemes és szükséges tanítani az iskolában (ez jelentős részben politikai kérdés is) – a történetiség egyoldalú szempontja az öncélúság veszélyét rejtené magában. A történeti megközelítés *segítheti* a matematika tanítását, de nem *helyettesítheti* azt (igaz, segíthet a tanítandó témák listájának összeállításában is, például azáltal, hogy rávilágít bizonyos témák helyére, szerepére a kultúránkban).

Az egyes matematikai területek történeti fejlődésének vonala szoros kapcsolatban állhat a tanulók gondolkodásának fejlődésével, de két út nem feltétlenül egyezik meg.[7] Veszélyes lenne tehát minden esetben, kritikátlanul követni a történeti fejlődés ívét: ez sokszor fölöslegesen hosszadalmassá és bonyolulttá tenné a tananyagot. A matematikatörténet tanulmányozása számos ötlettel járulhat hozzá a tananyag felépítéséhez, de akkor igazán hasznos, ha a tanítás szempontjait szem előtt tartva, kritikusan kezeljük.

[5] ld. különösen a 7.2. fejezetet
[6] ld. 3.1, 7.2. fejezetek
[7] erről bővebben ld. az 5. fejezetet

A matematikatörténet oktatásba integrálásának egyéb akadályai, nehézségei is lehetnek: pl. gyakran több időt igényel, mint a hagyományos módszerek; a tanárok nem rendelkeznek ilyen téren tapasztalattal; megfelelő források csak korlátozottan állnak rendelkezésre (ez utóbbi hazánkra különösen igaz: a jelentős matematikai művek magyar fordításai éppúgy hiányoznak, mint a megfelelő mennyiségű, naprakész matematikatörténeti szakirodalom – az ezekre épülő didaktikai, módszertani művekről nem is beszélve) stb.

Azonban a matematikatörténet sokféle módon, különböző szinteken jelenhet meg a matematikaórán.[8] Beemelhetünk direkt történeti elemeket (említhetünk neveket, dátumokat, egyéb tényszerű információkat, a tanulók kezébe adhatunk eredeti szövegeket, szövegrészleteket), de érvényesülhet a történeti megközelítés kevésbé direkt módon is: pl. egy-egy probléma történetének interpretálásával, fejlődési útjának végigjárásával a tananyag felépítésében. Hasznot hozhat továbbá a matematikatörténet az oktatás számára úgy is, hogy az osztályteremben egyáltalán nem jelenik meg, de mélyíti a tanár matematikai tevékenységről való tudását, az egyes témák, problémák megértését – s ebből áttételesen a tanulók is profitálnak.

Érdemes felhívni arra is a figyelmet, hogy a matematikatörténet különböző felhasználási módjai között nem csak azon a téren van különbség, hogy mennyire direkt a történeti elemek jelenléte, hanem abból a szempontból is, hogy ezek milyen mélyen formálják át az oktatást. Matematikatörténeti adatok egyszerű ismertetése bizonyos helyzetekben üdítően hathat az órán, de sem mélyebb megértéshez, sem a diákok matematikáról alkotott képének valódi átformálásához nem vezet. Ezzel szemben egy téma történeti ismeretek által motivált újszerű felépítési módja jelentős didaktikai hasznot hajthat akár akkor is, ha az órán egyetlen konkrét történeti utalás sem hangzik el.

A kötet számos módszert, eszközt sorol fel, melyek a matematikatörténethez (is) kapcsolhatók, s az oktatás során használhatók.[9] Szó esik például az elsődleges források felhasználásának módjairól, történeti szövegeken alapuló kutatási projektekről, feladatlapokról, játékokról, kísérletekről; arról, hogyan lehet a tanulók hibáit, alternatív elképzeléseit, intuitív érveit kihasználni a tanórán; s hogyan lehet különböző jellegű történeti problémákat – megoldatlan, újszerű megoldási módszert bevezető, új kutatási területet megnyitó, szórakoztató stb. problémákat – felhasználni. Az egyik fejezet régi eszközök felhasználásához ad ötleteket, a másik az internet és a számítógépes szoftverek nyújtotta lehetőségekről szól; olvashatunk filmekről, s a tanórán kívüli tapasztalatszerzés lehetőségeiről éppúgy, mint a drámajáték módszereinek bevezetéséről.

Úgy tűnik, a történeti megközelítés módszertani sokszínűségre is ösztönöz; de abban mindenképp segít, hogy a tanár átértelmezze saját, a tanórán betöltött szerepét: kilépjen az abszolút tudás birtokában lévő megfellebbezhetetlen információközvetítő szerepéből, s teret adjon annak, hogy a diákok maguk járják végig a felfedezés útját, s maguk ismerkedjenek a matematikai tevékenység örömével.

Befejezésül még egy fontos témára térnék ki, melyet a könyv tárgyal: arra, hogyan lehet ennek a megközelítési módnak a sikerét ellenőrizni, igazolni[10]. A fejezet szerzői arra hívják fel a figyelmet, hogy a matematikatörténet felhasználása mellett jórészt olyan típusú érvek szólnak (a matematika mibenlétéről vallott nézetek fejlődése, fogalmak, tételek mélyebb megértése stb.), melyek igazságát kvantitatív módon aligha lehet mérni. A szerzők esettanulmányok holisztikus, kvalitatív jellegű értékelését javasolják: elsősorban a résztvevők véleményének, tanárokkal, diákokkal készített interjúknak az elemzését. Egyúttal azt is hangsúlyozzák, hogy ez a megközelítés nem lehet preskriptív, nem írhat elő modelleket,

[8] bővebben ld. a 7.3. fejezetet
[9] pl. 7.4., 10. fejezetek
[10] 3.1.

programokat – sokkal inkább szemléletformálásról van szó, a konkrét megvalósításnak mindig az adott szituációhoz, az adott tanulókhoz kell igazodnia.

A szemléletformálást, s a megközelítés sikerének illusztrálását szolgálja az a számtalan esettanulmány, mely a kötet különböző fejezeteiben megjelenik, s melyben a világ minden tájáról származó tanárok írják le, hogyan formálta át oktatási tevékenységüket, s milyen eredményeket hozott munkájukban a matematikatörténet alkalmazása.

A matematikatörténet tábor programja

Amikor a saját matematikatörténet táborom programját terveztem, a fent ismertetett kutatásoknak még a létezéséről sem tudtam. Saját matematikatörténet iránti érdeklődésem motivált, illetve olyan, magyar szerzők tollából származó művek, mint Péter Rózsa *Játék a végtelennel*-je, Rényi Alfréd *Levelek a valószínűségről* című munkája, vagy épp a Lakatos Imre tollából származó *Bizonyítások és cáfolatok*. Nagy hatással voltak rám a matematikai tehetséggondozás területén elért sikereiről ismert Pósa Lajos táboraiban szerzett tapasztalatok is. Ezek a művek, illetve gyakorlatok közvetve, vagy egyáltalán nem kötődnek matematikatörténethez; azonban a matematikának ugyanazt a szemléletét – emberi tevékenység, dinamikusan változó rendszer, problémák és válaszkísérletek sorozata – közvetítik, amelyet a történeti megközelítés is szem előtt tart. Így talán nem véletlen, hogy segítettek a matematikatörténet oktatásával kapcsolatos szemlélet kialakításában.

A fenti műveken kívül fontos inspirációs forrást jelentett Simonyi Károly közismert műve, *A fizika kultúrtörténete* című kötet is. Ennek a nyomán adtam programomnak a „matematika-kultúrtörténet” címet.

A tábor a budapesti Eötvös József Gimnázium 10., 11., 12. osztályos diákjainak szólt, az iskola hagyományos nyári „tantáborának” keretei között valósult meg (ahol rendszerint több különböző témával foglalkozó csoport van jelen párhuzamosan, napi 2x2 órában a szakmai foglalkozásokon, azon kívül pedig a közös szabadidős programban). A matematikatörténet programon, összesen kb. 22 órányi foglalkozássorozaton 6 (általam korábban nem ismert) diák vett részt.

A tábori program anyagát gondos mérlegelés, hosszú válogatás után állítottam össze, sokféle szempontot figyelembe véve. Az általam szem előtt tartott cél egyrészt az volt, hogy a matematikatörténet segítségével olyan matematikai témákba vezessem be őket, melyek hagyományosan nem képezik részét a középiskolai tananyagnak (mint pl. a nem-euklideszi geometriák vagy a valós számok rendszerének axiomatikus felépítése), másrészt hogy a matematika mint tudomány természetéről és kultúránkban betöltött szerepéről való gondolkodásra késztessem tanítványaimat. Törekedtem arra, hogy minél nagyobb ívet fogjon át a program – a teljesség igénye nélkül természetesen, de essen szó a matematikatörténet legfontosabb korszakairól, s tematikusan is minél sokszínűbb legyen az anyag. Másrészt, és ez talán még fontosabb szempont volt, igyekeztem elkerülni a töredezettséget, minél nagyobb logikai koherenciára törekedni: nem esetlegesen egymást követő epizódokat, hanem egymással számos ponton összefonódó fejlődési láncokat bemutatni.

A tábor programja az alábbi fejezetekből állt össze:

1. Bevezetés: játék és bemelegítő beszélgetés
2. A számfogalom fejlődése, a számírás kialakulása
3. Püthagorasz és iskolája
4. Az összemérhetetlenség-probléma; a bizonyítás születése
5. Az axiomatikus módszer
6. Egy példa: a valós számok axiómarendszere

7. A számírás és az algebrai jelölésrendszer fejlődése Európában
8. Fibonacci-sorozat és aranymetszés
9. Bolyai és a nem-euklideszi geometriák
10. Végtelen halmazok, számosságok

Az első foglalkozás célja ismerkedés, ráhangolódás volt, szórakoztató, matematikatörténethez kapcsolódó játékok segítségével, illetve egy, a matematika természetéről, sajátosságairól szóló beszélgetés során (melyben különböző korokból származó, matematikáról szóló idézetek voltak a segítségünkre). Hagytam, hogy a diákok kifejtsék a maguk véleményét, provokatív kérdésekkel próbáltam irányítani őket, hogy érdeklődésüket felkeltsem. Igyekeztem minél több olyan témát szóba hozni, amely a tábor során később előkerült – nem egy izgalmas kérdést hagytunk nyitva azzal, hogy a későbbi napokban még visszatérünk rájuk. Ez a foglalkozás megalapozta az egész tábor jó hangulatát, sikerült elnyerni a gyerekek bizalmát és felkelteni érdeklődésüket.

A második téma tulajdonképp a matematika születéséről szól; a különböző természeti népeknél illetve ókori kultúráknál fellelhető számrendszerek, számírások sokféleségét igyekeztem bemutatni. Ez egyúttal arra is felhívta a figyelmet, hogy a számunkra legegyszerűbbnek, legmagátólértetődőbbnek tűnő fogalmak maguk is hosszú fejlődés eredményeként alakultak ki.

A 3., 4. és 5. téma szorosan összefügg, az ókori görög matematika történetével foglalkozik. Ezeknek a foglalkozásoknak a keretében a püthagoreusok kavicsokkal végzett számelméleti kísérleteitől az irracionális hosszúságú szakaszok problémáján és a mai értelemben vett első matematikai bizonyításokon át eljutottunk az axiómarendszer fogalmáig, s Euklidesz *Elemek* c. művének rövid ismertetéséig. Ezek a fejezetek kulcsfontosságúak, hiszen az európai matematika legfőbb vonásainak kialakulását mutatják be. A felépítésben erősen támaszkodtam Szabó Árpád munkáira[11], aki szoros kapcsolatot tételez fel a görög matematika és a filozófia fejlődése között. A foglalkozások során néhány érdekes számelméleti és geometriai tételt is megbeszéltünk, de a hangsúly ezek történeti jelentőségének elemzésére esett.

Az axiómarendszer fogalmát ugyan Euklidesz mintájára a geometria kapcsán vezettük be, de úgy gondoltam, hogy az axiomatikus módszer működését a geometria példáján hosszadalmas és nehézkes lenne bemutatni. Ezért modernebb példához folyamodtam: a valós számok axiómarendszerével ismerkedtünk meg alaposan (Pósa Lajos nyomán, aki középiskolások számára is élvezhető, játékos történet keretében dolgozza föl ezt a témát). Másrészt a valós számok tárgyalásának az a haszna is megvolt, hogy elvarrta a számfogalom alakulástörténetének az egész addigi táboron végighúzódó fonalát.

E nehéz elméleti téma után felüdülésként könnyedebb témát iktattam be a programba: a számírás és az algebrai jelölésrendszer közép- és reneszánsz-kori fejlődéséről volt szó. Játékos vetélkedők során gyakorolhatták a diákok a korabeli jelölésrendszerek használatát (s hasonlíthatták össze azokat a ma használatos rendszerrel).

A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés klasszikus témája természet, művészet és matematika összefüggéseit vizsgálta: megoldottunk néhány, a témához kapcsolódó szép matematikai példát, megvizsgáltuk, hol jelennek meg ezek a számok, arányok a természetben, s egy diavetítés során, műalkotások elemzésén keresztül beszéltünk arról, hogyan változik az arányok, és általában a geometria szerepe az európai művészet történetében. A téma egyúttal a korábban tárgyalt püthagoreus számelmélethez is kötődött: kitértünk arra is, hogyan élnek tovább a püthagoreus hagyományok a későbbi arányelméletekben.

[11] Szabó 1978

Az utolsó két fejezet a matematikatörténet két jelentős, 19. századi fordulatát tárgyalta: a nem-euklideszi geometriák, illetve a végtelen halmazok elméletének megszületését. Ezek elméletileg igen nehéz, a középiskolai tananyagon túlmutató témák – a tábori program addigi felépítése azonban, úgy tűnik, kellően megalapozta a tárgyalásukat. A diákok végig érdeklődéssel, aktívan, időnként egymással is hevesen vitatkozva vettek részt a közös munkában, s kérdéseikből, hozzászólásaikból ítélve nagyrészt megértették a tárgyalt problematikát.

E két utolsó téma egyikét, a nem-euklideszi geometriák születéséről szóló fejezetet mutatom be az alábbiakban részletesen.

Részlet a táborból: Bolyai és a nem-euklideszi geometriák

Ezt a témát szántam a tábor egyik csúcspontjának. A korábbi foglalkozások során beszéltünk a gyerekekkel az első matematikai bizonyítások, majd az axiomatikus módszer kialakulásáról az ókori görög matematikában. Sokat foglalkoztunk azzal, mire jó és hogyan működik egy klasszikus értelemben vett matematikai axiómarendszer. A nem-euklideszi geometriák születésének történetén keresztül egyrészt azt akartam bemutatni, hogyan változott meg az egyik legfontosabb matematikai fogalom, az axiómarendszer fogalma, s ezzel együtt a matematikusok matematikáról alkotott képe a 19. században. Másrészt azt is reméltem – s ebben a reményemben nem kellett csalódnom –, hogy a hiperbolikus geometria meglepő, látványos tulajdonságai meg fogják ragadni a diákokat; s az összehasonlítás nyomán, végső soron az általuk már ismert euklideszi geometria tulajdonságairól is mélyülnek az ismereteik.

A fenti célokat figyelembe véve axiomatikus úton igyekeztem megközelíteni a témát: az ötödik posztulátum (a párhuzamossági axióma) történetének bemutatásán keresztül. A hiperbolikus geometria működését viszont nem lett volna célszerű axiomatikus felépítésben bemutatni, hiszen ez hosszadalmas, és a középiskolainál mélyebb matematikai ismereteket igényel. Az szerencsére azonban két különböző szoftver is hozzáférhető, melyek a hiperbolikus geometriát mutatják be: Dr. Szilassi Lajos BOLYAI.EXE nevű programja főleg a geometriai transzformációk látványos szemléltetésére alkalmas, a Noneuclid című program pedig többféle beállításra ad lehetőséget, s mérni is tud (pl. szögeket, területet).

A diákoknak nem árultam el előre, hogy most úgynevezett „nem-euklideszi geometriákról" lesz szó – egyszerűen azt mondtam, hogy az axiómarendszer-témához térünk vissza.

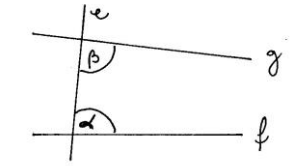
Bevezetésként szóltam néhány szót arról, hogy milyen hatást gyakorolt Euklidész *Elemek* c. műve az utókorra. Árulkodó már az az adat is, hogy ez a világ második leggyakrabban kiadott könyve[12] (természetesen a Biblia előzi meg); a 19. századig, több, mint 2000 évig használták geometria tankönyvként. A matematika, mint szigorú, deduktív tudomány, az axiomatikus módszer mintaként szolgált Európa gondolkodói számára – különösen a 17. században, az emberi tudás korlátlanságába vetett hit korában törekedtek arra filozófusok, tudósok (a két fogalom akkoriban még nem vált el élesen egymástól), hogy minden emberi tudást „geometriai módon" fölépítve foglaljanak össze. Erre példa néhány olyan mű, melyet a táborba is levittem: Descartes deduktív istenérve[13], Spinoza *Etika* c. műve, Newton *Principiá*ja (vagyis *A természetfilozófia matematikai alapjai*), illetve Galilei *Matematikai érvelések és bizonyítások* c. munkájának második fele.

Bár Euklidész műve majdnem osztatlan sikert aratott, az *Elemek*kel kapcsolatban is folytak viták. Különösen a „párhuzamossági axiómát" találták az utódok problematikusnak – úgy gondolták, hogy ez szemléletesen nem eléggé nyilvánvaló (mindenesetre sokkal kevésbé, mint a többi axióma). Többféleképp átfogalmazták, felmerült, hogy esetleg le lehetne vezetni

[12] Sain 148. o.
[13] Descartes: Értekezés 82-88. o.

a többi axiómából, s így nem kéne axiómaként felvenni. Az évszázadok során számos ekvivalens átfogalmazás, bizonyítási kísérlet született[14] – ezek közül néhányat felírtam egy csomagolópapírra. (A papír bal oldalára, piros filccel előre felírtam a kiválasztott átfogalmazásokat – a jobb oldalt üresen hagytam, hogy oda majd a tagadásaik: a hiperbolikus geometria-béli megfelelőik kerülhessenek)

1, (Euklidész) Ha egy *e* egyenest két másik egyenessel elmetsszünk, és ezek e-vel bezárt szögeinek összege e valamelyik oldalán kisebb, mint 180°, akkor a két egyenes metszi egymást.



2, (Proklosz, 5. század) Egy egyeneshez egy rá nem illeszkedő ponton át pontosan egy nem metsző egyenes húzható.

3, Minden háromszög szögeinek összege 180°-kal egyenlő.

4, Van olyan háromszög, melynek szögösszege 180°.

5, (Bolyai Farkas) Három pontra vagy egy egyenes, vagy egy kör illeszthető.

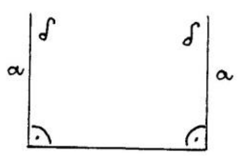
6, (Wallis, 17. század) Léteznek nem egybevágó hasonló háromszögek (szögeik páronként egyenlők, oldalaik aránya megegyezik – de oldalaik páronként nem egyenlők).

(Az ekvivalencia bizonyítása általában nehéz feladat, de ha a diákoknak kedve van hozzá, néhány egyszerűbb bizonyítással meg lehet próbálkozni – például 2, $\Rightarrow$ 3,-at egy korábbi foglalkozáson már be is bizonyítottuk, 3, $\Rightarrow$ 4, pedig triviális!)

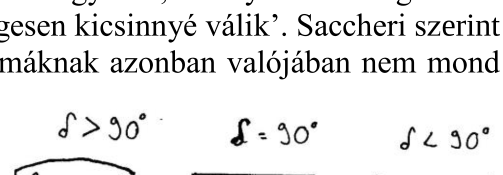
Ezután folytattam a párhuzamossági axióma történetéről szóló mesét.

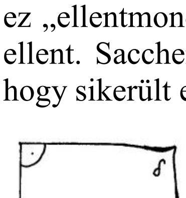
Már az ókortól kezdve születtek bizonyítási kísérletek a párhuzamossági axiómára; 1760-ig 55 ilyen mű maradt ránk, 1760-1800 között viszont újabb 67! Ez Kárteszi[15] szerint Kant filozófiájának hatásával magyarázható (Kant úgy érvel, hogy a rajtunk kívül lévő világról nem tudhatunk semmi biztosat, hiszen csak az jut el hozzánk, amit megismerő képességünk - mint egy szűrő – átenged. Így legelőször is ezt a megismerő képességet kell vizsgálnunk. Kant szerint a velünk született szűrő tér- és időszemléletünk – ez esetben viszont fontos volna, hogy 'velünk született térfogalmunkról' minél megbízhatóbb képet alkossunk magunknak.)

Az egyik legelterjedtebb módszer, amivel az axióma-bizonyítók próbálkoznak, az indirekt bizonyítás: a többi euklideszi axióma mellé a párhuzamossági axióma tagadását veszik fel, majd megpróbálnak ellentmondásra jutni, s ezáltal bizonyítani, hogy a párhuzamossági axióma következik a többi axiómából.



Az egyik ilyen nevezetes kísérlet Saccheri (1667-1733) nevéhez fűződik, aki olyan tengelyesen szimmetrikus négyszögeket vizsgált, melyek két szomszédos szöge derékszög, másik két szöge pedig valamilyen δ. Belátta, hogy δ>90° ellentmond a többi axiómának, δ=90° pedig ekvivalens a párhuzamossági axiómával. δ<90° esetben levezette, hogy 'van két egymást nem metsző egyenes, amelyek távolsága – az egyik egyenesen valamelyik irányba haladva – tetszőlegesen kicsinnyé válik'. Saccheri szerint ez „ellentmond az egyenes természetének"[16] – az axiómáknak azonban valójában nem mond ellent. Saccheri tehát tévedett, mikor úgy gondolta, hogy sikerült ellentmondást kimutatnia.





A másik nevezetes kísérlet Lamberté (1728-1777), aki olyan négyszögekből indult ki, melyeknek három szöge derékszög, s azt akarta belátni, hogy a negyediknek is annak kell lennie. A tompaszög-esetben neki is sikerült ellentmondásra jutnia (bár szerinte gömbön megvalósítható volna ez az eset!), hegyesszög-esetre nézve viszont – annak ellenére, hogy a

[14] ld. Kárteszi bevezetője, 14-18. o. in Bolyai: Appendix, illetve Strohmajer 121-130. o.

[15] Bolyai 14. o.

[16] Bolyai 16. o.

hegyesszög-feltevésből kiindulva egy egész könyvnyi tételt levezetett – nem talált ellentmondást.

A fordulat az 1820-as években következett be, amikor három matematikus – a magyar Bolyai János, az orosz Lobacsevszkij és a német Gauss – majdnem egyszerre jutott arra a következtetésre, hogy *talán azért nem sikerült ellentmondást találni, mert nincs is ellentmondás!* De ha a párhuzamossági axióma tagadása nem mond ellent a többi axiómának, akkor akár *ezt is feltehetjük axiómaként!*

Bolyai és Lobacsevszkij egymástól függetlenül kidolgoztak egy új geometriát, mely az euklideszi axiómákat teszi fel azzal a különbséggel, hogy a párhuzamossági axióma helyett annak tagadását mondja ki. Ezt az újfajta geometriát nevezzük *hiperbolikus geometriának.*

Tulajdonságairól többet is megtudhatunk, ha a párhuzamossági axióma korábban leírt ekvivalens átfogalmazásainak sorra megfogalmazzuk a tagadását. Ezt a diákokkal közösen tettük meg, s az eredeti állításoktól jól megkülönböztethető színnel, kékkel írtam a papírra. Az egyes állítások tagadásának megfogalmazása egyrészt önmagában is kihívást jelentett a számukra, másrészt az így létrejövő új geometriáról szóló állítások tartalmilag is izgalmasak.

Figyelembe véve azokat a – párhuzamossági axiómától függetlenül teljesülő – tételeket, hogy 1. egy egyeneshez rá nem illeszkedő ponton át legalább egy nem metsző egyenes húzható, illetve 2. a háromszög szögeinek összege $\leq 180°$, kiderül többek között, hogy a hiperbolikus geometriában egy egyeneshez rá nem illeszkedő ponton át több nem metsző egyenes húzható; minden háromszög szögösszege kisebb 180°-nál; nem léteznek hasonló háromszögek.

Mindez azonban csak logikai játék – axiómákból logikai úton következtetett tételeket mondtunk ki, de nem tudjuk, mit is jelentenek valójában a 'hiperbolikus sík', 'hiperbolikus egyenes' stb. kifejezések (melyek euklideszi megfelelői számunkra megszokott, szemléletesen nyilvánvaló fogalmak). A hiperbolikus geometria axiómarendszere ezekről nem mond semmit – pontosabban semmivel többet, mint amennyit maguk a levezetett tételek kimondanak.

Viszont lehet rájuk *modellt* találni! Mit jelent egy modell ebben az esetben? Választunk egy 'ismert' rendszert (itt például az euklideszi sík vagy tér egy részét), s meghatározzuk, hogy ezen belül mit értünk azokon a fogalmakon, melyeket az axiómarendszerünk definíció nélkül használ (itt pl. 'egyenes'). Egy ilyen rendszer akkor modellje az axiómarendszerünknek, ha az axiómák teljesülnek az így kiválasztott objektumokra. (Természetesen, ha az axiómák teljesülnek, akkor a belőlük levezethető összes tétel is.)

A hiperbolikus geometriára számtalan modellt találtak már[17]. Ezek közül a Cayley-Klein modellt, a Poincaré-féle körmodellt, illetve az ún. pszeudoszférát mutattam be röviden a diákoknak. Az első kettő esetében a 'sík' egy nyílt körlemez; de míg a Cayley-Klein modell 'egyenesei' a kör (euklideszi sík szerinti) húrjai, a Poincaré-féle körmodellben ezeknek körívek felelnek meg. Az, hogy a hiperbolikus geometria axiómái teljesülnek ezekben a modellekben, könnyen ellenőrizhető – viszont a távolság definíciója bonyolult, ezért ezt precízen nem is akartam megmutatni, inkább csak egy szemléletes képet adni róla.

A pszeudoszféra az ún. traktrix (vagy vonszolási görbe) segítségével állítható elő: a vonszolási görbét úgy lehet elképzelni, mint annak az – a koordinátarendszerben az y tengely egy nem 0 pontjáról induló – gazdinak az útját, akit az x tengely mentén szaladó kutyája „vonszol" maga után a kifeszített póráznál fogva (precízebben: olyan síkgörbe, melynek bármely pontjában vett érintőnek az x tengelyig terjedő szakasza állandó). Ezt a görbét az x tengely körül megforgatva kapjuk a pszeudoszférát. Ez szintén a hiperbolikus geometria egy modelljét szolgáltatja.

[17] ezek részletesebb leírását ld. Strohmajer 123., 130-139. o.

A két számítógépes program, mely a hiperbolikus geometriát mutatja be, a Poincaré-modellel dolgozik. Ezeket a programokat a diákok részéről nagy érdeklődés fogadta, sokféle geometriai alakzat létrehozásával kísérleteztek, s így az újonnan megismert hiperbolikus geometria számos tulajdonságát felfedezték. A legnagyobb sikert az elfajuló, 0°-os háromszög felfedezése aratta.

Miután kipróbáltuk a programokat, két dologra tértem még ki. Az egyik Bolyai János élete: (hiszen pályája igencsak érdekes, megismerésre méltó, arról nem beszélve, hogy az egyik legnagyobb magyar matematikusról van szó). Ezt itt nem részletezem[18] – amit meg kell említenem, az a szállóigévé vált levélrészlet: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem”. A romantika irodalma kapcsán szokott szó esni róla, hogy a művész a 19. századra Isten teremtményéből, s Isten művének értő csodálójából teremtő zsenivé alakul át. Épp a fenti idézet mutat rá, hogy ugyanekkor a matematikában is ez történik: míg Descartes *Elmélkedései*ben azt írja (nem szó szerint idézem), hogy „Az, hogy Isten létezik, éppolyan bizonyos, mint hogy a háromszög szögeinek összege 180°” [19] – Bolyai szemében a matematika igazsága (s többek között épp a háromszög szögösszege!) nem abszolút, isteni igazság, hanem szabad, emberi döntés kérdése. A fordulatnak, amit a nem-euklideszi geometria megjelenése hozott, nem csak a matematikán belül van óriási jelentősége – összefügg a kor meghatározó világnézeti változásaival is (s feltehetően erősen hat is azokra.)

A másik kérdés, amire ki kell térni a nem-euklideszi geometriák kapcsán: rendben van, hogy logikai játékot játszunk, különféle axiómarendszerekkel bíbelődünk – de jó-e ez valamire a gyakorlatban? Történetesen igen: Einstein relativitás-elmélete Riemann-geometriát, egyfajta nem-euklideszi geometriát használ fel a tér szerkezetének leírására!

Ez utóbbi kérdés egyébként a foglalkozáson már jóval hamarabb felmerült, a diákok egy vitájának a kapcsán. Amikor ugyanis a beszélgetés során odáig jutottunk, hogy Bolyaiék felvetették: a párhuzamossági axióma tagadása esetleg valóban nem mond ellent a többi axiómának, s hogy ez esetben feltehetjük akár ezt is axiómaként – az egyik diák azonnal közbekérdezett: „De hát miért tennénk föl, ha egyszer nem igaz?” Egy másik pedig válaszolt: „Ez csak egy logikai játék, az nem számít, hogy igaz-e.” A diákok között élénk vita bontakozott ki a kérdést illetően.

Számomra talán ez volt a tábor legkedvesebb pillanata. Ha előre megírt forgatókönyv szerint szólalnak meg, akkor sem fogalmazhatták volna meg pontosabban és világosabban a problémát: ha a matematikát olyan rendszernek képzeljük el, mely a valóságot írja le, s axiómáit ’nyilvánvalóan igaznak’ tekintjük, az axiómák tagadását értelmetlen feltenni axiómaként. De ha a matematikát valóságtól független, önálló rendszereket alkotó tudományként fogjuk fel, szabadságunkban áll olyan axiómákat felvenni, amilyen nekünk tetszik; a matematikai állításoknak nem lesz abszolút, csak relatív, rendszeren belüli igazságértéke: nem számít, hogy ’leírják-e a valóságot’, csak az, hogy következnek-e az axiómákból. A két álláspont ütközése éppen azt a fordulatot szemlélteti, mely 19-20. század során a matematika felfogásában lezajlott – részben a nem-euklideszi geometriák felfedezésének hatására. S a diákok, a matematikatörténetről szóló beszélgetés nyomán nem csak, hogy élénken érdeklődtek e bonyolult, a matematika filozófiáját érintő kérdések iránt, de maguk voltak képesek megfogalmazni a lehetséges álláspontokat.

A téma könnyed lezárásaként megnéztük a Mézga Aladár kalandjai c. sorozat „Második dimenzió” című epizódját, melyben Aladár egy kétdimenziós bolygót fedez fel. (Ennek ugyan nem sok köze van nem-euklideszi geometriákhoz, de arra jó, hogy belegondoljunk, milyen lehet, amikor az ember által ismert ’tér’ szerkezete más, mint amihez hozzá vagyunk szokva.)

[18] részletekért ld. pl. Bolyai 30-35. o.

[19] „Isten lényegétől éppoly kevéssé választható el a létezés, mint amilyen kevéssé lehet a háromszög lényegétől elválasztani azt, hogy három szögének összege egyenlő két derékszöggel.” Descartes: Elmélkedések 82. o.

Összegzés

Saját munkámat és saját tapasztalataimat a szakirodalommal összevetve úgy gondolom, hogy az általam megvalósított program mind szellemiségében, céljaiban, mind módszereiben, mind tapasztalataiban szervesen illeszkedik abba a kontextusba, melyet a nemzetközi kutatások alakítottak ki. A tábor programja nagy hangsúlyt helyezett a matematikáról való gondolkodás reflektáltságára, matematikafilozófiai kérdések megvitatására; szerepet kapott a programban a multikulturalitás szempontja (elsősorban a második téma, a számfogalom és a számírások kialakulásának kapcsán), s kifejezetten törekedtem az interdiszciplinaritásra. A tábor olyan szellemiséget igyekezett közvetíteni – s úgy hiszem, ezt sikerrel is tette – mely megfelel annak, amit a *History in Mathematics Education* c. kötet fogalmaz meg: a matematikát emberi tevékenységként, az emberi kultúra szövetébe szorosan illeszkedő, változatos problémákra választ kereső, dinamikusan fejlődő rendszerként mutatta be. A diákokat sikerült aktív részvételre buzdítani, belőlük vitát, véleménynyilvánítást kiprovokálni.

Fontos szempontja volt a tábornak, hogy bizonyos – egyébként nehezen emészthető – témákat világosabbá, mélyebben érthetővé tegyen a résztvevők számára. Ennek jelentőségét a szakirodalom többször kiemeli.

A matematikatörténet megjelenésének a szakirodalomban felvázolt különböző szintjei fordultak elő a táborban. Mivel ez kifejezetten matematikatörténet tematikájú program volt, nagy teret engedett az explicit történetiségnek. (Eredeti szövegeket viszont csak elvétve adtam a tanulók kezébe, s azokat sem önálló tanulmányozásra.) A problématörténeti szemlélet és építkezés meghatározó szerepet játszott a program egész felépítésében. S valóban saját didaktikai tudásomat, gondolkodásomat is elmélyítették a matematikatörténet tanulmányozásából származó tapasztalatok.

Törekedtem a módszertani, eszközbeli sokszínűségre, s több olyan elemet is beillesztettem a munkába, amit a *History in Mathematics Education* felsorol (pl. játék, történeti feladatlap, film, számítógépes szoftver; a diákok hibáinak, intuitív érveinek felhasználása; különböző típusú problémák felvetése stb.).

Sajnos nem készítettem annakidején olyan kérdőívet, melynek kiértékelése segítene a program sikerének elemzésében, de saját tapasztalataim alátámasztják mindazokat az előnyöket, melyeket a szakirodalom a történeti megközelítésnek tulajdonít.

Az általam kidolgozott program tehát – anélkül, hogy a témáról szóló szakirodalmat, annak elméleti alapvetéseit s gyakorlati tanácsait ismertem volna – jól illeszkedik a nemzetközi kutatások kontextusába. Ennek tudatában két kérdést mindenképp érdemes felvetni: egyrészt mi a tanulsága az időközben megismert külföldi kutatásoknak, hogyan viheti előre a további munkát? Másrészt vajon mi lehet az oka annak, hogy egy általam „naivan” elkezdett program ennyire pontosan megfelel a több évtizedes nemzetközi kutatások eredményeinek?

Ami az első kérdést illeti, igaz, hogy a szakirodalomban jelenlévő szempontok jelentős része felmerült bennem az irodalom ismerete nélkül is, ugyanakkor a *History in Mathematics Education* kötet ezeket a témákat szilárd tudományos és filozófiai alapokra helyezve, sok szempontból, mélyen átgondolva és részletesen kifejtve tárgyalja. Ez segít abban, hogy saját munkámról reflektáltabban gondolkodjam – s azt esetleg továbbfejlesszem a későbbiekben. A kötet bőséges példatára számtalan új ötlettel járulhat hozzá a munkához. S ami talán a legfontosabb: a világ minden tájáról származó tanárok és kutatók tapasztalatai megerősítik azt, amit saját eredményeim sejteni engedtek, hogy a történeti megközelítés gyümölcsöző lehet a matematikaoktatásban, s hogy ezen az úton érdemes továbbhaladni.

A második kérdésre, talán lehetne azt az egyszerű választ adni, hogy a világban hasonló folyamatok zajlanak, hasonló problémák, igények merülnek fel egy időben a világ számos különböző pontján, s talán nincs azon semmi csodálnivaló, ha a történeti megközelítés ötlete sok matematikatanárhoz és kutatóhoz hasonlóan egy budapesti tanárjelölt fejében is felmerült.

Szeretném azonban felhívni a figyelmet arra a néhány műre [20], melyekről a tábor programjának bemutatásakor azt állítottam, hogy koncepciómat jelentősen befolyásolták. Ezeknek a műveknek a nagyobb része közel fél évszázada jelent meg először – szemléletük azonban feltűnően közel áll ahhoz, amit az utóbbi évtizedek nemzetközi kutatásai képviselnek.

Úgy hiszem, hogy ezek a szövegek részét képezik egyfajta heurisztikus hagyománynak, mely nagy szerepet játszott a hazai matematikaoktatás fejlődésében, és ha nem is a matematikaoktatás minden terén, de máig hat. A *History in Mathematics Education* elemzései pedig világosan mutatják, hogy a történeti és a heurisztikus megközelítés egymással szoros rokonságban áll. Ez a rokonság mutat rá, hogy ezeknek az előző század közepén megjelent műveknek s az általuk képviselt matematikaoktatás-beli hagyománynak talán különös aktualitása van, melynek érdemes lenne a mainál több figyelmet szentelni.

Hivatkozások

BOLYAI JÁNOS [1977]: Appendix. A tér tudománya. szerk. és bev. Kárteszi Ferenc. Akadémiai Kiadó, Budapest.
DESCARTES, RENÉ [1994]: Elmélkedések az első filozófiáról. Atlantisz Könyvkiadó, Budapest.
EUKLIDÉSZ [1983]: Elemek. Gondolat, Budapest.
FAUVEL, JOHN – MAANEN, JAN VAN szerk. [2000]: History in Mathematics Education. The ICMI Study. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
KUHN, THOMAS [2002]: A tudományos forradalmak szerkezete. Osiris, Budapest.
LAKATOS IMRE [1998]: Bizonyítások és cáfolatok. Typotex, Budapest.
NEWTON [1981]: A Principiából és az Optikából. Levelek Richard Bentleyhez. Kriterion, Bukarest.
PÉTER RÓZSA [1969]: Játék a végtelennel. Tankönyvkiadó, Budapest.
RÉNYI ALFRÉD [2005]: Levelek a valószínűségről. In: Ars Mathematica. Rényi Alfréd összegyűjtött írásai. Typotex, Budapest.
SAIN MÁRTON [1986]: Nincs királyi út! Gondolat, Budapest.
SIMONYI KÁROLY [1981]: A fizika kultúrtörténete. Gondolat, Budapest.
SPINOZA [1997]: Etika. Osiris Kiadó, Budapest.
STROHMAJER JÁNOS: A geometria alapjai (ELTE TTK egyetemi jegyzet) Nemzeti Tankönyvkiadó
SZABÓ ÁRPÁD [1978]: A görög matematika kibontakozása. Magvető, Budapest.

DR. SZILASSI LAJOS: BOLYAI.EXE http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/index.html
Noneuclid. http://orange.ngkszki.hu/~trembe/noneuclid/NonEuclid-Hungarian.html

További irodalom

BARBIN, EVELYNE szerk. [1993]: Histoire des problèmes – Histoire des mathématiques. Ellipses, Paris.
BERNARD, ALAIN [2009]: Histoire des sciences et formation. Argos 045. 14-22.
CRUMP, THOMAS [1998]: A számok antropológiája. Édesvíz Kiadó, Budapest.
ECO, UMBERTO [2005]: A szépség története. Európa Könyvkiadó, Budapest.
ESTERHÁZY PÉTER [2004]: Ha fülelünk. In: A jövő a számtantudósoké. Magyar szerzők írásai a matematikáról. Noran, Budapest. 274-279. o.

[20] elsősorban Rényi Alfréd, Péter Rózsa, Lakatos Imre művei

FILEP LÁSZLÓ [1997]: A tudományok királynője: a matematika fejlődése. Typotex, Budapest.
FILEP LÁSZLÓ – BEREZNAI GYULA [1999]: A számírás története. Filum.
FREUD RÓBERT szerk. [1981]: Nagy pillanatok a matematika történetében. Gondolat, Budapest.
GALILEI, GALILEO [1986]: Matematikai érvelések és bizonyítások. Európa Kiadó, Budapest.
GOLDSTEIN, CATHERINE szerk. [1993]: Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques: leur impact sur l'éducation. Université Paris 7.
HÁMORI MIKLÓS [1994]: Arányok és talányok. Typotex, Budapest.
HERSH, REUBEN [2000]: A matematika természete. Typotex, Budapest.
IREM PARIS 7. [1985, 1990, 2001]: Mathématiques: Approche par des textes hitoriques. 1-3. kötet. Université Paris 7.
JANKVIST, UFFE THOMAS [2010]: An empirical study of using history as a 'goal'. Educational Studies in mathematics 74/1. 53-74.
JUSKEVICS, A.P. [1982]: A középkori matematika története. Gondolat, Budapest.
KIRK-RAVEN-SCHOFIELD [2002]: A preszókratikus filozófusok. Atlantisz, Budapest.
LEONARDO DA VINCI válogatott írásai. vál. Csorba F. László [2006] Typotex, Budapest.
DR. LÉVRÁDI LÁSZLÓ - SAIN MÁRTON [1982]: Matematikatörténeti feladatok. Tankönyvkiadó, Budapest.
MANKIEWICZ, RICHARD [2003]: A matematika históriája. HVG Kiadó, Budapest.
MLODINOW, LEONARD [2003]: Eukleidész ablaka. Akkord Kiadó.
NEWTON [1981]: A Principiából és az Optikából. Levelek Richard Bentleyhez. Kriterion, Bukarest.
PLATÓN [1984]: Menón. In: Platón összes művei I. Európa Könyvkiadó, Budapest 643-725. o.
PÉTER RÓZSA [2004]: Matematika és művészet – nem két ellentétes pólus. In: A jövő a számtantudósoké. Magyar szerzők írásai a matematikáról. Noran. 195-213.
SMULLYAN, RAYMOND [2003]: Gödel nemteljességi tételei. Typotex.
SPINOZA [1997]: Etika. Osiris Kiadó, Budapest.
TÖRÖK JUDIT [1984]: A Fibonacci-sorozat. Tankönyvkiadó, Budapest.
WAERDEN, B. L. VAN DER [1977]: Egy tudomány ébredése. Gondolat, Budapest.
ZASLAVSKY [1984]: Afrika számol. Gondolat, Budapest.

Archimedes kunkorja. Ponticulus Hungaricus. http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/humor/archimedes-kunkorja.html
Matematikai talizmánok. Ponticulus Hungaricus. http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/megcsapottak/melancho.html
Matematika-történet (Abacus). http://mattort.fvt.hu/
Matematikával kapcsolatos idézetek. http://www.citatum.hu/kategoria/Matematika
SURÁNYI LÁSZLÓ: Bolyai János forradalma. http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/BJ/BJ1.htm