

I. Olvasólecke

Azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, teljes indukció

Oktató:

Kozma József

Szegedi Tudományegyetem

Bolyai Intézet

A tárgy oktatója



Kozma József

PhD főiskolai docens

SZTE

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

Szakterülete: differenciálgeometria, Hilbert-geometria

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

A középiskolában megszerzett és az előadáson áttekintett legalapvetőbb fogalmak és összefüggések a szögfüggvényekkel, síkbeli transzformációkkal, másodfokú egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel, nevezetes azonosságokkal kapcsolatosan.

- ☐ Szögfüggvények értelmezése, kapcsolata.
- ☐ Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek.
- ☐ Forgatás és tükrözés a síkban.
- ☐ Nevezetes algebrai azonosságok.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait.

A gyakorlati OL fókusza

- Trigonometrikus alapok, nevezetes szögfüggvények;
- origó körüli forgatás;
- pont tükrözése egyenesre;
- betűs kifejezések szorzattá bontása, egyszerűsítése;
- másodfokú egyenlőtlenségek megoldása;
- törtes egyenlőtlenségek megoldása.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ az egyes trigonometrikus függvények értékéből nevezetes esetekben megállapítsa az argumentumát;
- ✓ ki tudja számítani egy pont origó körüli adott szögű elforgatottját;
- ✓ ki tudja számítani egy pont tükörképét tetszőleges egyenesre forgatás közbeiktatásával;
- ✓ nevezetes azonosságok alkalmazásával szorzattá tudjon alakítani algebrai kifejezéseket,
- ✓ nevezetes azonosságok alkalmazásával egyszerűsíteni tudjon törtes algebrai kifejezéseket,
- ✓ meg tudja oldani másodfokú egyenlőtlenségeket;
- ✓ meghatározza törtes egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

$$(a) \sin x = \frac{1}{2}; \quad (b) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Megoldás a 4. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Adja meg $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$!

Megoldás az 5. oldalon

2.3. Mintafeladat.

A $P(5;3)$ pontot forgassuk el $+60^\circ$ -kal az origó körül!

Megoldás az 5. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Tükrözzük a $P(-3;2)$ pontot az $x - 2y = 4$ egyenletű egyenesre!

Megoldás a 6. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

$$(a) 2x^2 - 13x + 7; \quad (b) 36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2.$$

Megoldás a 7. oldalon

2.6. Mintafeladat.

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^4+a^2+1)}.$$

Megoldás a 8. oldalon

2.7. Mintafeladat.

Oldja meg az alábbi másodfokú egyenlőtlenséget!

$$x^4 + x^2 - 6 > 0.$$

Megoldás a 9. oldalon

2.8. Mintafeladat.

Oldja meg az alábbi törtes egyenlőtlenséget!

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}.$$

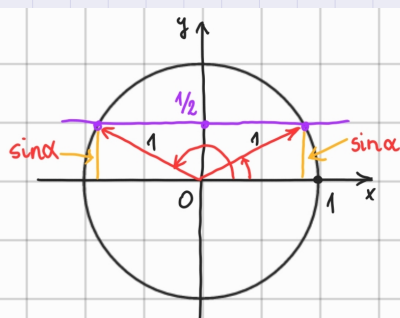
Megoldás a 10. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

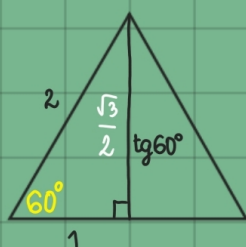
1. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög szinusza az α forgásszögű egységvektor második koordinátája.
2. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög koszinusza az α forgásszögű egységvektor első koordinátája.
3. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög tangense a szinuszának és koszinuszának hányadosa, amennyiben $\cos \alpha \neq 0$. Egy α szög koszinusza pontosan akkor 0, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
4. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög kotangense a koszinuszának és szinuszának hányadosa, amennyiben $\sin \alpha \neq 0$. Egy α szög szinusza pontosan akkor 0, ha $\alpha = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
5. A szinusz- és a koszinuszfüggvény periodikus, periódusa 2π . A tangens- és a kotangensfüggvény periodikus, periódusa π .
6. Egy α irányszög tangense annak a szakasznak az előjeles hosszúsága, amelyet az α irányszögű egyenes és az x -tengely metsz ki az Origó középpontú egységkörhöz az $(1;0)$ pontjában húzott érintőjéből.



(a) E derékszögű Δ egyik befogójának hossza $\frac{1}{2}$, átfogója hossza 1, ez egy "fél" szabályos Δ .
Így $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),
a másik lehetőség:
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



(b)

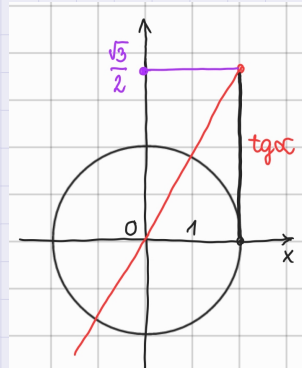


Ennek a derékszögű Δ -nek egyik befogója 1, átfogója 2 hosszúságú. Ez egy "fél" szabályos Δ .

Δ keresett szög:

$$x = 60^\circ + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

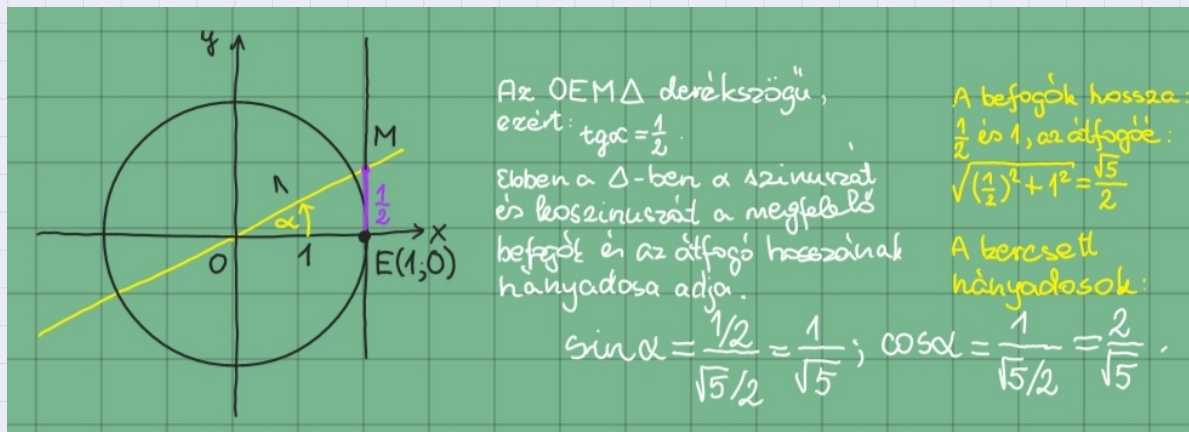
További megoldás nincs, a tangensfüggvény periódusa: π .



2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza a szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának hányadosa, koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hosszának hányadosa.



Vegyük észre, hogy a szög tangensének ismeretében a szög szinuszának és koszinuszának pontos értékét tudtuk meghatározni. Nem volt szükség a szög közelítő értékének számológéppel való meghatározására!

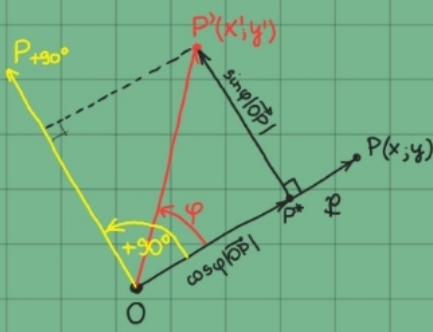
2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Egy nem zéró vektort a hosszúságával elosztva egy egységnyi hosszúságú, ún. *egységvektort* kapunk, melynek az iránya megegyezik az eredeti vektoréval.
2. Egy vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpontjának koordinátáiból kivonjuk a kezdőpontjának megfelelő koordinátáit.
3. Síkban egy vektor $+90^\circ$ -kal elforgatottjának első koordinátája az eredeti vektor második koordinátájának ellentettje, az elforgatott vektor második koordinátája az eredeti vektor első koordinátája.

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy először egy általános φ szögű elforgatást hajtunk végre, majd ezt alkalmazzuk a $\varphi = +60^\circ$ esetre.

Elforgatás φ szöggel



$\vec{OP}$ elforgatottja O körül φ szöggel $\vec{OP}'$.
 $\vec{OP}$ elforgatottja O körül $+90^\circ$ -kal: $\vec{OP}_{+90^\circ}$.
 P^* : a $P' \perp$ vetülete az OP egyenesen.
 Az OP^*P' Δ -ból: $|\vec{OP}^*| = \cos \varphi |\vec{OP}'| = \cos \varphi |\vec{OP}|$
 $|\vec{P}^*P'| = \sin \varphi |\vec{OP}'| = \sin \varphi |\vec{OP}|$
 Így a vektorokra: $\vec{OP}^* = \cos \varphi \cdot \vec{OP}$
 $\vec{P}^*P' = \sin \varphi \cdot \vec{OP}_{+90^\circ}$
 Ezért: $\vec{OP}' = \vec{OP}^* + \vec{P}^*P' = \cos \varphi \cdot \vec{OP} + \sin \varphi \cdot \vec{OP}_{+90^\circ}$

Ha $\varphi = 60^\circ$, és $P(5;3)$:

$\varphi = 60^\circ$

$$\vec{OP}' = \vec{OP}^* + \vec{P}^*P' = \cos \varphi \cdot \vec{OP} + \sin \varphi \cdot \vec{OP}_{+90^\circ}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $(x'; y')$ $\cos 60^\circ$ $(x; y)$ $\sin 60^\circ$ $(-y; x)$

$$(x'; y') = \frac{1}{2}(x; y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-y; x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $(5; 3)$ $(-3; 5)$

$$(x'; y') = \frac{1}{2}(5; 3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-3; 5) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-0,1; 5,9)$$

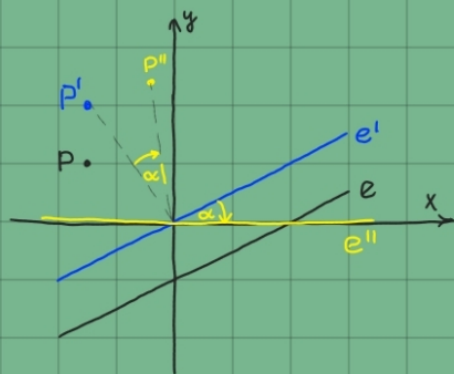
vektor $+90^\circ$ -os
elforgatottjának
koordinátái

2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Pontnak a koordináta-tengelyekre vonatkozó tükröképeinek koordinátái.
2. Pont Origó körüli adott szögű elforgatottjának koordinátái.
3. Egy pontnak egy egyenesre tükrözését úgy is végrehajthatjuk, hogy a pontot és az egyenest is elmozgatjuk a síkban, a képeken végrehajtsuk a tükrözést, majd visszamozgatjuk az imént kapott pontot.

Mivel Origó körül tudunk forgatni, és az x -tengelyre könnyen elvégezhetjük a tükrözést, úgy mozgatjuk el a pontot és az egyenest egy alkalmas eltolással és az Origó körüli megfelelő szögű forgatással, hogy az egyenesünk képe az x -tengely legyen.



TRÜKK: Tükrözni az x-tengelyre egyszerű.
 (a) Eltoljuk a pontot és az egyenest úgy, hogy az átmegyjen O -n.
 (b) Elforgatjuk a képeket úgy, hogy az egyenes képe az x-tengely.
 (c) Erre könnyen tükrözünk.
 (d) Visszaforogatunk, és visszatolunk.

Feladat: P tükrözése $e: y = \frac{1}{2}x - 2$ egyenesre.

(1) A $v(0, 2)$ vektorú eltolás P -t a $P'(-3, 4)$ pontba, az e -t az $e': y = \frac{1}{2}x$ egyenesbe viszi.

(2) Egy α szögű O körüli forgatás e' -t az x-tengelybe, P' -t a P'' -be viszi.

$\alpha = ?$ Korábbi feladatból tudjuk, NEM α , hanem $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ ismerete kell.

Most: $\tan(-\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ [ld. előzők].

$P''(x'', y'') = \frac{2}{\sqrt{5}}(-3, 4) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-4, -3) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{11}{\sqrt{5}}\right)$

(3) P'' -t tükrözzük $e'' = x$ -re, képe: $P'''(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{\sqrt{5}})$

(4) P''' -t visszaforgatjuk $(-\alpha)$ -val.

Most: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$P^{IV}(x^{IV}, y^{IV}) = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{11}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{24}{5}\right)$

(5) P^{IV} -et visszatoljuk $-v(0, -2)$ -vel.

$P^V(x^V, y^V) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{34}{5}\right)$.

2/2

2.5. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

(a) $2x^2 - 13x + 7$; (b) $36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2$.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Nevezetes azonosságok közül: két tag összegének, illetve különbségének négyzete, négyzetek különbsége, elsőfokú kifejezések szorzata.
2. Teljes négyzetté kiegészítés.
3. Másodfokú egyenlet gyöktényező alakja, gyökök és együtthatók közötti összefüggés.
4. Másodfokú egyenlet diszkriminánsa.

$$(a) \quad 2x^2 - 13x + 7$$

$$2x^2 - 13x + 7 = 0$$

1. megoldás (megoldóképlet)

A fenti másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját keressük:

$$2(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Ha a **diszkrimináns** $D \geq 0$, akkor $\exists 2$ gyök.

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm \sqrt{113}}{4}$$

$$2\left(x - \frac{13 + \sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{13 - \sqrt{113}}{4}\right)$$

Azért lehetett szorzattá bontani, mert $D \geq 0$.

A bal oldalon egy másodfokú kifejezés áll.

Ezt elsőfokúak szorzatára akarjuk bontani,

HA LEHETŐSÉG.

2. megoldás (teljes négyzetté kiegészítés)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 13x + 7 &= 2\left(x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{7}{2}\right) \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} + \frac{7}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{113}{16}\right] \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{113}}{4}\right)^2\right] \quad \text{nevezetes azonosság} \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4} - \frac{\sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{13}{4} + \frac{\sqrt{113}}{4}\right)\right] \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &= 2\left(x - \frac{13 + \sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{13 - \sqrt{113}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$(b) \quad 36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2$$

$$= 36(a^3)^2 + 25(b^2)^2 - 60a^3b^2$$

$$= 36A^2 + 25B^2 - 60AB$$

$$= (6A)^2 - 2(6A)(5B) + (5B)^2$$

$$= ((6A) - (5B))^2$$

$$= (6a^3 - 5b^2)^2$$

* a és b legalacsonyabb előforduló hatványa:

a^3 és b^2 . $\rightarrow$ Ezekből indulhatunk ki,

a kifejezést ezekből „ÉPÍTJÜK FEL” újra,

* $A = a^3$, $B = b^2$ bevezetésével áttekinthetőbb.

* Átrendezés után további CSOPORTOSÍTÁSRIGIT:

* Nevezetes azonosság: két tag különbségének négyzete

2.6. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{(a+1)(a^8 + a^4 + 1)}{(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Nevezetes azonosságok közül: két tag összegének, illetve különbségének négyzete, négyzetek különbsége, elsőfokú kifejezések szorzata; két tag köbe különbségének, illetve összegének szorzattá bontása.

Általában nem vizsgáljuk külön, hogy a törtes kifejezés az a milyen értékére van értelmezve. A feladatot úgy értjük, hogy az egyszerűsítést a kifejezések értelmezési tartományán kell elvégezni.

(1) Hasonló szerkezetű tényezőink vannak:

$$\begin{array}{l} a^4 + a^2 + 1 \\ a^4 - a^2 + 1 \\ a^8 + a^4 + 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{^2} + \boxed{^1} + \boxed{^0} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 \quad a^2 \quad a^2 \\ a^4 \quad a^4 \quad a^4 \end{array} ; \text{ ill } \begin{array}{c} \boxed{^2} - \boxed{^1} + \boxed{^0} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 \quad a^2 \quad a^2 \end{array}$$

(2) A köbök különbségére, ill összegére: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\begin{aligned} (a^4 + a^2 + 1)(a^2 - 1) &= (a^2)^3 - 1 = a^6 - 1 \\ (a^4 - a^2 + 1)(a^2 + 1) &= (a^2)^3 + 1 = a^6 + 1 \\ (a^8 + a^4 + 1)(a^4 - 1) &= (a^4)^3 - 1 = a^{12} - 1 \end{aligned}$$

$y=1$ esetén: $x^3 + 1 = x^2 - x + 1$
 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
 $y=1$ esetén: $x^3 - 1 = x^2 + x + 1$

(3) BEHELYETTESÍTÉS

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)(a^8 + a^4 + 1)}{(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)} &= \\ a^8 + a^4 + 1 &= \frac{a^{12} - 1}{a^4 - 1} \\ a^4 + a^2 + 1 &= \frac{a^6 - 1}{a^2 - 1} \\ a^4 - a^2 + 1 &= \frac{a^6 + 1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a+1) \frac{a^{12} - 1}{a^4 - 1} \cdot \frac{a^2 - 1}{a^6 - 1} \cdot \frac{a^2 + 1}{a^6 + 1} \\ &= (a+1) \frac{a^{12} - 1}{(a^6 - 1)(a^6 + 1)} \cdot \frac{(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^4 - 1} \\ &= (a+1) \frac{a^{12} - 1}{a^{12} - 1} \cdot \frac{a^4 - 1}{a^4 - 1} = (a+1) \end{aligned}$$

„ $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ ”

Könnyen ellenőrizhető, hogy a nevezőben lévő mindkét tényező csak pozitív értéket vesz fel (teljes négyzetté kiegészítéssel: $a^4 \pm a^2 + 1 = (a^2 \pm \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$), ezért a kifejezés minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $(a+1)$ -re egyszerűsödik.

2.7. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Oldja meg az alábbi törtes egyenlőtlenséget!

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Másodfokú egyenlet gyökeinek és együtthatóinak összefüggése (Vieta-formulák).
2. Egy nem nulla szorzat előjelét az dönti el, hogy a tényezői között a negatív előjelűek száma páros vagy páratlan: az első esetben a szorzat pozitív, a másodikban negatív.
3. Valós intervallumok ábrázolása számegyenesen.

(1) A negyedfokú kifejezést olyan tényezőkre szoroztuk, amelyek előjelét meg tudjuk határozni

$$x^4 + x^2 - 6 \quad \text{Ez } (x^2) \text{-ben másodfokú.}$$

$$= ((x^2) - x_1)((x^2) - x_2) \text{ alakban}$$

$$x_1 = ?; x_2 = ?$$

(2) Viète-formulák: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Most: } x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1; x_1 x_2 = \frac{-6}{1} = -6$$

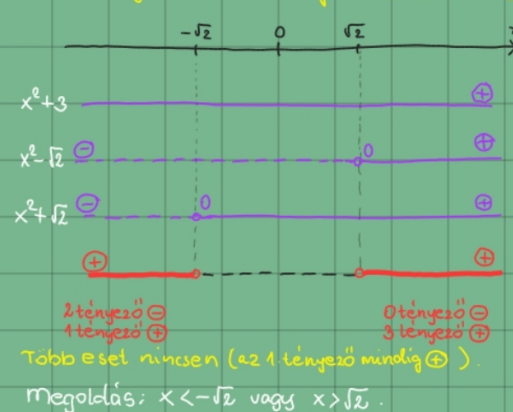
Ezt megoldva (vagy némi gyakorlattal "kitalálva"): $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

$$\text{Vagyis: } x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x^2 - 2)$$

(3) A második tényezőt tovább alakítva:

$$x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

(4) 3-tényezős szorzat előjele (grafikus mego.):



2.8. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Oldja meg az alábbi törtes egyenlőtlenséget!

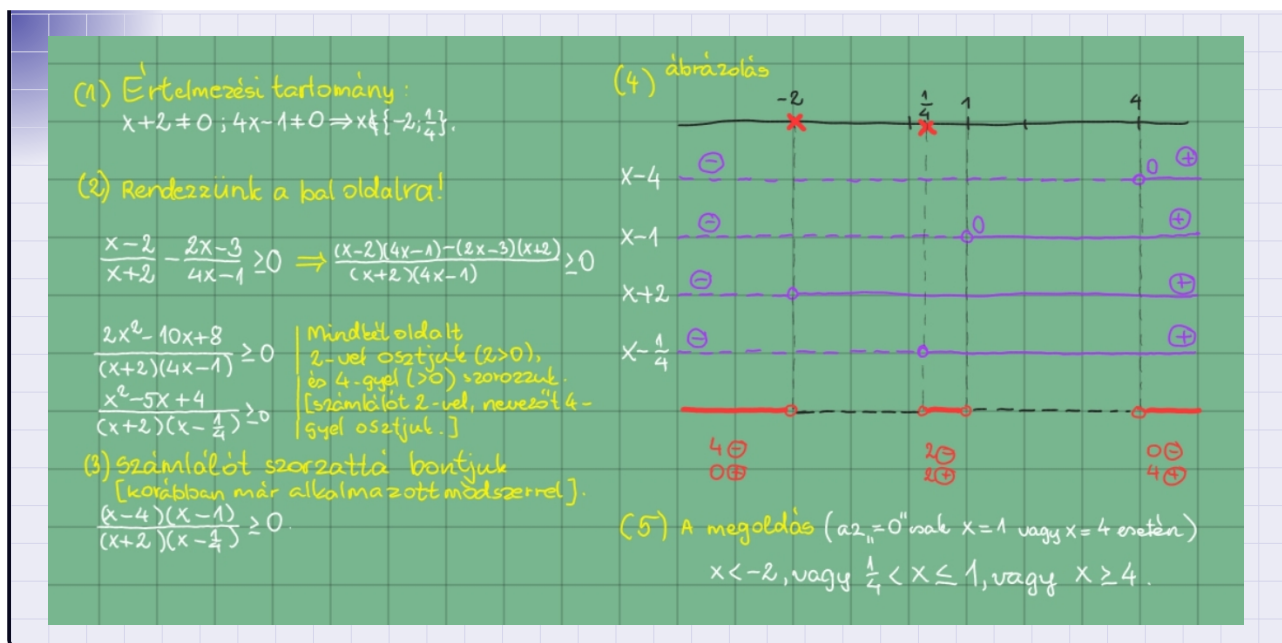
$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Törtek összeadása (kivonása) közös nevezőre hozással.
2. Egy nem nulla szorzat előjelét az dönti el, hogy a tényezői között a negatív előjelűek száma páros vagy páratlan: az első esetben a szorzat pozitív, a másodikban negatív.
3. Valós intervallumok ábrázolása számegyenesen.

2.2. Megoldási terv

1. Meghatározzuk, hogy hol van értelmezve a teljes kifejezés.
2. Törtet 0-val tudunk könnyen összehasonlítani, ezért egy oldalra rendezünk.
3. A tört számlálóját és nevezőjét is tényezők szorzatává alakítjuk.
4. Számegyenesen ábrázoljuk az egyes tényezők pozitivitása, illetve negativitási intervallumait.
5. A negatív tényezők számának paritása alapján határozzuk meg a tört pozitivitási intervallumait.



3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!

- ☐ Minden trigonometrikus függvénynek periódusa a π .
- ☐ Tetszőleges pozitív szám lehet valamilyen trigonometrikus függvény periódusa.
- ☐ A kotangensfüggvény a tangensfüggvény inverze.
- ☐ Van olyan szög, amelynek koszinusza $-1,5$.

? Általában igaz-e a következő állítás: Nincsen minden másodfokú egyenletnek valós gyöke.

? Igaz-e, hogy ha egy másodfokú egyenlet minden együtthatója negatív, akkor gyökei csak negatívak lehetnek?

? Hogyan változik meg az egyenlőtlenség igazsághalmaza, ha mindkét oldalát egy negatív számmal osztjuk?

? Megváltozik-e az egyenlőtlenség iránya, ha mindkét oldalt egy valós változót tartalmazó kifejezéssel szorozzuk meg?

? Milyen annak a kifejezésnek az előjele, amelynek a számlálójában és a nevezőjében levő pozitív értékű tényezők száma p , a negatív értékű tényezők száma n ?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

(a) $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{2}|\sin 3x| = 2$; (c) $\cos x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0; \quad x + \frac{1}{x} = 2 \cos x; \quad \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

3. Legyen $A(-1; 1)$, $B(4; 3)$, $C(-3; 5)$. Forgassa el az ABC háromszöget az origó körül

$$+90^\circ\text{-kal}; \quad 180^\circ\text{-kal}; \quad -90^\circ\text{-kal}.$$

4. A $P(5; 3)$ pontot forgassa el $+45^\circ$ -kal az origó körül!

5. Tükrözze a $P(-1; 1)$ pontot az $2x - y + 4 = 0$ egyenletű egyenesre!

6. Tükrözze a $P(4; -3; 2)$ pontot az $2x - 3y + 1 = 0$ egyenletű síkra!

7. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

$$(a) \quad 2x^2 - 13x + 20; \quad (b) \quad 25y^4 - 10y^2x + x^2; \quad (c) \quad 1 + 8b^3.$$

8. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$\frac{4x^3y + 4xy^3}{x^4 - y^4}; \quad \frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1 - a(1 - a)}{1 - a} \cdot \frac{a}{1 + a^3} - \frac{2a - 2a^2 - 2}{(1 - a^2)(a - 1)}.$$

9. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{1}{(x - y)(x - z)} + \frac{1}{(z - x)(z - y)} + \frac{1}{(y - x)(y - z)}.$$

10. Oldja meg az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket!

$$(a) \quad x^2 - 9 < 0; \quad (b) \quad (x - 2)^2 \leq 7 - 2x.$$

11. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\frac{2}{2x + 1} > x^2 - \frac{5}{2}x + 2.$$

12. Adja meg a valós m paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenségnek ne legyen megoldása:

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 < 0.$$

13. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$(a) \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} < 1; \quad (b) \quad \frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 1} < 1; \quad (c) \quad \frac{x - 1}{x} - \frac{x + 1}{x - 1} < 2.$$

5. Ajánlott irodalom

Hivatkozások

[1] Reimann István: Matematika, Typotex

[2] Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar