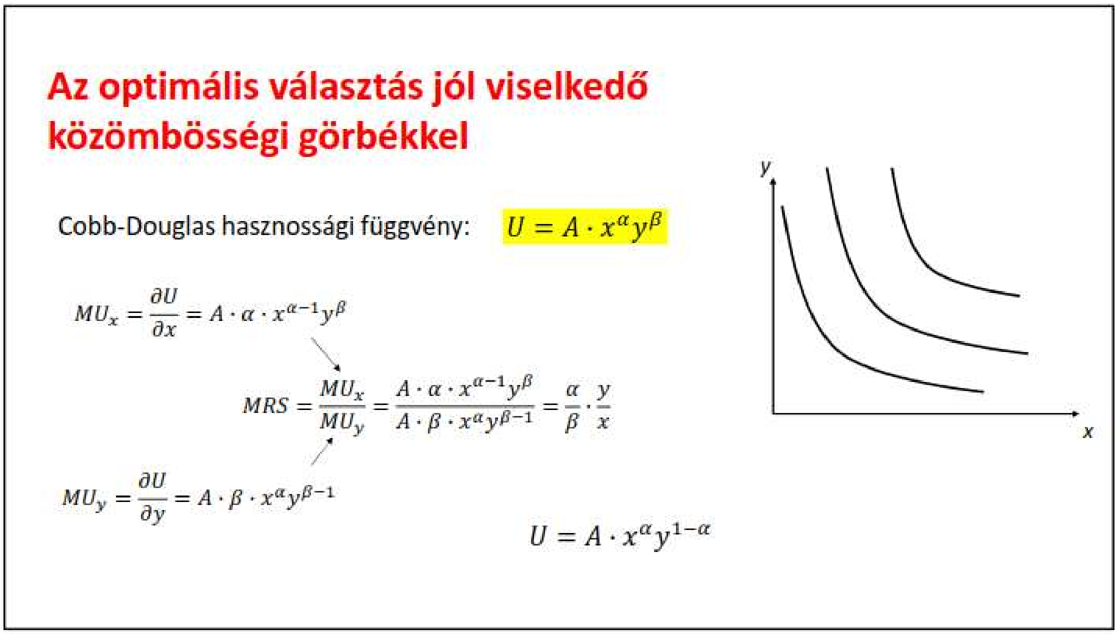
3. fejezet 3. lecke

Cobb-Douglas optimalizáció

1. dia



Ebben a leckében egy kicsit részletesebben belemegyünk az optimalizáció algebrai formájába egy nagyon gyakran használt jól viselkedő preferenciarendezéssel: az úgynevezett Cobb-Douglas hasznossági függvénnyel.

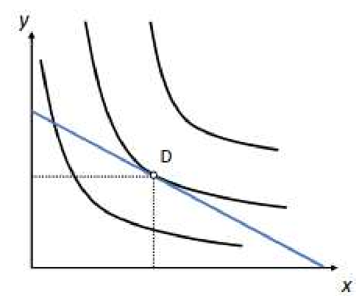
Egy Cobb-Douglas hasznossági függvény így néz ki: valamilyen szorzótényező szorozva az egyik termék mennyisége valamilyen hatványkitevővel, szorozva a másik termék mennyisége valamilyen hatványkitevővel. A hatványkitevők mindegyike pozitív. Ha egy ilyen hasznossági függvényt ábrázolunk a közömbösségi görbék segítségével, akkor egy ilyen jól viselkedő közömbösségi görbe-sereget kapunk. A Cobb-Douglas hasznossági függvény egyik előnye tehát, hogy a jól viselkedő közömbösségi görbék minden tulajdonságát reprodukálja. Mindjárt meglátjuk azonban, hogy további kellemes matematikai tulajdonságokkal is bír. Az optimalizációhoz szükséges a helyettesítési határráta, írjuk hát föl ezt! Az egyik termék határhaszon-függvénye, és a másik terméké. Elég bonyolultaknak néznek ki, nemde? És ezeket kell elosztanunk egymással, hogy helyettesítési határrátát kapjunk! Először kapunk egy még bonyolultabb törtet, de kiderül, hogy néhány egyszerűsítés után a helyettesítési határráta meglehetősen primitív lesz. Ugye emlékszik, hogy korábbi feladatokban kaptunk már ilyesmi eredményeket? Az egyik dolog, ami feltűnhet, hogy az *A* együtthatónak egyáltalán semmilyen jelentősége nincsen, hiszen a deriválásnál ugyanúgy hat mindkét termék határhasznára. Az is feltűnhet, hogy a végső képletben az első termék (*x*) hatványkitevője van itt a számlálóban, de ennek a terméknek a mennyisége utána a nevezőbe kerül, és fordítva a második (*y*) termékkel. Ha megnézzük ezt a hányadost, a két hatványkitevő hányadosát, akkor ebből néhány dologra következtethetünk. Az első, hogy amennyiben a hatványkitevők megegyeznek, akkor ez a hányados egy. Legyenek a hatványkitevők akár egy és egy, akár kettő és kettő, akár fél és fél. Ebből következik a második folyomány: hogy maguknak a kitevőknek a nagysága kevésbé érdekes, mint az egymáshoz való viszonyuk, arányuk: az egyik kitevő hányszorosa a másiknak. Ezért is szokták gyakran olyan formában használni a Cobb-Douglas hasznossági függvényeket, hogy a hatványkitevők 1-re egészítsék ki egymást, valahogy így. Végül is a helyettesítési határráta szempontjából tök mindegy, hogy a kitevők 1 és 3, vagy 0,25 és 0,75: az arányuk mindenképpen 1/3. Vagyis ha van egy fogyasztó, akinek a hasznossági függvényében a hatványkitevők 1 és 3, meg egy másik, akiében 0,25 és 0,75, akkor ennek a két fogyasztónak egyforma a preferenciarendezése, az ízlésvilága. Akkor a boltból ugyanazzal a jószágkosárral fognak kijönni? Nem biztos, ez múlik a költségvetési egyenesükön is.

2. dia

(Optimumfeltétel) $\frac{p_x}{p_y} = \frac{MU_x}{MU_y}$

(Ktg vetési egyenes) $p_x x + p_y y = m$

$p_x x + p_y y = m \longrightarrow y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x$



(Optimumfeltétel) $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot p_x x = p_y y$$

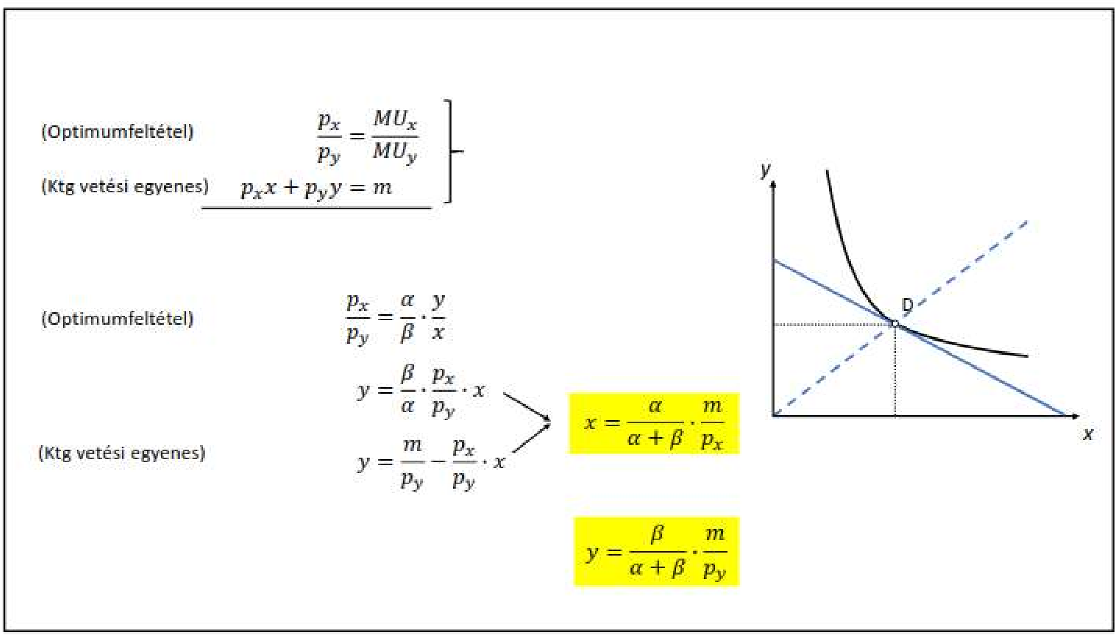
(Ktg vetési egyenes) $p_x x + \frac{\beta}{\alpha} \cdot p_x x = m$

$$p_x x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot m \qquad p_y y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot m$$

$$x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{m}{p_x} \qquad y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{m}{p_y}$$

A költségvetési egyenes képlete ugyebár ez. Az ábrázolást megkönnyítendő felírhatjuk így, és ez ábrázolva így fog kinézni. Tengelymetszet, meredekség. Ha erre „ráeresztjük” a hasznossági függvényt, akkor grafikusan ez a pont lesz az optimális jószágkosár, a fogyasztó optimális választása. Ennek a jószágkosárnak az *x* és *y* tartalmát egy kétismeretlenes egyenletrendszerrel javaslom meghatározni. Először is az optimumfeltétel, hogy a költségvetési egyenes és a közömbösségi görbe meredeksége legyen egyenlő egymással. A bal oldalon az árarány, a költségvetési egyenes meredeksége, a jobb oldalon a helyettesítési határráta, a közömbösségi görbe meredeksége. A másik egyenletünk pedig maga a költségvetési egyenes. Boncolgassuk először egy kicsit az optimumfeltételt! Az előző dián meghatároztuk a helyettesítési határrátát a Cobb-Douglas féle hasznossági függvényre, méghozzá általánosan, használjuk fel itt! Most minden ár az egyik oldalon, minden mennyiség a másik oldalon van, rendezzük át úgy, hogy minden, ami *x*-szel kapcsolatos, kerüljön az egyik oldalra, minden, ami *y*-nal kapcsolatos pedig a másikra! A jobb oldalon szereplő $p_y y$ nem más, mint az optimális esetben az *y* termékre költött összeg. Az egyenletünk azt mondja, hogy ez $\frac{\beta}{\alpha}$-szor annyi, mint az *x* termékre költött összeg. Ugyanakkor az *x*-re és az *y*-ra költött összeg együttvéve meg kell, hogy egyezzen a jövedelemmel: ezt mondja a második egyenletünk, a költségvetési egyenes. Írjuk is bele! Eltűnt az *y* változónk, most már csak *x* van, meg egy csomó paraméter, amik azonban adottságok. Egy kis rendezés után először is az adódik, hogy az optimális esetben az *x*-re költött összeg, tehát $p_x x$ az $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}m$, vagyis a jövedelemnek a hatványkitevők által meghatározható része. Ha a hatványkitevők 1-re egészítik ki egymást, akkor még egyszerűbb a dolog, a nevező itt 1, tehát tulajdonképpen a hasznossági függvényben az *x* kitevőjéről azonnal leolvasható, hogy az optimális választás esetén ekkora hányadát fogja a jövedelmének a fogyasztó az *x* termékre költeni. Ezt visszahelyettesítve a költségvetési egyenesbe és egyszerűsítve természetesen hasonló eredményt kapunk az *y* termékre is: $p_y y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}m$. Az árakkal elosztva adódik, hogy az optimális választásnál az *x*-ből vásárolt mennyiség $x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_x}$, és az *y* mennyisége pedig $y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_y}$. Ez tehát az optimális jószágkosár, a D jószágkombináció összetétele.

3. dia



Csak hogy ne legyen olyan hamar vége a leckének, hadd mutassam be, hogy több módszer is elvezethet a helyes eredményre, ha tudjuk, hogy mit akarunk. Az optimumfeltételünkbe beírjuk ismét a Cobb-Douglas hasznossági függvényre érvényes helyettesítési határrátát. Az előbb úgy rendeztük át ezt, hogy az *x*-re és *y*-ra költött összegek szerepeltek a bal és a jobb oldalon, rendezzük át ezt most simán *y*-ra! Egy függvényt kaptunk, ami az összes olyan (*x*; *y*) jószágkosarat mutatja, ahol az optimumfeltétel teljesül. Úgy tűnik, hogy ezek egy origóból induló és $\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_x}{p_y}$ pozitív meredekségű egyenesen helyezkednek el. Ábrázolva ez az az egyenes.

Honnan tudjuk, hogy a fogyasztónk ezen éppen melyik pontot választja, hiszen mindegyikre teljesül az optimumfeltétel? Hát természetesen azt, amelyik éppen rajta van a költségvetési egyenesen is, ami így néz ki, és ez a képlete. Már csak egyenlővé kell tennünk a két jobb oldalt, és természetesen az optimális választásra ugyanaz adódik, mint az imént. Ha valamelyik módszer nem jut eszébe, nem baj! Az a lényeg, hogy emlékezzen a két alapegyenletre: Optimumfeltétel és költségvetési egyenes.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
KÖZGAZDÁSZ KÉPZÉS
TÁVOKTATÁSI TAGOZAT
LECKESOROZAT
COPYRIGHT © SZTE GTK 2017/2018

A LECKE TARTALMA, ILLETVE ALKOTÓ ELEMEI ELŐZETES, ÍRÁSBELI ENGEDÉLY MELLETT HASZNÁLHATÓK FEL.

JELEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT
AZ EURÓPAI UNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKT AZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE