# Kombinatorika és valószínűség jegyzet

(Tanító szak, matematika műveltségi terület)

## Skatulyaelv

Legyenek $n$ és $k$ olyan pozitív egész számok, hogy $k < n$. Ha $n$ db dolgot kell elhelyeznünk $k$ db skatulyában, akkor van (legalább egy) olyan skatulya, amiben legalább két dolog van.

Legyenek $n$, $k$ és $p$ olyan pozitív egész számok, hogy $k \cdot p < n$. Ha $n$ db dolgot kell elhelyeznünk $k$ db skatulyában, akkor van (legalább egy) olyan skatulya, amiben legalább $p + 1$ db dolog van.

**Feladatok:**

1. Egy iskolába 618 gyerek iratkozott be szeptemberben. Mutasd meg, hogy van
   *a*) legalább két tanuló, akik az év ugyanazon a napján születtek;
   *b*) legalább 12 tanuló, akik az év ugyanazon hetében látták meg a napvilágot.
   *c*) Minimálisan hány gyereknek kellene az iskolába járni, hogy mindkét állítás teljesüljön?
2. Egy iskolában 52 tanár van, ill. 745 diák, akik 20 osztályba járnak. A következő állítások közül melyik igaz rájuk?
   *a*) Biztosan van olyan osztály, amelybe legalább 38 tanuló jár.
   *b*) Biztosan van olyan diák, aki az év ugyanazon a napján született, mint valamelyik tanár.
   *c*) Az év minden napján valamelyik diáknak születésnapja van.
   *d*) Biztosan van olyan hónapja az évnek, amelyben legalább 5 tanárnak van születésnapja.
3. Mutasd meg, hogy öt 1000-nél nagyobb prímszám között mindig van kettő, melyek különbsége tízzel osztható!
4. Legkevesebb hány egész számot kell felírni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük kettő, melyek különbsége 8-cal osztható?
5. Egy zsákban 10 fehér, 20 fekete, 30 barna, egyforma méretű zokni van. Hány darabot kell kivenni véletlenszerűen ahhoz, hogy biztosan legyen közte
   *a*) 1 pár fehér *b*) 2 pár fehér és 3 pár fekete *c*) 2 különböző színű pár?
6. Télapó zsákjában 7 különböző fajta ajándék van, mindegyikből ugyanannyi. Hány ajándékkal kelt útra, ha legkevesebb 36 darabot kell kivennie a zsákból ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 6 egyforma játék?
7. A krampusz zsákjában összesen 30 virgács van. A virgácsok többfélék, de mindegyik fajtából ugyanannyi van. Hányféle virgácsot hozott magával a krampusz, ha ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 3 egyforma, legalább 11-et elő kell vennie a zsákból?
8. Egy lemezre írjunk „1”-et, két lemezre „2”-t, három lemezre „3”-at, és így tovább, harmincra „30”-at. Tegyük a lemezeket egy dobozba, ebből húzunk véletlenszerűen lemezeket anélkül, hogy visszatennénk. Legkevesebb hány lemezt kell kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 10 lemez, melyre ugyanaz a szám van írva?
9. Adott egy 2 egység oldalú négyzet. El lehet-e helyezni a négyzet belsejében vagy határán 9 pontot úgy, hogy bármely két pont távolsága legalább 1 legyen? Mi a válasz 10 pont esetén?

10. Egy egységoldalú négyzetben adott 51 pont. Igazold, hogy van köztük 3 olyan, melyek egy $\frac{1}{7}$ egység sugarú körben vannak!
11. Egy $5\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3$ m-es teremben 100 légy röpköd. Igaz-e, hogy mindig van köztük kettő, melyek egymástól való távolsága 2 m-nél kisebb?
12. Ha megállítunk az utcán 10 embert, és megkérdezzük, hogy idén a hét melyik napjára esik a születésnapjuk, akkor az alábbiak közül mire érdemes fogadnunk? (Melyik teljesül biztosan?)
    *a*) Lesz köztük kettő, akik ugyanazt a napot mondják.
    *b*) Lesz köztük három, akik ugyanazt a napot mondják.
    *c*) Lesz legalább három olyan nap, amit legalább egy fő mond.
    *d*) Lesz legalább két olyan nap, amit legfeljebb egy fő mond.

## Faktoriális

Tetszőleges pozitív egész szám faktoriálisának nevezzük a számnál nem nagyobb pozitív egész számok szorzatát. 0 faktoriálisnak az 1-et nevezzük. Az $n$ természetes szám faktoriálisának jele $n!$. Tehát a definíció szerint $0! = 1$, $1! = 1$, $n > 1$ esetén pedig $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

## Permutációk

Véges sok különböző dolgot állítsunk sorrendbe. Bármely ilyen sorrendet a dolgok egy ismétlés nélküli permutációjának nevezünk. Halmazos megfogalmazással: $n$ elemű halmaz elemeinek sorrendjeit az $n$ elem ismétlés nélküli permutációinak nevezzük. Legyen $n$ tetszőleges természetes szám. Ha $n$ db dolog van, akkor az ismétlés nélküli permutációk száma $n!$ .

Véges sok különböző dolgot állítsunk sorrendbe úgy, hogy a sorrendben „utolsó" dolog után újból az első következik, stb. Bármely ilyen sorrendet a dolgok egy ciklikus permutációjának nevezünk. Legyen $n$ pozitív egész szám. Ha $n$ db dolog van, akkor a ciklikus permutációk száma $(n-1)!$ .

Véges sok dolgot, amik közt vannak egyformák is, állítsunk sorrendbe. Bármely ilyen sorrendet a dolgok egy ismétléses permutációjának nevezünk. Legyenek $n$ és $k$ olyan pozitív egész számok, hogy $k < n$. Ha $n$ db dolog van úgy, hogy közülük $n_1, n_2, \ldots, n_k$ db-ok egyformák ($k$ db „típus" van) és $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, akkor az ismétléses permutációk száma $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

**Feladatok:**

1. Hányféleképpen választható ki a sakktáblán 8 bástya helye úgy, hogy egyik se üssön egyet sem a többiek közül? (Egy bástya ütheti a sorában vagy az oszlopában lévő bábukat.)
2. 5 házaspár érkezik vendégségbe.
    *a*) Hányféle sorrendben léphetnek be egyesével az ajtón?
    *b*) Hányféle sorrendben léphetnek be egyesével az ajtón, ha mindegyik férj közvetlenül a felesége után lép be?
    *c*) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré?
    *d*) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha mindegyik férj a felesége mellett ül?

3. Anna, Betti, Cili, Dóra és Erika együtt mennek moziba. Mozijegyük egymás mellé szól. Útközben Cili és Dóra összevesznek. Hányféle sorrendben ülhetnek a helyükre a lányok, ha Cili és Dóra nem ülnek egymás mellé?
4. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a következő szavak karaktereit?
   *a*) SZOMBATHELY *b*) SZEGED *c*) MAGYARORSZÁG.
5. Hányféleképpen lehet a polcon egymás mellé tenni 3 zöld és 4 piros, amúgy egyforma bögrét?
6. Hány induló volt azon a futóversenyen, melyen az összes lehetséges – holtverseny nélküli – végeredmények száma 39916800?

## Variációk

Véges sok különböző dolog közül válasszunk ki véges sokat úgy, hogy a kiválasztottak mind különbözők, és számít a kiválasztás sorrendje is. Bármely ilyen kiválasztást a dolgok egy ismétlés nélküli variációjának nevezünk. Halmazos megfogalmazással: $n$-elemű halmaz elemeiből képzett, különböző tagokból álló, $k$-tagú sorozatokat az $n$ elem $k$-tagú ismétlés nélküli variációinak nevezzük. Legyenek $n$ és $k$ olyan természetes számok, hogy $k \leq n$. Ha $n$ db dolog van, és közülük $k$ db-ot választunk ki, akkor az ismétlés nélküli variációk száma $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Véges sok különböző dolog közül válasszunk ki véges sokat úgy, hogy a kiválasztottak közt lehetnek egyformák is – vagyis többször is kiválaszthatjuk ugyanazt a dolgot –, és számít a kiválasztás sorrendje is. Bármely ilyen kiválasztást a dolgok egy ismétléses variációjának nevezünk. Halmazos megfogalmazással: $n$-elemű halmaz elemeiből képzett, $k$-tagú sorozatokat az $n$ elem $k$-tagú ismétléses variációinak nevezzük. Legyenek $n$ és $k$ tetszőleges természetes számok. Ha $n$ db dolog közül $k$ db-ot választunk ki, akkor a dolgok ismétléses variációinak száma $n^k$.

**Feladatok:**

1. Hányféle, a magyar zászlóhoz hasonló háromszínű zászlót lehet készíteni öt különböző színből, ha minden szín legfeljebb egyszer fordulhat elő?
2. Hány háromjegyű, páratlan szám készíthető a $0, 1, 3, 5, 7$
   *a*) számjegyekből; *b*) számkártyákból?
3. Csak a 3-as és a 8-as számjegyekkel hány olyan nyolcjegyű szám írható fel, melyben mindkét számjegy előfordul?
4. Egy lóversenyen a 18 indulóból csak 6 ló ért célba. Ha ezt tudni lehetett volna a rajt előtt, akkor hány különböző befutóra fogadhattak volna a bukmékerek?
5. Hány olyan legfeljebb 6-jegyű természetes szám van, melyben előfordul 1-es számjegy?
6. Egy dobókockával négyszer dobunk egymás után, és a kapott eredményeket leírjuk egymás után. Így egy négyjegyű számot kapunk. Hányféle négyjegyű szám jöhet ki? Határozd meg az összes így nyerhető négyjegyű szám összegét!
7. Hányas számrendszerben van pontosan 2097152 különböző, legfeljebb 7-jegyű szám?

## Kombinációk

Véges sok különböző dolog közül válasszunk ki véges sokat úgy, hogy a kiválasztottak mind különbözők, és nem számít a kiválasztás sorrendje. Bármely ilyen kiválasztást a dolgok egy ismétlés nélküli kombinációjának nevezünk. Halmazos megfogalmazással: $n$-elemű halmaz $k$-elemű részhalmazait az $n$ elem $k$-tagú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük.

Legyenek $n$ és $k$ olyan természetes számok, hogy $k \leq n$. Ha $n$ db dolog van, és közülük $k$ db-ot választunk ki, akkor a dolgok ismétlés nélküli kombinációinak száma $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Ezeket a számokat binomiális együtthatóknak nevezzük, és röviden $\binom{n}{k}$-val (olv.: „$n$ alatta $k$”, vagy „$n$ alatt $k$”) jelöljük.

Véges sok különböző dolog közül válasszunk ki véges sokat úgy, hogy a kiválasztottak közt lehetnek egyformák is – vagyis többször is kiválaszthatjuk ugyanazt a dolgot –, és nem számít a kiválasztás sorrendje. Bármely ilyen kiválasztást a dolgok egy ismétléses kombinációjának nevezünk. Halmazos megfogalmazással: $n$-elemű halmaz $k$-elemű részrendszereit az $n$ elem $k$-tagú ismétléses kombinációinak nevezzük. Legyen $n$ tetszőleges pozitív, $k$ pedig tetszőleges természetes szám. Ha $n$ db dolog van, és közülük $k$ db-ot választunk ki, akkor a dolgok ismétléses kombinációinak száma $\binom{n+k-1}{k}$.

**Feladatok:**

1. A 32 lapos magyar kártyából kiveszünk egyszerre 8 lapot.
   *a*) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
   *b*) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a piros hetes a kihúzott lapok között legyen?
   *c*) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között legyen piros?
2. Legfeljebb hány metszéspontja lehet 12 különböző egyenesnek?
3. Zsuzsi Párizsban 18 képeslapot vásárolt, melyeket 8 fajta képeslap közül választott ki. Hányféleképpen tehette ezt meg?
4. Nevezzünk egy számot szerencsésnek, ha mindegyik számjegye
   *a*) nagyobb  *b*) nem kisebb
   az előtte állónál! Hány szerencsés szám van 3000 és 4000 között?

## A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága

Bármely $n$, $k$ természetes számok és $a$, $b$ valós számok esetén,

- ha $k \leq n$, akkor $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- ha $k \leq n$, akkor $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$,
- $(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$ (binomiális tétel).

A binomiális együtthatók egy „végtelen nagy” háromszög alakba rendezhetők úgy, hogy az $n$-edik sor $k$-adik eleme $\binom{n-1}{k-1}$ legyen. Ezt a konstrukciót Pascal-háromszögnek nevezünk:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots \end{array}$$

**Feladatok:**

1. Hányféleképpen lehet az ábráról leolvasni a TANÍTÓNŐ szót, ha csak jobbra és lefelé léphetsz?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | A | N | Í | T | Ó |
| A | N | Í | T | Ó | N |
| N | Í | T | Ó | N | Ő |

2. Hány részhalmaza van egy röplabdacsapat pályán lévő játékosainak 6 fős halmazának? Hány olyan részhalmaz van ezek között, amelyben Antal, a 6 játékos egyike, benne van?
3. Van-e olyan természetes szám, ami pontosan
   *a*) 0-szor *b*) 1-szer *c*) 2-szer *d*) 3-szor *e*) 4-szer
   szerepel a Pascal-háromszögben?
4. Hány főt kell 13 emberből kiválasztani úgy, hogy a kiválasztást 715-féleképpen tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)
5. Írd fel a binomiális tétel szerinti összegalakban a következő hatványt:
   *a*) $(a-3)^4$ *b*) $(x+2)^5$.

## Vegyes feladatok

1. Legalább hány, 13 tippes totóoszlop megfelelő kitöltésével biztosítható, hogy valamely oszlopban
   *a*) telitalálatunk legyen; *b*) legyen legalább 5 találatunk?
2. Szombaton Zorka azt mondta: Most 5. hó 5-e és du. 5 óra 5 perc van. Hány olyan időpont lesz még ebben az évben, amelyet így leírva csak egyféle számjegyet használunk? Az órákat 1-12-ig számozzuk, délelőtt és délután is.
3. Két egymásra merőleges egyenesen jelöljünk meg 10-10 pontot! Hány olyan háromszög van, melynek minden csúcsa a megjelölt pontok közül való, ha
   *a*) a két egyenes metszéspontja nincs a megjelölt pontok között;
   *b*) a két egyenes metszéspontja is megjelölt pont (így összesen 19 pontot jelöltünk meg)?
4. Mennyi a számjegyek összege, ha leírjuk a számokat 1-től 1000-ig?
5. Egy 10 forintost tízszer egymás után feldobtunk, és tudjuk, hogy 6 fejet és 4 írást dobtunk. Hányféleképpen lehetett ez, ha a dobások sorrendje is számít?
6. Egy lágytojástartó készletben 3 zöld és 3 kék tartó van. Ezeket egy rúdra lehet felfűzni, mindegyiket vagy talpával felfelé, vagy lefelé. Hányféleképpen lehet felfűzni a tartókat a rúdra?

7. Hányféleképpen vonulhat be a pályára egy kosárlabdacsapat 5 különböző magasságú játékosa, hogy ha egy sorban mennek, és semelyikük sem kerülhet két magasabb játékos közé?
8. Egy dobókockát feldobunk egymás után
   *a*) hatszor; *b*) hétszer.
   Hány olyan eset van, amikor a dobott számok között van két egyenlő?
9. Karcsi randevúra készül, és bemegy egy virágboltba, ahol egy vázában kilenc vörös és négy fehér rózsa van. Hány különböző, három vörös és kettő fehér rózsát tartalmazó csokrot köttethet ezekből a virágokból? (A virágok csokorbeli helye nem érdekes.)

## Valószínűségi kísérlet, elemi esemény, esemény

Valószínűségi kísérletnek nevezünk egy kísérletet, ha teljesül az alábbi három feltétel.
- A kísérletnek több kimenetele lehetséges.
- Nem tudjuk előre megmondani, hogy a kísérletnek melyik kimenetele következik be. (A kísérlet kimenetele a „véletlen”-től függ.)
- Azonos körülmények között akárhányszor megismételhető a kísérlet.

Valószínűségi kísérlet egy lehetséges kimenetelét elemi eseménynek nevezzük, az elemi események halmazát pedig eseménytérnek. Az eseménytér „bizonyos” részhalmazait eseménynek nevezzük. A „bizonyos” jelzőt később magyarázzuk meg. Esemény bekövetkezésén azt értjük, hogy a bekövetkező elemi esemény eleme az adott eseményt jelentő részhalmaznak.

Biztos eseménynek nevezzük azt az eseményt, ami bármely elemi esemény esetén bekövetkezik, azaz az eseménytérhez tartozó eseményt.

Lehetetlen eseménynek nevezzük azt az eseményt, ami egyik elemi esemény esetén sem következik be, azaz az üres halmazhoz tartozó eseményt.

Az $A$ esemény komplementer (kiegészítő) eseményén azt az eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, ha $A$ nem következik be, azaz az eseménytérre vonatkozó $\overline{A}$ részhalmazhoz tartozó eseményt.

Az $A$ és a $B$ események összegén azt az eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, ha $A$ és $B$ közül legalább az egyik bekövetkezik, azaz az $A \cup B$ részhalmazhoz tartozó eseményt.

Az $A$ és a $B$ események szorzatán azt az eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, ha $A$ és $B$ közül mindkettő bekövetkezik, azaz az $A \cap B$ részhalmazhoz tartozó eseményt.

A „bizonyos” jelző magyarázata: azokat a részhalmazokat tekintjük eseményeknek, amik közt ott van az eseménytér is, továbbá amik komplementere, összege, szorzata is esemény.

Az $A$ és a $B$ eseményt egymást kizárónak nevezzük, ha egyszerre nem következhetnek be, azaz, ha az $A \cap B$ részhalmaz egyenlő az üres halmazzal.

**Feladatok:**

1. Feldobunk három különböző pénzérmét, és mindegyik érménél figyeljük, hogy fejet vagy írást dobtunk. Adj meg egy lehetetlen; egy lehetséges, de nem biztos; és egy biztos eseményt! Írd fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket:
   $A$: Pontosan egy fejet dobtunk. $B$: Legalább egy fejet dobtunk.

2. Egy csomag jól megkevert magyar kártyából addig húzunk visszatevés nélkül, míg a húzott lap király nem lesz (a magyar kártya 32 lapos, és négy különböző király van benne). A kísérlet kimenetelének azt a sorszámot tekintjük, ahányadikra a királyt húztuk.
   *a*) Írd fel az elemi eseményeket!
   *b*) Sorold fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket:
   $A$: Legalább huszadikra húzunk királyt. $B$: Prím sorszámra húzunk királyt.
   *c*) Add meg a fenti események komplementereit elemi eseményekkel és szavakkal is!
   *d*) Adj meg egy-egy biztos és lehetetlen eseményt a kísérletben!
3. Egy autó most hajt át az 500 méter hosszú hídon. Tekintsük a következő eseményeket:
   $A$: a híd jobb végétől legfeljebb 300 méterre van.
   $B$: a híd jobb végétől legalább 200 méterre van.
   $C$: a híd közepétől legfeljebb 100 méterre van.
   *a*) Ábrázold az eseményeket!
   *b*) Ábrázold a következő eseményeket: $A \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap \overline{C}$, valamint fogalmazd meg szavakkal is az eseményeket!
   *c*) A *b*) részben szereplő események között vannak-e biztosak; lehetetlenek; egymást kizárók, de nem komplementerek; komplementerek?
4. Egy csomag magyar kártyát (amiben piros, zöld, tök, makk színű 7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász lapok vannak) jól megkevertünk, majd húztunk egy lapot. Legyen
   $A$: pirosat húzunk $B$: tízest húzunk $C$: számos lapot húzunk
   *a*) Add meg szövegesen a következő eseményeket: $B \setminus A$, $\overline{C} \cap A$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$.
   *b*) Hány elemi esemény alkotja az előbb képzett eseményeket?
5. Egy autót háromféleképpen lehet lejtős úton megtartani: a kéziféket behúzva ($A$), éket téve a kerék alá ($B$), vagy sebességben hagyva ($C$). Külön-külön mindegyik elég ahhoz, hogy az autó ne guruljon el. Bence napközben a ház előtti lejtős részen hagyja az autóját. Add meg az $A, B, C$ események és a műveletek segítségével a következő eseményeket:
   *a*) Bence behúzta a kéziféket, és az ék is a kerék alatt van, de nem hagyta sebességben az autót.
   *b*) Kinéz az ablakon, és ott van az autó.
   *c*) Kinéz az ablakon, és nincs ott az autó.
   *d*) Bence legalább két dolgot megtett, hogy az autó ne guruljon el.
   *e*) Az ékkel a kutya játszik az udvaron, de az autó nem gurul el.

## Tapasztalati valószínűség

Tekintsünk egy valószínűségi kísérletet és egy eseményt. Végezzük el a kísérletet egymás után akárhányszor, „egymástól teljesen függetlenül”. Ez azt jelenti, hogy egyik kísérlet kimenetele sem befolyásolja a többi kísérlet kimenetelét. Számoljuk meg, hányszor következett be az esemény.

Az esemény bekövetkezéseinek számát az esemény gyakoriságának nevezzük. Ha $n$-szer végeztük el a kísérletet, és az esemény gyakorisága $k$, akkor nyilván $0 \leq k \leq n$.

A $\frac{k}{n}$ hányadost az esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Nyilván $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

Azt tapasztaljuk, hogy ha a kísérletek száma „minden határon túl nő”, akkor a relatív gyakoriság egy szám körül „ingadozik”. Ezt a számot nevezzük az esemény tapasztalati valószínűségének.
Tapasztalt tulajdonságok:

- Bármely eseménynek van relatív gyakorisága, „ezért” bármely eseménynek van tapasztalati valószínűsége.
- A relatív gyakoriság mindig nemnegatív, „ezért” bármely esemény tapasztalati valószínűsége is nemnegatív.
- A biztos esemény relatív gyakorisága konstans 1, „ezért” tapasztalati valószínűsége is 1.
- Két egymást kizáró esemény összegének gyakorisága egyenlő az események gyakoriságainak összegével, mert egyszerre nem következnek be. Az egyenlőség a relatív gyakoriságokra is nyilván igaz. „Ezért” az egyenlőség a tapasztalati valószínűségekre is igaz.

**Feladat:**

1. Végezzünk 100 kísérletet két különböző színű (piros, zöld) dobókockával, és vizsgáljuk meg a következő események gyakoriságát, relatív gyakoriságát!
   $A$: A két dobott szám egyenlő.
   $B$: A piros kockával nagyobb számot dobtunk, mint a zölddel.
2. Az $A$ osztályban 13 tanulónak van piros tolla, 23-nak nincs. A $B$ osztályba 5-tel kevesebben járnak. Itt legfeljebb hány főnek lehet piros tolla, ha tudjuk, hogy a $B$-ben kisebb a piros tollak relatív gyakorisága?

## A valószínűség matematikai fogalma

Adott egy halmaz, ami nem az üres halmaz. Ezt a halmazt eseménytérnek nevezzük, elemeit pedig elemi eseményeknek.

Adottak az eseménytér olyan részhalmazai, amik rendelkeznek az alábbi három tulajdonsággal. Ezeket a részhalmazokat eseményeknek nevezzük.

- Az adott részhalmazok között ott van az eseménytér is.
- Ha egy részhalmaz az adott részhalmazok között van, akkor ott van e részhalmaznak az eseménytérre vonatkozó kiegészítő halmaza is.
- Ha két részhalmaz ott van az adott részhalmazok között, akkor ott van e részhalmazok uniója is. (Kettő helyett megszámlálhatóan végtelen sok részhalmaz esetén is.)

Adott egy olyan függvény, ami minden eseményhez hozzárendel egy-egy valós számot úgy, hogy a hozzárendelés rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal. Ezt a függvényt valószínűségnek, az eseményhez hozzárendelt számot pedig az esemény valószínűségének nevezzük.

- Minden esemény valószínűsége nemnegatív.
- A biztos esemény valószínűsége 1.
- Ha két esemény egymást kizáró, akkor összegük valószínűsége egyenlő valószínűsége-ik összegével. (Kettő helyett megszámlálhatóan végtelen sok esemény esetén is.)

(Az eseménytérre, az eseményekre és a valószínűségre előbb kimondott tulajdonságokat a valószínűségszámítás axiómáinak is nevezzük.)

## A valószínűség néhány tulajdonsága

- A lehetetlen esemény valószínűsége 0.
- Bármely esemény komplementerének valószínűsége egyenlő az 1 és az esemény valószínűségének különbségével.
- Minden esemény valószínűsége nem nagyobb 1-nél.
- Bármely két esemény összegének valószínűsége egyenlő valószínűségeik összegének és szorzatuk valószínűségének különbségével.
- Tegyük fel, hogy egy valószínűségszámítási feladatnál teljesül az alábbi három feltétel.
  - Véges sok elemi esemény van.
  - Minden elemi esemény egyben esemény is.
  - Minden elemi esemény valószínűsége ugyanannyi. (Más szavakkal: Minden esemény valószínűsége egyenesen arányos elemszámával.)

  Ekkor a feladathoz tartozó bármely esemény valószínűsége egyenlő az adott esemény elemszáma és a biztos esemény elemszáma hányadosával. („A kedvező esetek száma osztva az összes eset számával".) Egy esemény valószínűségének ilyen módon való kiszámíthatóságát klasszikus módszernek nevezzük.

**Feladatok:**

1. Feldobunk egy piros és egy zöld dobókockát. Mennyi a következő események valószínűsége?
   $A$: A két dobott szám egyenlő.
   $B$: A piros kockával nagyobb számot dobtunk, mint a zölddel.
2. Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után, a dobott számokat felírjuk. Mekkora valószínűséggel lesz az így keletkezett háromjegyű szám
   *a*) páros; *b*) nagyobb, mint 450; *c*) csupa különböző jegyű?
3. Feldobunk három különböző pénzérmét, és mindegyik érménél figyeljük, hogy fejet vagy írást dobtunk. Adj meg egy olyan eseményt, melynek a valószínűsége $\frac{1}{2}$!
4. Négy pénzérmét egymás után feldobunk. Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy a négy dobás közt legalább egy fej van, $B$ pedig azt az eseményt, hogy legalább két írás van. Számítsd ki a következő események valószínűségét: $A$, $B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$!
5. Egy énekversenyen a 10 résztvevő mindegyikét rangsorolják. Mekkora a valószínűsége, hogy a verseny egyik indulója, Csengő Csenge:
   *a*) első lesz; *b*) második lesz; *c*) dobogós helyen végez?
   A botfülű zsűri gyakorlatilag véletlenszerűen dönt a helyezésekről.
6. Egy dobozban 7 db golyó van, melyek 1-től 7-ig számozottak. Visszatevés nélkül sorban kihúztuk mind a 7 golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a páratlan számokat húztuk ki először?
7. A 32 lapos magyar kártyából húzunk sorban egymás után négy lapot. Mekkora valószínűséggel húzunk piros, tök, zöld és makk színűt ebben a sorrendben,
   *a*) ha a kivett lapokat nem tesszük vissza;
   *b*) ha minden húzás után visszatesszük a lapokat?

8. Egy tanár a 24 fős osztályból minden órán véletlenszerűen szólít ki pontosan egy diákot felelni. Mekkora valószínűséggel felel
   *a*) a következő órán Balláb Balázs;
   *b*) Balláb Balázs a következő két óra mindegyikén;
   *c*) a következő három órán Balláb Balázs, Jobbláb Joli, Komisz Borisz valamilyen sorrendben?
9. A kockapóker játékban öt dobókockával dobunk egyszerre. Úgy nevezett „kis sort" dobtunk, ha a kockákon az $1, 2, 3, 4, 5$ számok láthatók, illetve „nagy sort", ha a $2, 3, 4, 5, 6$ számok. Mekkora a valószínűsége annak, hogy kis sort dobunk a kockákkal, illetve hogy nagy sort?
10. Klárának Csillát és Gabit is beleszámítva öt nagyon jó barátnője van. Közülük minden hétköznap véletlenszerűen beszél telefonon pontosan eggyel, de mindig mással. Mekkora valószínűséggel hívja fel Csillát kedden és Gabit pénteken?

## A valószínűség további tulajdonságai

- Tegyük fel, hogy egy valószínűségszámítási feladatnál teljesül az alábbi három feltétel.
  - Az eseménytér az egyenes/a sík/a tér részhalmaza.
  - Minden eseménynek van hossza/területe/térfogata, és a biztos eseményé nem 0.
  - Minden esemény valószínűsége egyenesen arányos hosszával/területével/térfogatával.

  Ekkor a feladathoz tartozó bármely esemény valószínűsége egyenlő az adott esemény hossza/területe/térfogata és a biztos esemény hossza/területe/térfogata hányadosával. („A kedvező esetek halmazának hossza/területe/térfogata osztva az összes eset halmazának hosszával/területével/térfogatával".) Egy esemény valószínűségének ilyen módon való kiszámíthatóságát geometriai módszernek nevezzük.
- Van olyan esemény, ami nem a lehetetlen esemény, és aminek valószínűsége 0.

**Feladatok:**

1. Egy 5 cm $\times$ 15 cm-es fa téglalapból valahol kivágunk két, egymást nem fedő 3 cm oldalú négyzetet, és a „lyukas" télalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy kis golyót (véletlenszerűen) a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?
2. Barátunk fél 4 és 4 között érkezik véletlenszerűen a találkozónkra. Mekkora az esélye, hogy nem várok negyed óránál többet, ha én 3 óra 25 perckor leszek ott a találkozó helyén?
3. Egy 7 egység oldalú négyzet alakú céltáblára leadunk egy lövést. Mennyi a valószínűsége, hogy a találat legfeljebb fél egységre lesz a céltábla legközelebbi oldalától?
4. Egy kör alakú céltáblára véletlenszerűen lövés érkezik. Mi a valószínűsége, hogy a lövés helye legalább kétszer olyan távol lesz a kör középpontjától, mint a határvonalától?
5. A koordináta-rendszerben egy pontot véletlenszerűen választunk abból a téglalapból, melynek csúcsai $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a pont $x$ koordinátája kisebb, mint az $y$ koordinátája?
6. András és Béla véletlenszerűen választ egy-egy valós számot 0 és 1 között. Mennyi a valószínűsége, hogy a Béla által választott szám legalább kétszer akkora, mint az András által választott?

7. Egy 3 m $\times$ 4 m $\times$ 5 m-es szobában egy légy repül, helye véletlenszerű a szobában. Mekkora a valószínűsége, hogy ebben a pillanatban legfeljebb 10 cm-re van az egyik faltól, a padlótól vagy a plafontól?

## Valószínűségi paradoxonok

1. Simpson-féle paradoxon. Andrásnak van egy fekete és egy zöld kalapja. A fekete kalapba 5 piros és 6 kék golyót tett, a zöldbe 3 pirosat és 4 kéket. Bélának is van egy fekete és egy zöld kalapja, a fekete kalapba 6 piros és 3 kék, a zöldbe 9 piros és 5 kék golyót tett. Mindketten megállapították, hogy piros golyó húzásának valószínűsége nagyobb a fekete kalap esetén. Mi a helyzet, ha összeöntik a két fekete kalap tartalmát és a két zöldét is?
2. Bertrand-féle paradoxon. Adott egy egység sugarú kör. Válasszuk ki találomra egy húrját. Mennyi a valószínűsége, hogy a húr hossza nagyobb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala, ha a húr kiválasztásának módja a következő:
   *a*) a körlapon véletlenszerűen választunk egy pontot, és azt a húrt tekintjük, amelynek felezőpontja ezen kiválasztott pont;
   *b*) a körvonal egy tetszőleges pontjában rögzítjük a húr egyik végpontját, majd a másikat véletlenszerűen választjuk a körvonalról;
   *c*) a kör egyik sugarán véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot, és azt a húrt tekintjük, amelyik ebben a pontban a sugárra merőleges.

## Irodalomjegyzék


- Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika – feladatgyűjtemény 9, 10, 11, 12; Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.
- Csordás Mihály, Konfár László, Pintér Klára, Vincze Istvánné, Kozmáné Jakab Ágnes, Kothencz Jánosné: Sokszínű matematika – tankönyv 5, 6, 7, 8; Mozaik Kiadó, Szeged, 2008.
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika – gimnáziumi tankönyv 9, 10, 11, 12; Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.


---


Készítette: Dr. Kórus Péter, SZTE JGYPK API Tanítóképző Tanszék, Szeged, 2020.