Jegyzet a Függvények kurzushoz

(Tanító szak, matematika műveltségi terület)

Sorozatok

Sorozaton bizonyos dolgok listáját értjük, melyben a dolgok, tagok sorrendje meghatározott. Ha a sorozat tagjai számok, akkor számsorozatról beszélünk. Formális definíciót később, a függvény fogalmának segítségével adunk.

Számsorozatok különböző tulajdonságait vizsgáljuk. Azt mondjuk, hogy egy számsorozat

- alulról korlátos, ha van olyan szám, ami a sorozat minden tagjánál kisebb vagy egyenlő;
- felülről korlátos, ha van olyan szám, ami a sorozat minden tagjánál nagyobb vagy egyenlő;
- korlátos, ha alulról és felülről korlátos;
- (monoton) növő, ha a 2. tagtól kezdve bármely tag nagyobb az azt megelőzőnél;
- (monoton) nemcsökkenő, ha a 2. tagtól kezdve bármely tag nagyobb vagy egyenlő az azt megelőzőnél;
- (monoton) csökkenő, ha a 2. tagtól kezdve bármely tag kisebb az azt megelőzőnél;
- (monoton) nemnövő, ha a 2. tagtól kezdve bármely tag kisebb vagy egyenlő az azt megelőzőnél.

Feladatok:

1. Játsszunk szójátékot! Minden új szó úgy keletkezik az előzőből, hogy csak egy betűt változtatunk meg. Pótold a hiányzó szavakat! Hányadikra kerülhet elő először a *rág* szó?
   lap, …, kar, …, tár, …, …, méz.
2. A síknak két pontja meghatározza a sík egy egyenesét. Legfeljebb hány egyenest határoz meg $3, 4, \ldots$ pont a síkon? Mi lehet a szabály?
3. Készíts két egybevágó négyzetből egy téglalapot! Rakj ki egybevágó négyzetekből újabb, egyre nagyobb, az előzőhöz hasonló téglalapot! Gyűjtsd ki, hány négyzetet használtál fel a téglalapok megépítéséhez! Mi a sorozat 10. ill. 20. tagja? Mi lehet a szabály?
4. Készíts négy egybevágó kockából téglatestet! Rakj ki egybevágó kockákból újabb, egyre nagyobb, az előzőhöz hasonló téglatestet! Gyűjtsd ki, hány kockát használtál fel a téglatestek megépítéséhez! Mi a sorozat 10. ill. 20. tagja? Mi lehet a szabály?
5. Képezz sorozatot a 7200-tól indulva úgy, hogy a sorozat következő tagja legyen mindig az előtte álló szám legnagyobb valódi osztója!
6. Képezz sorozatot a 7200-tól indulva úgy, hogy a sorozat következő tagja legyen mindig az előtte álló szám osztóinak száma!
7. Képezd a Fibonacci-sorozat képzési szabályának megfelelően a sorozat első 20 tagját! Legyen a sorozat első két tagja 0, 2.
8. Egy sorozat első két tagja 2, 3. A 3. tagtól kezdve az adott tag az őt megelőző két tag szorzata. Add meg a sorozat első 5 ill. 20. tagját!
9. Találj ki egy szabályt, és az alapján folytasd néhány taggal a következő sorozatot:
   a) 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, … *b*) 2, 12, 1112, 3112, 132112, … .

10. Vizsgáld meg monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatot:
   a) $a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *b)* $b_n = n^2 - n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

A számtani sorozatok

Egy számsorozatot számtani sorozatnak nevezünk, ha a 2. tagtól kezdve bármely tag és az azt megelőző tag különbsége állandó. Ezt a különbséget általában d-vel jelöljük.

A számtani sorozat első n tagjának, $a_1, a_1+d, \ldots, a_1+(n-1)\cdot d$, összege az $S_n = n\cdot\left(a_1 + \frac{(n-1)\cdot d}{2}\right)$ képlettel számolható.

Feladatok:

1. Illessz
   a) a 8 és a 41 közé 10 számot *b)* a 47 és a −24 közé 9 számot
   úgy, hogy a kapott 12 ill. 11 szám egy számtani sorozat egymás utáni tagjait alkossák!
2. Tekintsd a következő számtani sorozatot: 5, 8, …, és döntsd el, hogy a 4567547 tagja-e!
3. Határozd meg a számtani sorozatot, és töltsd ki a táblázatot:

a)

a_1	d	n	a_n	S_n
1	0,15		35,2	

b)

a_1	d	n	a_n	S_n
8			7	360

c)

a_1	d	n	a_n	S_n
	−3		15	

4. Számítsd ki a háromjegyű páratlan számok összegét!
5. Egy utca egyik oldalán saroktól sarokig a házszámok összege 221. Az elejétől számított hetedik háznak mennyi a házszáma?
6. Melyik az a számtani sorozat, mely első n tagjának összege $2n^2 - 3n$?

A mértani sorozatok

Egy számsorozatot mértani sorozatnak nevezünk, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az azt megelőző tag hányadosa állandó (nem nulla). Ezt a hányadost általában q-val jelöljük.

A mértani sorozat első n tagjának, $a_1, a_1 \cdot q, \ldots, a_1 \cdot q^{n-1}$, összegképlete $q \neq 1$ esetén $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, míg $q = 1$ esetén $S_n = n \cdot a_1$.

Ha $-1 < q < 1$, akkor az $a_1 \cdot q^{n-1}$ általános tag 0-hoz „tart”, és ha a mértani sorozat tagjait „minden határon túl folytatva” összeadjuk, az így kapott végtelen mértani sor összege véges számot eredményez, és ez az összeg $S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}$.

Feladatok:

1. Írd fel a $2, -1, \ldots$ mértani sorozat első 10 tagját. Számítsd ki ezen tagok összegét! Mennyi az összes tagot figyelembe vett mértani sor összege?
2. Illessz 32 és a 243 közé 4 számot úgy, hogy a kapott 6 szám egy mértani sorozat egymás utáni tagjait alkossák!
3. Mennyi a $2, \frac{2}{3}, \ldots$ mértani sorozat páratlan indexű tagjainak összege?

4. Beteszek a bankba 100000 forintot, és a bankban minden év végén az aktuális összeg kamatozik 2%-ot. Mennyi pénzem lesz a bankban 10 év múlva? És mennyi pénzem lenne a bankban 10 év múlva, ha a 2. évtől kezdve minden év elején még 20000 forintot is betennék a bankba?
5. A 4009-et bontsd 5 részre úgy, hogy minden résznek és a következőnek az aránya 2:3 legyen!
6. Mutasd meg geometriai ábra segítségével, hogy $\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{4}$.

Nevezetes közepek

$a_1, a_2, \ldots a_n$ pozitív számok harmonikus közepének, mértani közepének, számtani közepének ill. négyzetes közepének nevezzük sorrendben a $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$, $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, $\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ kifejezéseket. Az előbbi kifejezésekhez tartozó értékek növekvő sorrendben állnak.

Speciálisan, két pozitív szám, a és b, harmonikus, mértani, számtani ill. négyzetes közepére a következő nagyság szerinti relációk állnak fenn: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Egyenlőség minden esetben akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Könnyen látható, hogy bármely számtani (ill. pozitív tagú mértani) sorozat bármely (nem első) tagja egyenlő az azt megelőző és az azt követő tag számtani (ill. mértani) közepével.

Feladatok:

1. Egy dolgozaton szerzett pontszámok a következők: 40, 30, 45, 32, 40. Mennyi a pontok átlaga (számtani közepe)?
2. 4 egymást követő évben a kamatozás a következő volt: 5%, 15%, 25%, 40%. Mennyi volt az átlagos éves kamat a 4 év során?
3. Egy autó a táv első harmadát 50 km/h-val, a középső harmadát 130 km/h-val és az utolsó harmadát 70 km/h-val tette meg. Mennyi volt az átlagsebessége az út során?

Tizedes törtek, racionális és irracionális számok

Azon valós számokat, melyek felírhatók két egész szám hányadosaként, racionális számoknak nevezzük. Azon valós számokat, melyek nem racionális számok, irracionális számoknak hívjuk.

A következő két tétel leírja a racionális számok és a tizedes tört alakok kapcsolatát:

- Minden racionális szám véges vagy végtelen szakaszos(an ismétlődő) tizedes tört alakban írható.
- Minden véges ill. végtelen szakaszos tizedes tört racionális számot jelöl.

Feladatok:

1. Add meg a mértani sor összegképletének használatával közönséges törtalakban a következő számot: $147,\dot{1}\dot{5} \cdot 1,\dot{7}$.
2. Add meg tizedes tört alakban a következő számot: $\frac{2}{7} - \frac{5}{3}$.
3. Egy meghatározott összegért hány százalékkal több árut kapsz, ha az árak 30%-kal csökkennek?
4. Bizonyítsd be, hogy a $\log_3 10$ irracionális szám!
5. Szerkeszd meg a számegyenesen a $-\frac{5}{6}$ és a $\sqrt{84}$ helyét!

Arányosságok

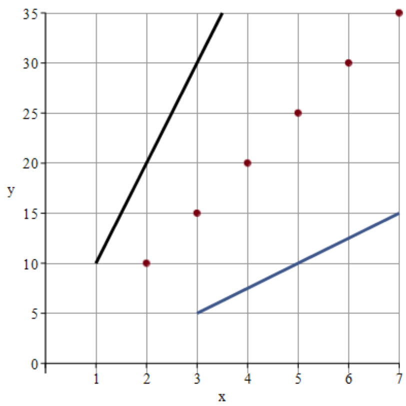
Két együtt változó mennyiséget egyenesen arányosnak nevezünk, ha teljesül az, hogy ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiszorosára változik a másik mennyiség is.
Két együtt változó mennyiséget fordítottan arányosnak hívunk, ha teljesül az, hogy ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiad részére változik a másik.

Egyenes arányosság esetén az összetartozó értékpárok hányadosa egyenlő. Fordított arányosság esetén az összetartozó értékpárok szorzata egyenlő.

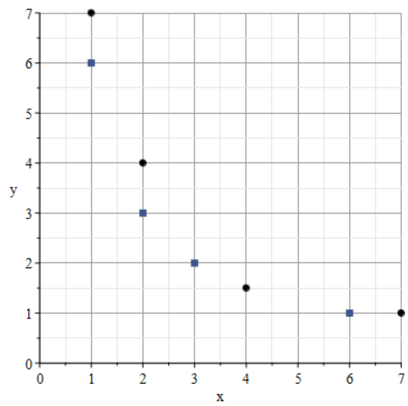
Feladatok:

1. Egy gyalogos egyenletesen haladva óránként 4 km-t tesz meg.
   a) Mekkora utat tesz meg a gyalogos 2; 3; 4 ill. 5 óra alatt?
   b) Ábrázold az összetartozó mennyiségeket koordináta-rendszerben!
   c) Hogyan helyezkednek el a pontok a koordináta-rendszerben?
2. A nyári szünetben az iskolát 6 festő 8 nap alatt festi ki. Mennyi idő alatt festené ki az iskolát ugyanilyen munkatempót feltételezve
   a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4
   e) 5 *f*) 8 *g*) 10 *h*) 12 festő?
   Ábrázold az összetartozó mennyiségeket koordináta-rendszerben!
3. Az alábbi ábrán mennyiségek közötti összefüggéseket ábrázoltunk. A három grafikon közül melyik fejez ki egyenes arányosságot? A választ indokold is meg!

3. feladat



4. feladat



4. A fenti ábrán látható két koordináta-rendszerben különböző színnel két-két mennyiség közötti összefüggést ábrázoltunk. Olvasd le az azonos színnel jelölt pontok koordinátáit, és készíts táblázatot! Melyik a fordított arányosság a négy összefüggés közül?
5. Egy téglalap szélessége egyenlő a kerületének $\frac{5}{28}$-ad részével.
   a) Határozd meg a félkerületének és a szélességének arányát!
   b) Határozd meg a szélességének és a hosszúságának az arányát!
   c) Mennyi a téglalap területe, ha szélessége 16 méterrel kisebb a hosszúságánál?
6. Tudjuk, hogy x és y számok esetén $x : y = 3 : 4$. Számítsd ki a $(2x + y) : (2y)$ arányt!
7. Két pozitív szám különbségének és összegének aránya $2 : 5$. Mennyi a két szám aránya?

8. 10 tehergépkocsi 1500 t árut napi 8 fuvarral 4 nap alatt szállít el. Hány nap alatt szállít el 15000 t árut 5 gépkocsi, ha naponta 10-szer fordulnak az autók? Milyen arányosságok figyelhetők meg?
9. 10 liter 80%-os alkoholhoz hány liter 10%-os alkoholt kell önteni, hogy a keverék alkoholtartalma 40% legyen?
10. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely úgy aránylik egy háromjegyű pozitív egész számhoz, mint 3 : 4? Mennyi ezen kétjegyű számok összege?
11. Három szám összege 180. Melyek ezek a számok, ha tudjuk, hogy a 2, 3, 4 számokkal
    a) egyenesen arányosak
    b) fordítottan arányosak.

Hozzárendelések, függvények

Legyen adott sorrendben két halmaz, H és K. Képezzünk tetszőlegesen olyan elempárokat, amiknek első tagja a H eleme, másik tagja pedig a K halmazé. A képzett párok halmazát a H és K közötti hozzárendelésnek (megfeleltetésnek) nevezzük. Ha (a, b) egy képzett elempár, akkor azt mondjuk, hogy az a elemhez hozzárendeltük a b elemet.

Függvénynek nevezünk olyan $H \to K$ hozzárendelést, ami a H értelmezési tartomány minden eleméhez a második, K halmazból pontosan egy elemet rendel.

Függvények esetén következő tulajdonságokat vizsgáljuk:

- Egy $H \to K$ függvényt injektívnek mondunk, más szóval kölcsönösen egyértelműnek, ha bármely két H-beli elemhez egy-egy különböző K-beli elemet rendel.
- Egy $H \to K$ függvényt szürjektívnek hívunk, más szóval kitöltőnek, ha minden K-beli elem legalább egy H-beli elemhez hozzá van rendelve, azaz ha K minden eleme függvényérték.
- Egy függvényt bijektívnek nevezünk, ha injektív és szürjektív is.

Feladatok:

1. Legyenek H és K olyan halmazok, melyekre $|H| = 4$ és $|K| = 5$. Hány hozzárendelés létezik H és K között? Ezek közül hány függvény?
2. Hány kölcsönösen egyértelmű ill. hány kitöltő függvény létezik H és K között, ha
   a) $|H| = 4$ és $|K| = 5$
   b) $|H| = 5$ és $|K| = 4$.
3. Legyen H a 20-nál kisebb pozitív páros számok halmaza. Rendeljük H minden eleméhez a pozitív osztóit. Melyik H-beli számnak van a legtöbb osztója? Függvény-e ez a hozzárendelés?
4. Legyen H a 20-nál kisebb pozitív páratlan számok halmaza. Rendeljük H minden eleméhez a pozitív osztóinak számát. Függvény-e ez a hozzárendelés? Injektív-e? Szürjektív-e?

Valós függvények

Tetszőleges nemüres H halmaz esetén a $H \to \mathbb{R}$ függvényeket valós függvényeknek nevezzük. Innentől valós függvényekkel foglalkozunk. Speciális valós függvény a számsorozat is, melynek a pozitív egész számok halmazából (vagy annak részhalmazából) a valós számok halmazába, $\mathbb{R}$-be képező függvényt nevezünk.

Függvény grafikonjának meghatározása: Adott egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és egy derékszögű koordináta-rendszer. Az x-tengelyen legyen az értelmezési tartomány, az y-tengelyen legyen az értékek halmaza. Az értelmezési tartomány egy x pontjából állítsunk merőleges egyenest az x-tengelyre, az x-hez tartozó függvényérték pontjából pedig állítsunk merőlegest az y-tengelyre; majd jelöljük ki e két merőleges metszéspontját. Végezzük el ezt az eljárást az értelmezési tartomány minden pontjára. A kijelölt metszéspontok halmazát a függvény grafikonjának nevezzük.

A további $H \to K$ függvények esetén, ha külön nem definiáljuk, akkor $H = \mathbb{R}$ vagy annak lehető legbővebb részhalmaza, és $K = \mathbb{R}$.

Függvények különböző tulajdonságait vizsgáljuk. Egy $f : H \to K$ függvényről azt mondjuk, hogy

- (monoton) növő, ha bármely H-beli $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- (monoton) nemcsökkenő, ha bármely H-beli $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- (monoton) csökkenő, ha bármely H-beli $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$;
- (monoton) nemnövő, ha bármely H-beli $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan szám, ami a függvény összes értékénél kisebb;
- felülről korlátos, ha létezik olyan szám, ami a függvény összes értékénél nagyobb;
- korlátos, ha alulról és felülről korlátos;
- minimuma van a H-beli x_0-ban, ha $f(x_0) \leq f(x)$ bármely H-beli x esetén;
- maximuma van a H-beli x_0-ban, ha $f(x_0) \geq f(x)$ bármely H-beli x esetén;
- páros, ha a H minden x elemével együtt a $-x$ elemet is tartalmazza, és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha a H minden x elemével együtt a $-x$ elemet is tartalmazza, és $f(-x) = -f(x)$;
- folytonos a H-beli x_0-ban, ha bármely olyan H-beli $x_1, x_2, \ldots$ sorozatra, mely x_0-hoz "tart", teljesül az, hogy az $f(x_1), f(x_2), \ldots$ függvényértékek az $f(x_0)$-hoz "tartanak". Továbbá az f függvényt folytonosnak nevezzük, ha minden H-beli x_0-ban folytonos.

Az előbbi tulajdonságokat – a páros és páratlan kivételével – megfogalmazhatjuk a H értelmezési tartomány helyett csak egy $[a, b]$ részintervallumán; ekkor helyi minimumról, helyi maximumról beszélünk, illetve azt mondjuk, hogy a függvény monoton növő/nemcsökkenő/alulról korlátos stb. az $[a, b]$ intervallumon.

Feladat:

1. Elemezd az alábbi nevezetes alapfüggvényeket
   a) $a \cdot x + b$ *b)* x^2 *c)* $|x|$ *d)* $\frac{1}{x}$ *e)* $[x]$ *f)* $\{x\}$
   kölcsönösen egyértelműség, kitöltés, monotonitás, korlátosság, folytonosság, paritás szempontjából, add meg a szélsőértékeit, amennyiben léteznek! ($[x]$ az x szám egészrészét jelöli, mely azt a legnagyobb egész számot jelenti, ami x-nél nem nagyobb; míg $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, mely az $x - [x]$ számot jelenti.)

A lineáris függvények

Az egyenes arányossághoz tartozó $f(x) = m \cdot x$ függvény grafikonja egyenes (m tetszőleges, rögzített valós szám). Továbbá, $m \neq 0$ esetén, a függvény bijekció $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}$ között. Ugyanígy, az összes $f(x) = a \cdot x + b$ alakú függvény (a, b tetszőleges, rögzített valós számok) grafikonja egyenes, az ilyen függvényeket $a \neq 0$ esetén lineáris függvényeknek, $a = 0$ esetén konstans függvényeknek hívjuk.

A derékszögű koordináta-rendszer két pontján, (x_1, y_1) és (x_2, y_2)-en átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1\right), \text{ ha } x_1 \neq x_2, \text{ ill. } x = x_1, \text{ ha } x_1 = x_2.$$

Feladatok:

1. Állapítsd meg az $f(x) = \frac{2}{3}x$ egyenes arányosság grafikonjáról adott pontok hiányzó koordinátáit: $A(\square, 7)$, $B\left(-\frac{5}{2}, \square\right)$.
2. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C\left(\frac{2}{3}, -1\right)$, $D(2, 6)$ pontok.
   a) Határozd meg azt az egyenes arányosságot, amelynek grafikonjára a pontok közül pontosan két pont illeszkedik!
   b) Melyek azok az egyenes arányosságok, amelyek grafikonjára csak egy pont illeszkedik?
3. Rajzold meg a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait:
   $a(x) = 3x$, $\quad b(x) = -\frac{3}{5}x$, $\quad c(x) = 2$.
   a) Tükrözd az egyeneseket az x-tengelyre, és írd fel a hozzárendelési szabályokat!
   b) Tükrözd az egyeneseket az y tengelyre, és írd fel a hozzárendelési szabályokat!
   c) Forgasd el a grafikonokat az origó körül +90°-kal és add meg a hozzárendelések szabályait!
4. Válaszd ki azokat a függvényeket, melyek grafikonjai a koordináta-rendszerben párhuzamos egyenesek lesznek! Ábrázold is ezeket! Hol metszik a tengelyeket?
   $a(x) = -\frac{3}{4}x + 1$, $\quad b(x) = \frac{3}{4}x + 3$, $\quad c(x) = 3\left(-\frac{x+1}{4}\right) + 1$, $\quad d(x) = \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{x}{4}$.
5. A koordináta-rendszerben adj meg három-három olyan pontot, mely az $f(x) = -4x + 2$ függvény
   a) grafikonjára illeszkedik $\quad$ *b*) grafikonja felett van $\quad$ *c*) grafikonja alatt van.
6. Ábrázold az $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ függvény grafikonját! Határozd meg az $A(2, \square)$, $B\left(\square, \frac{5}{3}\right)$ pontok hiányzó koordinátáit úgy, hogy azok
   a) a függvény grafikonjára illeszkedjenek $\quad$ *b*) a függvény grafikonja felett legyenek
   c) a függvény grafikonja alatt legyenek!
7. Egy tartályhoz 2 cső szállítja a vizet. Az I. csap másodpercenként 2 l vizet, a II. csap 3 l vizet képes szállítani. A 1000 l-es tartályban kezdetben 200 l víz van. Mennyi víz lesz a tartályban 1 s, 10 s, 50 s, 112 s múlva, illetve mikor telik meg a tartály, ha
   a) csak az I. csapot nyitjuk meg $\quad$ *b*) csak a II. csapot nyitjuk meg
   c) mindkét csapot megnyitjuk $\quad$ *d*) felváltva nyitjuk-zárjuk a csapokat 10 másodpercenként?
   Ábrázold koordináta-rendszerben az eltelt idő és a tartályban levő vízmennyiség közti összefüggést!
8. Ábrázold a következő függvényeket és add meg a legbővebb értelmezési tartományukat a valós számok halmazán: $\quad a(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{4x - 6} + 2$, $\quad b(x) = \dfrac{(x - 3)^2 + (x + 3)^2 - 18}{x} + 2$.
9. Az $f(x)$ függvény elsőfokú, $f(1) = 3$ és $f(100) = 399$. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát! Hol veszi fel a függvény 0 értéket?
10. Az elsőfokú $f(x)$ függvény grafikonja olyan $m = \frac{2}{5}$ meredekségű egyenes, mely illeszkedik a $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ pontra. Add meg az $f(x)$ hozzárendelési szabályát!
11. Melyik az a lineáris függvény, melynek grafikonja illeszkedik a $P(-3, 4)$, $Q(2, -8)$ pontokra?

12. Ábrázold a következő függvényeket:

$$a(x) = \begin{cases} x+3, & \text{ha } x \leq 0, \\ x-3, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < 3, \\ 2x-5 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Melyik függvény folytonos? Határozd meg a következő értékeket: $a(-\frac{5}{3})$, $b(-\frac{5}{3})$, $a(4)$, $b(4)$.

13. Add meg azt a függvényt, melynek grafikonja az az egyenes, mely átmegy a $P(-1,2)$ ponton és
    a) az x tengellyel $+45°$-os szöget zár be
    b) az x tengellyel $-45°$-os szöget zár be
    c) az x tengellyel $+90°$-os szöget zár be
    d) az x tengellyel $+60°$-os szöget zár be
    e) az x tengely negatív irányában 2 egységet haladva 5 egységet emelkedik.

Elemi függvénytranszformációk

- $f(x) + a$: az f függvény grafikonjának eltolása az y-tengely mentén pozitív irányba a-val ($a < 0$ esetén negatív irányba tolunk $|a|$-kel).
- $a \cdot f(x)$ $(a > 0)$: az f függvény grafikonjának az x-tengelyre merőleges a-szoros (függőleges) nyújtása. $a > 1$ esetén nyújtás, $0 < a < 1$ esetén zsugorítás.
- $-f(x)$: az f függvény grafikonjának tükrözése az x-tengelyre.
- $f(x + a)$: az f függvény grafikonjának eltolása az x-tengely mentén negatív irányba a-val ($a < 0$ esetén pozitív irányba tolunk $|a|$-kel).
- $f(a \cdot x)$ $(a > 0)$: az f függvény grafikonjának az y-tengelyre merőleges $\frac{1}{a}$-szoros (vízszintes) nyújtása. $a > 1$ esetén zsugorítás, $0 < a < 1$ esetén nyújtás.
- $f(-x)$: az f függvény grafikonjának tükrözése az y-tengelyre.

A másodfokú függvények

Másodfokú függvényeknek nevezzük az $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú függvényeket, ahol a, b, c tetszőleges, rögzített valós számok, $a \neq 0$. Sokszor hasznos módszer a <u>teljes négyzetté alakítás</u>, ami az $ax^2 + bx + c$ kifejezés átalakítása vele egyenlő $a(x-u)^2 + v$ alakra.

Minden másodfokú függvény grafikonja parabola.

Feladatok:

1. Ábrázold a következő függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben:
   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = 3x^2$
   b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2$
   c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$, $h(x) = 4 - x^2$
   d) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-2)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$, $k(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$
   e) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = -2(x+2)^2$, $k(x) = -2(x+2)^2 + 3$.
2. Ábrázold a következő függvények grafikonjait, majd határozd meg a függvények értékkészletét (a függvényértékek halmazát) és azt, hogy hol metszik a tengelyeket!
   a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$
   b) $g(x) = -3x^2 + 6x - 4$.

3. Ábrázold a következő függvények grafikonjait! Hol monoton a függvény, van-e minimuma, maximuma? Mennyi a függvény minimuma, maximuma a $[-10, 10]$ intervallumon?

   a) $f(x) = -2x^2 - 6x - 1$ *b)* $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$.

4. Add meg azt a másodfokú függvényt, amelyre

   a) $f(-1) = 1, f(0) = 5, f(1) = 3$ *b)* $f(1) = 0, f(3) = 1, f(-1) = 1$.

5. Határozd meg a c értékét úgy, hogy a következő függvény egyik zérushelye -2 legyen:

   a) $f(x) = x^2 + 2x + c$ *b)* $f(x) = (x + 2)(c - x) + 1$.

6. Ábrázold a következő függvényeket:

$$a(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{ha } x \leq 0, \\ -x^2 - 2x, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{ha } x < 1, \\ 3 & \text{ha } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - x & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

   a) $1 - 2x < 4 - x^2$ *b)* $(x + 1)^2 - 2 \geq 2x + 3$.

A reciprok és az abszolútérték függvény: feladatok

1. Ábrázold a következő függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $h(x) = \frac{2}{x-2}$, $k(x) = \frac{2}{x-2} - 2$

   b) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 1|$, $h(x) = -2|x + 1|$, $k(x) = -2|x + 1| - 1$

   c) $f(x) = |x^2|$, $g(x) = |x^2 + 1|$, $h(x) = |x^2 - 2|$

   d) $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = |x - 1|$, $h(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

   Mely intervallumokon monotonok az utolsóként felsorolt függvények? Van-e minimumuk, maximumuk a $[-10, 10]$ intervallumon?

2. Ábrázold az $f(x) = \frac{5}{x} - 2$ függvény grafikonját. Hogyan válasszuk meg az x értékét, hogy 2 és 10 közötti függvényértéket kapjunk?

3. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $\frac{3}{x} \geq x + 2$.

Függvény inverze

Tetszőleges H és K esetén az $f : H \to K$ függvény <u>inverzé</u>nek azt a K és H közötti hozzárendelést nevezzük, amelyet úgy kapunk, hogy minden K-beli elemhez hozzárendeljük az összes H-beli f általi ősét. Azaz ha f az (x, y) párok halmaza, akkor inverze az (y, x) párok halmaza lesz. Azt mondjuk, hogy f <u>invertálható</u>, ha az f inverze függvény. A derékszögű koordináta-rendszerben az f inverzének grafikonja megkapható az f grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükrözésével.

Példaként tekintsük a négyzetgyökfüggvényt. Az x nemnegatív valós szám <u>négyzetgyök</u>én azt a szintén nemnegatív számot értjük, aminek a négyzete x; ezt a számot $\sqrt{x}$-szel jelöljük. Ekkor az $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ függvény inverze a $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvény.

Továbbá, lineáris függvény inverze lineáris függvény.

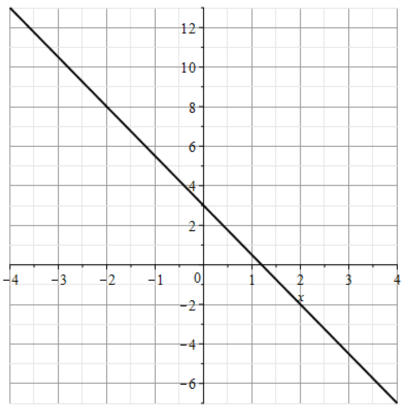
Feladatok:

1. Add meg képlettel az $f(x) = 5x + 4$ függvény inverzét! Ábrázold mindkét függvényt közös koordi-náta-rendszerben!
2. Add meg képlettel, és ábrázold koordináta-rendszerben az $f(x) = \frac{4}{x-2} + 3$ függvény inverzét!
3. Ábrázold a következő függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben:
   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = 2\sqrt{-x}$, $k(x) = 2\sqrt{-x} - 1$
   b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, $h(x) = \sqrt{2x} + 2$
   c) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x}$.

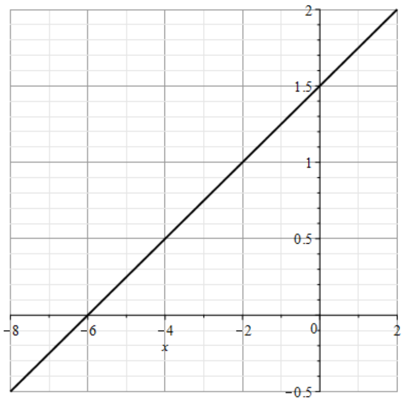
Grafikonok a koordináta-rendszerben: feladatok

1. Add meg a grafikon alapján a következő függvények hozzárendelési szabályait:

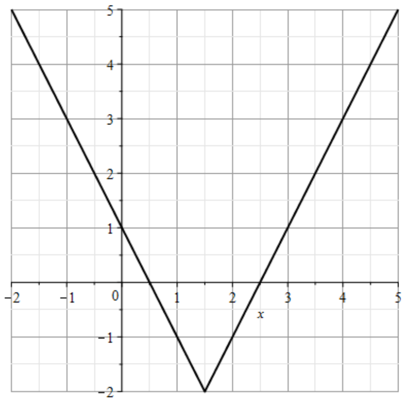
a)



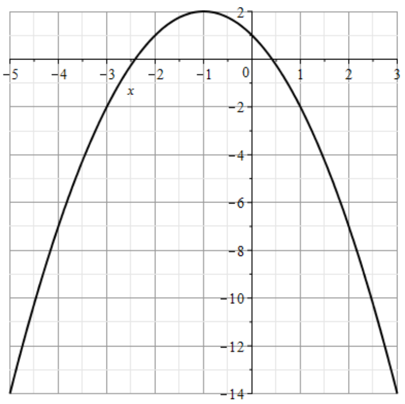
b)



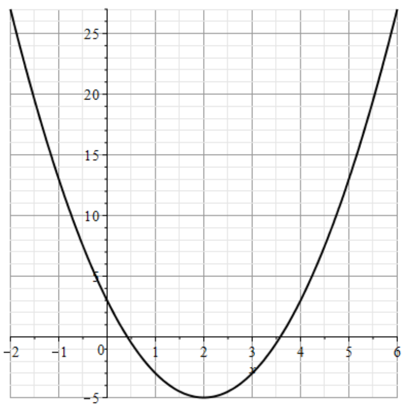
c)



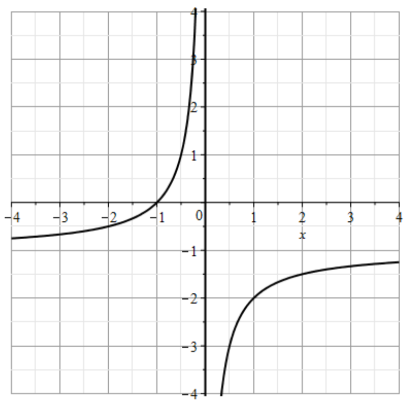
d)



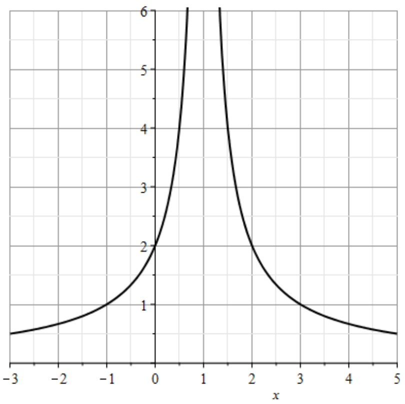
e)



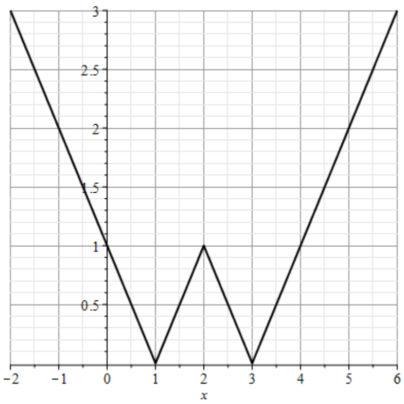
f)



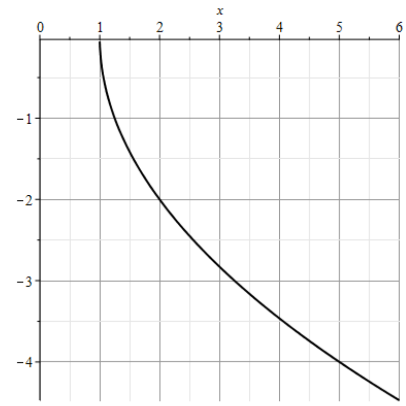
g)



h)



i)



2. Egymás után alkalmaztunk két függvényt, sorrendben, az

   a) $f(x) = \frac{1}{3}x$ és a $g(x) = x - 5$ *b)* $f(x) = x - 5$ és a $g(x) = \frac{1}{3}x$

   c) $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = |2x|$ *d)* $f(x) = \{x\}$ és a $g(x) = x^2$

   e) $f(x) = |x| - 1$ és a $g(x) = |x - 1|$ *f)* $f(x) = \frac{2x}{3}$ és a $g(x) = [x]$

   függvényt. Ábrázold a kapott $g(f(x))$ összetett függvény grafikonját!

Koordináta-geometria: feladatok

1. Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x, y)$ pontokat, melyekre

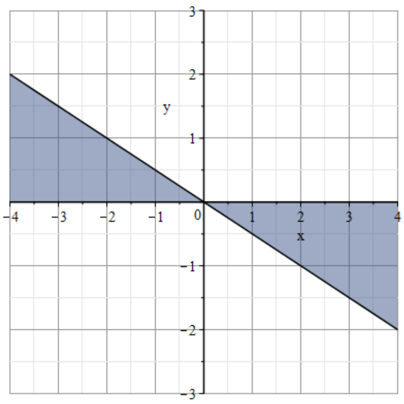
   a) $x > 2$ és $x \leq 7$ *b)* $x \geq 2$ és $y \leq 1$ *c)* $x = y$ és $y > 2$

   d) $x > y$ és $x \leq 3$ *e)* $x + y \geq 3$ *f)* $x + y = 2$ vagy $2x + y < -2$

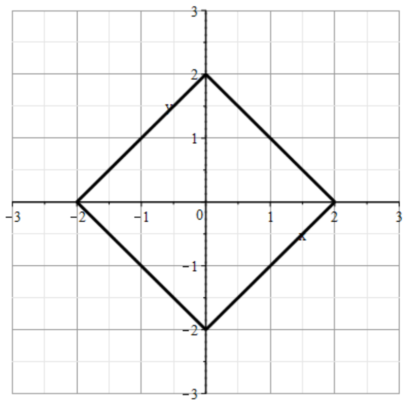
   g) $2x + y \geq -1$ vagy $x + 2y \geq -1$ *h)* $x^2 + y \leq 2$ és $-x + 3y < 2$ *i)* $[x] + y \geq 2$ és $2x + y \leq 4$.

2. Határozd meg, milyen feltételekkel adtuk meg a besatírozott $P(x, y)$ pontokat:

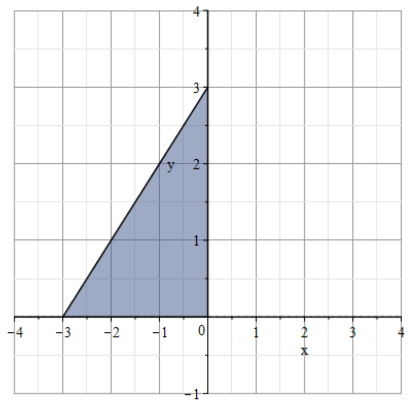
a)



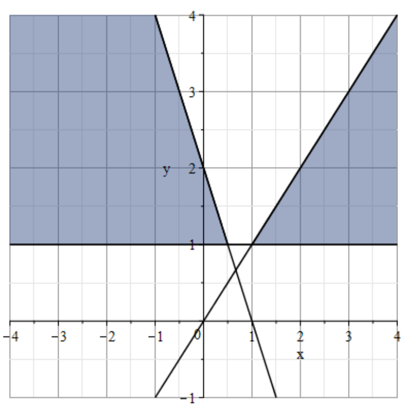
b)



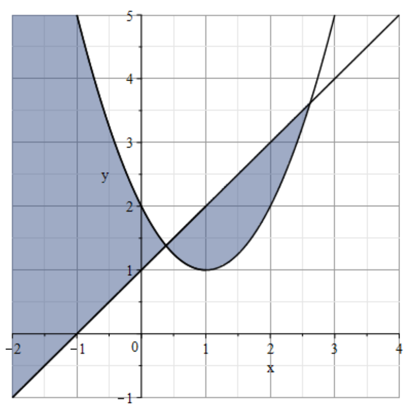
c)



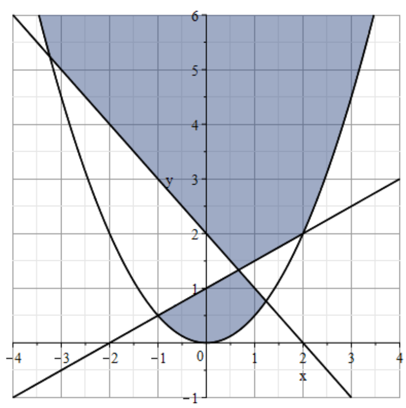
d)



e)



f)



3. Számítsd ki a koordináta-tengelyek és a $-8x + 5y - 40 = 0$ egyenletű egyenes által közrezárt háromszög területét!

4. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(5, 3)$, $D(6, 0)$ pont. Az $f(x) : [-1, 6] \to \mathbb{R}$ függvény legyen az a függvény, melynek grafikonja az $ABCD$ töröttvonal. Add meg az f-et leíró képletet, számítsd ki a grafikonja és az x-tengely által közrezárt terület nagyságát, és a függvény „átlagát” a $[-1, 6]$ intervallumon!

5. Írd fel az $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$, $C(-1, -4)$ csúcsú háromszög súlyvonalainak egyenleteit!

6. Egy háromszög csúcsai $A(2, -2)$, $B(8, 4)$, $C(10, 2)$. Tükrözd a háromszöget az x-tengelyre! Számítsd ki az eredeti és a tükörkép háromszög metszetének területét!
7. A sík minden sokszögéhez rendeljük hozzá a sokszög

   a) kerületét *b*) területét.

   Függvény-e ez a hozzárendelés, ha igen, akkor kölcsönösen egyértelmű-e, kitöltő-e?

Távolság, kör a koordináta-rendszerben

Bizonyítható, hagy az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok távolságát a $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ képlettel lehet kiszámolni.

Az (x_0, y_0) középpontú, r sugarú körvonal egyenlete $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, míg a körlap pontjai az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ feltétel által meghatározottak.

Feladatok:

1. A sík minden pontpárjához rendeljük hozzá azt a valós számot, ami a távolságuk. Függvény-e ez a hozzárendelés, ha igen, akkor kölcsönösen egyértelmű-e, kitöltő-e?
2. Milyen háromszöget határoznak meg az

   a) $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$, $C(5, -1)$ *b*) $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$, $C(2, -1)$

   pontok? Mekkora a háromszög kerülete ill. területe?
3. Számítsd ki a $P(-3, 2)$ és az $y = -\frac{1}{2}x + 4$ egyenes távolságát!
4. A sík minden pont-egyenes párjához rendeljük hozzá a pont és az egyenes távolságát. Függ-vény-e ez a hozzárendelés, ha igen, akkor kölcsönösen egyértelmű-e, kitöltő-e?
5. Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben a következő feltételek által meghatározott ponthalmazt: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 \leq 8$ és $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 25$.
6. Írd fel annak körvonalnak az egyenletét, melynek AB átmérőjének végpontjai

   a) $A(-2, -3)$, $B(3, -2)$ *b*) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$.
7. Egy kör középpontja a $(-2, 1)$ pont, sugara 5 egység. Számítsd ki a körvonal azon pontjainak koordinátáit, melyeknek

   a) abszcisszája 5 *b*) ordinátája 2.
8. Ábrázold a koordináta-rendszerben a következő, egyenletükkel megadott alakzatokat:

   a) $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 55 = 0$ *b*) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 20$ *c*) $x^2 + y^2 + 2xy = 4$.

Grafikonok, diagramok, átlagok: feladatok

1. Egy túrázó reggel 9-kor indul az útjára. 3 órán át 4 km/h-val halad, majd pihen 2 órát, és 3 órán át 3 km/h-val halad tovább a végállomásáig. Ábrázold a megtett utat az idő függvényében. Mennyi volt az átlagsebessége a teljes út során? Hogyan szemléltethető az átlagsebesség a grafikonon?

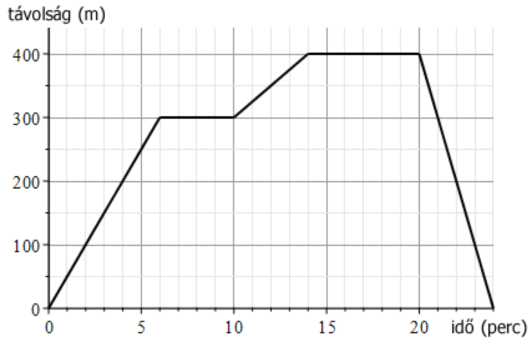
2. Egy osztályban a matematikatanár értékelte az év végi dolgozat eredményeit. Egy táblázatba beírta, hogy hányan kaptak 5-öst, 4-est, stb., és azt is, hogy ez a tanulók hány százaléka. A háta mögül kilestünk néhány adatot:

érdemjegy	5-ös	4-es	3-as	2-es	1-es
tanulók száma	5	8			2
összes tanuló hány %-a			28	12	

a) Egészítsd ki a táblázatot!
b) Határozd meg a jegyátlagot!
c) Készíts oszlopdiagramot!
d) Készíts kördiagramot!

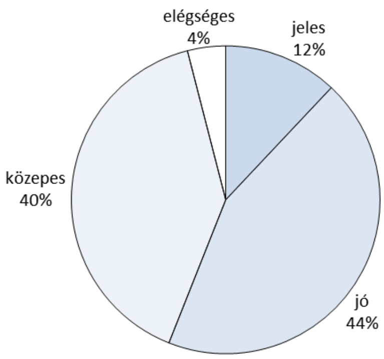
3. Dávid elment az osztálytársához, Évihez, kölcsönkérni egy könyvet, közben vett magának egy fagyit. Dávid mozgásáról az alábbi grafikon készült, melyen a vízszintes tengelyen az indulás óta eltelt időt, míg a függőleges tengelyen a kiindulóhelytől mért távolságot jelöltük.

a) Készíts táblázatot a grafikon alapján! Tüntesd fel a táblázatban, hol és mikor állt meg Dávid!
b) Határozd meg, hogy melyik útszakaszon haladt a leggyorsabban, és mennyi utat tett meg Dávid percenként az egyes szakaszokon!
c) Mekkora volt Dávid átlagos távolsága a házuktól?



4. A 25 fős 6/a osztályban és a 6/b osztályban is felmérőt írtak matematikából. A két osztály eredményeit az alábbi diagramok mutatják.

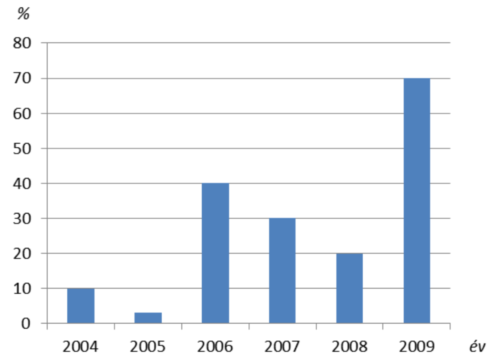
6/a



6/b

a) A 6/a-ban vagy a 6/b-ben volt több jeles?
b) Melyik osztályban volt nagyobb a közepesek osztálylétszámhoz viszonyított aránya?
c) Ábrázold a két osztály összes gyerekének eredményét egy kördiagramon!

5. A városi levegő tisztasága érdekében folyamatosan fejlesztik a bicikliutakat. A diagram egy városban a bicikliutak hosszának százalékos növekedését mutatja az előző évi hosszhoz képest.
   a) Melyik évben nőtt a bicikliutak hossza legalább az ötödével?
   b) Hányszorosára nőtt 2 év alatt a bicikliutak hossza 2008–2009-ben?
   c) Mennyi a bicikliutak hossza 2009 végén, ha 2007 elején 60 km volt?
   d) Melyik évben volt az azévi és az azelőtti (százalékos) növekedés aránya a legnagyobb?



6. Egy gyár 1992-ben 320000 TV-t készített, 8 évvel később pedig már 560000 TV-t gyártott.
   a) Hány darabbal, és hány százalékkal nőtt a termelés a 8 éves időszakban?
   b) Hány darab, és hány százalék a termelés évi átlagos növekedése a 8 éves időszakban?
7. Az iskolaorvos megmérte a 7. osztályos fiúk és lányok testtömegét kilogrammban.
   Fiúk: 44, 54, 50, 47, 50, 58, 53, 45, 40, 65, 72, 44, 57, 49, 41, 47, 59, 70, 49, 46, 39, 45.
   Lányok: 56, 39, 49, 67, 46, 47, 41, 45, 53, 51, 63, 51, 70, 47, 60, 44, 62, 54, 32, 49, 56.
   a) Készíts sávos gyakorisági diagramot, a sávok legyenek 5 kilogrammonként!
   b) Számolj a sávokba eső gyerekek számából relatív gyakoriságot, és ábrázold!

Irodalomjegyzék

- Csordás Mihály, Konfár László, Pintér Klára, Vincze Istvánné, Kozmáné Jakab Ágnes, Kothencz Jánosné: Sokszínű matematika – tankönyv 5, 6, 7, 8; Mozaik kiadó, Szeged, 2008.
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika – gimnáziumi tankönyv 9, 10, 11, 12; Mozaik kiadó, Szeged, 2009.
- Kosztolányi József, Mike János, Palánkainé Jakab Ágnes, Dr. Szederkényi Antalné, Vincze István: Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek; Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994.

Készítette: Dr. Kórus Péter, SZTE JGYPK API Tanítóképző Tanszék, Szeged, 2020.