A relativisztikus Doppler-effektus és a relativisztikus aberráció

Olvasólecke
A relativitáselmélet alapjai c. kurzus
Relativisztikus optika fejezetéhez

Gergely Árpád László

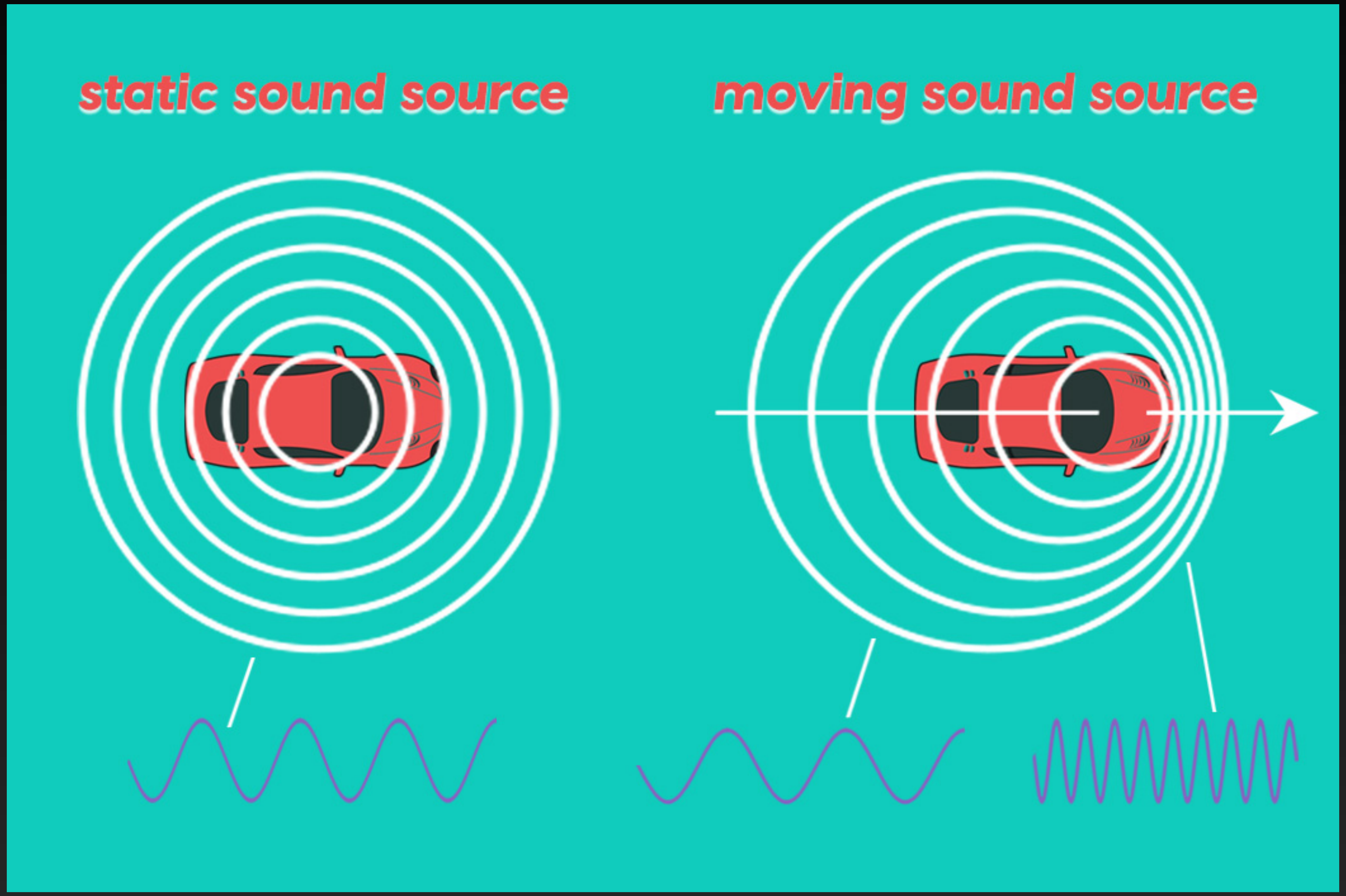
2020

A nemrelativisztikus Doppler-effektus

- Hanghullámok esetén a mindennapokban jól ismert effektus (kollineáris konfigurációra)

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{c_s \pm u_{\text{observer}}}{c_s \mp u_{\text{source}}} \right)$$

- c_s a hangsebesség
- fényforrásra is igaz
- a felső előjelek a megfigyelő és a forrás egymás felé történő, az alsók az ellentétes irányú mozgásokra érvényesek
- sérti a speciális relativitáselmélet első posztulátumát, mivel a forrás és a megfigyelő nem szimmetrikusan jelenik meg



https://flypaper.soundfly.com/discover/what-is-the-doppler-effect/

A relativisztikus Doppler-effektus: mozgó forrás

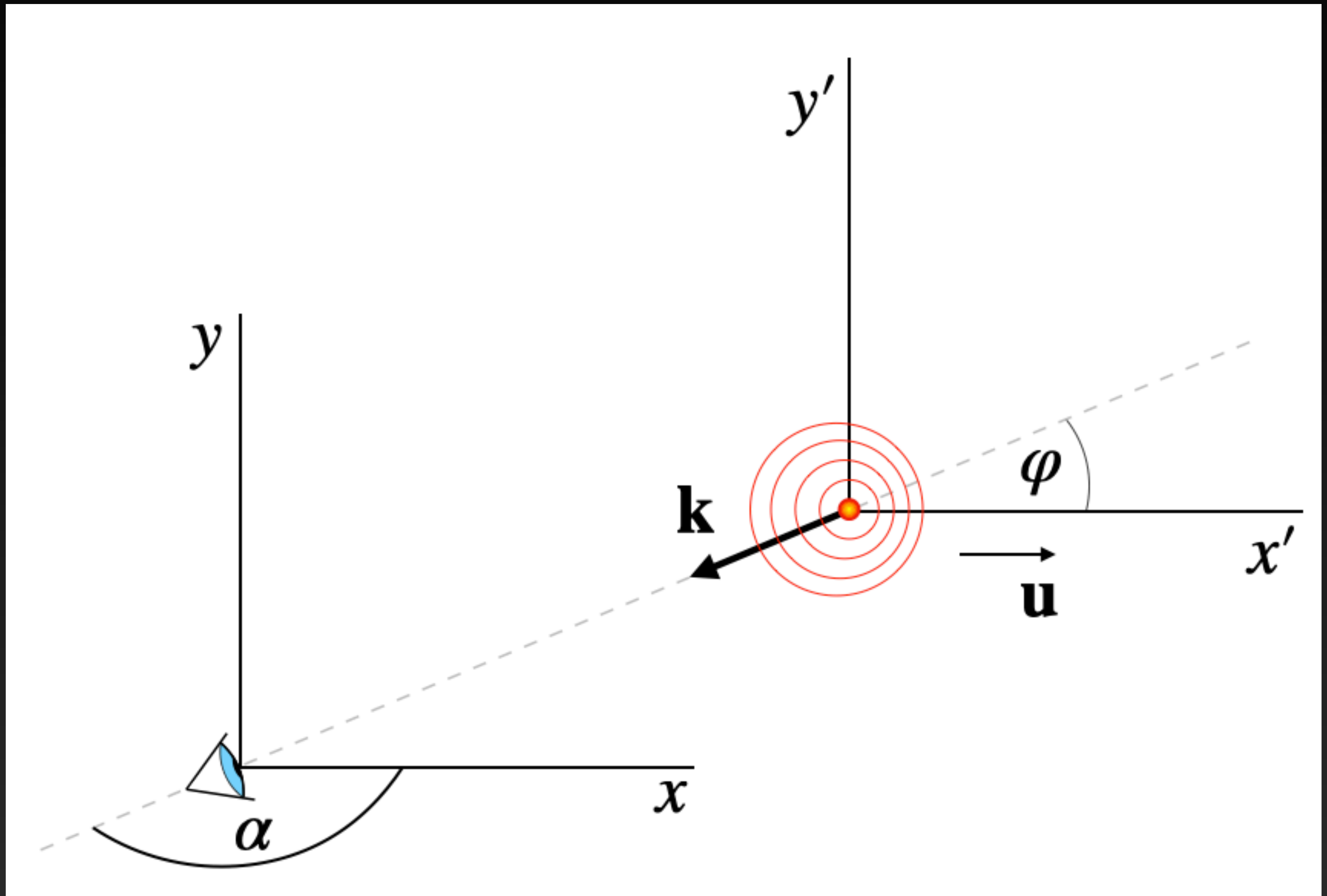
- A sugárforrás az x-irányba mozog a megfigyelőhöz képest, de az x-iránnyal (időben változó) θ szöget zár be
- A forrás rendszerében a sugárzás izotróp, de a megfigyelő rendszeréből nézve Doppler-eltolódást szenved el
- A k^a négyes-hullámvektor Lorentz-transzformációja:

$$k^{0\prime} = \gamma k^0 - \gamma\beta\left(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}}\right)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \left[\left(\gamma - 1\right)\left(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}}\right) - \gamma\beta\mathbf{k}^0\right]\hat{\mathbf{u}}$$

ahol $\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}} = k\cos\alpha\,,\quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

$k = \left|\mathbf{k}\right| = k^0 = \dfrac{\omega}{c}$ és $k' = \left|\mathbf{k}'\right| = k^{0\prime} = \dfrac{\omega_0}{c}$



Gergely Árpád László: A relativitáselmélet alapjai, egyetemi jegyzet (2020)
[Az ábra Gergely Cecília munkája.]

$$\omega = \omega_0 \frac{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}{1+\beta\cos\varphi}$$

A relativisztikus Doppler-effektus: mozgó forrás

- Lassan mozgó forrás határeset: $\omega^{\text{source}}_{\text{nonrelativistic}} = \dfrac{\omega_0}{1 + \beta \cos \varphi}$

($\varphi = 0$ esetben visszaadja az ismert nemrelativisztikus eredményt)

- Tetszőlegesen gyors mozgás $\varphi = 0$ mellett: $\omega = \omega_0 \left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$

$\longrightarrow$ Radiális (longitudinális) Doppler-effektus

- A megfigyelő és forrás legkisebb szeparációjánál $\varphi = \pi/2$: $\omega = \omega_0 \left(1 - \beta^2\right)^{1/2}$

$\longrightarrow$ Tranzverzális Doppler-effektus

a radiális Doppler-effektus Newton határesete $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\dfrac{u}{c}$

a tranzverzális Doppler-effektus viszont tisztán relativisztikus jellegű !

(1963-ban, Mössbauer technológia alkalmazásával igazolták olyan kísérleti berendezésben, ahol a γ-sugárforrás egy gyorsan forgó korong közepén, a detektorok pedig a peremén voltak)

A relativisztikus Doppler-effektus: mozgó megfigyelő

- Ha a megfigyelő mozog a sugárforráshoz képest $-\mathbf{u}$ sebességgel, az inverz Lorentz-transzformáció alapján a szögfrekvencia Doppler-megváltozása:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \beta \cos \varphi'}{\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}}$$

- Itt $\varphi' = \pi - \alpha'$, ahol α' a forrás rendszeréből látszó sugárzási irány és a sebesség szöge

Lassan mozgó forrás határeset: $\omega^{\text{observer}}_{\text{nonrelativistic}} = \omega_0 \left(1 - \beta \cos \varphi'\right)$

($\varphi' = 0$ esetben visszaadja az ismert nemrelativisztikus eredményt)

Tetszőlegesen gyors mozgás $\varphi' = 0$ mellett: $\omega = \omega_0 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^{1/2}$

→ Radiális (longitudinális) Doppler-effektus

(Ebben a sajátos esetben ugyanaz, mint a mozgó forrás esetén !)

A megfigyelő és forrás legkisebb szeparációjánál $\varphi' = \pi/2$:

→ Tranzverzális Doppler-effektus $\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}}$

A tisztán relativisztikus jellegű tranzverzális Doppler-effektus ebben a konfigurációban kékeltolódást jelent

SAJNOS általános esetben a megfigyelő és forrás közötti szimmetria még mindig NEM látszik !!

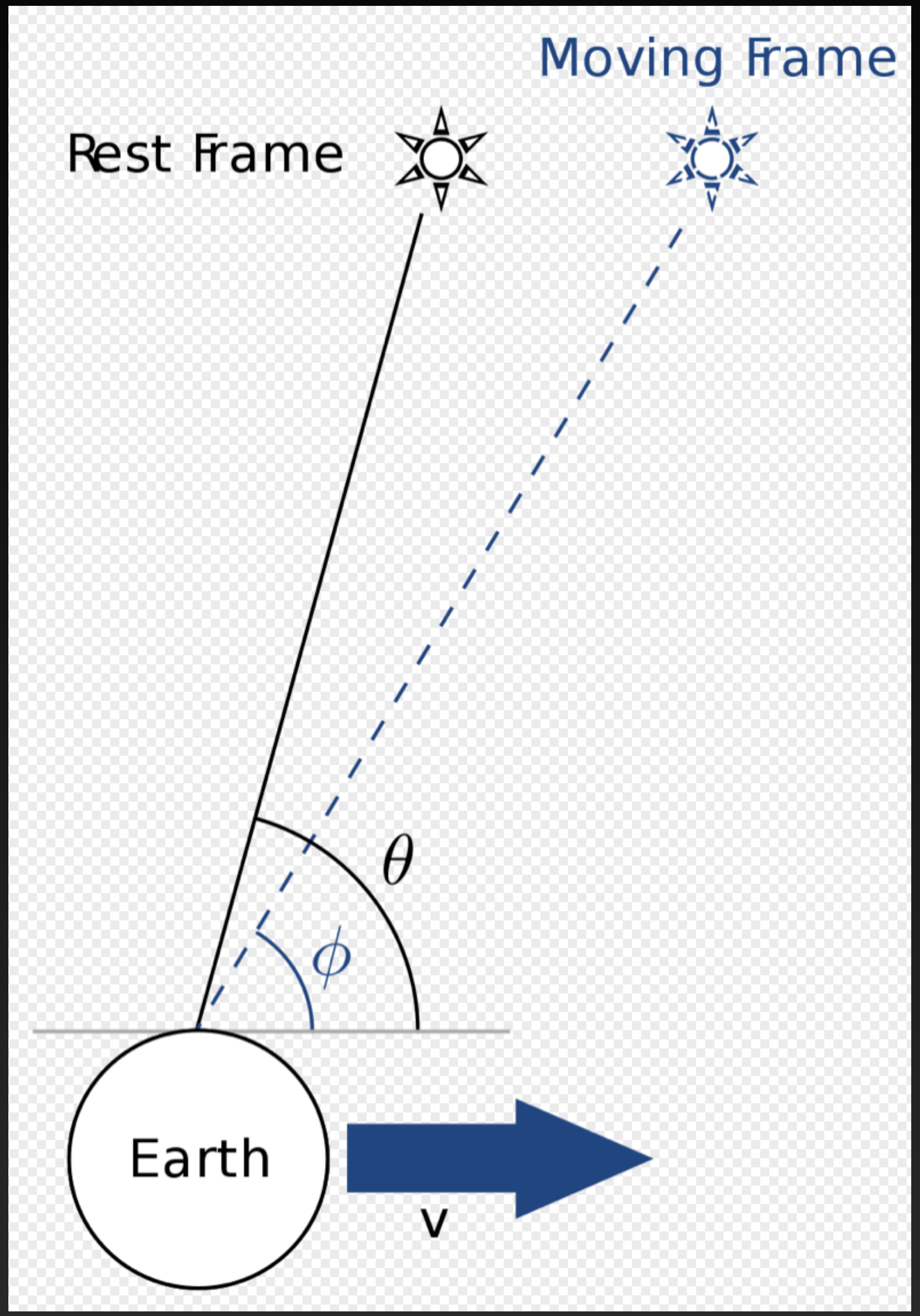
A relativisztikus aberráció

- Az aberráció az a jelenség, mely szerint egy tárgy mozgásállapota befolyásolja, hogy milyen szög alatt látszik

- Nemrelativisztikus aberráció például az, hogy a függőlegesen hulló esőcseppek ferdén látszanak hullani a mozgó vonat ablakából

- A relativisztikus aberráció a sugárzás irányának függése a mozgásállapottól

- Pl. a Doppler-effektus kapcsán már felmerült, hogy a megfigyelő a forrást a relatív sebesség által meghatározott x-tengelyhez képest φ szögben látja, míg a forrás rendszerében ugyanez a szög φ'



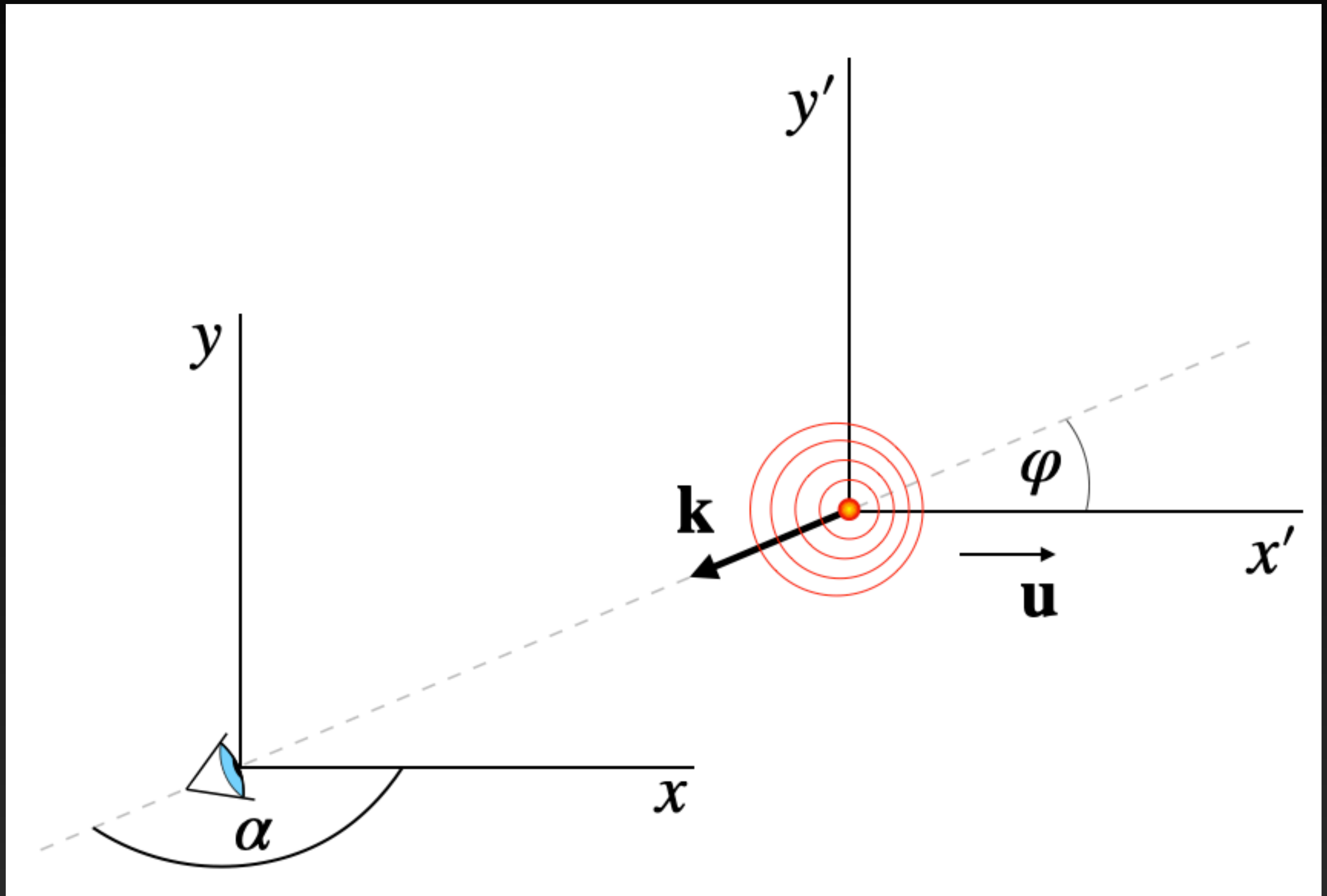
https://en.wikipedia.org/wiki/Aberration_(astronomy)

- Aberráció a csillagászatban: a csillag látszólagos helyzete a Föld mozgásától is függ

A relativisztikus aberráció

- a foton az (x, y)-síkban:
  $v^x = -c\cos\varphi,\ v^y = -c\sin\varphi$ sebességgel,
  az u sebességgel x-irányú mozgást végző
  (x', y') síkban pedig:
  $v^{x'} = -c\cos\varphi',\ v^{y'} = -c\sin\varphi'$
  sebességgel halad (a negatív előjelek azt fejezik ki, hogy a sugárzás visszafelé terjed)
- **A sebességek Lorentz-transzformációja:**

$$v^{x'} = \frac{v^x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v^x}, \qquad v^{y'} = \frac{v^y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v^x\right)}$$



Gergely Árpád László: A relativitáselmélet alapjai, egyetemi jegyzet (2020)
[Az ábra Gergely Cecília munkája.]

megadja a két rendszerben látszó szögek kapcsolatát $\longrightarrow$ aberrációs formulák

A relativisztikus Doppler-effektus szimmetriája

Relativisztikus Doppler-effektus mozgó megfigyelő esetén:

$$\omega = \omega_0 \frac{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}{1+\beta\cos\varphi}$$

Relativisztikus Doppler-effektus mozgó forrás esetén:

$$\omega = \omega_0 \frac{1-\beta\cos\varphi'}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}$$

Relativisztikus aberráció képletei:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi+\beta}{1+\beta\cos\varphi}\,, \quad \sin\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\gamma\left(1+\beta\cos\varphi\right)}\,, \quad \tan\frac{\varphi'}{2} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}\tan\frac{\varphi}{2}$$

A relativisztikus aberráció egyik furcsasága

- Ha egy (x', y') sajátrendszerű test az x -tengelytől mért kis φ, illetve kis φ' szög alatt látszik a két rendszerben, ezek kapcsolata a $\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi'}{\gamma\left(1-\beta\cos\varphi'\right)}$ relativisztikus aberrációs formula alapján:

$$\varphi \simeq \frac{\varphi'}{\gamma\left(1-\beta\right)} = \varphi'\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2}$$

- Kis β értékekre és feltéve, hogy a megfigyelő és a test közelednek egymáshoz (azaz $\beta < 0$):

$$\varphi \simeq \varphi'\left(1-\left|\beta\right|\right) + \mathcal{O}\left(\beta^2\right)$$

Ez azt jelenti, hogy az (x, y) rendszerbeli megfigyelő a testet kisebbnek látja, mint az sajátrendszerében látszik. OK

Minél inkább igyekszik közelebb kerülni, növelve a relatív közeledési sebességet, annál kisebbé válik a tárgy. NAHÁT !

Úgy tűnik, hogy amikor gyorsulni kezdünk a tárgy felé, azt távolodni látjuk! MICSODAAA?

A jelenség megszűnik, amikor a test szögnagysága már nem tekinthető kicsinek, így a közelítő eredmény elveszti érvényességét.
VISSZA A JÓ ÖREG NEWTONI VILÁGHOZ ...

Honnan tudhatunk meg többet a témáról?

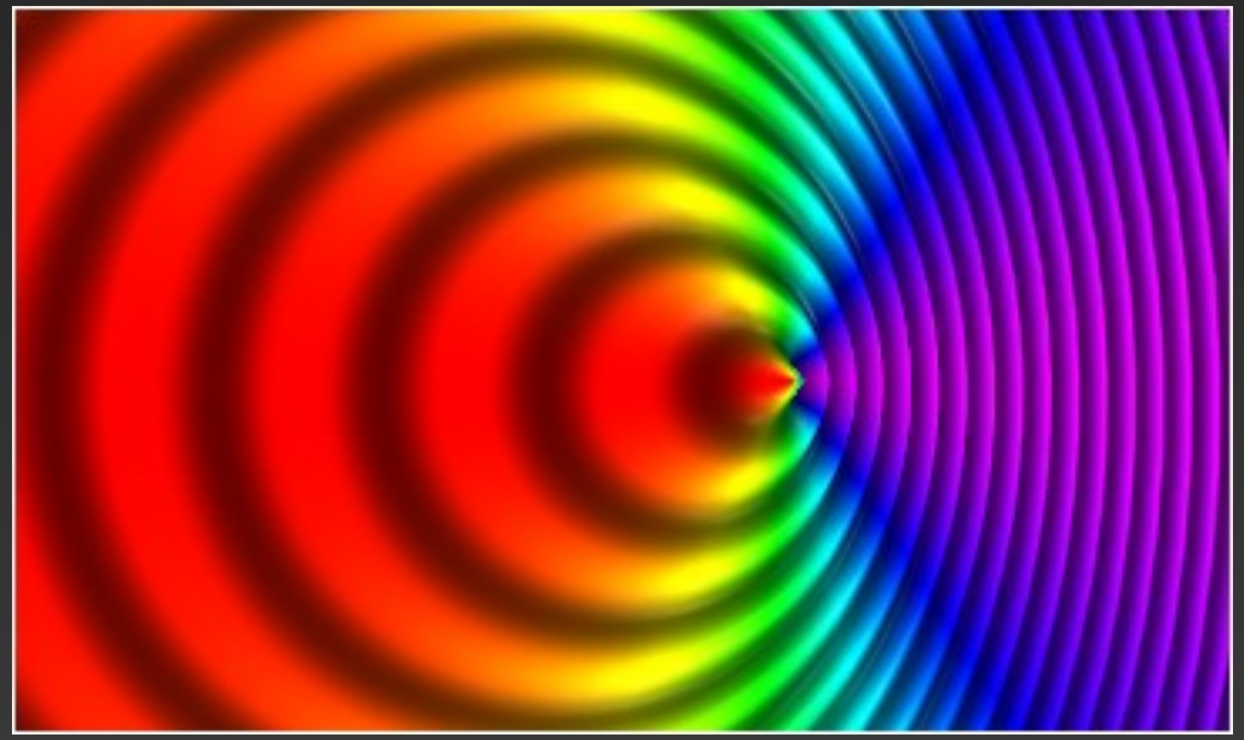
- Gergely Árpád László: A relativitáselmélet alapjai, egyetemi jegyzet (2020)
- https://www.youtube.com/watch?v=dfNoFx__M6o (vicces YouTube video a jelenség illusztrálására)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Doppler_effect (Wikipedia oldal)
- Speciális relativitáselméleti tankönyvek

Ellenőrző kérdések

1. Miért várható el, hogy a Doppler-effektus szimmetrikus legyen a megfigyelő és a forrás felcserélésére?
2. Mikor nagyobb a Doppler-eltolódás, ha a forrás közeledik a megfigyelőhöz, vagy fordítva? (A relatív sebesség ugyanaz.) Válaszold meg relativista és newtoni aggyal is.

Kitekintés

Gondolkozz azon, miként lehetne olyan tranzverzális Doppler-effektust létrehozni, ahol nem kék-, hanem vöröseltolódás jön létre !



https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Doppler_effect#/media/File:Velocity0_70c.jpg

JELEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Az olvasóleckét formai szempontból lektorálta: Majorosi Szilárd