

Gravitációs vörös- és kékeltolódás: elmélet, kimutatás, alkalmazás

Olvasólecke

A relativitáselmélet alapjai c. kurzus

Betekintés az általános relativitáselméletbe fejezetéhez

Az általános relativitáselmélet

- Einstein új gravitációelmélete (1915)
- A gravitáció nem erő, hanem téridő-görbület

- Az anyag megmondja a téridőnek, hogyan görbüljön

Einstein-egyenlet:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

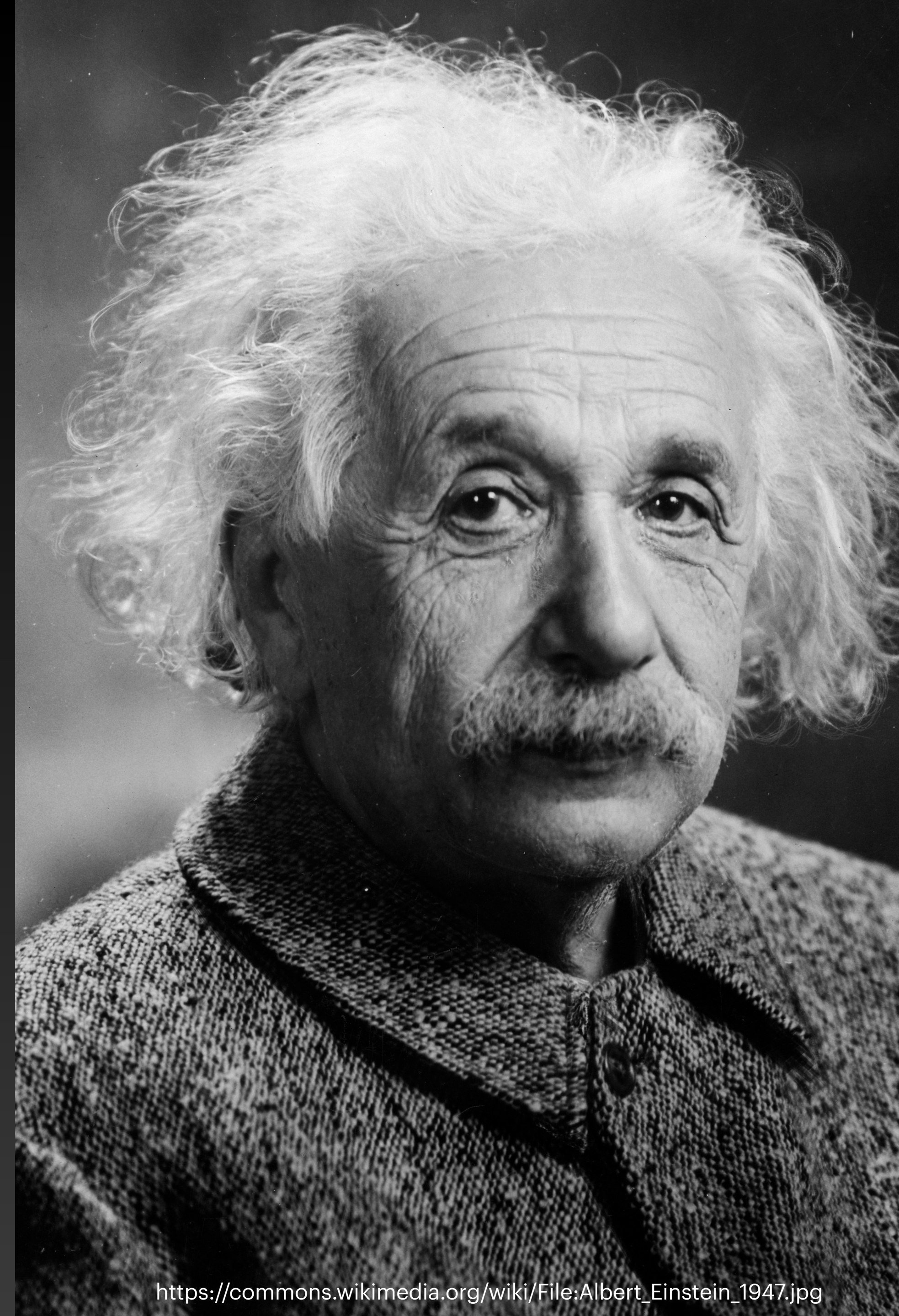
geometria anyag

- A téridő megmondja az anyagnak, hogyan mozogjon

Geodetikus egyenlet:

$$\frac{d^2 x^c}{d\tau^2} = - \Gamma_{ab}^c \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau}$$

gyorsulás geometria



A gravitációs potenciál

- Einstein elméletében a g_{ab} **metrikus tenzor**
- Segítségével számolható az **ívelem-négyzet**

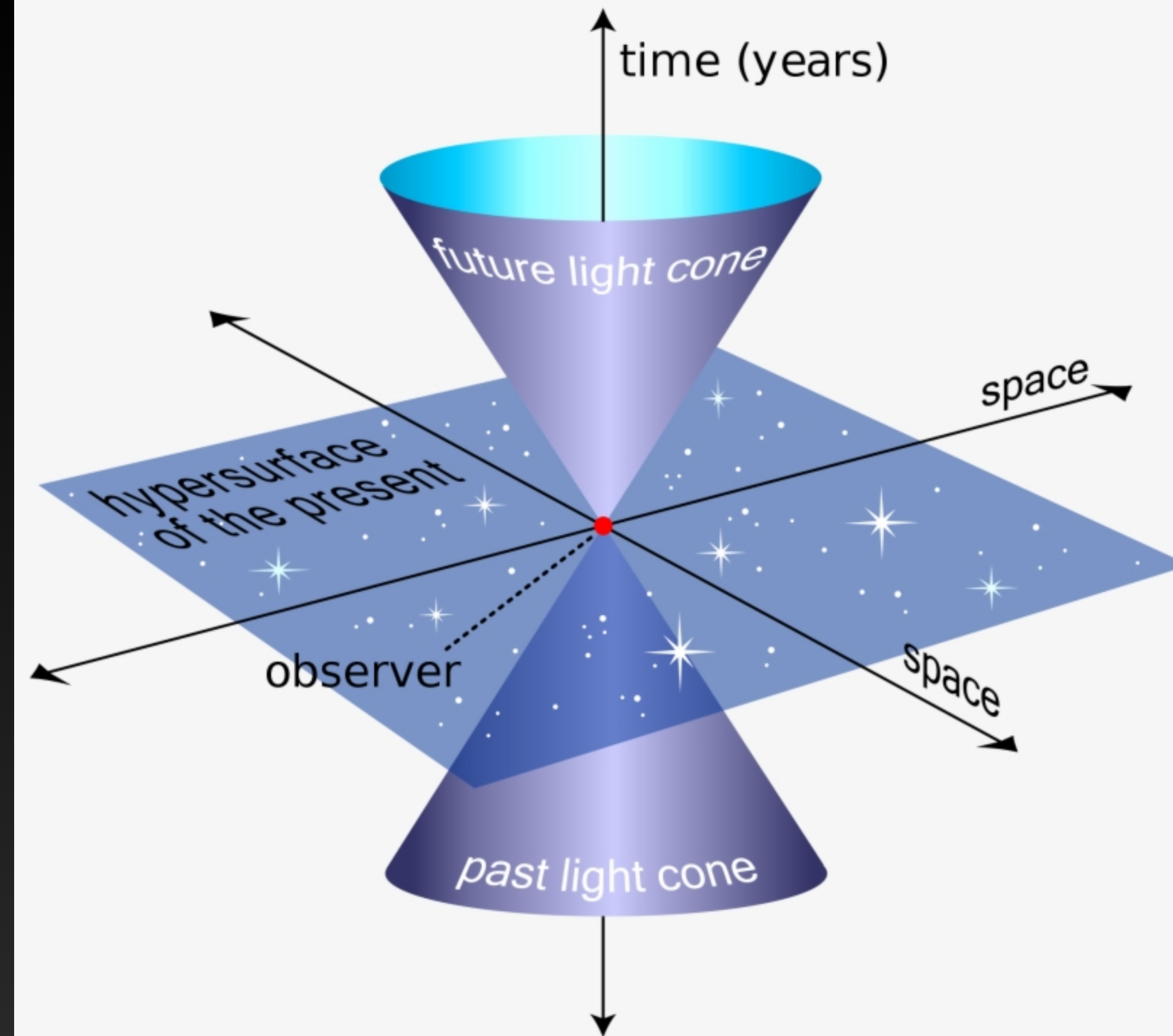
$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$$

→ **Fénykúp-szerkezet**

- Gömbszimmetrikus, sztatikus gravitációban:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 + 2\phi)^{-1}dr^2 + d\Omega^2$$

ahol $\phi = -\frac{GM}{r}$ a **newtoni gravitációs potenciál**



https://www.pngkey.com/detail/u2r5a9t4t4r5t4u2_an-example-of-a-light-cone-the-three/

Minden megfigyelő órája másképp jár !

- A gravitációs térben mozgó megfigyelő sajátrendszerében $ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2$

Itt t az aszimptotikus (végtelen távolságra levő) megfigyelő sajátideje
(mivel ott ϕ eltűnik, így t a Minkowski-metrikából ismert sajátidő lesz)

- A mozgó megfigyelő τ sajátidejét $ds^2 = - c^2 d\tau^2$ adja meg

→ $dt = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right)^{-1/2} d\tau > d\tau$

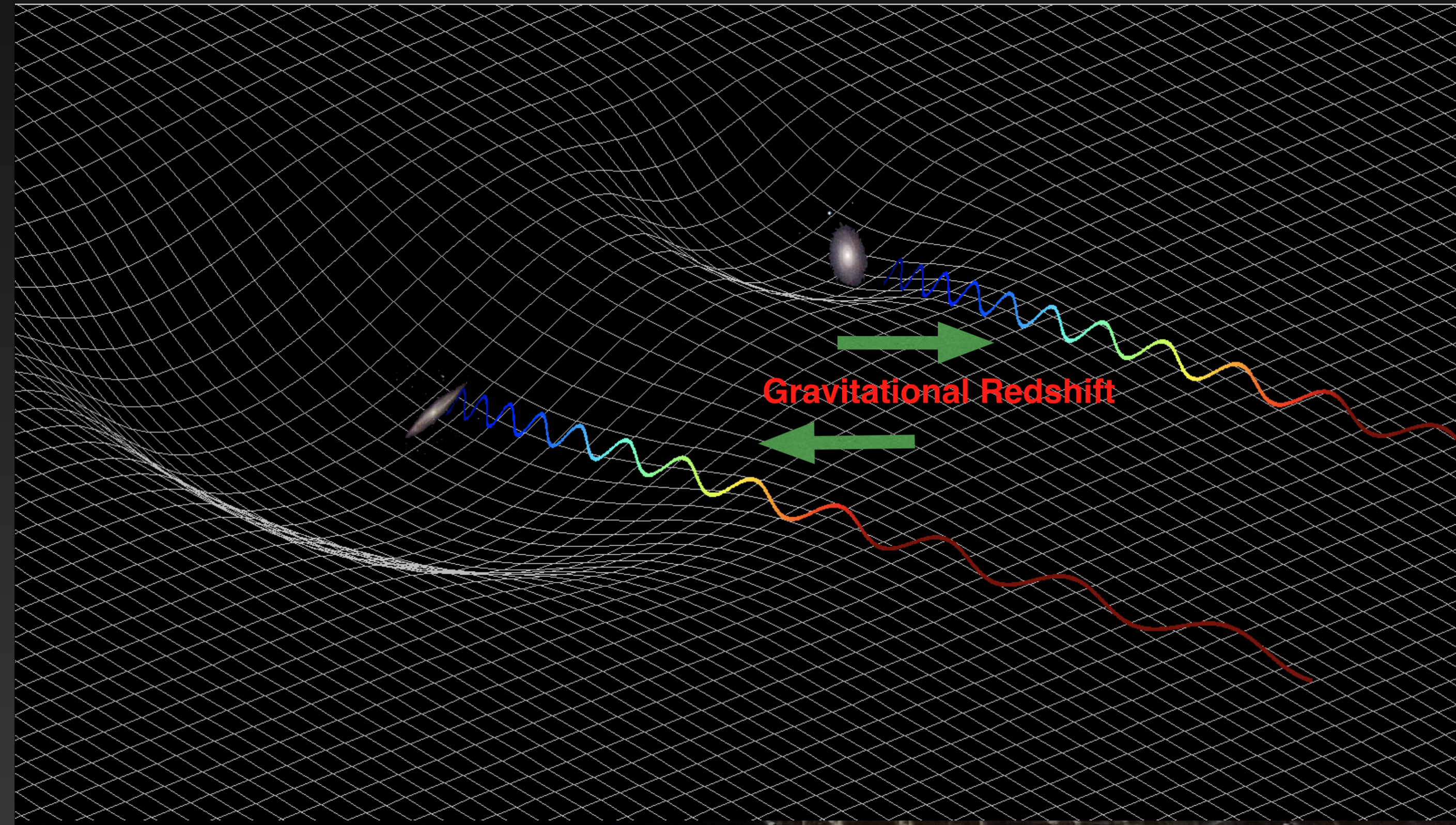
- A távoli megfigyelő órája lassabban jár !
- Leggyorsabban a gravitációs térben lévő megfigyelő órája jár !!

→ A gravitációs térből kijövő hullámok frekvenciája csökken

Gravitációs vörösetolódás / kékeltołodás

Nagyobb gravitációjú helyről kisebb gravitációjú helyre érkező sugárzás frekvenciája **vörösetolódik**
Kisebb gravitációjú helyről nagyobb gravitációjú helyre érkező sugárzás frekvenciája **kékeltołodik**

- A **frekvencia a legnagyobb** a gravitációs térben mozgó megfigyelő sajátrendszerében
- Ebben a rendszerben a **gravitáció és inercia kompenzálják egymást (ekvivalencia elv)**
= **lokális inerciarendszer**
- Ebben a rendszerben **telik leggyorsabban az idő !**



A Pound—Rebka kísérlet

A Pound—Rebka kísérletet 1959-ben hajtották végre, célja **a gravitációs vöröseltolódás kimutatása** volt. Az általános relativitáselmélet szerint a fotonok energiája megnő (frekvenciájuk kékeltolódik), amikor erősebb gravitációs mezőbe kerülnek. A kísérletben γ -sugárzó ^{57}Fe kristályt helyeztek a Harvard Egyetem Jefferson laboratóriumának $h=22,5$ m magas tornya tetejére (T), majd a sugárzás frekvenciáját a torony aljában (A) ugyanilyen elnyelő kristály szcintillációs számlálóval történő megfigyelésével mérték.



https://en.wikipedia.org/wiki/Pound-Rebka_experiment#/media/File:JeffersonLeft.jpg

A Pound—Rebka kísérlet

A torony alján mért ω_A szögfrekvencia **gravitációs kéeltolódása** a forrás $\omega_T = \omega_\gamma$ szögfrekvenciájához képest

$$\frac{\omega_A}{\omega_\gamma} = \frac{d\tau_T}{d\tau_A} = \left(\frac{1 + \frac{2\phi_T}{c^2}}{1 + \frac{2\phi_A}{c^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2(R_\oplus + h)}}{1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2R_\oplus}} \right)^{1/2} > 1$$

Ahhoz, hogy a torony aljába a sugárzás mégis szokásos frekvenciájával érkezzon meg (és így elnyelődhessen a detektorban), a torony tetején lévő sugárforrást felfelé mozgatták. Így a távolodó forrásra ($\beta > 0$) vonatkozó radiális (longitudinális) **Doppler**-effektusból származó **vöröseltolódás** is fellép.

$$\frac{\omega_A}{\omega_\gamma} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} < 1$$

β alkalmas megválasztásával kompenzálható a gravitációs kéeltolódás !!

$$\left(\frac{1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2(R_\oplus + h)}}{1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2R_\oplus}} \right) \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) = 1 \quad \longrightarrow \quad v \approx \frac{g}{c}h = 7,368\,2 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$$

A Global Positioning System (GPS)

- A globális műholdalapú navigációs rendszerek (GNSS, Global Navigation Satellite Systems) legismertebb tagja a **GPS** (amerikai, 24 műhold)
- Egyéb globális rendszerek:

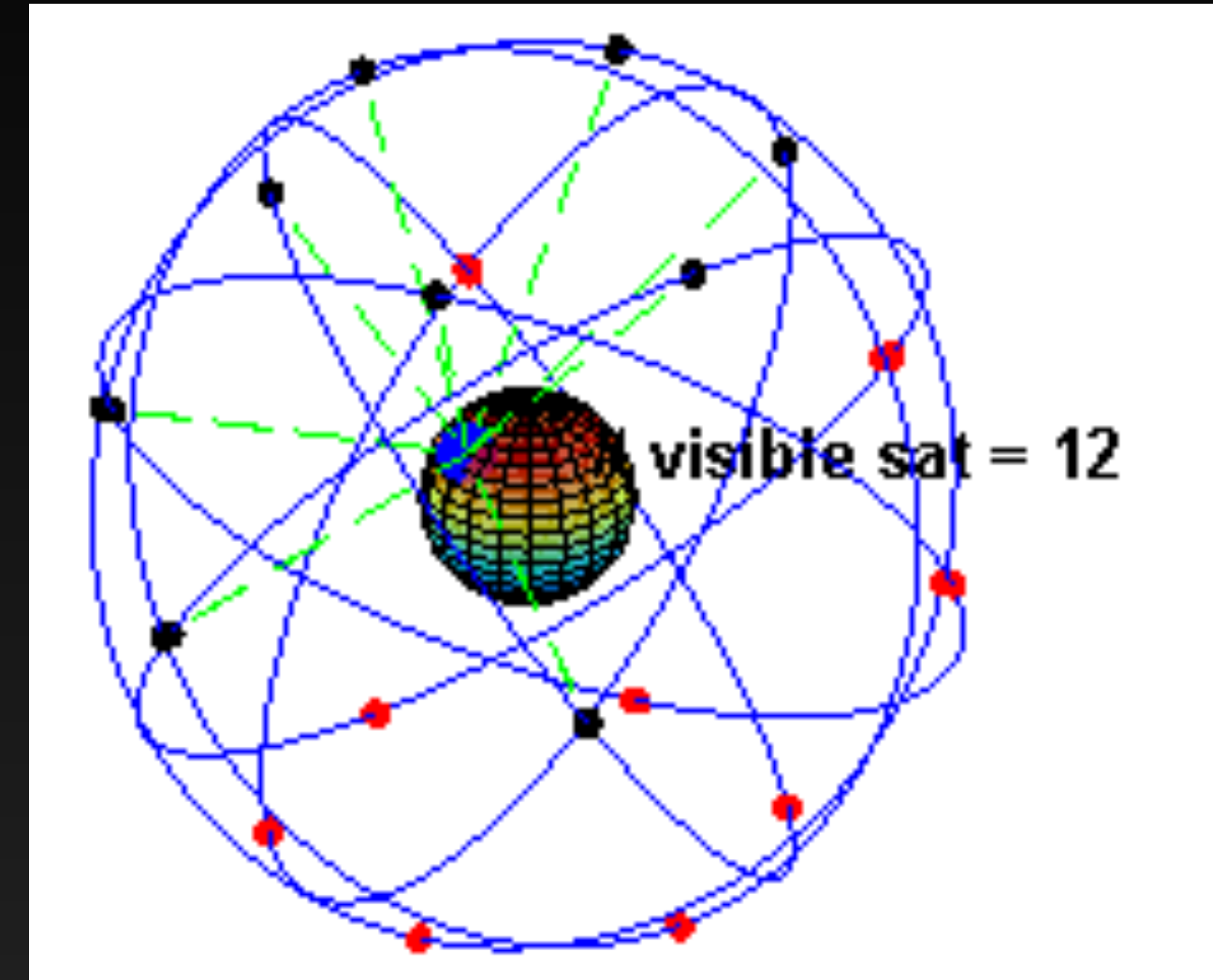
GLONASS (orosz, 24 műhold)



BeiDou (kínai, 55 műhold)



Galileo (európai, 26 műhold)



https://hu.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System#/media/Fájl:ConstellationGPS.gif



- A **GPS** 24 darab atomi órákat hordozó műholdból áll, amelyek mintegy $h_{sat} = 20000 \text{ km}$ magasságban, négyesével 6 darab, a Föld egyenlítői síkjával 55° -os szöget bezáró síkban elhelyezkedve, $T_{sat} = 11 \text{ óra } 58 \text{ perc}$ enként kerülik meg a Földet
- A **műholdak rádiósugárzása tartalmazza a kibocsátás** atomi órák által megadott pontos **időpontját** és a műhold aktuális **helyzetét**. Az **észlelés időpontjával** összehasonlítva, következtetni lehet a **műhold távolságára**.

A Global Positioning System (GPS)

A Δx helymeghatározási pontosság folyamatosan javul, eléréséhez az időt $\Delta x/c$ pontossággal kell ismerni. A jelenleg elérhető legjobb pontosság mintegy 30 cm, ehhez az időkülönbséget ns pontossággal kell ismerni! De a legegyszerűbb GPS-vevők is képesek az 5÷15 méteres helymeghatározásra, ekkor az **50 ns pontosság** elegendő.

Relativisztikus hatások:

1. A műhold földfelszínhez viszonyított relatív mozgása $\beta \approx 10^{-5}$

Doppler-effektusból származó idődilatáció → **vöröseltolódás**

Az idődilatációs együttható $\gamma_u = (1 - \beta^2)^{-1/2} \simeq 1 - \beta^2/2$, a korrekciós együttható $\simeq -5 \times 10^{-11}$

A szükséges 50 ns pontosságtól való eltérés mintegy 1000 s, azaz 17 perc alatt bekövetkezik

Egy nap során 4,3 μ s eltérés halmozódik fel !

2. A műholdak jele kisebb gravitációjú helyről érkezik a földfelszínre → **gravitációs kékeltolódás**

$$\frac{d\tau_{\text{sat}} - d\tau_{\text{surface}}}{d\tau_{\text{sat}}} = 1 - \left(\frac{1 - \frac{2GM_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}}}{1 - \frac{2GM_{\oplus}}{c^2 (R_{\oplus} + h_{\text{sat}})}} \right)^{1/2} \simeq 5,28 \times 10^{-10}$$

tízszer nagyobb effektus, mely 114 s alatt okoz eltérést a kívánt pontosságtól és egy nap során 45 μ s eltéréshez vezet.

A speciális relativisztikus idődilatáció és az általános relativisztikus kékeltolódás figyelembevétele nélkül a GPS rendszer egy teljes nap után 11,4 km-es eltéréssel mutatná GPS-vevő helyzetet !

Honnan tudhatunk meg többet a témáról?

- Gergely Árpád László: A relativitáselmélet alapjai, egyetemi jegyzet (2020)
- https://www.youtube.com/watch?v=6tbCk_4Tk10 (YouTube video)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_redshift (Wikipedia oldal)
- Általános relativitáselméleti tankönyvek

Ellenőrző kérdések

1. Mi a közös a Pound-Rebka kísérletben és a GPS működésében? Mi a fő különbség?
2. Mekkora a gravitációs vöröseltolódása a megfigyelő sms-einek, amikor az

$$r = \frac{2GM}{c^2} \text{ ún. Schwarzschild-sugárhoz érkezik?}$$

Kitekintés

A gravitáció **bonyolultabb** is lehet, mint a gömbszimmetrikus, sztatikus esetben. A **fekete lyukak** általában **forognak**. Kapcsolatba tudod hozni az **Event Horizon Telescope** által az **M87** galaxis központi fekete lyukáról készített felvételt az itt tanultakkal ?



JELLEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Az olvasóleckét formai szempontból lektorálta: Majorosi Szilárd