Matematika 2.

Lineáris algebra 3.

Algebrai struktúra

$\mathcal{H}$ egy nem üres halmaz, Ω: $\mathcal{H}$-n értelmezett műveletek halmaza

$(\mathcal{H}, \Omega)$ párt algebrai struktúrának hívjuk.

Példa

$\mathcal{H} = \mathbb{N}$ — természetes számok: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\Omega =$ „+" — összeadás — művelet

↳ $a, b \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow a + b \in \mathcal{H}$

A kivonás NEM MŰVELET $\mathbb{N}$-en: $1, 2 \in \mathbb{N}$

$1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$

↳ KIVEZET A HALMAZBÓL

Speciálisan: TEST (ez a neve a struktúrának)

az a következő

$(\mathcal{H}; +, \cdot)$ ha teljesülnek az alábbiak:

ÖSSZEADÁSNAK, SZORZÁSNAK NEVEZETT MŰVELET

i. $\mathcal{H}$-nak legalább 2 eleme van;

ii. + művelet asszociatív, kommutatív, továbbá $\exists\, h \in \mathcal{H}$: $h + a = a$ $\forall a \in \mathcal{H}$ (h az ún. NULLELEM, mert épp úgy viselkedik, mint a számok között a nulla); továbbá

$\forall a \in \mathcal{H}\ \exists a^* \in \mathcal{H}:\quad a + a^* = h$ (

a^* és a egymásnak ADDITÍV (összeadásra vonatkozó) INVERZE. Épp úgy, mint $\mathbb{Z}$-ben: 1 additív inverze -1, mert $1+(-1)=0$)

iii · művelet asszociatív (mi a kommutativitást is feltételezzük, ezért mi kommutatív testről beszélünk); továbbá $\exists e \in \mathcal{H}$:

$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in \mathcal{H}$ (e az ún. EGYSÉGELEM, mert épp úgy viselkedik, mint a számok között az 1); továbbá

$\forall a \in \mathcal{H} \setminus \{h\}$ ~~[illegible]~~ $\exists a^{-1} \in \mathcal{H}: \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (

NULLELEM

a és a^{-1} egymás MULTIPLIKATÍV (szorzásra vonatkozó) INVERZE. Épp úgy, mint $\mathbb{Q}$-ban: $\frac{1}{3}$ multiplikatív inverze a 3: $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$)

iv $\forall a, b, c \in \mathcal{H}: \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

PÉLDA . a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a szokásos műveletekkel

b) $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ 2×2-es mátrixok testet alkotnak: + és · műveletek alapján könnyű látni, hogy $A, B, C \in \mathcal{H}$: $A+B=B+A$ — komm.

$A+(B+C)=(A+B)+C$ — asszoc.

ADDITÍV INVERZ

$A + (-A) = 0$, ahol $-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$ - komm.

$(AB) \cdot C = A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & abc \end{pmatrix}$ - asszoc.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ az egységeleme a szorzásnak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$

MULTIPLIKATÍV INVERZ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

FELADAT Mmh (mutassuk meg, hogy)

1) $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 4a & 8a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$ 2x2-es mtx-ok a szokásos mátrix összeadással és szorzással testet alkotnak

2) $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 2x2-es mtx-ok a szokásos mátrix összeadással és szorzással testet alkotnak.

Definíció (T test fölötti VEKTORTÉR)

$V \neq \emptyset$: $u, v \in V$; $\lambda, \mu \in T$ (T gyakorlatilag nálunk $\mathbb{R}$) V-t T test fölötti vektortérnek hívjuk, ha

- $u + v \in V$ (vektorok összeadása)
- $\lambda \cdot u \in V$ (skalárral való szorzás); továbbá

+ művelet: asszociatív, kommutatív; van ZÉRUS-ELEM (NULLELEM): $u + 0 = 0 + u = u$ $\forall u \in V$;
minden elemnek van additív inverze:
$$u + (-u) = -u + u = 0 \in V$$

Skalárral szorzás művelet:

- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$ $\qquad \lambda, \mu \in T$; $u \in V$
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$ $\qquad \lambda \in T$; $u, v \in V$
- $(\lambda \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu u)$ $\qquad \lambda, \mu \in T$; $u \in V$
- $e \cdot u = u$, ahol $e \in T$ egységeleme (gyakorlatilag nálunk az $1 \in \mathbb{R}$ szám) $\forall u \in T$

V elemeit vektornak hívjuk. Nem biztos, hogy a jól ismert vektorról van szó!!!

PÉLDA

1, A sík ($\mathbb{R}^2$), a tér ($\mathbb{R}^3$) origóból kiinduló vektorai $\mathbb{R}$ valós számok teste fölött vektortér

2, $m, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{R}^{m \times n}$ — az $m \times n$-es valós számokat tartalmazó mátrixok a szokásos mátrix műveletekkel

$\hookrightarrow$ $m = 2$, $n = 3$ (például)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$
$b_{ij} \in \mathbb{R}$
$i = 1, 2, 3$

$A+B \in \mathbb{R}^{2\times3}$ ✓

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$ ✓

$\forall a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \exists \ -1 \cdot a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$:

$$\underbrace{A+\overline{A}}_{\text{ADDITÍV INVERZ}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — ZÉRUSELEM}$$

Skalárral való szorzás tulajdonságai triviálisak, lévén $\mathbb{R}$ számokat jól ismerjük.

3.) A legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza (P_2 jelü) az $\mathbb{R}$ fölött

$n=2$ (például)

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2 \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P_2 \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

MŰVELETEK:

$+$: $p(x) + q(x) = (a_2+b_2)\cdot x^2 + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0 \in P_2$ ✓

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot p(x) = \lambda a_2 x^2 + \lambda a_1 x + \lambda a_0 \in P_2$ ✓

$\forall a_i \in \mathbb{R} \quad \exists \ -a_i \in \mathbb{R}: \quad a_i + (-a_i) = 0 \Rightarrow \forall p(x) \ \exists \overline{p}(x)$:

$$p(x) + \overline{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + \underbrace{(-a_2x^2 - a_1x - a_0)}_{\text{ADDITÍV INVERZ}} = \underbrace{0}_{\text{ZÉRÓELEM}} \in P_2$$

Skalárral szorzás tulajdonságait most is mindenki könnyen le tudja ellenőrizni, lévén $\mathbb{R}$-beliek az együtthatók.

Legfeljebb 2-odfokú — 0, 1 vagy 2

Pontosan 2-odfokúak NEM alkotnak testet! — HF!

4.)

a) $a, b \in \mathbb{R}$; $C_{[a,b]}$: az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos valós értékű függvények. (Ugye, hogy szokatlan: függvények, mégis vektor-nak hívjuk most ebben a kontextusban.)

$f, g \in C_{[a,b]} \to$ ~~[illegible]~~

MŰVELETEK: $\begin{cases} (f+g)(x) := f(x) + g(x) \in C_{[a,b]} \checkmark \\ c \in \mathbb{R}, \quad c \cdot f(x) \in C_{[a,b]} \checkmark \end{cases}$

$c = 0 \Rightarrow 0 \cdot f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

konstans 0 függvény $\to$

$\to$ ZÉRUSELEM

$f \in C_{[a,b]}$ ADDITÍV INVERZE: $-f = -1 \cdot f(x)$.

A skalárral való szorzást most sem nézem végig, mert egészen magától értetődő, hiszen valós számokkal kellene számolni, amit jól ismerünk.

b.) $C \equiv C_{\mathbb{R}}$ – az egész számegyenesen folytonos függvények az a.)-ban bevezetett műveletekkel

ÁLLÍTÁS $\underline{v} \in V$, V vektortér $\mathbb{R}$ fölött; $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár. Ekkor

a.) $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$ (Megkülönböztetésül most $\_$ jelöli a vektortér elemeit.)

b.) $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

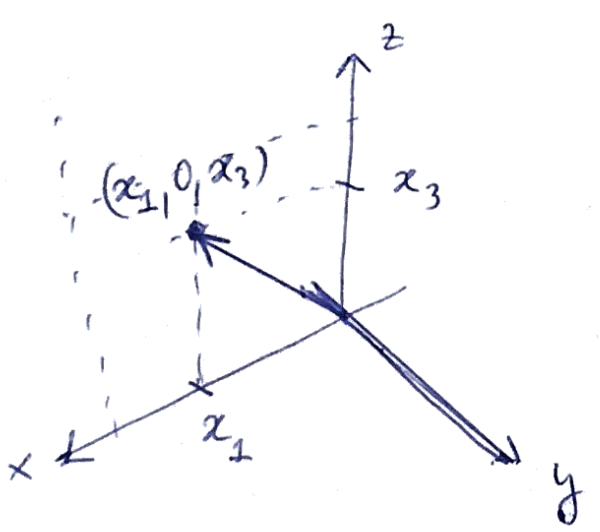
c.) Ha $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$, akkor vagy $\lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$.

d.) $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$.

<u>Definíció</u>. V vektortér ALTERE az U, ha $U \subset V$ (részhalmaz), és U maga is vektortér a V-beli műveletekkel.

<u>PÉLDA</u> Legyen $V = \mathbb{R}^3$. (Az előző 1. PÉLDABELI; tehát az origó kezdőpontú vektorok, amelyeket ezért a végpontjaikat jelölő szám n-es (térben 3-as, síkon 2-es) jelöl (a koordinátáik, ahogy mondjuk).)

$U := \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$. $U \subset V$.



U magyarán az összes xz síkba eső vektor halmaza

$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$, mert

$u_1 = (x_1, 0, x_3)$, $u_2 = (\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3)$

$u_1 + u_2 = (x_1 + \bar{x}_1, 0+0, x_3 + \bar{x}_3)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $u \in U \Rightarrow \lambda \cdot u \in \mathbb{R}$, mert

$\lambda \cdot (x_1, 0, x_3) = (\lambda x_1, \lambda \cdot 0, \lambda x_3) = (\lambda x_1, 0, \lambda x_3)$

A műveletek tulajdonságait mindenki le tudja ellenőrizni $\rightarrow$ U altere V-nek.

Amit fontos észrevenni: mi U zéruseleme?

$(0,0,0) \in U$, ÉS $(0,0,0) \in V$

$\rightarrow$ Ha U altere V-nek, akkor ugyanaz az elem a zéruselemük. Sőt, a legszűkebb altere V-nek a $\{\underline{0}\}$, a zéruselemet tartalmazó halmaz.

PÉLDA 1.) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$A = A^T$ (a mátrix megegyezik saját transzponáltjával) → A-t SZIMMETRIKUS mátrixnak hívjuk

Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor $U = S^{2\times 2}$, ahol $S^{2\times 2}$ a 2×2-es szimmetrikus mátrixok halmaza, altere V-nek: $\quad A_1, A_2 \in U \Rightarrow A_1 + A_2 \in U$,

mert
$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 ;$$
$$(\lambda \cdot A_1)^T = \lambda \cdot A_1^T = \lambda \cdot A_1 ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nem csak a 2×2-es mátrixok körében igaz, hanem általában az $n\times n$-esekre.

2.) $\quad C_{[0,1]}$ — a $[0,1]$-en folytonos fv-ek vektortere

$D_{[0,1]}$ — a $[0,1]$-en differenciálható függvények

→ $D_{[0,1]}$ altere $C_{[0,1]}$-nek

3.) $\mathbb{R}^2$ alterei:

$\{(0,0)\}$; {origón átmenő összes egyenes összes pontja};

$\mathbb{R}^2$ (önmagának altere)

TRIVIÁLIS ALTEREK

4.) $\mathbb{R}^3$ alterei

$\{(0,0,0)\}$; {origón átmenő összes egyenes összes pontja};

{origóra illeszkedő összes sík összes pontja};

$\mathbb{R}^3$

TRIVIÁLIS ALTEREK

FELADAT 1.) Mutassuk meg, hogy U altere V-nek

a) $V = \mathbb{R}^3$; $U = \{(x, y, 2x-3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

c*) $V = \{ f \in R_{[0,1]}$ – $[0,1]$-en integrálható függvények$\}$

$U = \{ f \in C_{[0,1]}$ – $[0,1]$-en folytonos függvények$\}$

2.) Mutassuk meg (adjunk egy ellenpéldát), hogy U NEM altere V-nek

a) $V = \mathbb{R}^3$; $U = \{(x, y, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $U = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} ; \det A = 0\}$

Definíció $v, u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ Azt mondjuk, hogy v az $u_1, u_2, \dots, u_k$ vektorok LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA, ha v-t az u_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ vektorok valamilyen $c_1, c_2, \dots, c_k$ skalárokkal előállítják:

$$v = c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2 + \dots + c_k \cdot u_k .$$

PÉLDA

1.) $S = \{ \underbrace{(1, 3, 1)}_{v_1 =}, \underbrace{(0, 1, 2)}_{v_2 =}, \underbrace{(1, 0, -5)}_{v_3 =} \} \subset \mathbb{R}^3$

v_1 lineáris kombinációja v_2-nek és v_3-nak:

$v_1 = 3 \cdot v_2 + v_3$, mert (oszlopvektorként fölírom, szerintem jobban látszódik)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

2, $S = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{v_1 =}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2 =}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{v_3 =}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{v_4 =} \Big\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

v_1 lin. komb-ja v_2, v_3, v_4 vektoroknak:

$$v_1 = v_2 + 2\cdot v_3 - v_4 .$$ (Ellenőrizzék le!)

Kérdés: hogyan lehet eldönteni hogy néhány vektor közül valamelyik a többinek lineáris kombinációja? Hogyan lehet megadni magát a lin. komb-t (tehát a skalárokat hogyan számoljuk ki)?

Példa 1.a. Legyen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, továbbá

$$S := \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1 =}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2 =}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3 =} \Big\}.$$

Keressük azokat a $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ számokat, melyekkel:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 .$$

A vektorok skalárral szorzása és összeadása szabályait használjuk (továbbá az egyenlőség szabályát)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} c_1 - c_3 = 1 & (1) \\ 2c_1 + c_2 = 1 & (2) \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Ahogy látjuk c_1, c_2, c_3 -ra ~~(kaptuk)~~ kaptunk egy lineáris egyenletrendszert. Ennek megoldása vagy megoldásai adják a választ.

Oldjuk meg az egyenletrendszert (Gauss–Jordan-eliminációval pl, vagy bármely középiskolában tanult módszerrel)

① + ③ : $4c_1 + 2c_2 = 2 \quad /:2$

$2c_1 + c_2 = 1$, ami ugyanaz, mint a ② egyenlet → végtelen sok megoldás

Legyen ezért c_3 a szabad paraméter, és c_1, c_2 számokat c_3 függvényeként adjuk meg.

① → $c_1 = 1 + c_3$

② → $c_2 = 1 - 2c_1 = 1 - 2\cdot(1 + c_3) = -1 - 2c_3$

$c_3 \in \mathbb{R}$

Legyen pl. $c_3 = 1$.

Ekkor $c_1 = 2$, $c_2 = -3$. Kaptuk tehát, hogy

$\underline{u = 2\cdot v_1 - 3v_2 + v_3}$.

1.b. $u = (1,-2,2)^T$; $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ugyanaz, mint az 1.a-ban. $c_1, c_2, c_3 = ?$: $u = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i$

Ugyanúgy, mint 1.a megoldásánál fölírjuk a lineáris kombinációt, majd ebből eljutunk a lineáris egyenletrendszerhöz, ami most:

$$\begin{cases} c_1 - c_3 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = -2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 2 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása (megoldásai) adják a választ.

A kiegészített mtx (amin a G-J-eliminációt hajtjuk végre):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③} - 3\cdot\text{①}]{\text{②} - 2\cdot\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③} - 2\cdot\text{②}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

A 3. sorból az következik, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek, tehát

az $(1,-2,2)$ vektor nem áll elő a v_1, v_2, v_3 vektorok lin. komb-ként.

Definíció

Ha egy vektortérben bármely vektor előáll vektorok egy S rendszere lineáris kombinációjaként, akkor amh S (az S-be eső vektorok) a vektortér egy generátorrendszere:

$S := \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$. S a V egy generátorrendszere, ha $\underset{\text{(bármely)}}{\forall} u \in V \underset{\text{(van olyan)}}{\exists} c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$:

$$u = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \dots + c_k \cdot v_k .$$

Példa

2.a) $S := \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy generátorrendszere, hiszen tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli u vektorra:

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad (u_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3)$$

$$u = u_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ vektorokat szokták $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$-mal vagy $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$-val is jelölni.

2b) $S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-2,0,1)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy (~~az~~ 2a-ban láthatótól eltérő) generátorrendszere. Legyen ugyanis $u \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges: $u = (u_1, u_2, u_3)$.
~~Azt~~ kell igazolni, hogy tudunk mondani olyan $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ skalárokat, hogy $u = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ahogy az 1.a és 1.b példákkál láttuk kapunk egy lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} c_1 - 2c_3 = u_1 \\ 2c_1 + c_2 = u_2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = u_3 \end{cases}$$

A kérdés az, hogy ennek a rendszernek van-e (egyértelmű) megoldása?

A korábban „megbeszélt" egyik tételünk azt állítja (ennek nézzenek utána a ... Linalg1.pdf-ben), hogy ha a fenti egyenletrendszer együttható mátrixára $\det A \neq 0$, akkor a rendszernek egyértelmű megoldása van.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{\substack{\text{szerint}\\\text{kifejtve}}}{\overset{\text{1. sora}}{=\!=\!=}} 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=1-0} - 0 \cdot |\ldots| + (-2) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=4-3} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy bármennyi is legyen u_1, u_2 és u_3 az egyenletrendszernek mindig van megoldása, azaz mindig találunk alkalmas skalárokat, tehát S az $\mathbb{R}^3$ egy generátorrendszere.

Gondoljuk meg, hogy 1.a és 1.b példákban szereplő S NEM generálja $\mathbb{R}^3$ vektorteret.

Megjegyzem, hogy egy V vektortér generátorrendszere egyben V egy altere is. (HF bebizonyítani)

Definíció

Az $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ halmaz $(S \subseteq V)$ vektorai lineárisan függők, ha közülük bármelyiket kiválasztva (pl. v_i-t) az a többi lineáris kombinációjaként előáll:

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} c_j \cdot v_j \quad , \quad c_j \in \mathbb{R}$$

Ha egy vektorrendszer nem lineárisan függő, akkor lineárisan független.

TÉTEL. Az $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ vektorrendszer akkor és csakis akkor lineárisan független, ha a zérusvektort a triviális lineáris kombináció állítja elő:

$$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Biz.: (Indirekt) Tfh. $\overbrace{\exists\, c_1, c_2, \dots, c_k}^{S \text{ lin függő, és}}$ nem mind 0 úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot v_i = 0 \, ,$$ ebből átrendezéssel adódik:

$$v_i = \frac{-c_1 v_1 - c_2 v_2 - \dots - c_k v_k}{c_i} = -\frac{c_1}{c_i} v_1 - \frac{c_2}{c_i} v_2 - \dots - \frac{c_k}{c_i} \cdot v_k \, .$$

Tehát a v_i jelű vektort (hisz föltevésünk szerint $\neq 0$) kifejezzük a többi segítségével $\Rightarrow$ v_i előáll a többi (nemnulla vektor) lin. komb-ként $\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k\}$ LINEÁRISAN FÜGGŐ !!! Ellentmond S-re tett föltevéssel.

Példa

3.a.) $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ lineárisan független vektorrendszer.

A tétel alapján azt kell (be)látni, hogy

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \text{egyenlet}$$

egyetlen megoldása a $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$.

Ezt viszont bárki látja, aki tudja hogyan kell a skalárral szorzást és a vektorok összeadását (és a vektorok egyenlőségét) érteni.

3b.) Az 1a. és 1b. példabeli S elemei lineárisan függő halmazt alkotnak:

$$S = \{\underbrace{(1,2,3)}_{=v_1}, \underbrace{(0,1,2)}_{=v_2}, \underbrace{(-1,0,1)}_{=v_3}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Könnyű látni: $2 \cdot \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{v}_1$.

Az egy természetes kérdés, hogy egy vektorrendszerről miként lehet eldönteni, hogy lin. függő vagy fgtln rendszer-e.

Módszer. Az $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ vektoraira írjuk föl a definíciót $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ skalárokkal:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

ez egy lineáris egyenletrendszerre vezet. Valóban, legyünk most $\mathbb{R}^d$-ben ($d \geq 2$). Ez azt jelenti, hogy a $\underline{v}_i$ vektoroknak d darab komponensük (koordinátájuk) van:

$$\underline{v}_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_d}). \quad S \text{ így:}$$

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} v_{1_1} \\ v_{1_2} \\ \vdots \\ v_{1_d} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} v_{2_1} \\ v_{2_2} \\ \vdots \\ v_{2_d} \end{pmatrix} + \ldots + c_k \cdot \begin{pmatrix} v_{k_1} \\ v_{k_2} \\ \vdots \\ v_{k_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \text{ d darab } 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot v_{1_1} + c_2 \cdot v_{2_1} + \ldots + c_k \cdot v_{k_1} = 0 \\ c_1 \cdot v_{1_2} + c_2 \cdot v_{2_2} + \ldots + c_k \cdot v_{k_2} = 0 \\ \qquad \vdots \\ c_1 \cdot v_{1_d} + c_2 \cdot v_{2_d} + \ldots + c_k \cdot v_{k_d} = 0 \end{cases}$$

Ezt például Gauss-Jordan-eliminációval megoldjuk.

Ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ az egyetlen megoldás, akkor a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ vektorok lin. fgtl-ek.

Példa

$P_2 :=$ {a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektortere}

$S := \{\underbrace{1 + x - 2 \cdot x^2}_{= v_1}, \underbrace{2 + 5x - x^2}_{= v_2}, \underbrace{x + x^2}_{= v_3}\}$ lineárisan függő vagy fgtlen?

Használjuk a fentebb leírt receptet.

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$c_1 \cdot (1 + x - 2x^2) + c_2 \cdot (2 + 5x - x^2) + c_3 (x + x^2) = 0$$

$$c_1 + 2c_2 + c_1 \cdot x + 5c_2 \cdot x + c_3 \cdot x - 2c_1 x^2 - c_2 x^2 + c_3 x^2 = 0.$$

A polinomok egyenlőségéről már volt szó, például amikor elemi törtekre bontással integráltunk.

A $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ és a

$q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ polinomok egyenlőek,

ha $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

Ezt felhasználva ~~itt~~ írhatjuk:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Tehát megint ott tartunk, hogy meg kell oldjunk egy lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+2\cdot\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

„Ha egy mtx-ban van csupa 0 sor/oszlop, akkor a mtx determinánsa 0."

$\Longleftrightarrow$ A egyenletrendszernek végtelen sok megoldása létezik.

Tehát nem kizárólag a csupa 0 számokból álló lin. komb. állítja elő a 0 vektort, tehát S lineárisan függő.

TÉTEL Ha egy vektorrendszer tartalmazza a zérusvektort, akkor lineárisan függő.

Biz.: $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k, \underline{0}\}$. S vektorai lin. függőségét a szokásos módon vizsgáljuk: $c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_k \cdot \underline{v}_k + c_{k+1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Ebből azonnal adódik, hogy

$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ $\underline{\underline{\text{ÁM}}}$ c_{k+1} tetszőleges $\Rightarrow$ nem

csak a csupa 0 választás az egyetlen megoldás

$\rightarrow$ S lineárisan függő.

FELADAT.

1. Legyen $S := \{(2,-1,3), (5,0,4)\}$
Előáll-e az u, v, w vektor az S-beli vektorok lineáris kombinációjaként, ha
$u = (0,-5,7)$; $v = \left(16, -\frac{1}{2}, \frac{27}{2}\right)$; $w = (3,6,-2)$?

2. Generátorrendszer-e S $\mathbb{R}^2$-ben, ha
a) $S = \{(2,1), (-1,2)\}$
b) $S = \{(1,3), (-2,-6), (4,12)\}$

3. Generátorrendszer-e S $\mathbb{R}^3$-ban, ha
a) $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$
b) $S = \{(1,-2,0), (0,0,1), (-1,2,0)\}$

4. Az S vektorai lineárisan függőek vagy függetlenek, ha
a) $S = \{(-2,2), (3,5)\}$
b) $S = \{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$

5. Mely $t \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz S lin. fgtl?
a) $S = \{(t,1,1), (1,t,1), (1,1,t)\}$
b) $S = \{(t,1,1), (1,0,1), (1,1,3t)\}$

Definíció A $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ vektorrendszer BÁZIS V-ben, ha

i) S generátorrendszere V-nek

ii) S vektorai lineárisan függetlenek

Példa

1.) $S = \{(1,0), (0,1)\}$ az $\mathbb{R}^2$ (a sík) standard bázisa

2.) $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ az $\mathbb{R}^3$ (a tér) standard bázisa.

Szokás a vektorokat szokás. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ritkább) jelöléssel ellátni.

Vegyük észre, hogy mind $\mathbb{R}^2$, mind $\mathbb{R}^3$ standard bázisát alkotó vektorok hosszai 1 (egységnyi), páronként merőlegesek egymásra (ortogonális).

Emiatt szokás az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ... bázisvektorokat ORTONORMÁLT bázisnak hívni.

3. $S = \{(1,1), (1,-1)\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben. Valóban,

S generátorrendszer $\mathbb{R}^2$-ben: $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^2$ $(\underline{u} = (u_1, u_2))$

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_1 \\ c_1 - c_2 = u_2 \end{cases}$$

Az együttható mtx:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ és}$$

$$\det A = -2 \neq 0 \underset{\text{(TÉTEL)}}{\Longrightarrow} \text{van nemtriv. megoldás}$$

S lineárisan független is, hiszen:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

Itt is ugyanaz az együttható mtx, mint az előbb.

Másképp is okoskodhatunk: összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy

$2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Ezt az egyenletek valamelyikébe visszahelyettesítve: $c_2 = 0$.
Tehát a triv. lin. komb. állítja elő a zéróvektort $\Rightarrow$ lin. fgtl.

TÉTEL (A bázisreprezentáció unicitása)

Legyen $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ bázis V-ben. Ekkor $\forall \underline{v} \in V$ vektor esetén $\exists!$ (egyértelmű egzisztencia) $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ skalárok: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \underline{v}_i$.

Egzisztencia (létezés)

Biz: Az, hogy minden $v \in V$ ($\forall v \in V$) esetén van megfelelő c_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) skalár listos, hiszen feltettük, hogy S vektorai bázisvektorok, ami a generátorrendszer tulajdonságot (is) jelenti.

Egyértelműség (unicitás)

Tfh. $\underline{u} \in V$ vektort kétféle (két különböző) skalár együtthatós lin. komb. is előállítja:

$\underline{u} = a_1 \cdot \underline{v}_1 + a_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + a_k \underline{v}_k$ és

$\underline{u} = b_1 \underline{v}_1 + b_2 \underline{v}_2 + \ldots + b_k \underline{v}_k$.

Ekkor

$$\underline{u} - \underline{u} = (a_1 - b_1)\cdot \underline{v}_1 + (a_2 - b_2)\underline{v}_2 + \ldots + (a_k - b_k)\cdot \underline{v}_k = \underline{0}$$

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ rendszer bázis, ami a lin. függetlenséget (is) jelenti, tehát a $\underline{0}$ csak is a triv. lin. komb.-ként áll elő:

$$a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \ldots, \quad a_k - b_k = 0$$

$\Rightarrow \quad a_i = b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$

Tehát $\underline{u}$-t ugyancsak egyféleképp állítják elő.

TÉTEL Ha a V vektortér valamely bázisa k darab vektorból áll, akkor bármely bázisának pontosan k eleme van.

Biz: —

Definíció

A V vektor bázisvektorainak elemszámát a V vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa 1. $\mathbb{R}^d$ dimenziója d (sík $d=2$, tér $d=3$)

2. $C_{[a,b]}$ függvények vektortere VÉGTELEN dimenziós

Példa 3. Legyen $W \subset \mathbb{R}^3$: $W := \{ (a, b-a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$.

Hat. meg dim W-t.

Feladatunk tehát lineárisan független vektorok olyan rendszerét megadni, mely generátorrendszere W-nek.

Írjuk fel a következőt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát az $S := \{(0,1,1), (1,-1,0)\}$ generátorrendszere W-nek.

Meg kell még mutatnunk, hogy S vektorai lineárisan függetlenek:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 - c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{matrix} \rightarrow \text{KÉSZ.}$$

$\Rightarrow \dim W = 2$, hiszen S bázisát képezi és S-ben 2 vektor van.

4. Legyen $W \subset \mathbb{R}^4$ az $\mathbb{R}^4$-nek azon altere, melyet az $S = \{\overbrace{(-1,2,5,0)}^{=v_1}, \overbrace{(3,0,1,-2)}^{=v_2}, \overbrace{(-5,4,9,2)}^{=v_3}\}$ vektorrendszer generál. Hat. meg $\dim W$-t.

Vegyük észre, hogy S lineárisan függő:

$$\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2.$$

Ebből viszont azonnal következik, hogy $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \subset S$ generátorrendszere S-nek s így W-nek. $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ rendszer lineárisan független (hiszen $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ nem számszorosai egymásnak).

Azt kaptuk, hogy $\dim W = 2$, mert $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ 2 vektorból áll.

5. Legyen W a 2×2-es szimmetrikus mátrixok vektortere, mely altere a 2×2-es mátrixok vektorterének. $\dim W = ?$

A szimmetrikus mátrixok általában

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ alakban írhatóak. Ezt felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ c\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Legyen ezért $S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

S generátorrendszere W-nek, és könnyű megmutatni (HF), hogy lineárisan függetlenek S elemei.

$\Rightarrow$ $\dim W = 3$.

FELADAT.

1. Legyen $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Igaz-e, hogy S bázisa $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek (2×2-es mátrixok)?

2. Legyen $W = \{ (2s-t, s, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^4$.

Hat. meg W egy bázisát és adjuk meg $\dim W$ értékét.

Tekintsük a $\mathbb{R}^{m\times n}$ ~~makrok~~ mátrixokat.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ahogyan már korábban volt róla szó, egy mátrix tekinthető sorai, illetve oszlopai mint sor-, illetve oszlopvektorok rendszerének.

A sorvektorok n dimenziós vektorok ($\mathbb{R}^n$-beliek), az oszlopvektorok m dimenziós vektorok ($\mathbb{R}^m$-beliek). A sorvektorok által kifeszített $\mathbb{R}^n$-beli altér (tehát, amit a sorvektorok generálnak) neve (fantáziadús...) a sor-altér, az oszlopvektorok által kifeszített $\mathbb{R}^m$-beli altér az oszlop-altér.

A Gauss-Jordan-elimináció tárgyalásakor szó volt a mátrixok lépcsős alakjáról: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$.

<u>Két mátrixot egymásba vihetőnek</u> hívunk, ha egyik a másikból előáll a lépcsős ~~(makr)~~ alak kialakításakor bevezetett elemi (megengedett) lépések segítségével.

<u>TÉTEL</u> Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tetszőleges, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lépcsős alakú, és A és B egymásba vihetőek, akkor B nemnulla sorvektorai az A sor-alterének bázisát képezik.

<u>Példa</u> Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Hány dimenziós A sor-altere?

Elemi lépések segítségével A-t lépcsős alakra hozzuk (Gauss-Jordan-elimináció!)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \quad \text{Amint látható:}$$

B-nek 3 darab nemnulla sora van →

az $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$ és $v_3 = (0,0,1,-1)$ bázisa az A sorai vektorterének. Könnyű látni, hogy v_1, v_2, v_3 bázisvektorok → 3 dimenziós a sor-altér.

Ez a koncepció új, gyors módszert ad altér bázisának (és így dimenziójának) meghatározására.

Lássunk egy példát ismét!

Legyen $S = \{ \underbrace{(-1,2,5)}_{=v_1}, \underbrace{(3,0,3)}_{=v_2}, \underbrace{(5,1,8)}_{=v_3} \} \subset \mathbb{R}^3$. Hat. meg S egy bázisát és $\dim S$-t.

1. v_1, v_2, v_3 vektorokból mint sorvektorokból készítsünk mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

2. G-J-elimináció segítségével hozzuk A-t lépcsős alakúra:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(EXCEL használatával ellenőrizzék!)

Tovább redukálni nem tudjuk. Amit kaptunk: $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 3)$ vektorok az A mtx sor-altere egy bázisát, azaz S egy bázisát alkotják.

~~Tétel~~ Definíció Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sor-alterének dimenziója az A mtx sor-rangja, míg oszlop-alterének dimenziója az A mtx oszlop-rangja.

~~TÉTEL~~ (Rangszám tétel) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszlop-, sor-rangja megegyezik, melyet az A mtx rangjának hívunk, és rang A-val jelölünk.

Biz.: —

Példa. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. rang $A = ?$

A mtx-on Gauss-Jordan-elimináció (EXCEL), és a nem csupa nulla sorok száma adja a mtx rangját.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \text{nincs csupa nulla sor}$$

$\Rightarrow$ rang $A = 3$.

A témakör egyik nagy jelentőségű tétele következik.

<u>TÉTEL</u> Tekintsünk egy $n \in \mathbb{N}$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszert, melynek mátrix alakja: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

<u>1.</u> Ha $\underbrace{\operatorname{rang} A}_{\text{együttható mtx}} = \underbrace{\operatorname{rang}(A|b)}_{\text{kiegészített mtx}} = n$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

<u>2.</u> Ha $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) < n$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

<u>3.</u> Ha $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|b)$, akkor nincs megoldás.

<u>Biz.</u>: —

<u>Példa</u>

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása nélkül mondjuk meg, hogy van-e, és ha igen, akkor hány megoldása van?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{– együttható mtx}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{– kiegészített mtx.}$$

Mind A-n, mind $(A|b)$-n hajtsunk végre G-J-eliminációt. Ekkor kapjuk (ELLENŐRIZZÉK!!)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{rang} A = 3$$

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \operatorname{rang}(A|b) = 3$$

"=" ⇒ van megoldás

Ismeretlenek száma $n = 3 \rightarrow$ pontosan 1 megoldás van (ami nem mellesleg $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$).

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

A egyenletrendszer megoldása nélkül mondjuk meg, hogy van-e, és ha igen, akkor hány megoldása van?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

G-J-elimináció (EXCEL!)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\operatorname{rang} A = 2 \qquad \operatorname{rang}(A|b) = 3}$$

⇒ Nincs megoldése.

FELADAT

1. Az egyenletrendszer megoldása nélkül mondjuk meg, hogy van-e, és ha igen, akkor hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszereknek.

a)
$$\begin{cases} x + 3y + 10z = 18 \\ -2x + 7y + 32z = 29 \\ -x + 3y + 14z = 12 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = -18 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 2x - 8y - 4z = 84 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -15 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$