

LOGIKA

Ötödik téma – igazságtáblázat és bizonyítás

Harmadik lecke – következtetések érvényességének vizsgálata

Mivel a logika legfőbb feladata a következtetések érvényességének megállapítása, a leglényegesebb kérdés az, hogy az igazságtáblázat miként adhat eszközt a kezünkbe e feladat megoldásához. Előbb azonban érdemes egy jelölési rendszabályt bevezetni.

Korábban esett már szó a természetes nyelvi gondolatmenetek logikai formáját napvilágra hozó normál és kanonikus formáról. Akkor beszéltünk egy *modus tollens* nevű következtetési sémáról, amelynek formáját a következőképpen ábrázoltuk:

1. $p \supset q$
2. $\sim q$
- _____
3. $\sim p$

Azt is állítottuk, hogy a *modus tollens* érvényes következtetési séma. Nos, amikor mindez előkerült, még a formális nyelv bevezetésénél jártunk, és akkor még nem okoztak problémát a terminológiai és jelölési zavarosságok. Most azonban már ezeket is ki tudjuk küszöbölni.

Először is, az, hogy $p \supset q$ -ból és $\sim q$ -ból $\sim p$ következik, nem lehet következtetési séma, mert ezek a formulák a tárgynyelv konkrét egyedi formulái. Most viszont már a rendelkezésünkre állnak a metanyelvi változók, amelyekkel képesek vagyunk kifejezni a szükséges általánosságot.

Másodszor, a fenti ábrázolás szemléletes ugyan, de helytakarékosabban is megoldhatjuk ugyanezt a feladatot. Tehát amennyiben a *modus tollens*-ről mint érvényes következtetési sémáról kívánunk beszélni, akkor annak korrekt reprezentációja a következő:

$$A \supset B, \sim B \vdash \sim A$$

Ahol A és B tetszőleges jól formált formula, a vessző a premisszák elválasztását szolgáló metanyelvi jel, a „ \vdash ” pedig **metanyelvi konstans**, amely a következményviszonyt jelöli. A kifejezés kiolvasása tehát: „A \supset B-ből és $\sim B$ -ből következik $\sim A$ ”.

Harmadszor, eddig csupán *állítottuk*, hogy ez a következtetési séma érvényes következtetéseket eredményez, de nem *bizonyítottuk*. Az igazságtáblázat segítségével azonban ezt is megtehetjük.

Igazságtáblázattal egyaránt bizonyíthatjuk tárgynyelvi következtetési példányok és metanyelvi következtetési sémák érvényességét (vagy érvénytelenségét). A konnektívumok ugyanúgy viselkednek, mint eddig bárhol, és a táblázat struktúrája is megegyezik az előzőkével. Tehát egy négy plusz egysoros táblázatra lesz szükségünk, amelynek legfelső sorába kerül A és B, valamint a szóban forgó következtetés premisszái és konklúziója egymás mellett. A kezdeti üres táblázat eszerint így fest:

A	B	$A \supset B$	$\sim B$	$\sim A$

Ezután A és B alá beírjuk az igazságértékek lehetséges kombinációit, ahogy korábban is tettük. Ezután pedig az egyes kifejezések alá írjuk azokat az értékeket, amelyek a kifejezések formája alapján kikalkulálhatók (ebben sincs újdonság). A kitöltött táblázat ilyen lesz:

A	B	$A \supset B$	$\sim B$	$\sim A$
1	1	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

Egy következtetés, definíció szerint, akkor és csak akkor érvényes, ha konklúziója minden esetben igaz, amikor az összes premisszája igaz, vagyis nincs olyan eset, amelyben premisszái igazak, konklúziója viszont hamis. Ha végignézzük a fenti táblázatot, látjuk, hogy egyetlen olyan sora van, az utolsó, amelyben mindkét premissza alatt az 1

érték áll, és ott a konklúzió alatt is 1-et találunk. Nincs tehát olyan sor, amelyben a premisszák alatt 1, a konklúzió alatt pedig 0 volna található. Bizonyítottuk, hogy a következtetési séma érvényes.

Nézzünk egy összetettebb következtetési sémát. Legyen állításunk a következő:

$$(A \vee B) \supset C, \sim(B \& C), \sim B \vdash A \supset C$$

Íme a komplett táblázat:

A	B	C	$(A \vee B) \supset C$	$\sim(B \& C)$	$\sim B$	$A \supset C$
1	1	1	1 1	0	0	1
0	1	1	1 1	0	0	1
1	0	1	1 1	1	1	1
0	0	1	0 1	1	1	1
1	1	0	1 0	1	0	0
0	1	0	1 0	1	0	1
1	0	0	1 0	1	1	0
0	0	0	0 1	1	1	1

Három olyan sor van, amelyben a premisszák alatti értékek mindenütt 1-et adnak (a harmadik, a negyedik és az utolsó). Ezekben a sorokban a konklúzió alatti érték is mindig 1. A következtetési séma érvényes.

Végül lássunk példát érvénytelen következtetési sémára is. Az állítás:

$$A \& (B \supset A), \sim B \vdash \sim(A \vee B)$$

A táblázat:

A	B	A & (B \supset A)		$\sim B$	$\sim(A \vee B)$
1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1

Van egy olyan sor, amelyben a premisszák vezető konnektívumai alatt 1-ek láthatók (a harmadik), ám ugyanott a konklúzió vezető konnektívuma alatt 0-t találunk, tehát lehetséges olyan eset, amelyben a premisszák igazak, de a konklúzió hamis. A következtetési séma tehát érvénytelen.

Nem a *modus tollens* az egyetlen olyan érvényes következtetési séma, amely saját nével rendelkezik. A logikai vizsgálódások történetében számos érvényes sémát megállapítottak és elkereszteltek. Ezeknek ismerete megkönnyíti az érvényes érvek felismerését. Természetesen vizsgálták azokat az alakzatokat is, amelyek első pillantásra érvényes következtetésnek *látszanak*, valójában azonban bizonyíthatóan nem azok. Íme egy rövid lista a nevezetesebb sémák közül:

Érvényes következtetési sémák:*Modus ponens:*

$$A \supset B, A \vdash B$$

Modus tollens:

$$A \supset B, \sim B \vdash \sim A$$

Diszjunktív szillogizmus:

$$A \vee B, \sim A \vdash B$$

Hipotetikus szillogizmus (láncszabály):

$$A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$$

Konstruktív dilemma:

$$A \vee B, A \supset C, B \supset D \vdash C \vee D$$

**Érvénytelen következtetési sémák
(tévkövetkeztetések):***Az előtag tagadása:*

$$A \supset B, \sim A \vdash \sim B$$

Az utótag állítása:

$$A \supset B, B \vdash A$$

Diszjunktív tévkövetkeztetés:

$$A \vee B, A \vdash \sim B$$

Az igazságtáblázat eszközével történő bizonyítás kifogástalan művelet. Mégis megvan az oka annak, hogy bonyolultabb formulák és sokpremisszás következtetések esetében ritkán használatos. Ez az ok egyszerű: ha sok propozicionális változónk (vagy metanyelvi változónk) van, a táblázat kitöltése túlságosan fáradságos. Például már egy olyan, viszonylag egyszerű séma érvényességének bizonyításakor is, amilyen a konstruktív dilemma, négy különböző mondatbetű értékeinek eloszlását kell vizsgálnunk, amihez egy tizenhat (2^4) soros táblázatra volna szükségünk. Túl sok aprómunka, túl nagy a figyelmetlenségből származó hibalehetőség. Ráadásul az igazságtáblázat csak a propozicionális logikán belül használható, ahol a formulák logikai tulajdonságai egyedül az igazságfüggvényeken múlnak. Ez sincs a nagyobb kifejezőkészlettel rendelkező logikai rendszerekben így. Ezért érdemes alternatív bizonyítási eszköz után nézni.

Kérdések és feladatok

Bizonyítsa be igazságtáblázat segítségével a fentebbi szövegdobozban felsorolt következtetési sémák érvényességét, illetve érvénytelenségét!