LOGIKA

Ötödik téma – igazságtáblázat és bizonyítás

Második lecke – logikai ekvivalenciák bizonyítása

Nagyon hasonló műveletek révén bizonyíthatjuk vagy cáfolhatjuk, hogy egy propozíció logikailag ekvivalens egy másikkal. Mivel a logikai ekvivalencia bikondicionális segítségével fejezhető ki, egy ekvivalenciát állító propozíció vezető konnektívuma mindig a „≡" lesz, tehát az ez alatti oszlop értékeire vagyunk kíváncsiak (ha egy olyan propozíció az ekvivalencia egyik tagja, amelyben magában is van bikondicionális összetétel, akkor természetesen a legszélesebb hatókörű bikondicionális lesz a vezető konnektívum). Amennyiben a bikondicionális jele alatti érték mind 1, akkor az ekvivalencia fennáll, más esetben nem áll fenn.

A De Morgan azonosságok például logikai ekvivalenciát fejeznek ki. Az egyik ilyen azonosság a következő:

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \ \& \sim q)$

Igazságtáblázata:

p	q	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \ \& \sim q)$
1	1	0 1 1 0
0	1	0 1 1 0
1	0	0 1 1 0
0	0	1 0 1 1

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

TÉTELEK ÉS ELDÖNTHETŐSÉG

Egy jól formált formulát akkor nevezünk egy logikai rendszer *tételének*, ha az adott formula az adott nyelvben logikai igazság, vagyis elemei igazságértékének minden eloszlása esetén a formula az 1 értéket veszi fel. A tautológiák tehát tételek, ahogy tételek az inkonzisztens kifejezések (ellentmondások) negációi is. Egy logikai rendszer jellemezhető tételeinek halmazával.

Egy logikai rendszer *eldönthető*, ha létezik olyan algoritmikus eljárás, amelynek segítségével minden egyes jól formált formulájáról megállapítható, hogy tétele-e az adott rendszernek. A klasszikus propozicionális logika eldönthető. Először is arra van szükség, hogy a jól formált formulák halmaza felsorolható legyen. Ez megvalósítható úgy, ha szisztematikusan haladunk a legegyszerűbbtől az összetettebb formulák felé. Aztán minden egyes formula esetében valamilyen döntési eljárást alkalmazunk – például az igazságtáblázat eszközét –amellyel megállapítjuk az adott formuláról, hogy tétel-e.

A legegyszerűbb formulák azok, amelyek egyetlen mondatbetűből állnak (például p). Az ilyen formulák nyilván nem tételek, hiszen lehetnek igazak vagy hamisak. A negációjukkal ugyanez a helyzet. Aztán megnézzük az összetett formulákat, először azokat, amelyeknél csak egyféle mondatbetű fordul elő. A p & p formula nem tétel, mert ha p hamis, akkor önmagával való konjunkciója is az, a $p \vee p$ sem, de a $p \supset p$ és a $p \equiv p$ igen. Aztán kombináljuk az egyféle mondatbetűs formulákat a tagok negációjával. A p & $\sim p$ formula mindig hamis lesz (hiszen ellentmondás), a $p \vee \sim p$ mindig igaz (kizárt harmadik). És így tovább, megnézzük a különböző mondatbetűket tartalmazó összetett formulákat, majd a többszörösen összetett formulákat, mindegyiknek a negációs variánsait stb. Noha a propozicionális logika formulakészlete végtelen nagyságú, matematikai értelemben minden nehézség nélkül felsorolható. És minden egyes felsorolt formuláról az igazságtáblázat egyértelműen eldönti, hogy a propozicionális logika tétele-e.

Egy bikondicionális akkor és csak akkor igaz, ha két tagjának igazságértékei megegyeznek. Jelen esetben a bal oldali tag vezető konnektívuma a negáció, a jobb oldalié a konjunkció. A táblázat megmutatja, hogy az egyes tagok alatti igazságértékek mindenhol megegyeznek, így a bikondicionális az összes esetben az 1 értéket kapja. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a szóban forgó De Morgan azonosság igaz, vagyis az azt kifejező bikondicionális a propozicionális logika ***tétel**e*.

Kérdések és feladatok

Állapítsa meg a következő formulák igazságstátuszát:

1. $\sim(p \,\&\, (p \,\&\, q))$
2. $(p \supset q) \vee (q \supset p)$
3. $p \supset (q \supset p)$
4. $\sim((p \supset q) \supset (\sim p \vee q))$
5. $((p \vee q) \,\&\, (q \vee r)) \supset (\sim q \supset (p \,\&\, r))$
6. $((p \equiv q) \vee (\sim p \,\&\, r)) \,\&\, (\sim r \supset \sim q)$

Bizonyítsa vagy cáfolja a következő ekvivalenciák fennállását:

1. $\sim(p \,\&\, q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
2. $(((p \supset q) \,\&\, p) \supset q) \equiv (((p \vee q) \,\&\, \sim p) \supset q)$
3. $((p \,\&\, q) \supset r) \equiv ((r \supset (q \,\&\, p))$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu