LOGIKA

Negyedik téma – kondicionális, bikondicionális és formulaképzési szabályok

Harmadik lecke – jól formált formulák és képzési szabályok

A propozicionális logika nyelve formális nyelv, amelynek kifejezései ***formulák***. A formulák olyan alakzatok, amelyek a már bemutatott szimbólumokból épülnek fel, meghatározott képzési szabályok segítségével. A szabályok betartásával ***jól formált formulá***kat kapunk, amelyekhez igazságérték rendelhető. Ha a képzési szabályokat nem tartjuk be, formuláink nem lesznek jól formáltak, azaz a tárgyalt logikai nyelv szempontjából *értelmetlen*nek minősülnek, ami annyit tesz, hogy nem lehet hozzájuk igazságértéket rendelni.

A propozicionális logika szótára a következő elemekből épül fel:

- propozicionális változók (mondatbetűk): p, q, r stb. (szükség esetén p_1, p_2… p_n)
- konnektívumok: $\sim$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$
- zárójelek: (,)

Semmilyen más nyelvi elem nem része a propozicionális logika szókincsének.

Jól formált formulákat a következő szabályok szerint lehet képezni:

1.) Minden egyedi mondatbetű (p, q, r stb.) jól formált formula.
2.) Ha A jól formált formula, akkor $\sim$A, (A & B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B), (A $\equiv$ B) szintén jól formált formula.
3.) Csak az számít jól formált formulának, ami kimutathatóan a fenti két szabály valamelyikének alkalmazása nyomán állt elő.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

A szabályok között egy olyan jelölésmódra figyelhetünk fel, amellyel eddig még nem találkoztunk. A második szabály az A és a B betűket használja arra, hogy formulák képzéséről beszéljen az ismert konnektívumok segítségével. Csakhogy A és B *nem* része a propozicionális logika nyelvének, amint azt a szótár elemeit felsoroló szövegrész expliciten leszögezi. Mit keres tehát itt A és B?

A és B ***metanyelvi változók***. A *metanyelv* olyan nyelv, amelyen egy adott nyelv*ről* (a *tárgynyelv*ről) beszélünk. Például amikor azt mondjuk, hogy a német nyelvben létezik egyes szám harmadik személyű, semleges nemű személyes névmás, akkor a tárgynyelv a német (arról teszünk állítást), a metanyelv pedig a magyar (azon tesszük az állítást). Jelen esetben a tárgynyelv a propozicionális logika nyelve. Amikor ennek felépítéséről és szabályairól beszélünk, akkor ezt metanyelven tesszük, amely egy olyan magyar nyelv, amelyben szintén használunk rövidítéseket. Tehát A, B, A $\supset$ B stb. valóban nem jól formált formulái a propozicionális logikának, azonban alkalmasak arra, hogy olyan általánosságot fejezzünk ki a segítségükkel, amilyenre a propozicionális logika nyelvében nem lennénk képesek. Ha a tárgynyelvben azt mondjuk, hogy p, q, vagy $p \supset q$, akkor ezek konkrét egyedi formulák. Ha viszont a metanyelvben azt mondjuk, hogy amennyiben A és B jól formált formulája a propozicionális logika nyelvének, akkor (A $\supset$ B) is jól formált formulája ugyanennek a nyelvnek, akkor ezzel arra utalunk, hogy A és B helyén <u>*bármilyen tárgynyelvi formula állhat*</u> (legyen az akár egyetlen magányos mondatbetű, akár egy hosszú, sokszorosan összetett kifejezés), a belőlük képzett kondicionális jól formált lesz.

A következők tehát mind jól formált formulának számítanak:

- r
- $\sim(p \vee q) \vee (r \,\&\, s)$
- $\sim\sim p \equiv p$
- $(p \supset (q \,\&\, (r \vee \sim p))) \supset (\sim r \supset (p \,\&\, p))$

Szigorúan véve, a képzési szabályok azt írnák elő, hogy a $\sim\sim p \equiv p$ formula zárójelek között, $(\sim\sim p \equiv p)$-ként jelenjen meg, hiszen az 1.) szabály értelmében p jól formált formula, így, a 2.) szabály szerint $\sim p$ is az, ha viszont $\sim p$ jól formált, akkor $\sim\sim p$ is, és ugyancsak a 2.) szabályt követve p-ből és $\sim\sim p$-ből létrehozhatjuk $(\sim\sim p \equiv p)$-t. Létező és értelmes konvenció azonban, hogy ahol a konnektívumok hatókörét illetően nem eredményez kétértelműséget, a legkülső zárójel elhagyható. Tehát mindkét írásmód jól formált formulának számít, a zárójelek elhagyása csak egyszerűsíti a formalizációt és a formulák kiolvashatóságát.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Érdemes egy pillantást vetni a $\sim(p \vee q) \vee (r \;\&\; s)$ formulára is. Melyik itt a vezető konnektívum? Korábban azt mondtuk, hogy a vezető konnektívum tipográfiailag lokalizálható az összes zárójelen kívüli konnektívumként. Csakhogy itt, úgy látszik, két konnektívum is, a nyitó „$\sim$” és a középső „$\vee$”, kívül van a zárójeleken. Ilyenkor a hatókör szélessége az irányadó körülmény. A negáció hatókörébe a $p \vee q$ kifejezés tartozik (ezt egyértelműsítik a negáció utáni zárójelek), a diszjunkció ellenben mind a $\sim(p \vee q)$, mind a $(r \;\&\; s)$ kifejezést a hatókörébe vonja. A diszjunkció hatóköre szélesebb. Ezért a szóban forgó kifejezés diszjunkciónak számít; vezető konnektívuma a „$\vee$”.

A következő kifejezések *nem* jól formált formulái a propozicionális logikának:

- pq – két mondatbetű nem követheti egymást konnektívum nélkül.
- $p\ (\&\ q \supset r)$ – a zárójelek elhelyezkedése nem követi a 2.) képzési szabályt.
- $p \supset (q\ \&\!\vee\ r)$ – két konnektívum nem állhat egymás után.
- $(((\sim p\ \&\ (\sim q \vee \sim r) \supset q) \equiv (r\ \&\ p)$ – a nyitó és záró zárójelek száma nem azonos.
- $p \vee (\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$ – A és B nem tartozik a propozicionális logika szótárához.
- $p\ \&\ q \supset r$ – a hiányzó zárójelek miatt a kifejezés nem egyértelmű.

Satöbbi. Pontosan ugyanannyi hibás formulát lehet létrehozni a szabályok megsértésével, ahány jól formált formulát a szabályok betartásával: végtelen számút. De míg a jól formált formulák logikai tulajdonságai nyomon követhetők, a rosszul formált formuláknak nincsenek logikai tulajdonságaik, mert értelmetlenek.

Most, hogy a rendelkezésünkre áll a propozicionális logika nyelvének szintaxisa, és ismerjük a metanyelvi változók alkalmazását, immár teljes korrektséggel és a szükséges általánossággal újrafogalmazhatunk néhány olyan összefüggést, amelyet már említettünk.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Kettős negáció:

$\sim\sim A \equiv A$

De Morgan törvények:

$\sim(A \,\&\, B) \equiv (\sim A \vee \sim B)$

$\sim(A \vee B) \equiv (\sim A \,\&\, \sim B)$

A kondicionális kifejezhetősége:

$(A \supset B) \equiv (\sim A \vee B)$

$\sim(A \supset B) \equiv (A \,\&\, \sim B)$

A kontrapozíció törvénye:

$(A \supset B) \equiv (\sim B \supset \sim A)$

A bikondicionális és a kondicionális viszonya:

$(A \equiv B) \equiv ((A \supset B) \,\&\, (B \supset A))$

Kérdések és feladatok

1. Az alábbi kifejezések közül melyik jól formált?

a.) $\sim\sim\sim\sim\sim p$
b.) $((p \,\&\, q) \vee (r \supset p)) \supset s$
c.) $\sim(((p \,\&\, q) \,\&\, r) \,\&\, s) \vee (p \,\&\, s)$
d.) $\sim r \vee \sim q \vee \sim p$
e.) $((p \supset q) \,\&\, (r \vee s)$
f.) r
g.) $p \,\&\, \sim(q \sim r)$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

h.) $((((p \vee q) \supset r) \supset (q \,\&\, r)) \vee (p \,\&\, q) \,\&\, r)))$

i.) $(p \vee p) \vee p$

j.) $(p \supset (q \,\&\, r)) \supset ((\sim p \,\&\, \sim q) \,\&\, (\sim p \,\&\, \sim r))$

2. Az 1. feladat jól formált formuláinál melyik a vezető konnektívum?

3. Formalizálja a következő állításokat a megadott szótár segítségével!

p: Ripley a Nostromo egyedüli túlélője.
q: Az alien mindenkit megöl, akit megtalál.
r: Ripley megmenti a macskát.
s: Az alien nem találja a macskát.

- Ha Ripley megmenti a macskát, nem ő a Nostromo egyedüli túlélője.

- Mivel az alien mindenkit megöl, akit megtalál, így amennyiben megtalálja a macskát, Ripley lesz a Nostromo egyedüli túlélője.

- Ripley megmenti a macskát, de kizárólag akkor, ha az alien nem találja meg.

- Az alien nem öl meg mindenkit, akit megtalál, feltéve, hogy megtalálja a macskát, akit Ripley mégis megment.

- Az alien vagy megtalálja a macskát, vagy nem, de ha Ripley nem a Nostromo egyetlen túlélője, akkor az alien vagy nem öl mindenkit, akit megtalál, vagy ha mégis, akkor Ripley menti meg a macskát.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu