

1. előadás

Egészértékű programozás vágásokkal

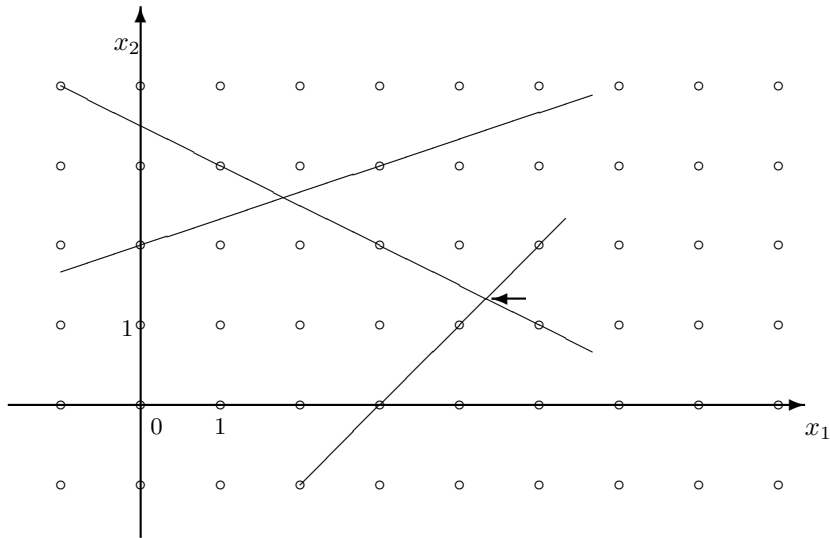
A korábbiakban megismerkedtünk az egész értékű lineáris programozási feladatokkal, jelentőségükkel és egy hatékony megoldási módszerrel. Most Gomorynak egy 1959-ből származó eljárását vázoljuk, amely egészen más, geometriai megfontoláson alapszik. Az elgondolás legnagyobb előnye és hátránya is egyben a nagyfokú általánossága, amely miatt főként elméleti jelentőségű. Bár az eredeti algoritmust elvértve használják, az alap gondolata sok lényeges eredmény kiindulópontjában szerepel.

Ez a gondolat a következő. Ha adott egy IP egész értékű probléma, oldjuk meg a folytonos relaxációját. Amennyiben a kapott x^* megoldás (tulajdonképpen egy poliéder csúcspont) egész koordinátájú, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor hagyjuk el x^* -ot a lehetséges megoldások közül, és próbálkozzunk újra. Természetesen nem akárhogy kell megszabadulnunk x^* -tól, hiszen a célunk, hogy a létrejövő új feladat(ok) is LP feladat(ok) legyen(ek). Ez úgy érhető el, ha x^* -ot egy hipersíkkal vágjuk le a lehetséges megoldások poliéderéről, ami algebrailag azt jelenti, hogy egy plussz feltételt adtunk az eddigi egyenlőtlenségeinkhez.

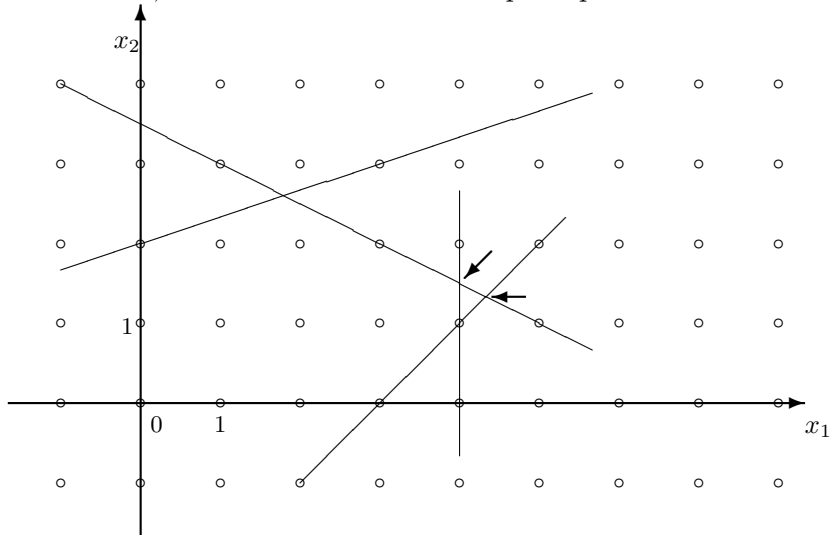
Példa: grafikus módszer

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ és egészek} \end{aligned}$$

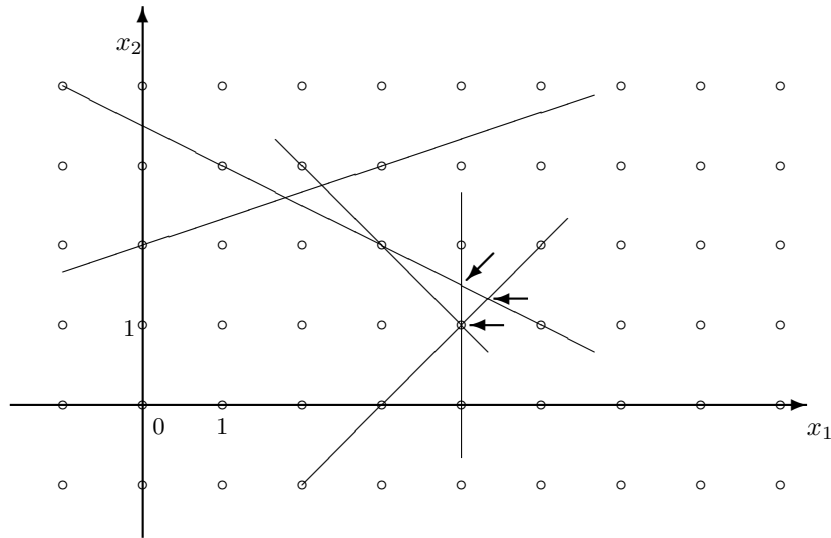
A problémánk a síkban ábrázolható. A lehetséges megoldásai nem mások, mint a folytonos relaxáció P poliéderének és a sík egész koordinátájú pontjainak metszete. Az ábrákon nyíllal jelöljük az optimum helyét.



A folytonos feladat megoldása $x^* = (\frac{13}{3}, \frac{4}{3})$, nem egész. Vegyük fel az $x_1 \leq 4$ feltételt, illetve metsszük le ezzel a politópunkat.



Nagyon fontos, hogy a vágással nem veszünk az eredeti IP lehetséges megoldásaiból, azaz az egész koordinátájú pontokból. Az új folytonos LP optimuma $x^* = (4, \frac{3}{2})$, ami továbbra sem egész. Legyen az újabb feltételünk az $x_1 + x_2 \leq 5$.



A megoldás $x^* = (4, 1)$, ami egész koordinátájú. Az eredeti feladatnak lehetséges megoldása, így optimuma is egyben. Az optimum értéke 9.

A kezelhetőség kedvéért szükségünk van néhány megszorításra a megoldandó feladatban. A szokásos módon a feladat

$$\max \quad cx$$

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \text{ és } x \text{ egész} \end{aligned}$$

valamint feltesszük, hogy

1. A, b, c minden komponense egész,
2. $b \geq 0$,
3. az $Ax \leq b$ -vel definiált poliéder korlátos.

Az 1. feltétel nem jelentős megszorítás, míg a 2.-re a megoldhatóság garantálása miatt van szükség. Egy teljesen általános egész értékű problémának már egy *lehetséges megoldását* is nagyon nehéz megadni, így viszont az $x = 0$ mindig lehetséges megoldás. A 3.-ból következik, hogy véges sok lehetséges megoldás van csak, azaz az optimum létezik.

A vágások precíz definíciójához az *egész rész*, illetve a *törtrész* fogalmát használjuk: egy r valós szám $[r]$ egész része a legnagyobb r -nél kisebb egész, míg az $\{r\}$ törtrész az $\{r\} := r - [r]$ egyenlőséggel definiált. Az $a_1x_1 +$

$\dots + a_n x_n \leq b$ egyenlőtlenség *Gomory-féle metszete* pedig az $\{a_1\}x_1 + \dots + \{a_n\}x_n \geq \{b\}$ egyenlőtlenség.

Vezessünk be mesterséges változókat! Ezzel a megszokott szótáralakra hozhatjuk a feladatot

$$x_{n+j} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad (j = 1, \dots, m)$$

(*)

$$z = 0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

A feltételből következik, ha $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+m})$ a (*) LP olyan lehetséges megoldása, ahol $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ egész, akkor $\tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_{n+m}$ is egész. Oldjuk meg a (*) feladatot, és tegyük fel, hogy a kapott $x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$ optimális megoldás nem egész. (Ha ugyanis egész, akkor készen vagyunk.) Az előző megjegyzés alapján van olyan x_i természetes változó a végső B bázisban, hogy az x_i^* nem egész. Az x_i sora a szótárban

$$(**) \quad x_i = b_i^* - \sum_{j \notin B} a_{ij}^* x_j$$

Mivel $x_i^* = b_i^* \geq 0$ (a szótár lehetséges), így ezt elhagyva a (**) baloldaláról és átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$\sum_{j \notin B} a_{ij}^* x_j \leq b_i^*,$$

majd vegyük ennek a Gomory-féle metszetét:

$$(***) \quad \sum_{j \notin B} \{a_{ij}^*\} x_j \geq \{b_i^*\}.$$

Tétel 1 *A (***) egyenlőtlenség lemetszi a (*) LP-ről az x^* optimális megoldást, de nem metsz le egyetlen egész megoldást sem.*

Bizonyítás. Az x^* bázismegoldás, így $x_j^* = 0$, ha $j \notin B$, s ezzel a (***) bal oldala az x^* pontban 0. Az $x_i^* = b_i^*$, és feltettük, hogy x_i^* nem egész. Ebből $\{b_i^*\} > 0$ adódik, tehát az x^* nem elégíti ki a (***) egyenlőtlenséget.

Másrészről legyen $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+m})$ a (*) LP egy tetszőleges egész megoldása. Ekkor persze \tilde{x} kielégíti a szótár (**) egyenletét. Ezt átírva a jelöléseinkkel

$$\tilde{x}_i = [b_i^*] + \{b_i^*\} - \sum_{j \notin B} ([a_{ij}^*] + \{a_{ij}^*\}) \tilde{x}_j,$$

átrendezve aódik, az

$$\tilde{x}_i + \sum_{j \notin B} [a_{ij}^*] x_j - [b_i^*] = \{b_i^*\} - \sum_{j \notin B} \{a_{ij}^*\} \tilde{x}_j.$$

Az utóbbi egyenlőség baloldalán csak egész számok vannak, ezért a bal oldal értéke egész. Viszont $j \notin B$ -re $\tilde{x}_j \geq 0$ és $\{a_{ij}^*\} \geq 0$, azaz a jobb oldal értéke $\leq \{b_i^*\} < 1$. Mivel a jobb oldal szintén egész, az érték nem lehet pozitív; vagyis

$$\{b_i^*\} \leq \sum_{j \notin B} \{a_{ij}^*\} \tilde{x}_j,$$

azaz \tilde{x} kielégíti a (***) egyenlőtlenséget. \square

Térjünk vissza a grafikusan már megoldott problémánkhoz és vizsgáljuk meg ezt a Gomory-féle metszetek segítségével algebrai úton. A

$$\begin{array}{r} x_3 = 6 \quad +x_1 \quad -3x_3 \\ x_4 = 7 \quad -x_1 \quad -2x_2 \\ x_5 = 3 \quad -x_1 \quad +x_2 \\ \hline z = 0 \quad +2x_1 \quad +x_2 \end{array}$$

kezdeti szótárból két iteráció után befejeződik az algoritmus és a folytonos relaxáció megoldása:

$$\begin{array}{r} x_1 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = \frac{19}{3} - \frac{5}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_4 \\ \hline z = 10 - x_5 - x_4 \end{array}$$

A kapott x^* megoldás nem egész, így például az $x_1 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4$ sor a $\frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$ Gomory vágást indukálja. (Ha a kezdeti szótár segítségével kiküszöböljük x_4 -et és x_5 -öt a vágásból, az $x_1 \leq 4$ egyenlőtlenséget kapjuk. Éppen azt, amit a grafikus megoldásban használtunk. Ez rávilágít a Gomory metszet természetére és mutatja, hogy jó úton járunk.) A $\frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$

egyenlőtlenséget a nemnegatív x_6 változó bevezetésével $x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$ alakra hozhatjuk. A célunk az új feladat folytonos relaxációjának megoldása. Hozzávéve ezt a feltételt az utolsó szótárhoz, egy nagyon érdekes szótárt kapunk, amely “optimális” csak éppen *nem lehetséges*:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4 \\
 x_2 & = & \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4 \\
 x_3 & = & \frac{19}{3} - \frac{5}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_4 \\
 x_6 & = & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \\
 \hline
 z & = & 10 - x_5 - x_4
 \end{array}$$

Természetes gondolat, hogy a lehetségeséget sértő x_6 változót vegyük ki a bázisból, és vigyük be a helyére például az x_5 -öt:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 4 - x_6 + 0x_4 \\
 x_2 & = & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4 \\
 x_3 & = & \frac{11}{2} - \frac{5}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_4 \\
 x_5 & = & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4 \\
 \hline
 z & = & \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4
 \end{array}$$

A kapott szótár az új feladat optimális megoldását kódolja. Vegyük észre, hogy tulajdonképpen a feladat duálisát oldottuk meg. A kezdeti szótár “optimalitása” a duális egy lehetséges megoldását adta, illetve mikor a feladat lehetségessé válik, az egyben a duális optimumát jelzi. Ekkor viszont a duálitás tétel miatt az eredeti feladat optimumát is megkaptuk. A fenti formában végrehajtott algoritmust *duális simplex módszernek* nevezzük, és a kifejlesztése Lemke (1954) nevéhez fűződik. Ez esetünkben roppant hasznos, mert a Gomory metszettel bővített szótár által kódolt vektor nem lehetséges megoldása a primál feladatnak, de a célfüggvény együtthatókból

kiolvasható a duálisnak egy lehetséges megoldásáról van szó. Ezért az új feladat megoldása sem a “nulláról” indul, hanem egy vélhetően az optimumhoz közelebb eső pontból.

A következő lépésben az $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4$ egyenletből indulunk ki. Az ehhez tartozó Gomory metszet: $\frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$, amivel az új feladat

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 4 - x_6 \\
 x_2 & = & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4 \\
 x_3 & = & \frac{11}{2} - \frac{5}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_4 \\
 x_5 & = & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 \\
 x_7 & = & \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 \\
 \hline
 z & = & \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_4
 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy az $\frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$ -ből kifejezve az x_6 és x_4 változókat, éppen $x_1 + x_2 \leq 5$, a példánkban alkalmazott második vágás. Így nem túl meglepő, hogy a fenti szótárból egy iteráció elvégzése után megkapjuk az egész értékű probléma optimális megoldását:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 4 - x_6 \\
 x_2 & = & 1 + x_6 - x_7 \\
 x_3 & = & 7 - 4x_6 + 3x_7 \\
 x_4 & = & 1 - x_6 + 2x_7 \\
 x_5 & = & 0 + 2x_6 - x_7 \\
 \hline
 z & = & 9 - x_6 - x_7
 \end{array}$$

Ezek után **Gomory algoritmus**a egyszerűen leírható. Az *előkészítő részben* írjuk fel az egész értékű probléma folytonos relaxációjának egy lehetséges szótárát, és oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha a kapott

megoldás egész, akkor az egyben az egész értékű feladatnak is optimuma. Ha nem, akkor az alábbi iterációt végezzük el az r -edik lépésben: Vegyük a szótár azon

$$x_i = b_i^* - \sum_{j \notin B} a_{ij}^* x_j$$

sorát, ahol $1 \leq i \leq m$ és b_i^* nem egész. Az ehhez tartozó Gomory-féle metszet

$$\sum_{j \notin B} \{a_{ij}^*\} x_j \geq \{b_i^*\}.$$

Vezessük be a nem negatív x_{n+m+r} változót a két oldal különbségének jelölésére, azaz

$$x_{n+m+r} = -\{b_i^*\} + \sum_{j \notin B} \{a_{ij}^*\} x_j$$

1. A Gomory algoritmus fenti változata nem feltétlenül ér véget. Megmutatható, hogy például mind a szimplex, mind a duál szimplex algoritmusnak a lexikografikus változatát alkalmazzuk, akkor a termináció garantálható.
2. A Gomory algoritmus véges változatai által igényelt iterációk száma sem korlátozható a feladat méretével. Ezt Jeroszlov és Kortanek látta be 1969-ben, majd 1970-ben Rubin olyan, csupán két változót és egyetlen egyenlőtlenséget tartalmazó feladatokat konstruált, melyeknél bármely $k \in \mathbf{N}$ -re választható olyan, amely több, mint k iterációt igényel. (A szimplex módszer alkalmazásánál bizonyosak lehettünk, hogy $\binom{n+m}{m}$ iterációnál több nem szükséges.)
3. További kellemetlenséget okoz, hogy a megoldandó feladat mérete minden iteráció után növekszik. Az új vágások a régiek egy részét szükségtelenné tehetik, így azok elhagyhatók, de nem egyszerű ezek nyomon követése sem.
4. Végül felmerül a numerikus stabilitás kérdése is, mert a kerekítések során esetleg felnövekedhetnek a hibák. Jelen esetben ez különösen komplikált, hiszen azt kell eldöntenünk, hogy egy adott érték egész-e vagy sem. Ezt elkerülendő Gomory 1960-ban kidolgozott egy olyan változatot, amelyben a generáló elem ± 1 lehet csak, így az együtthatók végig egészek az eljárás folyamán.

Totálisan unimoduláris mátrixok

Az egészértékű programozás fő nehézsége abban rejlik, hogy a lehetséges megoldásokból álló poliédernek esetleg nem egész koordinátájú csúcspontjai vannak. Ha valamiképpen előre tudnánk, hogy csak egész csúcspontok vannak, akkor a folytonos relaxáció bármely optimális bázismegoldása automatikusan az egészértékű probléma optimális megoldása lenne. Mint azt A. J. Hoffman és S. B. Kruskal 1956-ban megmutatta az egészértékű problémák egy elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt lényeges osztályára teljesül a feltétel. Eredményük központi jelentőségű az ún. *hálózati* vagy *network* problémák vizsgálatában.

Az alábbi fogalomra lesz szükségünk: Egy A mátrix *totálisan unimoduláris*, ha bármely négyzetes részmátrixának a determinánsa 1, -1 vagy 0. (Speciálisan A elemei csak a ± 1 és a 0 számok lehetnek.)

Tétel 2 *Ha A totálisan unimoduláris, b és c egész vektorok, akkor a $\max cx$, $Ax \leq b$ LP bázismegoldásai, (köztük az optimális bázismegoldásai) egész értékűek. Másképpen a $P = \{x | Ax \leq b\}$ poliéder csúcsai egész koordinátájúak.*

Bizonyítás. Ha adott egy B bázis, a hozzátartozó x_B bázismegoldás szótára:

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$$

$$z = c_B A_B^{-1}b + (c_N - c_B A_B^{-1}A_N)x_N$$

(A módosított szimplex algoritmus leírásával használtuk ezt a formulát; A_B az A mátrix B bázis által kijelölt oszlopaiból áll. Konvencionálisan az A_B -t B -vel jelölik, a félreértés elkerülése miatt használjuk az A_B formát.) Az A_B^{-1} mátrix elemeit lineáris algebrában megismert *Cramer szabály* szerint számolhatjuk ki. Ha $(A_B^{-1})_{i,j}$ a mátrix i, j -edik eleme, ${}^{i,j}A_B$ az a mátrix, amit A_B -ből a i -edik sor és j -edik oszlop eltörlésével kapunk, $\det(A_B)$ pedig a mátrix determinánsa, akkor

$$(A_B^{-1})_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \det({}^{j,i}A_B)}{\det(A_B)}.$$

Mivel A totálisan unimoduláris, és $\det(A_B) \neq 0$, így $\det(A_B) = \pm 1$. Természetesen a $\det({}^{i,j}A_B^{-1})$ mátrix minden eleme egész. Mivel $x_B = A_B^{-1}b$,

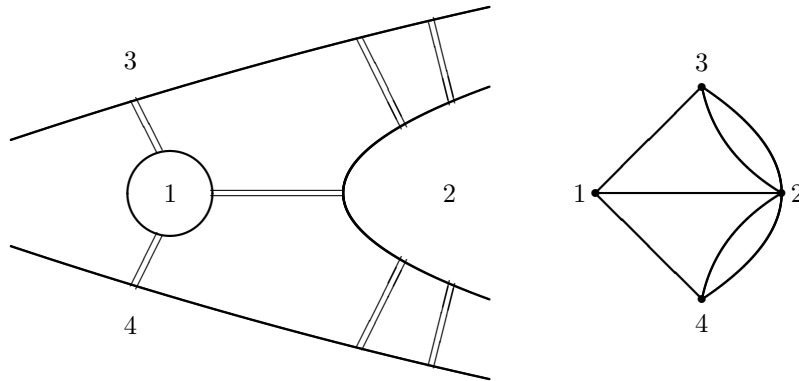
egy egész mátrix és egész vektor szorzata, x_B is egész. \square

Megjegyzés: Természetesen ha a szimplex módszerrel oldjuk meg a problémát, a szótár többi eleme ($A_B^{-1}A_Nx_N$, ill. $z = c_B A_B^{-1}b + (c_N - c_B A_B^{-1}A_N)x_N$) is egész számokból áll, így kerekítési hibák sem lépnek fel.

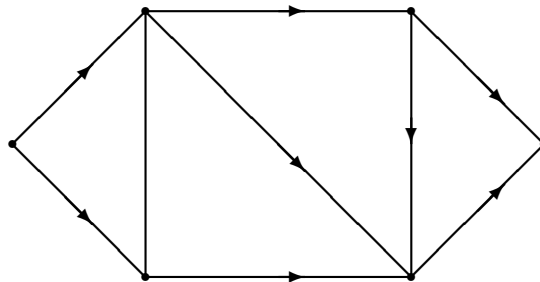
Nem nyilvánvaló viszont, hogyan dönthetjük el egy adott mátrix totálisan unimoduláris-e vagy sem. A totálisan unimoduláris mátrixok karakterizálhatók, mi több, gyors algoritmus is megadható ennek a tulajdonságnak az eldöntésére. Sajnos az erre vonatkozó tételek és algoritmusok ismertetése meghaladja lehetőségeinket. (Megjegyezzük azonban, hogy a fent említett karakterizáció általánosításképpen 1981-ben Paul Seymour bebizonyította a kombinatorika egyik legmélyebb tételét az ún. *reguláris matroidok* dekompozíciós tételét.) Mi egy szerényebb utat fogunk követni. Bevezetjük a véges matematika leghasznosabb fogalmát, a gráfokat és az ezekkel való modellezés lehetőségeit vizsgáljuk. Megmutatjuk majd, hogy egy gráfhoz tartozó ún. *incidencia mátrix* totálisan unimoduláris, aminek messzeható következményei vannak, melyek közül néhányat tárgyalni fogunk.

Gráfelméleti alapfogalmak

A formális definíciók előtt lássuk, mik motiválják a bevezetendő fogalmainkat. A XVIII. században vetődött fel az ún. *Königsbergi probléma*, melyet Euler 1736-ban általánosan is megoldott. Königsberg városát a Pregel folyó osztotta részekre, melyet az ábrán látható módon kötöttek össze hidak. Felmerült a kérdés, lehet-e olyan sétát tenni, amelyben minden hídon pontosan egyszer haladunk át.

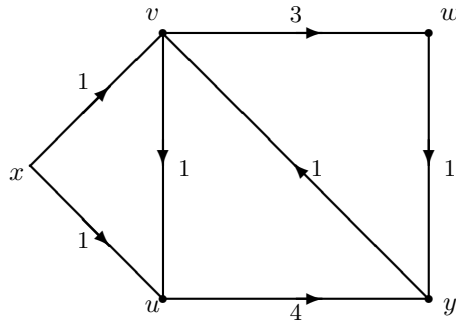


A probléma nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy a jobboldalon álló objektum lerajzolható-e egyetlen vonallal. Az ilyen objektumokat, melyek pontokból és az őket összekötő vonalakból, *élekből* állnak nevezzük majd *gráfnak*. Könnyen látható különben, hogy a probléma megoldhatatlan, mert három olyan pont van (1, 3 és 4), amelyhez páratlan számú él csatlakozik. Ezt általában is igen hasznos elnevezni; egy x ponthoz csatlakozó él számát az x pont *fokszáma*. Az élekre irányítást tehetünk, pl. ha olyan úthálózatot modellezünk, ahol egyirányú utak is előfordulnak.



Ezt a felfogást továbbvive (azaz úthálózatnak tekintve a gráfot) felmerül a pontok közti távolság kérdése, illetve egy x és y pont közötti *legrövidebb*

út megkeresése. Előfordul, hogy a gráfok éleire számokat írunk. Ezzel jelölhetjük az adott él *hosszát*, esetleg áteresztő képességét *kapacitását* vagy éppen *költségét*.



A fenti ábrán, ha a számokat távolságként interpretáljuk, x és y közt a legrövidebb út az (x, u, w, y) , hossza 3. Ha kapacitásként, akkor az x -ből y -ba 2 egységnyi anyag szállítható maximálisan. Jelenthetnek a gráf pontjai egy adott helyzetben alternatívákat is, ahol az “ x jobb, mint y ”-t egy $y \rightarrow x$ irányított éllel jelölünk. (A racionálisan megvalósuló lehetőségek halmazát fogjuk majd *magnak* nevezni). Használhatjuk a gráfokat térképszínezésekre, raktározási problémák vizsgálatára (lásd *kromatikus szám*), vagy munkafolyamatok szétosztására (lásd *párosítás*), és ezen felül ezer más probléma modellezésére. Lássuk hát a példáink által sugallt fogalmak definícióját!

Egy G gráf egy $G = (V(G), E(G), I(G))$ hármast jelent, ahol $V(G)$ -t a gráf *pontjainak*, $E(G)$ -t pedig a gráf *éleinek* nevezzük. $I(G)$ egy függvény, mely G éleihez G pontjainak egy, vagy két elemű rendezett vagy rendezetlen halmazait rendeli. Szemléletesen a G gráf egyes pontjait élek (*irányított* vagy *irányítatlan*) kötik össze. Megengedünk továbbá *többszörös éleket* és *hurkokat* is. Az utóbbin természetesen olyan $e \in I(G)$ élt értünk, amelyhez rendelt halmaznak egy eleme van.

Egy hurokél mentes G gráf pontjának *fokszámán* azon élek számát értjük, amelyekhez $I(G)$ a v -t tartalmazó halmazt rendeli, a jele $d(v)$. Tetszőleges G gráf esetében a hurokéleket duplán számítjuk be a fokszámába. Megkülönböztethetjük a *befutó* és a *kifutó* éleket, ezek számát $d_-(v)$ és $d_+(v)$ jelöli. Természetesen $d_-(v) + d_+(v) = d(v)$.

Az $I(G)$ által az $e \in E(G)$ élhez rendelt x és y pontot (ha kételemű

halmazról van szó) az e él összeköti, vagy x és y illeszkedik az e élre. Továbbá k hosszú sétának nevezzünk egy $(x_1, e_1, \dots, e_k, x_{k+1})$ sorozatot, ha $x_i \in V(G)$, $i = 1, \dots, k+1$, valamint az $e_i \in E(G)$ összeköti x_i -t és x_{i+1} -et, ha $i = 1, \dots, k$. Az előbbi séta irányított, ha az e_i -hez x_i és x_{i+1} az (x_i, x_{i+1}) irányítással van hozzárendelve. Ha a sétában x_1, \dots, x_{k+1} különbözőek, akkor útról, ha x_1, \dots, x_k különbözőek és $x_1 = x_{k+1}$, akkor körről beszélünk. (Irányított séta esetén irányított útról, illetve körről.)

Beszélhetünk súlyozott gráfokról. Egy pontsúlyozás alatt egy $w : V(G) \rightarrow \mathbf{R}$, míg élsúlyozás alatt egy $w : E(G) \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt értünk. Egy S halmaz súlya, $w(S) := \sum_{x \in S} w(x)$. Az élsúlyozott G gráfban egy $(x_1, e_1, \dots, e_k, x_{k+1})$ út hossza $\sum_{i=1}^k w(e_i)$. (A w jelölés helyett többnyire l -et használunk, ha távolságot vagy valamilyen alsó korlátot, c -t ha költséget, és u -t ha egy kapacitás felső korlátját kívánjuk jelölni.)

A G gráf pontjainak egy S halmaza független, ha S elemeit nem köti össze él. Egy független S halmaz mag, ha minden $x \in V(G) \setminus S$ estén van olyan $y \in S$, melyre $(y, x) \in E(G)$.

Egy G gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út. Ha bármely két pont között irányított út is van, erősen összefüggő.

Egy G gráf fa ha összefüggő, de bármely e élét elhagyva a maradék $G \setminus e$ gráf már nem összefüggő.

Tétel 3 Egy n pontú G gráfra az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:

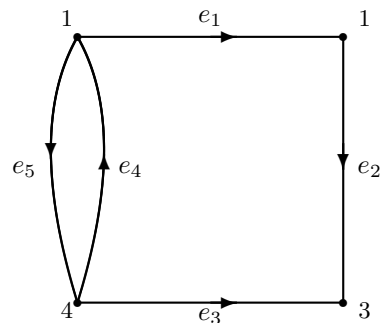
- a, G fa (azaz összefüggő és körmentes).
- b, G összefüggő, és bármely élt eltávolítva G -bol a maradék gráf már nem összefüggő.
- c, G körmentes, de egy tetszőleges éllel bővítve az $E(G)$ élhalmazt, már keletkezik kör.
- d, G körmentes, és $n - 1$ éle van.
- e, G összefüggő, és $n - 1$ éle van.

Egy G gráf kromatikus száma, $\chi(G)$, azon színek számának minimuma, melyekkel kifesthető a gráf pontthalmaza úgy, hogy az egymással összekötött pontok különböző színűek. Egy $M \subseteq E(G)$ halmazt párosításnak nevezzük, ha bármely $x \in V(G)$ M -nek legfeljebb egy elemére illeszkedik. M maximális, ha nem bővíthető, s teljes, ha minden $x \in V(G)$ pontra van olyan $e \in M$, hogy x illeszkedik az e élre.

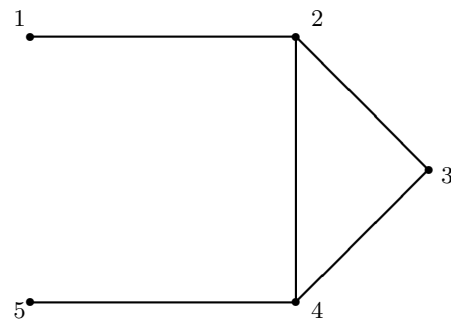
A gráfokat nagyon elegánsan reprezentálhatjuk a lerajzolásukon kívül különböző mátrixok segítségével is. Számunkra a legfontosabbak az *incidencia* vagy *illeszkedési mátrix* és az *adjacencia* vagy *szomszédsági mátrix*. Egy irányított gráf incidencia mátrixa a következőképpen konstruálható: G minden $x \in V(G)$ pontjához tartozik a mátrix egy sora, és minden $e \in E(G)$ éléhez egy oszlopa. Az x -hez tartozó sor és e -hez tartozó oszlop kereszteződésébe $+1$ kerül, ha e az x -be befutó, -1 , ha e az x -ből kifutó él, míg 0 , ha e nem illeszkedik x -re. Az egyszerűség kedvéért az adjacencia mátrixot irányítatlan, többszörös éleket hurokéleket nem tartalmazó gráfra definiáljuk. Ez egy négyzetes mátrix $|V(G)|$ sorral (és oszloppal), ahol a sorokat és oszlopokat egy rögzített sorrendben rendeljük a gráf pontjaihoz. Egy sor és oszlop találkozásában 1 van, ha a megfelelő pontok között van él, 0 különben.

Példák:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
1	-1	0	0	1	-1
2	1	-1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	-1	-1	1



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	0	0	1	0



Nem térhetünk ki ezen mátrixok tulajdonságainak részletes ismertetésére, vagy általánosítási lehetőségeire. Egyetlen, a témakörünkbe vágót tárgyalunk; ez viszont számunkra centrális jelentőségű.

Tétel 4 *Egy irányított gráf A illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.*

Bizonyítás. Használjunk indukciót a részdeterminánsok mérete szerint. Az A mátrix 1×1 -es részmátrixai ± 1 -ek és 0 -ák, így $k = 1$ -re igaz a feltétel. Ha adott egy B $(k + 1) \times (k + 1)$ -es részmátrix, akkor két esetre bomlik a bizonyítás. Ha a B mátrixnak van olyan oszlopa, amelynek legfeljebb egy nem nulla eleme van, akkor determinánsát ezen oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk. Az indukciós feltétel miatt ez 0 vagy ± 1 . Ha B minden oszlopa pontosan két nem nulla elemet tartalmaz (azaz $+1$ -et és -1 -et), akkor B sorainak összege a zérus vektor, vagyis B sorai lineárisan függőek. Ekkor $\det(B) = 0$, és ezzel igazoltuk a tételt. \square

Megjegyzés: Az előző tételünkkel kombinálva leszűrhetjük, hogy minden az illeszkedési mátrix segítségével definiált egészértékű programozási feladat egy LP feladattá egyszerűsödik. Ez megkönnyíti a feladat megoldását (tulajdonképpen *polinom idejűvé* teszi), másrészt a dualitási tételt teljes erejében kihasználhatóvá teszi. Ennek pontos tárgyalása messzire vezetne, így a későbbiekben csupán illusztrálni tudjuk ezt egy-egy példával.

1 Legrövidebb utak

Az egyik leggyakrabban felvetődő gráf optimalizálási probléma a legrövidebb utak keresése. Tegyük fel, hogy adott a G irányított gráf, amelynek éleihez súlyokat rendelünk. A hagyománynak megfelelően a (v, w) él súlyát (hosszát) $l(v, w)$ -vel jelöljük, míg egy p útét, ami nem más, mint a p -ben lévő élek súlyának összege, $l(p)$ -vel. Feltehetjük azt is, hogy $(v, v) \in E(G)$ minden $v \in V(G)$ -re, és $l(v, v) = 0$.

- (a) Rögzítsük most G két pontját, s -et és t -t és keressük meg azt a p utat, mely s -ből t -be vezet és $l(p)$ minimális.
- (b) Általánosabban kereshetjük a legkisebb súlyú (legrövidebb) utakat s és minden $v \neq s$ pont között.

Meglepő módon az összes olyan ismert algoritmus, ami megoldja a-t, b-t is megoldja egyben.

Mielőtt rátérnénk a megoldásra, vizsgáljuk meg mikor létezik ez. Ha az s -ből elérhető egy C negatív súlyú kör ($l(C) < 0$) és C -ből elérhető t , akkor az a feladatnak nem lehet megoldása. (C -n tetszőlegesen sokszor "körbemegetünk", így az út súlya tetszőlegesen kicsi lehet.) Másrészt, ha nincs ilyen kör, akkor lehetséges megoldásaink halmazáról feltehetjük, hogy véges, így - amennyiben az nem üres - van optimum.

A (b) feladat megoldására Bellman 1956-ban publikált iteratív módszerét az ún. *dinamikus programozást* használjuk. Az eljárás leírásához szükségünk van néhány jelölésre. Egy $v \in V(G)$ pontra jelentse $d(v)$ az s -ből v -be vezető legrövidebb út hosszát, míg $d_k(v)$ az s -ből v -be a *legfeljebb k élt tartalmazó* legrövidebb út hosszát. Amennyiben a fenti utak nem léteznek, $d(v)$ vagy $d_k(v)$ értéke végtelen (jelben ∞). Használjuk még a $p : V(G) \rightarrow V(G) \cup \{\emptyset\}$ függvényt a megfelelő utak nyilvántartására.

1. Kezdetben legyen $\hat{d}_0(s) := 0$, $p_0(s) := \emptyset$, $\hat{d}_0(v) := \infty$, $p_0(v) := \emptyset$, ha $v \neq s$.
2. A k -adik lépésben legyen $\hat{d}_k(v) := \min\{\hat{d}_{k-1}(w) + l(w, v) : (w, v) \in E(G)\}$, $p_{k-1}(v)$ értéke pedig változzon arra a w -re, amely az előbbi minimumot megvalósítja, ha $\hat{d}_k(v) < \hat{d}_{k-1}(v)$.

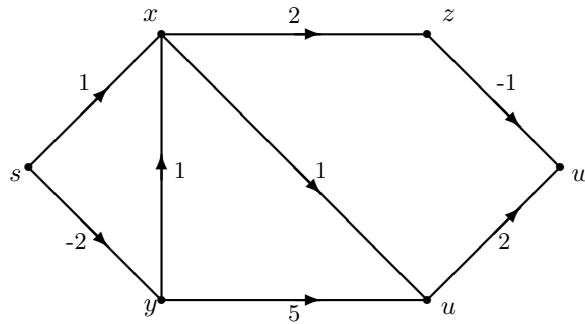
Tétel 5 A fenti algoritmus helyesen számolja ki a d_k függvényt, azaz $\hat{d}_k \equiv d_k$. Ha G -ben nincs negatív súlyú kör, akkor $d_{n-1}(v) = d(v)$ minden $v \in V(G)$ -re, ahol $n = |V(G)|$, a gráf pontjainak száma. Továbbá ebben az esetben egy legrövidebb $s - v$ út pontjai fordított sorrendben $v, p(v), p^2(v), \dots, p^i(v) = s$, ha $d(v) < \infty$, ahol $p = p_{n-1}$.

Bizonyítás. Az első állítást k szerinti indukcióval láthatjuk be. A kezdőértékekre, azaz $k = 0$ -ra az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy egy adott v -re a legrövidebb legfeljebb $k + 1$ élből álló $s - v$ út éppen (s, \dots, w, v) . Az indukciós feltevésből következik, hogy létezik $\hat{d}_k(w) = d_k(w)$ hosszúságú, legfeljebb k élből álló $s - w$ út, így $d_{k+1}(v) \geq \hat{d}_k(w) + l(w, v) \geq \hat{d}_{k+1}(v)$. Mivel $d_{k+1}(v) \leq \hat{d}_{k+1}(v)$, adódik az állítás.

Ha G -ben nincsenek negatív körök, akkor bármely séta átalakítható úttá úgy, hogy a hossza nem növekszik. Ez viszont azt jelenti, hogy $d_{n-1} \equiv d_{n-1+i}$ bármely $i \in \mathbf{N}$ esetén és így $d_{n-1} \equiv d$.

A p szerepét szintén a legrövidebb utak élszáma szerinti indukcióval láthatjuk be. (Ugyanis a $(p(v), p^2(v), \dots, p^i(v) = s)$ legrövidebb $s - p(v)$ út lesz a feltétel szerint. Ekkor a $(p(v), v)$ él hozzávételével legrövidebb $s - v$ utat kapunk.) \square

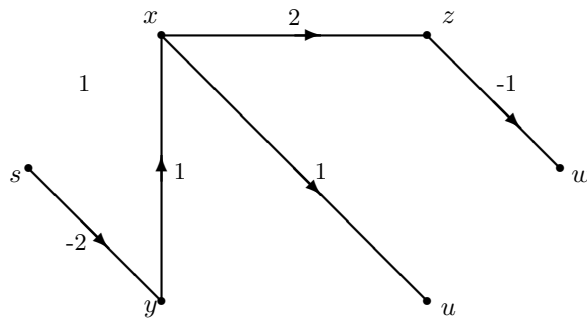
Példa: Legyen G az ábrán látható gráf; ekkor az algoritmus lépései az alábbi táblázatban foglalhatók össze:



A táblázatot oszloponként töltjük ki, a $d_0(s) = 0, d_0(v) = \infty$ minden s -től különböző v -re, míg $p = \emptyset$. Ezek után a d_k és p_k függvények értékeit rekurzióval kapjuk meg $k \geq 1$ -re.

	0		1		2		3		4		5	
	d_0	p	d_1	p	d_2	p	d_3	p	d_4	p	d_5	p
s	0	\emptyset	0	\emptyset	0	\emptyset	0	\emptyset	0	\emptyset	0	\emptyset
x	∞	\emptyset	1	s	-1	y	-1	y	-1	y	-1	y
y	∞	\emptyset	-2	s	-2	s	-2	s	-2	s	-2	s
z	∞	\emptyset	∞	\emptyset	3	x	1	x	1	x	1	x
u	∞	\emptyset	∞	\emptyset	2	x	0	x	0	x	0	x
w	∞	\emptyset	∞	\emptyset	∞	\emptyset	2	z	0	z	0	z

A táblázat utolsó oszlopából nemcsak a legrövidebb $s - v$ utak ($v \in G$) hosszai olvashatók ki, hanem meghatározhatók ezek az utak. Ha csak a legrövidebb utak által használt éleket ábrázoljuk, ezek a p függvény értékei, akkor az ún. *legrövidebb utak fáját* kapjuk. Ez, ha s -ből elérhető bármely pont, egy *gyökeres fa*, s gyökérponttal, ami azt jelenti, hogy $deg_-(s) = 0$ és $deg_-(v) = 1$, ha $s \neq v \in V(G)$.



Ebből könnyen kiolvashatók a legrövidebb $s - v$ utak és hosszai.

- $s - x$ út: (s, y, x) , hossza $d(x) = -1$
- $s - y$ út: (s, y) , hossza $d(y) = -2$
- $s - u$ út: (s, y, x, u) , hossza $d(u) = 0$
- $s - z$ út: (s, y, x, z) , hossza $d(z) = 1$
- $s - w$ út: (s, y, x, z, w) hossza $d(w) = 0$

Megjegyzések:

1. Az eljárás alkalmazható abban az esetben is, ha G -ben van negatív kör. Ekkor egy C negatív kör létezését a $v = p^i(v)$ jelzi valamely

$v \in V(G)$ -re és $i \in \mathbf{N}$ -re, továbbá a p segítségével meghatározható C . Szintén van mód annak eldöntésére, hogy egy adott v pont rajta van-e egy negatív sétán. Vegyünk hozzá a gráfhoz egy új q pontot, és a (q, v) , (v, q) éleket nulla súllyal. Ekkor világos, hogy $d_n(q) < 0$ akkor és csak akkor, ha v rajta van egy negatív sétán.

2. Egy irányítatlan G gráf összefüggősége is tesztelhető; vegyük fel az irányítatlan (i, j) helyére az irányított (i, j) , (j, i) éleket 1-1 súllyal. Ha minden $s - v$ legrövidebb út hossza véges, akkor G összefüggő, ha $d(v) = \infty$, akkor s és v különböző komponensekben vannak.
3. Az algoritmus működése azon múltott, minden $v \in V(G)$ -re van olyan $w \in V(G)$, hogy $d_k(v) = d_{k-1}(w) + l(w, v)$. Ez durván azt jelenti, hogy az optimális struktúránk között kapcsolat van, a "nagyobb" felépíthető a "kisebből". Ilyen jellegű kapcsolat gyakran kihasználható egy hatékony algoritmus felépítésére a fentihez hasonló módon. Ezt a módszert *dinamikus programozásnak* nevezzük.

Alkalmazások

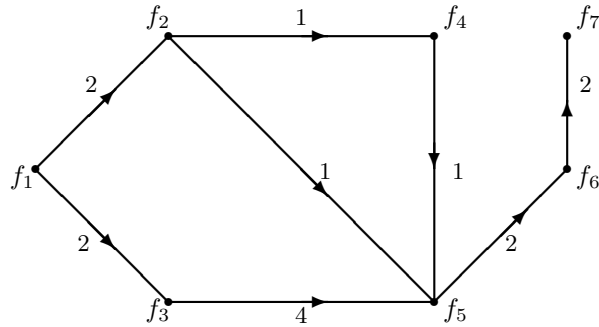
A legrövidebb utakkal meglepően sok probléma modellezhető, illetve fontos része más algoritmusoknak. Az utóbbit később látni fogjuk. Itt három, nem kézenfekvő alkalmazásra térünk ki.

1. A kritikus út módszere

Tegyük fel, hogy adott egy projekt, amely több, egymástól nem független résztevékenységből áll. Tudjuk a résztevékenységek végrehajtásához szükséges időt és azt, hogy egy adott tevékenység elkezdésének mely más tevékenységek befejezettsége feltétele. (Pl. egy építkezésnél csak az alapozás után lehet falazni.) A célunk annak meghatározása, hogy minimálisan mennyi idő alatt teljesíthető a projekt, ha *nincs* egyéb korlátozás. A javasolt modellt és a megoldást egy példán illusztráljuk.

Példa: Jelöljük a részfeladatokat f_1, \dots, f_6 -tal, az elvégzéshez szükséges időket t_1, \dots, t_6 -tal és ha az f_j elkezdésének az f_i befejezettsége feltétele, azt $f_i < f_j$ -vel. Legyen $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 4$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 2$ és a feltételek: $f_1 < f_2$, $f_1 < f_3$, $f_2 < f_4$, $f_2 < f_5$, $f_3 < f_5$, $f_4 < f_5$, $f_5 < f_6$. Ábrázoljuk ezt egy irányított gráf segítségével, ahol a f_i pontot rendeljük az f_i feladathoz, (f_i, f_j) él a gráfban, ha $f_i < f_j$, és ekkor $l(f_i, f_j) = t_i$.

Vegyünk fel egy fiktív feladatot, f_7 -et, és legyen (f_i, f_7) él a gráfban, ha f_i nem feltétele más feladatnak.



Vegyünk egy irányított utat, az $(f_1, f_2, f_5, f_6, f_7)$ -et a gráfból. Ennek hossza $t_1 + t_2 + t_5 + t_6$ és mivel az irányítás szerint az f_1, f_2, f_5 és f_6 tevékenységek csak ebben a sorrendben és egymás után hajthatók végre, az út hossza alsó korlátja a szükséges minimális időnek. Mi több ez a minimális idő egybeesik egy ilyen típusú alsó korláttal, mert a modellünkben fellépő gráfok körmentesek. Egy G körmentes irányított, súlyozott gráf *leghosszabb útját* nevezzük *kritikus útnak*.

Tétel 6 *Egy projekt végrehajtásához szükséges minimális idő egyenlő a kritikus út hosszával.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval a kritikus út élszáma szerint. □

A példánkban könnyen látható: a $(f_1, f_3, f_5, f_6, f_7)$ kritikus út, melynek hossza $t_1 + t_3 + t_5 + t_6 = 10$. Így a tételből következően a projekt időigénye pontosan tíz egység.

Egy tetszőleges irányított gráfban a leghosszabb út megtalálása rendkívül nehéz feladat. Esetünkben a helyzet jóval kedvezőbb: vegyük az élekhez rendelt súlyok -1 -szeresét, és keressük meg a *legrövidebb utat*. Mivel a gráfunk körmentes, így nincs negatív kör, azaz használható Bellman algoritmus és a kapott legrövidebb út a leghosszabb lesz az eredeti gráfban.

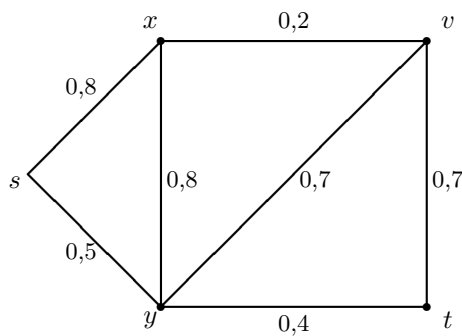
Megjegyzés: A módszer alkalmazásának egyik legszebb példája az Apolló program volt. Ebben ezernél több alvállalkozó által végzett, igen nagy számú részfeladatot sikerült összehangolni mígnem 1969-ben az ember a

Holdra léphetett.

2. Nem lineáris célfüggvény

Tegyük fel, hogy adott egy irányított gráf, amelynek az élein egymástól függetlenül, ismert valószínűségekkel lehet áthaladni. Kijelölve egy s és t pontot, szeretnénk meghatározni azt az utat, amelyen legnagyobb valószínűséggel eljutunk s -ből t -be.

Példa:



Ha rögzítünk néhány élt, akkor annak valószínűsége, hogy mindegyik járható, a függetlenség miatt a hozzájuk rendelt valószínűségek *szorzata*. Jelen esetben a legnagyobb valószínűséggel nyitva levő $s-t$ út az (s, x, y, v, t) , a járhatóság valószínűsége $0,8 \times 0,8 \times 0,7 \times 0,7 = 0,3156$. Általában a következőt tehetjük:¹ cseréljük ki minden e élre az élhez tartozó $p(e)$ valószínűséget $-\ln p(e)$ -re, és keressük a legrövidebb $s-t$ utat ezen súlyozás mellett. Legyenek R és Q két különböző $s-t$ út élhalmazai; ekkor az utak járhatóságának valószínűségei rendre

$$\prod_{e \in R} p(e) \text{ és } \prod_{e \in Q} p(e),$$

míg a transzformáció mellett a hosszuk

$$-\sum_{e \in R} \ln p(e) \text{ és } -\sum_{e \in Q} \ln p(e).$$

¹Valóban, ez az ötlet nagyon általános, a szorzatok kiszámításának összeadásra való visszavezetése a logaritmus függvény bevezetésének egyik fő motivációja.

Ha

$$-\sum_{e \in R} \ln p(e) < -\sum_{e \in Q} \ln p(e),$$

akkor

$$\sum_{e \in R} \ln p(e) > \sum_{e \in Q} \ln p(e).$$

Ebből

$$\ln\left(\prod_{e \in R} p(e)\right) > \ln\left(\prod_{e \in Q} p(e)\right),$$

és a logaritmus monotonitása miatt kapjuk a

$$\prod_{e \in R} p(e) > \prod_{e \in Q} p(e)$$

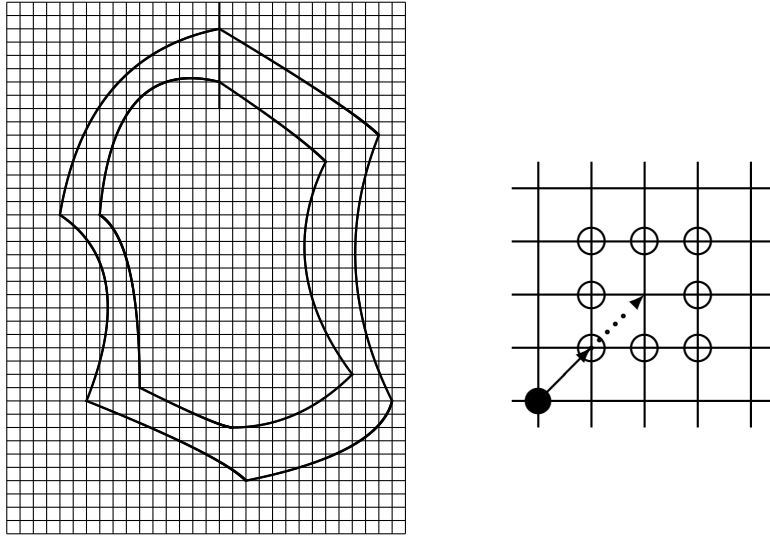
egyenlőtlenséget, ami bizonyítja állításunkat.

3. Fázisterek

A fázisterek alapgondolata az, hogy a vizsgálni kívánt rendszer *teljes* állapotát egyetlen pont segítségével írjuk le.² Itt egy közismert, de mégsem triviális példán illusztráljuk a fázistereken alapuló modellezést.

Az ún. *autóverseny* játékot egy kockás lapon játszhatjuk, ahol az autó egy lépését egy nyíl reprezentálja. (A nyíl az autó egységnyi idő alatt megtett útja. Mivel a gyorsulás nem tetszőlegesen nagy, ezért lépésenként csak $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ -vel változtatható, ahol e_1, e_2 a sík merőleges egységvektorai $\alpha_1, \alpha_2 \in \{-1, 0, 1\}$.) Adott továbbá egy pálya, amit az autó nem hagyhat el, egy rajt- és célvonal, ahonnan indul, illetve ahova érkeznie kell a lehető legkevesebb lépés alatt.

²Ez rendkívül hasznosnak bizonyult a fizikában, ahol például egy n tömegpontból álló rendszer mozgását $6n$ koordináta (pontonként 3 tér és 3 sebesség) írja le. Ez felfogható az \mathbf{R}^{6n} egyetlen pontjaként, míg a rendszer időbeli változása egy térgörbéként. Többnyire ez a hozzáállás segít a Markov láncokkal való modellezésben is: a lánc egy-egy állapota a rendszer teljes leírását kódolja.



A jobboldali ábrán látható, hogyan lehet meghatározni a következő lehetséges lépést: megismételjük az előző lépés vektorát (a szaggatott vektor) és a végponthoz tartozó rácspontba, valamint ennek szomszédaiba léphetünk. A keletkező út *nem* gráfút, hiszen akárhová nem léphetünk; ez a sebességtől is függ. Készíthetünk azonban egy *fázistér gráfot*, amelynek pontjai mind az autó helyét, mind a sebességét kódolják és a pontok között akkor van él, ha az átmenet egyik állapotból a másikba egy lépés alatt megtörténhet. Egy (a, b) síkbeli pontpárnak megfelelt egy gráfpont, ahol a pontbeli állapot azt jelzi, hogy az autó a b pontban van és oda az a -ból lépett. Ekkor az állapotgráfnak olyan (b, c) pontjaira lehet átlépni (van él), amelyekre a bc vektor az ab vektortól bármely koordinátájában legfeljebb eggyel tér el. Súlyozzuk minden élt eggyel, akkor az állapotgráf legrövidebb útja a rajt és cél között a minimális lépésszámú útvonalnak felel majd meg.

Megjegyzés:

1. Ha a pálya n pontból áll, az állapotgráf n^2 pontból fog. A példánkban $n \leq 100$, így az állapotgráfnak tízezernél kevesebb pontja van.
2. Az eljárással modellezhetők egyéb feltételek: olajfolt, amin nem lehet lassítani, homokágy, ami lassít stb.

Hálózati problémák

Az ún. hálózati vagy *network* problémák rendkívül elterjedtek az operációkutatásban. Ennek három fő oka van:

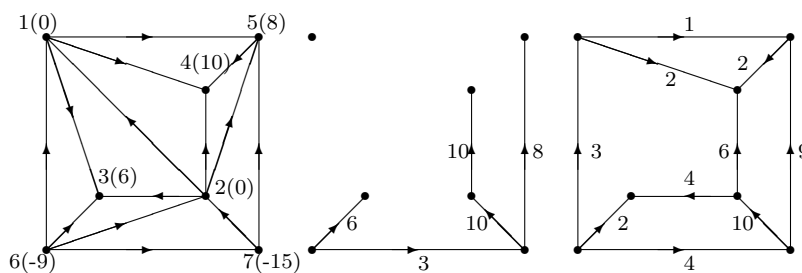
- (i) módfelett alkalmasak gyakorlati problémák modellezésére
- (ii) hatékony algoritmusok dolgozhatók ki megoldásukra
- (iii) matematikai szempontból nagyon elegáns elméletük van.

Ennek megfelelően a 40-es évektől kezdve számos modellel foglalkoztak a témakör kutatói, amiből itt csak néhányat és érintőlegesen tárgyalhatunk.

Az egyik legfontosabb a *transshipment probléma*.³ Adott egy G irányított gráf, melynek éleihez valós számokat (*költségeket*) rendelünk. Számokat rendelünk a gráf pontjaihoz is. Ha ez a szám pozitív, akkor a pontot *nyelőnek*, ha negatív *forrásnak*, ha nulla *belső pontnak* nevezzük. Feltehetjük, hogy a pontokhoz rendelt számok összege nulla. (Ha nem, egy új pont felvételével ilyen formára hozhatjuk G -t.)

Tegyük fel, hogy valamilyen árut kell szállítanunk a forrásokból a nyelőkbe a gráf élei mentén úgy, hogy bármely forrásban a *kínálat*, illetve nyelőben a *kereslet* a hozzárendelt a hozzárendelt szám abszolút értéke (a belső pontokban nulla). Egy él mentén a szállítási költsége az élhez rendelt szám és a szállított áru mennyiségének szorzata, míg az összköltség a szállítási költségek összege.

Példa: A pontok mellé írt szám a pont neve, zárójelben a kereslet/kínálat. A két megoldásban csak a szállításba bekapcsolódó éleket ábrázoltuk.



³Ezt szállítási problémának is szokták magyaráítani. Mi itt inkább *szállítmányozási problémaként* emlegetjük, hogy ne keveredjen össze egy speciális esettel, a Hitchcock-féle szállítási feladattal.

A transshipment probléma felírható LP feladatként, ahol A a G gráf incidencia mátrixa, az x vektor x_{ij} komponense az (i, j) élen szállított áru mennyisége, c_{ij} az egységnyi szállítás költsége, a b vektor pedig az egyes pontokban jelentkező kereslet/kínálat.

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \min \quad & \sum_{(i,j) \in E(G)} c_{ij} x_{ij} = cx \\
 & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

A példánkban az A mátrix a következő:

	1,3	1,4	1,5	2,1	2,3	2,4	2,5	5,4	6,1	6,2	6,3	6,7	7,2	7,5
1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0
3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1

$$x_T = [x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{54}, x_{61}, x_{62}, x_{63}, x_{67}, x_{72}, x_{75}]$$

és $b_T = [0, 0, 6, 10, 8, -9, -15]$.

Vegyük észre, hogy a (*) probléma mátrixából törölhetjük az utolsó (de tulajdonképpen bármely) sort és a b vektor utolsó koordinátáját a lineáris függőség miatt.

A transshipment probléma megoldására különböző lehetőségek adódnak. Ha a G gráf, irányítástól eltekintve összefüggő, akkor a (*) LP egy tetszőleges bázis megoldásának a bázisban lévő változókhoz tartozó élei egy fát alkotnak. Ezeknek a fának a megfelelő transzformációival fogalmazható meg az ún. *network simplex algoritmus*. Ez a jól ismert simplex algoritmus egy, a gyakorlatban rendkívül hatékony változata. Más eljárások ennél is direktebb módon használják ki a feladat speciális szerkezetét, és, legalábbis elméleti vonatkozásban, felülmúlják a network simplex algoritmust. Egy egyszerűbb feladat, a *maximális folyam probléma* vizsgálatában betekintést adunk ezekbe a módszerekbe. Itt megelégszünk az ún. *integralitás tétel* bizonyításával.

Tétel 7 (integralitás) *Tegyük fel, hogy a fenti transshipment probléma b vektorának minden koordinátája egész szám. Ha a feladatnak van lehetséges megoldása, akkor van egész megoldása is. Ha van optimális megoldása, akkor van optimális egész megoldása is.*

Bizonyítás. A lehetséges megoldás létezéséből következik (az LP alaptételéből), hogy van lehetséges bázis megoldás. Korábbi tételeink szerint az A mátrix totálisan unimoduláris, és így a probléma bármelyik lehetséges bázis megoldása egész. Ismét az LP alaptételét használva, ha van optimális megoldás, akkor van optimális bázismegoldás, amely az előző pont miatt szükségképpen egész. \square

A transshipment probléma formalizmusa és az integralitás tétel az operációkutatás és a kombinatorika szerencsés keveréke. Valójában tömérdek korábbi probléma/modell közös általánosítása. Mi a fordított utat követjük: az általános probléma speciális eseteiként mutatunk be néhányat ezek közül. Először azonban lássunk egy nem triviális alkalmazást.

Az étkeztető (caterer) probléma⁴

Adott egy étkeztető, akinek n napon át tiszta szalvétára van szüksége, a j -edik napon egy előre ismert d_j darabra. Ezt részint új szalvéták vásárlásával (a cent darabja), részint a használtak mosatásával fedezheti. Az utóbbiban választhat a gyors (q nap alatt, darabonként b centért) és a lassú (p nap alatt, c centért) ajánlott szolgáltatások között. Természetesen $p > q$ és $a > b > c$, a minimális költség pedig a cél.

Példa:

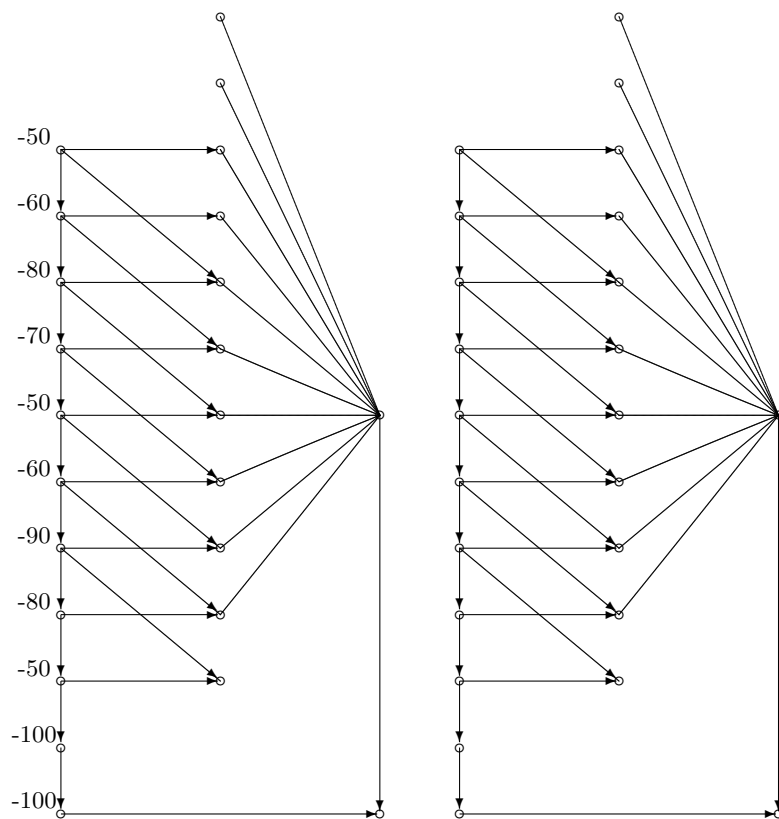
Legyen egy étkeztető feladatban $n=10$, $d_1=50$, $d_2=60$, $d_3=80$, $d_4=70$, $d_5=50$, $d_6=60$, $d_7=90$, $d_8=80$, $d_9=50$, $d_{10}=100$; míg $p=4$, $q=2$, $a=200$, $b=75$, $c=25$.

Az alábbi táblázatban összefoglalunk egy lehetséges és egy optimális (a zárójelben lévő számok) stratégiát. Az utóbbi egy a feladathoz rendelt transshipment probléma optimális bázis megoldása. A feladat gráfjában a hozzátartozó fát szintén ábrázoljuk majd.

⁴A modell eredetileg egy *ütemezési probléma*, amellyel a légierő repülőgép motorjainak karbantartását tervezték. Később a megalkotói (Jacobs, Gaddum, Hoffman, Sokolowsky és Prager) a demilitarizált *caterer (étkeztetési) probléma* néven publikálták.

Nap	Mosott	Vásárolt	Gyors mosás	Lassú mosás	Tárolás
1	0 (0)	50 (50)	50 (0)	0 (50)	0 (0)
2	0 (0)	60 (60)	60 (0)	0 (60)	0 (0)
3	50 (0)	30 (80)	50 (0)	30 (80)	0 (0)
4	60 (0)	10 (70)	60 (0)	0 (70)	10 (0)
5	50 (50)	0 (0)	60 (10)	0 (0)	0 (40)
6	60 (60)	0 (0)	60 (10)	0 (90)	0 (0)
7	90 (90)	0 (0)	50 (50)	0 (0)	40 (40)
8	60 (80)	20 (0)	100 (10)	0 (0)	20 (110)
9	50 (50)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	70 (160)
10	100 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	170 (260)

A transshipment modell és az optimális megoldás fája a következő:



Az baloldali ábra értelmezése:

A baloldali pontokban, mint tárolókban jelenik meg a naponként elhasznált szalvéta. Ezekből a forrásokból tovább küldhetők gyors mosással a két nappal későbbi felhasználásra (vízszintes élek, b költség), lassú mosással (ferde élek, c költség), vagy tárolhatók a következő napig (függőleges élek, 0 költség). A j -dik napon igényelt d_j darab szalvéta beszerezhető a $j - q$ tárolóból gyors, a $j - p$ -ből lassú mosatással, vagy a boltból a költségű élen. Célszerű feltenni, hogy a boltban elegendő szalvéta van, és akár az egész szükséglet fedezhető vásárlás útján. Az utolsó napon a tárolóban lévő szalvétákat egy (képzelt) gyűjtőbe irányítjuk zéró költség árán csakúgy, mint az n -edik nap után a boltban maradtakat. (Ez utóbbi szintén zéró költséggel tehető meg.) Ezek segítségével az étkeztetési problémát átírtuk egy transshipment problémára.

A jobboldali ábra értelmezése:

Az optimális bázis megoldás bázisában lévő változóknak megfelelő éleket ábrázoltuk. Az élekre írt számok a változók értékei. Vegyük észre, hogy némelyik bázisváltozó nulla értéket kap, azaz a megoldás degenerált. Ez a hálózati problémák megoldásánál igen gyakori jelenség. Az integralitás tétel garantálja, hogy van egész optimális megoldás, és így a kapott ütemezési terv kerekítések nélkül alkalmazható.

A legrövidebb út probléma

A legrövidebb utak keresésére már adtunk kielégítő algoritmust. Most az új modellünk erejét illusztráljuk. Tegyük fel, hogy egy irányított, súlyozott G gráfban egy legrövidebb $s - t$ utat keresünk. Rendeljünk s -hez -1 , míg t -hez 1 keresletet. Tekintsük a súlyokat költségeknak és vegyük az így adódó transshipment probléma egy egész optimumát, ha az létezik. Ha G -ben nincs negatív kör, könnyen látható, hogy az élekhez rendelt változók csak 0 és 1 értéket vesznek majd fel, és az 1 értékhez tartozó éleken eljuthatunk s -ből t -be. (Parciálisan a megfordítás is igaz: a legrövidebb utak keresése fontos *részfeladat* a transshipment probléma megoldására adott némely algoritmusban.)

Szállítási (transportation) probléma

A problémát 1941-ben F. I. Hitchcock tanulmányozta, így néha *Hitchcock-féle szállítási feladatként* is emlegetik. a problémát:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = s_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ez egy kettő kromatikus számú gráfban (vagy más szóval *páros gráfon*) definiált transshipment probléma. Definiáljuk G úgy, hogy $V(G) = U \cup V$, ahol $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ a források, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a nyelők halmaza, és $E(G) = \{u_i v_j : u_i \in U, v_j \in V\}$. Legyen továbbá a kínálat r_i az u_i pontnál ($i = 1, \dots, m$), a kereslet pedig s_j a v_j pontnál ($j = 1, \dots, n$). A szállítási feladat ezek után megoldható az integralitás tétel alapján. A szállítási feladatnak a nyilvánvalóan látszó felhasználhatóságon kívül sok mély alkalmazása van, melyre itt nem térhetünk ki.

Hozzárendelési (assignment) probléma

Egy példán keresztül vezetjük be a feladatot. Tegyük fel, hogy van 5 ember, 5 különböző feladat, és egy számmal leírhatjuk az i -edik ember teljesítményét a j -edik feladaton ($0 \leq i, j \leq 5$). Adjunk minden embernek pontosan egy feladatot úgy, hogy a teljesítmények összege a lehető legnagyobb legyen. A teljesítmények leírhatók egy mátrix-szal:

	1	2	3	4	5
1	7	5	4	4	5
2	7	9	7	9	4
3	4	6	5	8	5
4	5	4	5	7	4
5	4	5	5	8	9

A feladatra egész értékű programozási modellt célszerű felállítani. Legyen $x_{ij} = 1$, ha az i -edik ember a j -edik feladatot kapja, $x_{ij} = 0$ különben. Ezzel a feltételek $\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1$ ($i = 1, \dots, 5$) (minden ember pontosan egy feladatot kap) és $\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1$ ($j=1, \dots, 5$) (minden feladatot pontosan egy ember végez el), a célfüggvény pedig a mátrix együtthatókból áll: $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$.

Általában a hozzárendelési probléma:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 (*) \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i, j \leq n).
 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a (*) problémának *mindig* van pontosan $n!$ lehetséges, és ebből következően legalább egy optimális megoldása is, és az integralitási tétel miatt az alábbi szállítási feladat optimális bázismegoldása a (*)-nak is optimális megoldása:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-c_{ij}) x_{ij} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
 & x_{ij} \leq 0 \quad (1 \leq i, j \leq n).
 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a (*) feladatnak 1950-ben P. R. Halmos és H. Vaughn egy meglehetősen abszurd “alkalmazását” publikálta. Ebben n házassági kívánó férfi, illetve nő egymáshoz rendelését írják le olyan módon, hogy a c_{ij} szám a j -edik nő által az i -edik férfinak adott pontszám (n a legjobb esetben, 1 a legrosszabban), míg az “összboldogság” arányos $\sum_i \sum_j c_{ij}$ -vel. Ez számunkra csak annyiban érdekes, hogy a későbbiekben egy valamivel realisabb feltétel mellett megvizsgáljuk és megoldást adunk az ún. *stabil házassági problémára*. A probléma és a rá vonatkozó integralitás tétel jól használható a *páros gráfok párosítási problémáinak* tanulmányozásában. Egy G gráf *páros*, ha $V(G) = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$, és minden él A és B között húzódik (jelben $\chi(G) \leq 2$). Könnyen belátható, hogy egy G páros

gráf maximális M párosítása az alábbi LP megoldásával megkapható:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in B} \sum_{i \in A} x_{ij} \\ & \sum_{j: (i,j) \in E(G)} x_{ij} \leq 1 \quad (i \in A) \\ & \sum_{i: (i,j) \in E(G)} x_{ij} \leq 1 \quad (j \in B) \\ & x_{ij} \leq 0 \quad (i \in A, j \in B), \end{aligned}$$

ahol M azon (i, j) élekből áll, melyekre $x_{ij}^* = 1$ az optimális megoldásban. Hasonló könnyedséggel kaphatjuk meg König Dénes híres tételét:

Tétel 8 *tegyük fel, hogy G olyan páros gráf, melyre $|A| = |B| = n$ és minden $v \in V(G)$ pont fokszáma $d(v) = k \geq 1$. Ekkor G -ben van teljes párosítás.*

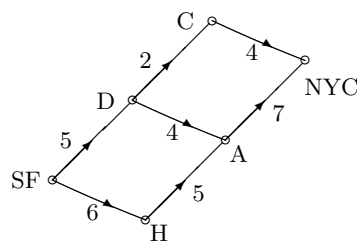
Bizonyítás. Készítsünk egy transshipment problémát a G gráfhoz úgy, hogy A pontjaihoz -1 -et, B pontjaihoz 1 -et rendelünk és az éleket A -ból B -be irányítjuk. (Az élek költségével nem törődünk.) A keletkező problémának van lehetséges x megoldása: egyszerűen legyen $x_e = 1/k$ minden e élre. Így az integralitás tétel miatt van x^* lehetséges egész megoldás, amelyben $x_e^* \in \{0, 1\}$ minden e élre. Valójában A minden pontjából pontosan egy él vezet ki, melyekhez tartozó változó értéke 1 , és ezek az élek egy M teljes párosítást adnak. \square

2 A maximális folyam probléma

A maximális folyam probléma felfogható egy olyan transshipment problémaként, amelyben a változók értékeire felső korlátokat kötünk ki. Ezt a kapcsolatot felhasználva elméleti következtetéseket vonhatunk le, illetve a feladatot megoldó algoritmusokhoz juthatunk. A terület fejlődése nem ezt az irányt követte és mi sem fogjuk ezt tenni, ugyanis közvetlen, a simplex algoritmusra nem hivatkozó eszközökkel tárgyalható a probléma. Mi több, az adódó bizonyítások egyszerűbbek, az algoritmusok hatékonyabbak, mintha általános elméleten keresztül érnénk el céljainkat.

Példa: Kezdjük egy klasszikus példával, amelyben San Franciscoból New Yorkba igyekszik egy repülőtársaság maximális számú embert utaztatni. Útközben több átszállási lehetőség van és az egyes városok között szállítható utasok számát egy táblázatban foglaljuk össze.

Honnan	Hová	Helyek száma
San Francisco	Denver	5
San Francisco	Houston	6
Denver	Atlanta	4
Denver	Chicago	2
Houston	Atlanta	5
Atlanta	New York	7
Chicago	New York	4



A táblázat átírható egy irányított gráf segítségével; az élek súlyozása az elszállítható utasok maximális szám a két pontnak megfelelő város között. A következőket szeretnénk formalizálni egy szállítási tervben:

1. Ha (v, w) úton k ember megy az ugyanaz, mint a (w, v) úton $-k$ ember.
2. A egy úton küldött emberek száma nem haladhatja meg az út korlátját.
3. SF és NYC kivételével a beérkező és távozó utasok száma egyenlő, azaz az 1. pont miatt az összeg nulla.

Legyen G egy irányított gráf két kitüntetett ponttal, s (forrás) és t (nyelő). Jelölje $c(v, w)$ a (v, w) él kapacitását, azaz az élhez tartozó változó maximális értékét, továbbá legyen $c(v, w) = 0$, ha (v, w) nem él G -ben. Az

$f : V(G) \times V(G) \rightarrow R$ függvény *folyam*, ha az alábbi három feltételnek eleget tesz:

- (1) **Ferde szimmetria.** Minden v, w pontra $f(v, w) = -f(w, v)$. Ha $f(v, w) > 0$, akkor azt mondjuk, *van* folyam v -ből w -be.
- (2) **Kapacitás korlát.** Minden v, w pontra $f(v, w) \leq c(v, w)$. Ha (v, w) olyan, hogy $f(v, w) = c(v, w)$, azt mondjuk a folyam *telíti* (v, w) -t.
- (3) **A folyam megmaradás elve.** Minden s és t -től különböző v pontra $\sum_{w \in V(G)} f(v, w) = 0$.

A folyam *értéke*, $|f| := \sum_{w \in V(G)} f(s, w)$, azaz a forrásból kifolyó mennyiség. A *maximális folyam probléma* a maximális értékű folyam megkeresése. Vizsgálataink központi fogalma a *vágás*. Egy X, \bar{X} *vágás* a $V(G)$ ponthalmaz olyan partíciója, hogy $s \in X$ és $t \in \bar{X} = V(G) \setminus X$. Az X, \bar{X} vágás *kapacitása* $c(X, \bar{X}) := \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} c(v, w)$. Egy minimális kapacitású vágást *minimális vágásnak* nevezünk. Ha f egy folyam, X, \bar{X} egy vágás, akkor a *vágáson átmenő folyam* $f(X, \bar{X}) := \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} f(v, w)$.

Lemma 1 *Bármely f folyam és X, \bar{X} vágás esetén a vágáson átmenő folyam egyenlő a folyam értékével.*

Bizonyítás.

$$f(X, \bar{X}) = \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} f(v, w) = \sum_{v \in X, w \in V(G)} f(v, w) - \sum_{v \in X, w \in X} f(v, w) = |f|,$$

mert $\sum_{v \in X, w \in V(G)} f(v, w) = |f|$ a folyam megmaradás, $\sum_{v \in X, w \in X} f(v, w)$ pedig nulla a ferde szimmetria törvénye miatt. \square

A lemma szemléletes jelentése az, hogy a folyam értéke egyenlő az X -et elhagyó *nettó* mennyiséggel. Mivel $f(v, w) \leq c(v, w)$,

$$|f| = \sum_{v \in X, w \in X} f(v, w) \leq \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} c(v, w)$$

minden f folyam és X, \bar{X} vágás esetén. Így a maximális folyam értéke nem haladja meg a minimális vágás értékét. A meglepő az, hogy ez a két érték egyenlő. Ez igazából az LP dualitás tétel egy speciális esete, melyet néhány fogalom bevezetésével közvetlenül is beláthatunk.

A *maradék kapacitás* egy f folyamra v és w pontok között $r(v, w) := c(v, w) - f(v, w)$. Szemléletesen $r(v, w)$ egységgel növelhetjük a folyamot

v -ből w -be (ha ugyanennyivel csökkentjük $f(w, v)$ értékét). Az R maradék gráf egy folyamra G pontjaiból és azon (v, w) párokból, mint élekből áll, amelyekre $r(v, w) > 0$: lehetnek olyan élei, melyek *nincsenek* G -ben. Egy p növelő út az f folyamra egy s -ből t -be vezető út R -ben. A p út maradék kapacitása, $r(p)$ a p -ben lévő élek maradék kapacitásainak minimuma. A p növelő út szerepe nyilvánvaló: a p élei mentén $r(p)$ -vel növelve az f folyamot, a folyam értéke $r(p)$ -vel növelhető. (Ha $f(v, w)$ -t változtatjuk, változik $f(w, v)$ is!)

Lemma 2 Legyen f egy tetszőleges, f^* pedig egy maximális folyam G -n. Ha R az f -hez tartozó maradék gráf, akkor R -en a maximális folyam értéke $|f^*| - |f|$.

Bizonyítás. Legyen f' tetszőleges folyam R -en és definiáljuk az $f + f'$ folyamot az $(f + f')(v, w) := f(v, w) + f'(v, w)$ egyenlőséggel. Ekkor $f + f'$ folyam G -en, értéke $|f| + |f'| \leq |f^*|$, amiből $|f'| \leq |f^*| - |f|$ adódik.

A hasonlóan definiált $f^* - f$, $(f^* - f)(v, w) := f^*(v, w) - f(v, w)$ folyam R -en, értéke $|f^*| - |f|$, azaz az előzőek miatt maximális folyam R -en. \square

Tétel 9 (maximális folyam - minimális vágás tétel) A következő feltételek ekvivalensek:

- (i) Az f folyam maximális.
- (ii) Nincs növelő út f -re.
- (iii) Valamely X, \bar{X} vágásra az $|f| = c(X, \bar{X})$.

Bizonyítás. (i) \Rightarrow (ii) Ha van egy p növelő út f -re, akkor növelhetjük a folyam értékét a p -ben lévő éleken megváltoztatva a folyamot. (ii) \Rightarrow (iii) Tegyük fel, hogy f -re nincs növelő út. Legyen X azon pontok halmaza, melyek elérhetők s -ből az R éleit használva, és legyen $\bar{X} = V(G) \setminus X$. ekkor X, \bar{X} egy vágás ($s \in X, t \in \bar{X}$), és

$$|f| = \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} f(v, w) = \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} c(v, w) = c(X, \bar{X}),$$

mert $v \in X, w \in \bar{X}$ -ből következik, hogy (v, w) nem éle R -nek, azaz $f(v, w) = c(v, w)$ (iii) \Rightarrow (i) Mivel $|f| \leq c(X, \bar{X})$ bármely f folyam és X, \bar{X} vágás esetén, az $|f| = c(X, \bar{X})$ egyenlőségből következik, hogy f maximális folyam és X, \bar{X} minimális vágás. \square

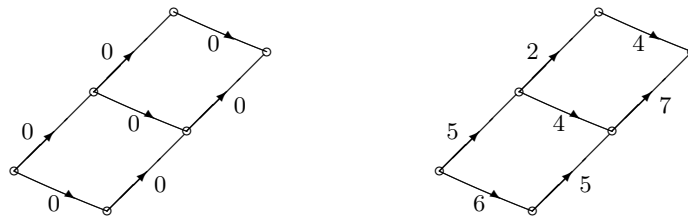
Az előző tétel az alapja Ford és Fulkerson ún. **növelő út módszerének**: Induljunk ki a zérus folyamból ($f(v, w) = 0$ minden (v, w) élre), majd ismételjük meg a *növelő lépést* amíg olyan folyamhoz jutunk, amiben nincs növelő út. **Növelő lépés**: Találjunk egy p növelő utat a pillanatnyi f folyamra. Növeljük f értékét $r(p)$ egységgel a p -ben lévő éleken.

Tétel 10 (*integralitás tétel*) *Ha egy folyam problémában a kapacitások egészek, akkor van egy egész értékű maximális folyam.*

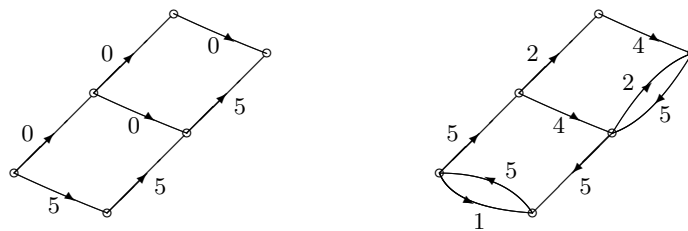
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a kapacitások egészek. Ekkor a növelő út módszer legalább egy egységgel növeli a folyam értékét minden iterációban, így f^* maximális folyamat legfeljebb $|f^*|$ lépésben megkapja. Masrészt a kezdeti egész értékeket minden lépésben egész számmal változtattuk, így $f^*(v, w)$ egész minden (v, w) élre. \square

A példánkban az alábbi lépésekkel kaphatunk maximális folyamot. Baloldalon a folyam értékeket, mellette a hozzátartozó maradék gráfot a növelő úttal együtt ábrázoljuk.

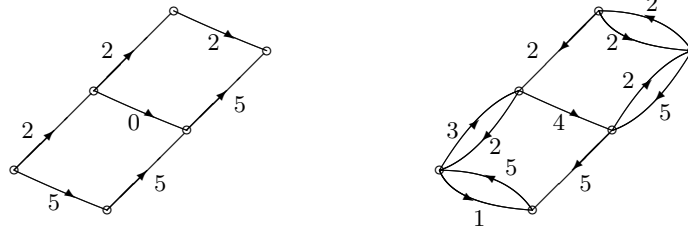
Inicializálás. A növelő út: SF-H-A-NYC, $r(p) = 5$



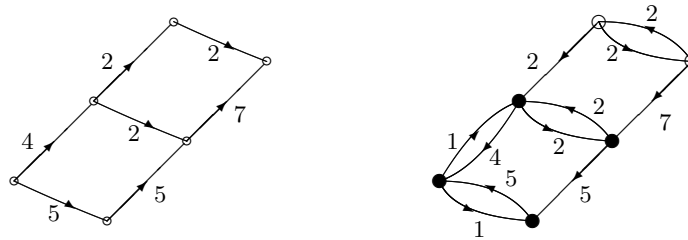
1. lépés. A növelő út: SF-D-C-NYC, $r(p) = 2$



2. lépés. A növelő út: SF-D-A-NYC, $r(p) = 2$

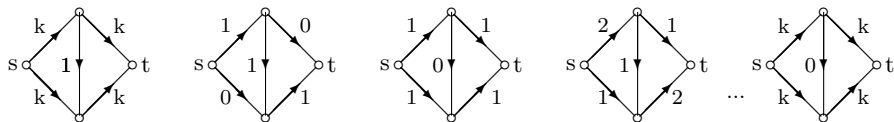


3. lépés. Nincs növelő út, $|f^*| = 9$, X , \bar{X} a teli ill. üres pontok az ábrán.



Megjegyzés: A növelő út módszer nem szükségképpen konvergál, és egész számok esetén is lehet nagyon hosszú. Edmonds és Karp viszont megmutatta 1969-ben, hogy a *legkevesebb élből* álló növelő út választásával az algoritmus cnm^2 műveletet igényel, ahol c konstans, n a pontok, m pedig az élek száma G -ben.

Példa: Az első rajzon a kapacitások, a többin a közelítések, ha a növelő út áthalad a függőleges élen. (Csak a folyamat ábráztuk, a maradékgráfot nem.) Ekkor algoritmus lépésszáma k . Ha a legrövidebb növelő utakat választjuk, akkor két lépésben eljutunk az optimumhoz.



A külszíni fejtés probléma

A maximális folyam probléma egy váratlan és mély alkalmazása fűződik Balinsky, Rhys és Picard nevéhez, amit *külszíni fejtés* (vagy *open pit*) problémának hívnak. Tegyük fel, hogy egy adott területen valamely mélységig felosztottuk a talajt, és ismerjük egy-egy részben lévő ásvány értékét, illetve az adott rész kitermelési költségét. Az egyszerűség kedvéért téglatest alakú

darabokkal számolunk és az i -edik darab értéke w_i a benne levő ásvány értékének és a kitermelési költség különbsége.

Feladatunk azon P halmaz megtalálása, amelyre a $\sum_{i \in P} w_i$ maximális. A nehézség abban rejlik, hogy P nem lehet akármilyen halmaz; meg kell felelnie egy lehetséges kitermelésnek. Ez alatt azt értjük, ha egy téglát kitermelünk, akkor nemcsak a felette lévő téglát, de még annak szomszédait is ki kell termelnünk, mégha negatív is az értékük.⁵

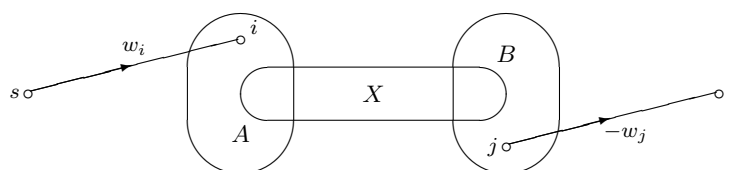
Példa:

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-2	-1	1	5	3	1	-5	4	-1	-1
1	1	0	10	5	1	1	1	1	0

Általában ha az i -edik elem hozzávétele a P halmazhoz kikényszeríti a j -edik elem hozzávételét azt egy (i, j) irányított éllel jelöljük majd a G gráfban, melynek a pontjai az elemek. Legyen ennek a gráfnak egy $X \subset V(G)$ ponthalmaza *zárt*, ha $i \in X$ és $(i, j) \in E(G)$ esetén $j \in X$. Újrafogalmazva a problémát egy olyan X zárt részhalmazát keressük a pontoknak, hogy a $\sum_{i \in X}$ maximális.

Ezt a következő eljárással visszavezethetjük egy minimális vágás, vagy ami ezzel ekvivalens, egy maximális folyam problémára. Osszuk fel G pontjait két részre; $i \in A$, ha $w_i \geq 0$ illetve $i \in B$, ha $w_i < 0$. Vegyünk hozzá G -hez két új pontot, egy s forrást és egy t nyelőt, valamint egy (s, i) élt minden $i \in A$ -ra, és egy (j, t) élt minden $j \in B$ -re. legyen az új élek kapacitása $c(s, i) := w_i$ minden $i \in A$ -ra, $c(j, t) := -w_j$ minden $j \in B$ -re, míg G eredeti éleinek kapacitása végtelen.

Könnyen látható, hogy egy X ponthalmaz akkor és csak akkor zárt, ha az $X \cup \{s\}$, $\overline{X \cup \{t\}}$ vágás kapacitása véges.



Továbbá ha az előbbi vágás kapacitása véges, akkor az éppen

$$c(X \cup \{s\}, \overline{X \cup \{t\}}) = \sum_{i \in A \setminus X} c(s, i) + \sum_{i \in B \cap X} c(i, t) =$$

⁵Ez bányatechnikai előírás, ugyanis bizonyos szögknél meredekebb lejtőt nem szabad létrehozni külszíni fejtésnél.

$$= \sum_{i \in A \setminus X} w_i + \sum_{i \in B \cap X} (-w_i) = \sum_{i \in A} w_i - \sum_{i \in X} w_i.$$

Mivel a $\sum_{i \in A} w_i$ konstans, a fenti vágás kapacitásának minimalizálása a $\sum_{i \in X} w_i$ maximalizálását jelenti. Azaz a minimális vágás megtalálása egyben megadja a keresett maximális súlyú zárt ponthalmazt.

Mohó algoritmusok

Mint korábban láthattuk, számos iteráción alapuló algoritmusnak van *mohó* aspektusa: az algoritmus az adott pillanatban a legkedvezőbbnek tűnő lehetőséget választja. Ez a megközelítés néha kiváló, néha katasztrofális eredménnyel jár; mindenesetre egy újonnan felmerülő problémánál célszerű szerencsét próbálni vele. Ha pontos megoldást nem is, hasznos információkat nyerhetünk általa. A mohó algoritmusok általában nagyon gyorsak és egyszerűek, így ha egy feladatot pontosan oldanak meg, akkor nemigen lehet jobbat találni náluk. A következő néhány problémában ez az eset áll fenn.

Példa: Maximális súlyú feszítőfa

Tegyük fel, hogy adott egy irányítatlan, összefüggő G gráf, melynek éleihez nem negatív súlyokat rendelünk; $w(e) \geq 0$, ha $e \in E(G)$. Célunk egy olyan $X \subseteq E(G)$ élhalmaz megadása, mely X nem tartalmaz kört és a $\sum_{e \in X} w(e)$ maximális. (A szumma jelölhető $w(X)$ -szel és ez X *súlya*.)

Megjegyzés: Mivel $w(e) \geq 0$ minden e élre, feltehető, hogy X maximális körmentes halmaz, azaz *feszítőfa* G -ben. Könnyebben motiválható lenne egy *minimális súlyú* feszítőfa keresése, ami például egy minimális költségű összefüggő kommunikációs hálózatot modellezhet. A probléma valóban így vetődött fel először (Borůvka 1926, illetve Kruskal 1956), nem nehéz viszont belátni az ekvivalenciájukat.

Az alábbi mohó algoritmus tűnik kézenfekvőnek: Rendezzük az élhalmaz e_1, e_2, \dots, e_m elemeit úgy, hogy $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_m)$. Legyen $X_1 = \{e_1\}$, majd az X_{i-1} halmazhoz próbáljuk hozzávenni az e_i élt; ha $X_{i-1} \cup \{e_i\}$ körmentes, akkor $X_i := X_{i-1} \cup \{e_i\}$, ellenkező esetben $X_i := X_{i-1}$. Legyen végül $X := X_m$, illetve tulajdonképpen $X := X_i$, ahol i a legkisebb szám, amelyre $|X_i| = n - 1$.

Az algoritmus helyességét sokkal általánosabb körülmények között is beláthatjuk; csupán a körmentes élhalmazok néhány tulajdonságára van szükség. Nyilvánvaló, hogy a \emptyset , azaz az üres halmaz körmentes, illetve ha $X \subseteq E(G)$ körmentes, akkor bármely $Y \subseteq X$ is az. Szükségünk van továbbá az alábbira állításra:

Lemma 3 *Ha X és Y egy G gráf körmentes élhalmazai és $|Y| < |X|$, akkor van olyan $e \in X \setminus Y$, hogy $Y \cup \{e\}$ is körmentes.*

Bizonyítás. A G gráf pontjain az Y élek által alkotott komponensek részfák. Egy-egy ilyen komponensben az X élhalmaznak sem lehet több éle, mint Y -nak, hiszen különben tartalmazna kört. Mivel $|X| > |Y|$, van olyan $e \in X$, mely az Y két komponensét köti össze. Ezzel az e éllel az $Y \cup \{e\}$ halmaz körmentes. \square

Matroidok

Ha adott egy S véges halmaz és az S részhalmazainak egy \mathcal{I} halmaza úgy, hogy

$$(I_1) \quad \emptyset \in \mathcal{I};$$

$$(I_2) \quad \text{Ha } X \in \mathcal{I} \text{ és } Y \subseteq X, \text{ akkor } Y \in \mathcal{I};$$

$$(I_3) \quad \text{Ha } X \in \mathcal{I} \text{ és } Y \in \mathcal{I}; \text{ továbbá } |X| > |Y|, \text{ akkor van olyan } x \in X \setminus Y \text{ úgy, hogy } Y \cup \{x\} \in \mathcal{I},$$

akkor az $M = (S, \mathcal{I})$ pár *matroid*. Az \mathcal{I} -be tartozó halmazokat a matroid *független* halmazainak nevezzük. Egy halmazrendszer, amely az (I_1) és (I_2) axiómákat kielégíti *függetlenségi rendszer*.

Példák:

1. Az előbbiek szerint egy G irányítatlan gráf $E(G)$ élhalmazának körmentes részhalmazai matroidot alkotnak. Ez a G gráf *körmatroidja*.
2. Vektormatroidok. Legyen S véges sok vektorból álló halmaz, \mathcal{I} pedig a lineárisan független részhalmazainak halmaza. Erre (I_1) és (I_2) nyilvánvalóan következik, (I_3) pedig a jól ismert *Steinitz-féle kicserélési tétel*.

Megjegyzés: (I_3) -ból következik, hogy a maximális független halmazok egyforma elemszámúak. Ezek az M matroid *bázisai*.

Célunk egy $M = (S, \mathcal{I})$ matroid és $w : S \rightarrow R^+$ esetén annak az $X \in \mathcal{I}$ halmaz megtalálása, amelyre a $\sum_{x \in X} w(x)$ maximális. (Feltehető, hogy ez a halmaz maximális, azaz bázis.)

A **mohó algoritmus** a következő: Rendezzük $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ -et úgy, hogy $w(x_i) \geq w(x_j)$, $1 \leq i < j \leq m$. Legyen $X_1 := \{x_1\}$, $X_i := X_{i-1} \cup \{x_i\}$, ha $X_{i-1} \cup \{x_i\} \in \mathcal{I}$, $X_i := X_{i-1}$ különben. Végül pedig $X := X_m$.

Tétel 11 *Tetszőleges $M = (S, \mathcal{I})$ matroid és w nem negatív súlyfüggvény esetén a mohó algoritmus egy maximális súlyú független X halmazt talál.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a mohó algoritmus az $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bázist adta, de egy $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ bázisra $\sum_{i=1}^n w(x_i) < \sum_{i=1}^n w(y_i)$. Feltesszük, hogy az X és Y elemei csökkenő súly szerint vannak rendezve, azaz $w(x_i) \geq w(x_j)$ és $w(y_i) \geq w(y_j)$, $1 \leq i < j \leq n$.

Mivel $\sum w(x_i) < \sum w(y_i)$, lennie kell egy olyan legkisebb k számnak, amelyre $w(x_k) < w(y_k)$. Legyen $A = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ és $B = \{y_1, \dots, y_k\}$. (Ha $k = 1$, akkor $A = \emptyset$.) Az (I_2) miatt $A, B \in \mathcal{I}$ és $|A| < |B|$, így (I_3) miatt van olyan $y_j \in B$, melyre $A \cup \{y_j\} \in \mathcal{I}$. Ekkor viszont $w(y_j) \geq w(y_k) > w(x_k)$ és így a mohó algoritmus nem az x_k , hanem az y_j elemet választotta volna. \square

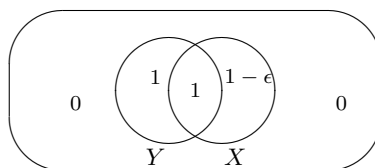
A fenti tétel részlegesen megfordítható és ez mutatja a matroidok és a mohó algoritmus szoros kapcsolatát.

Tétel 12 (Edmonds) *Legyen S egy véges halmaz, \mathcal{I} pedig S részhalmazainak egy (I_1) -et és (I_2) -öt kielégítő halmaza, amely nem matroid. Ekkor van olyan $w : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény, amelyre a mohó algoritmus nem találja meg \mathcal{I} maximális súlyú elemét.*

Bizonyítás. Mivel az (S, \mathcal{I}) pár nem matroid ((I_3) nem mindig teljesül), van olyan $X, Y \in \mathcal{I}$, hogy $|X| > |Y|$, de bármely $x \in X \setminus Y$ esetén az $Y \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$. Legyen $w(y) = 1$ minden $y \in Y$ -ra, $w(x) = 1 - \epsilon$, ha $x \in X \setminus Y$, ahol $\epsilon > 0$, és $w(z) = 0$ különben. Ekkor a mohó algoritmus az Y halmazt szolgáltatja; ennek súlya $\sum_{y \in Y} w(y) = |Y|$. Másrészt $X \in \mathcal{I}$, a súlya pedig

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} w(x) &= \sum_{x \in X \cap Y} w(x) + \sum_{x \in X \setminus Y} w(x) = \\ &= |X \cap Y| + (1 - \epsilon)|X \setminus Y| \geq (1 - \epsilon)|X| \geq (1 - \epsilon)(|Y| + 1). \end{aligned}$$

Ha $0 < \epsilon < 1$, akkor az $(1 - \epsilon)(|Y| + 1) > |Y|$, és így $w(X) > w(Y)$.

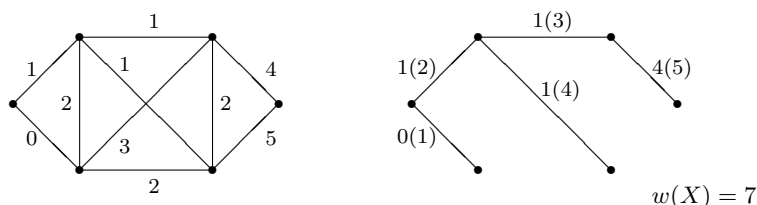


\square

Megjegyzés: Amennyiben minimális súlyú bázist szeretnénk találni, alkalmazhatunk egy egy transzformációt: Vegyük a súlyok -1 -szeresét, majd adjunk hozzá egy elegendően nagy konstans. $(\hat{w}(x) = -w(x) + K)$, ahol

$K \geq w(x)$ minden $x \in S$ -re.) Mivel a bázisok azonos elemszámúak, az új súlyok mellett maximális $X \in \mathcal{I}$ minimális az eredeti súlyfüggvénnyel. Ugyanezen transzformáció szerint módosíthatjuk a mohó algoritmust és a súlyok szerint növekvő sorrendbe állított elemeken végrehajtva egyből a minimumot kapjuk.

Példa: Balra a súlyozott G gráf, jobbra a minimális feszítőfa; a zárójelben az adott él megoldásba kerülés ideje (lépése) látható.



Felmerülhet a kérdés, van-e egyáltalán más matroid, mint a körmatroidok. Vegyünk egy n elemű S halmazt, és legyen \mathcal{I} az összes k -nál ($k \leq n$) nem nagyobb elemszámú részhalmazának halmaza. Ez az ún. $U_{n,k}$ uniform matroid. Könnyű belátni, hogy például az $U_{4,2}$ nem lehet semmilyen G gráf körmatroidja. (Sztintén nem nehéz megmutatni, hogy az $U_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$ felfogható, mint vektormatroid.)

Természetesen más körülmények között a mohó algoritmus sikeres lehet anélkül, hogy egy matroid struktúra garantálná az algoritmus elérését. Egy egyszerű példa erre a legrövidebb utak problémájának egy speciális esete.

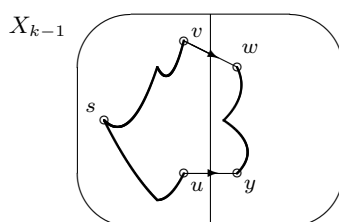
Dijkstra algoritmusa

Tegyük fel, hogy egy G irányított gráfban minden él $l(v, w)$ súlya nem negatív. A G gráfban nincs negatív súlyú kör, így bármely s és v pontokra létezik az s -ből v -be vezető utak hosszának a minimuma (ez végtelen, ha nincs $s - v$ út). Az s -ből kiinduló legrövidebb utak hosszát, illetve ezen utakat leíró feszítőfát egy egyszerű és gyors algoritmussal, $n = |V(G)|$ iterációban megkaphatjuk. Az eljárást 1956-ban publikálta Edsger Dijkstra.

- **1. lépés:** Legyen $X_1 := \{s\}$, $d(s) = 0$, $d(v) = \infty$ ha $v \neq s$ és $T_1 := \{s\}$, egy pontú fa.
- **k. lépés:** Tegyük fel, hogy X_{k-1} és $d(v)$ ($v \in X_{k-1}$) már definiáltak. Válasszunk egy olyan $w \in V(G) \setminus X_{k-1}$ pontot, amelyre a $d(v) + l(v, w)$ minimális, ahol $v \in X_{k-1}$. Legyen $X_k := X_{k-1} \cup \{w\}$, $d(w) := d(v) + l(v, w)$, T_k pedig az a fa, amelyet T_{k-1} -ből a w pont és a (v, w) út hozzávételével nyerünk.

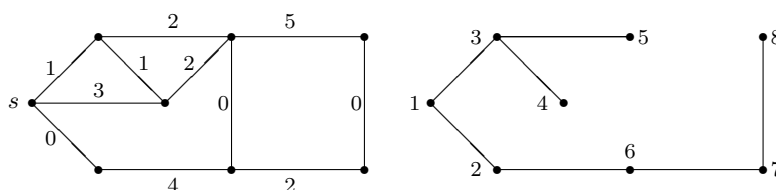
Tétel 13 *A fentiek mellett az algoritmus n -edik lépése után $d(v)$ értéke a legrövidebb $s - v$ út hossza minden $v \in V(G)$ esetén. Továbbá T_n az s -ből kiinduló legrövidebb utakat kódoló fa.*

Bizonyítás. A tételt a lépések száma szerinti teljes indukcióval látjuk be. Az indukciós feltétel szerint $v \in X_{k-1}$ esetén $d(v)$ a legrövidebb $s - v$ út hossza, és tegyük fel, hogy $w \in X_k \setminus X_{k-1}$ -re $d(w) = \min_{v \in X_{k-1}} d(v) + l(v, w)$ nem ezt, azaz a legrövidebb $s - w$ út hosszát adja. Ekkor a p legrövidebb $s - w$ út egy u pontból kilépve először hagyja el X_{k-1} -et. Legyen a p útban az u után következő pont y (feltehető, hogy $y \neq w$).

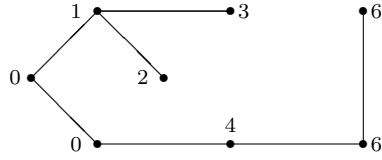


Mivel p hossza kisebb, mint $d(w)$, a p vonalán haladó $s - y$ út hossza is kisebb, mint $d(w)$. (Itt használjuk ki a súlyok nem negativitását.) Ekkor viszont az algoritmus az y pontot választotta volna a k -edik lépésben, ellentmondás. A T_n fa szerepének bizonyítása szintén indukcióval történhet; így T_{k-1} rögzíti a legrövidebb $s - v$ utakat ($v \in X_{k-1}$) és azon (v, w) él hozzávételével változtatjuk T_{k-1} -et T_k fává, amelyen keresztül a w pont $d(w)$ hosszú úton elérhető s -ből. \square

Példa: Baloldalon egy irányítatlan, súlyozott G gráf az s kiindulóponttal. Jobboldalon az s -ből induló legrövidebb utak fáját; a számozás azt mutatja, hanyadik lépésben került be a pont a fába.

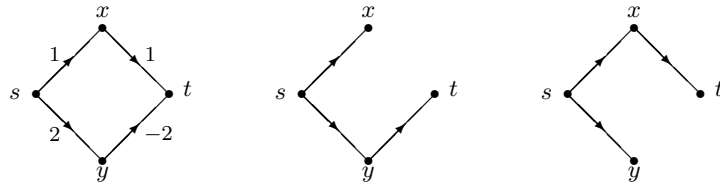


A legrövidebb utak hosszát is könnyen leolvashatjuk. A gyökérpont, azaz s önmagától vett távolsága nulla, egy x pontra pedig úgy kaphatjuk meg $d(x)$ -et, ha összeadjuk az fában az $s - x$ út élein lévő súlyokat.



Megjegyzés: Dijkstra algoritmus a jóval egyszerűbb és gyorsabb, mint a korábban ismertetett Bellman algoritmus, ugyanakkor *csak* nemnegatív súlyok esetén alkalmazható.

Példa: Baloldalon a gráf, középen a Bellmann algoritmus által adott (helyes) legrövidebb utak fája, jobboldalon pedig a Dijkstra algoritmus végrehajtásával kapott fát ábrázoltuk.



Azaz a Dijkstra módszer *nem* találja meg a legrövidebb $s - t$ utat, hisz $d(t) = 0$, nem kettő és a legrövidebb $s - t$ út nem az $\{s, x, t\}$ hanem az $\{s, y, t\}$.

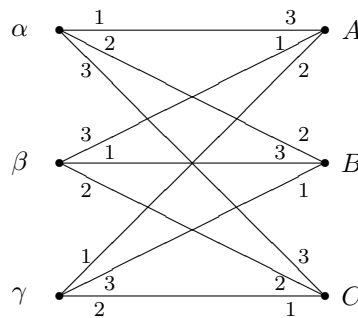
3 Stabil Párosítások

A stabil párosítás vagy stabil házasság probléma kiváló példa mind a gyakorlat és elmélet viszonyának szemléltetésére, mind a mohó algoritmus egy újabb illusztrációjára. A problémakört eredetileg az USA-ban a 40-es évek közepén kulmináló orvos gyakornok hiány, illetve elosztási zavar motiválta. A végzős orvosok ezreit kellett a kórházak által meghirdetett helyekre beosztani; ráadásul mindkét fél (orvos vs. kórház) a saját preferenciáit igyekezett érvényesíteni. Az eredetileg alkalmazott technikák teljesen alkalmatlanná váltak 1947-re, mikor is egy radikálisan új rendszert vezettek be helyettük. Érdekes módon ennek elméleti vizsgálatát csak 1962-ben tette meg D. Gale és L. S. Shapley, s igazából ők nem tudtak a problémáról: az egyetemi felvételi rendszert illetve a házasságok stabilitását akarták modellezni.⁶

Mi az általuk vizsgált legegyszerűbb modellt ismertetjük, utalva rá, hogy igen sok általánosítás született azóta. A stabil házasság problémában adott n férfi, n nő és mindegyikük valahogyan rangsorolja az ellentétes nem tagjait; ez az illető személy *preferencia listája*. A férfiakat görög, a nőket latin betűkkel jelöljük majd. Így például akkor mondjuk, hogy az α (férfi) *jobban kedveli* vagy *preferálja* A -t B -hez képest, ha α preferencia listáján A előrébb van, mint B . A személyeket és preferenciáikat leírhatjuk (duplán) súlyozott páros gráfokkal, vagy mátrixokkal is az alábbiaknak megfelelően:

Példa:

	A	B	C
α	1, 3	2, 2	3, 1
β	3, 1	1, 3	2, 2
γ	2, 2	3, 1	1, 3



A mátrix egy elemének első koordinátája a megfelelő oszlop által reprezentált nő helyezése a sorhoz tartozó férfi ranglistáján, míg a második

⁶Néhány éve a magyar felsőoktatási felvételi rendszere is hasonló algoritmust használ.

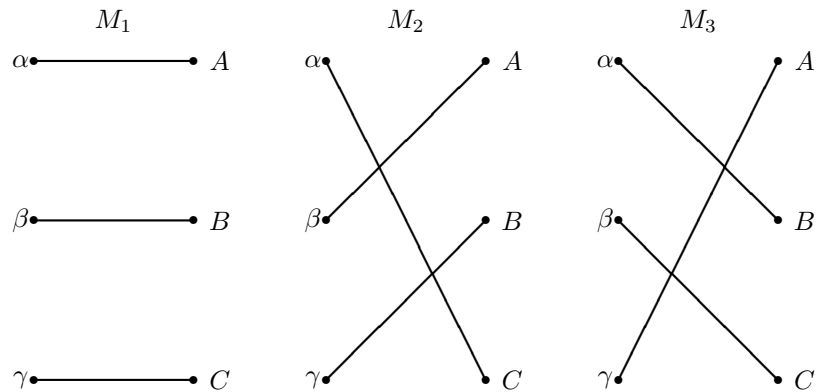
koordináta a fordított helyzés.

A feladat egy olyan n -elemű M párosítás megadása, amely, legalábbis valamely értelemben, elképzelhető. Gyakorlati és elméleti megfontolások alapján az alábbi definíció tűnik ésszerűnek:

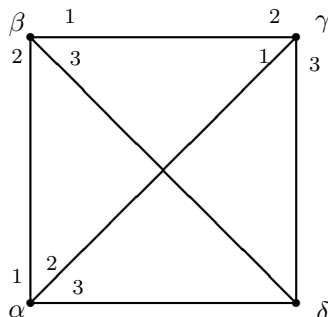
Definíció. Egy M párosítás **instabil** ha vannak olyan α, β férfiak és A, B nők, hogy $(\alpha, A) \in M$, $(\beta, B) \in M$, de β preferálja A -t B -hez képest, és A preferálja β -t α -hoz képest. Egy M párosítás **stabil**, ha nem instabil.

A definíció motivációja kézenfekvő: feltehető, hogy az instabil esetben β illetve A felbontja pillanatnyi kapcsolatát, és egymással lép kapcsolatba. A célunk egy stabil M párosítás keresése lesz majd, már ha van ilyen egyáltalán. (A korábban említett Halmos-Vaughan modell globális optimumra törekedett, nem véve figyelembe a lokális érdekeket, lehetőségeket. Ezért legfeljebb kikényszeríthető, míg a fenti stabilitás szerint egy M teljes párosítás nem bomlik fel, ha magára hagyjuk a rendszert.)

Kérdés persze, van-e egyáltalán megoldás? A fenti példában három megoldás van: $M_1 = \{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)\}$, $M_2 = \{(\alpha, C), (\beta, A), (\gamma, B)\}$ és $M_3 = \{(\alpha, B), (\beta, C), (\gamma, A)\}$.



Példa: A stabil házasság mintája alapján definiálhatjuk az ún. *szobatárs* problémát. Itt adott $2n$ ember, akiket kétszemélyes szobákba kell telepíteni és az előzőekhez hasonlóan preferenciákkal rendelkeznek. Nyilvánvaló, ha adott négy személy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ úgy, hogy α, β és γ preferencia listáján δ az utolsó, α -én β , β -én γ és γ -én α az első, akkor *nincs* stabil párosítás.



A példa fényében kellemes meglepetés az alábbi tétel.

Tétel 14 (Gale-Shapley) *A stabil házasság problémának mindig van megoldása.*

Bizonyítás. Valójában egy nagyon hatékony, mohó típusú algoritmust adunk, melynek végeredménye bizonyosan stabil párosítás. Tradicionálisan, hisz ez igencsak tradicionális eljárás, a megfelelő köznap kifejezéseket használjuk a leírás során.

A eljárás első lépésében minden férfi ajánlatot tesz a kedvencének. Minden nő a legjobb ajánlatot fogadja el, de ez csak annyit jelent, hogy “várakozó listára” helyezi a kérőt. A második lépésben az elutasított kérők újra ajánlatot tesznek, ezúttal a preferencia listájukon 2. helyezett hölgynek. A nők ismét a pillanatnyilag legjobb ajánlatot fogadják el; esetlegesen lecserélve a várakozó listán lévő kérőt. Hasonlóan folytatódik ez a későbbiekben is: egy elutasított (vagy egy várakozó listáról lekerült) férfi a soron következő jelölttel próbálkozik, míg a nők a lehető legjobb jelöltet tartják meg.

Legkésőbb $n^2 - 2n + 2$ lépés elteltével minden hölgy kap legalább egy kérőt, így a várakozó listáján is lesz majd valaki. (Ugyanis ha egy lépésben van olyan nő, aki nem kapott még ajánlatot, akkor lennie kell elutasításnak is ebben a lépésben, illetve egy férfi csak egyszer tesz ajánlatot egy nőnek.)

Mikor minden nő kapott ajánlatot, akkor véget vetünk az eljárásnak, és a pillanatnyi párokat véglegesnek kiáltjuk ki. Megmutatjuk, hogy az így kapott M párosítás stabil. Tegyük fel, hogy van olyan α és A , melyre $(\alpha, A) \notin M$, de α preferálja a párjához képest. Ekkor viszont α valamikor ajánlatot tett A -nak és A elutasította őt, azaz a várakozó listáján α -nál “jobb” személy volt, s ha cserélődött is azóta, csak még jobb lehet később. Így A a párját jobban kedveli, mint α -t, azaz nincs instabilitás. \square

Példa:

	A	B	C	D
α	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
β	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
γ	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
δ	4, 1	2, 2	3, 0	1, 4

Az algoritmus végrehajtását egy táblázaton követhetjük. Egy cella baloldali eleme az adott lépésben a sor által kódolt személytől ajánlatot kapó, a jobboldali elem pedig a sor ajánlatát elfogadott személy.

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés	6. lépés
α	A, A	\emptyset , A	\emptyset , A	\emptyset , \emptyset	B, \emptyset	C, C
β	A, \emptyset	D, D	\emptyset , D	\emptyset , D	\emptyset , D	\emptyset , D
γ	B, B	\emptyset , B	\emptyset , \emptyset	A, A	\emptyset , A	\emptyset , A
δ	D, D	\emptyset , \emptyset	B, B	\emptyset , B	\emptyset , B	\emptyset , B

A követhetőség kedvéért felvettük a férfiak preferencia listáit, ahol felülvonással jeleztük, ha már történt ajánlat:

$\alpha(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$

$\beta(\bar{A}, \bar{D}, C, B)$

$\gamma(\bar{B}, \bar{A}, C, D)$

$\delta(\bar{D}, \bar{B}, C, A)$

A megoldást az utolsó oszlop jobboldaláról olvashatjuk le:

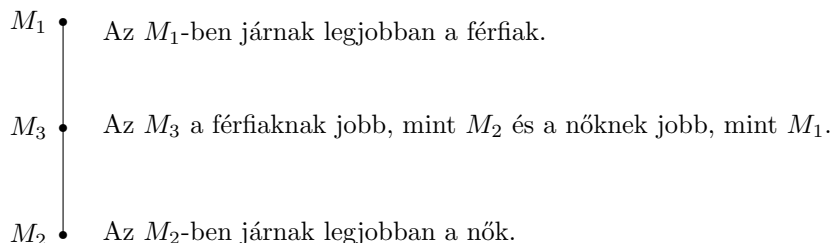
$$M = \{(\alpha, C), (\beta, D), (\gamma, A), (\delta, B)\}.$$

Felmerül a kérdés, tudunk-e valami közelebbit mondani a stabil párosítások szerkezetéről, összehasonlíthatók-e stb. Vegyünk két stabil párosítást, M_1 -et és M_2 -öt. Az M_1 férfi szempontból jobb, mint M_2 , ha minden férfi legalább olyan jó párt kap M_1 -ben, mint M_2 -ben; jelölésben $M_1 \geq_F M_2$. Nem lehet bármely két stabil párosítást összehasonlítani, de az összes stabil párosítás, mint azt J. H. Conway megmutatta, ún. *disztributív* vagy más szóval *geometriai hálót* alkot.⁷

Speciálisan van legnagyobb és legkisebb eleme. (Ha a nők szempontjából nézzük, ugyanazt a hálót kapjuk, csak megfordítva. Azaz ami az egyik nemnek a legjobb, a másiknak a legrosszabb.) Ez utóbbit egyszerűen beláthatjuk.

⁷Egy L háló, ha van két kétváltozós művelete, \vee és \wedge , és ezek *idempotensek* $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, *kommutatívok*, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$, *asszociatívok*, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és *elnyelők*, azaz $x \vee (x \wedge y) = x$ és $x \wedge (x \vee y) = x$ minden $x, y, z \in L$ esetén. *Disztributív* a háló, ha teljesül még az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ egyenlőség is.

Példa: Az első példában szereplő stabil párosítások az alábbi hálót alkotják:



Egy A hölgy *lehetséges* az α férfi számára, ha van olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$.

Tétel 15 *Az előző algoritmus minden férfinak a legjobb lehetséges párt adja, míg minden nőnek a legrosszabbat.*

Bizonyítás. Az első állítást a lépések szerinti indukcióval látjuk be. Tegyük fel, hogy a soron következő lépésig egyetlen férfit sem utasított el olyan nő, aki lehetséges lett volna számára. Tegyük fel továbbá, hogy ebben a lépésben A elutasítja α -t. Azt állítjuk, hogy ekkor A nem lehetséges α számára. Valóban, ha A pillanatnyi párja β , akkor β preferálja A -t az összes nőhöz képest, kivéve akik korábban visszautasították. Ezek azonban, az indukciós feltétel miatt, nem lehetségesek β számára. Ha tehát létezne egy olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$, ebben β a párját (nevezzük B -nek) kevésbé kedvelné, mint A -t, hiszen mind A és B lehetséges β számára. Ekkor viszont az (α, A) , (β, B) instabilitást okoz, azaz A nem lehetséges α számára, s ezzel beláttuk a tétel első felét.

Legyen M^* az algoritmusunk által adott *férfi optimális* megoldása, M pedig egy tetszőleges stabil párosítás. Belátjuk, hogy bármely A nő esetén az ő M -beli párja nem rosszabb, mint az M^* -beli párja. (Igazából pontosan akkor nem rosszabb, ha ugyanaz a párja a két párosításban, és határozottan jobb, ha nem.) Ha $(\alpha, A) \in M^*$, $(\beta, A) \in M$ és $\alpha \neq \beta$, akkor $(\alpha, B) \in M$ valamely $B \neq A$ hölgyre. A tétel első fele miatt persze α preferálja A -t B -hez képest. Másrészt az M párosítás stabil, így speciálisan az (α, B) , (β, A) párok stabilitása az jelenti, hogy A preferálja β -t α -hoz képest; s pont ezt akartuk bizonyítani. \square

Megjegyzések: Az algoritmus eredeti felhasználásánál a kórházak tették az ajánlatokat, és azt hangoztatták (természetesen bizonyítás nélkül), hogy ez az orvosok javára válik. Számos tanulság vonható itt le, s ezekből csak az

egyik, hogy nem árt meggondolni nyilvánvalónak tűnő (vagy annak beállított) állításokat, mint azt Gale és Shapley tették volt.

A másik, hasonlóan fontos észrevétel a döntési helyzetek illetve stratégiák buktatóira vonatkozik. A modell azt sugallja, “elébe kell menni” az eseményeknek és kishitűség nélkül megpróbálni a legjobbnak tűnő megoldásokat a “sült galambra várás” helyett.

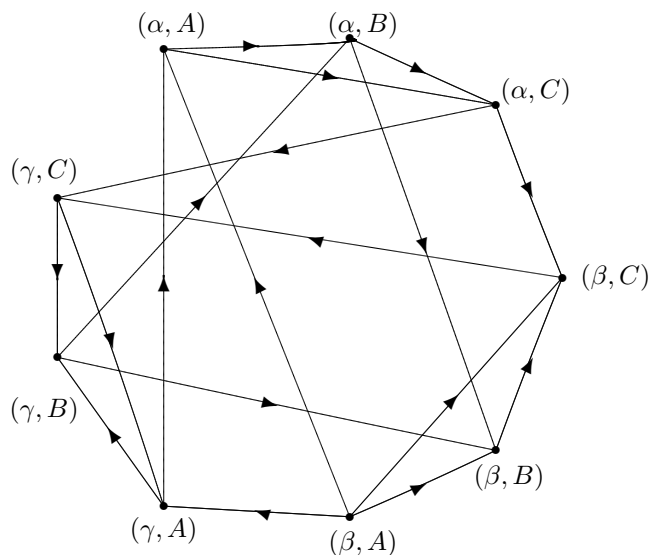
A stabil párosítás mint mag

Korábban definiáltuk egy irányított G gráf magját; ez egy olyan $S \subset V(G)$ halmaz volt, amely független és domináló egyben. Ez a fogalom különösen fontos a játékelméletben, hisz a megoldások stabilitását fogalmazza meg matematikai formában. A stabil párosítás motiválhatja ezt a definíciót, ugyanis egy rögzített probléma stabil párosításai tulajdonképpen magok egy megfelelően alkotott gráfban.

Definiáljuk egy G gráf *vonalgáját*, $L(G)$ -t, a következőképpen: $L(G)$ pontjai G élei lesznek, azaz $V(L(G)) := E(G)$, és $L(G)$ két pontja, e és f , között van él, ha G -ben tekintve az e és f éleknek van közös pontja. Ha G pontjaihoz preferencia listák vannak rendelve, irányítsuk az (e, f) élt $L(G)$ -ben úgy, hogy az a preferált pontból indul és a kevésbé kedvelt pontra mutat közös ponthoz tartozó lista szerint.

Állítás: A fenti definíciókkal a G gráf stabil párosításai éppen az $L(G)$ gráf magjainak felelnek meg.

Példa: Az első példa G grájához tartozó $L(G)$:



4 Sztochasztikus Programozás

Az optimális és döntési modellekben számos, a véletlentől függő változó szerepelhet. Illusztrációképpen néhány példa:

1. Diéta probléma

A problémát a

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ Ax \quad & \geq b \\ x \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

alakban modelleztük, ahol az x vektor komponensei a különböző táplálékok fogyasztandó mennyiségét a c komponensei ezek egységárát, az A mátrix a_{ij} eleme a j -edik táplálék egységnyi mennyiségének i -edik tápértéke (energia, fehérje, különböző ásványi anyag, vitamin, stb.), míg a b_i az igényelt tápérték. A valóságban az A , b és c egyes komponensei lehetnek valószínűségi változók, melyeknek eloszlásáról több-kevesebb információnk van.

2. Portfólió probléma

Tegyük fel, hogy n különböző tevékenységbe/részvénybe fektethetünk be x_1, x_2, \dots, x_n tőkét, és $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az egységnyi tőke véletlentől függő hozama az adott befektetés mellett. Feltehetjük továbbá, hogy $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $x_i \geq 0$, és a nyereségünk $\sum_{i=1}^n \xi_i x_i$.

3. Gátmagasítás

Egy gát x egységnyivel történő magasításának a költségét jelöljük $I(x)$ -szel, továbbá annak a valószínűségét, hogy a vízszint túllépi H -t $P(H)$ -val. Ha a vízszint magasabb, mint a gát, akkor az áradás következtében V kár keletkezik.

4. Újságáros probléma

Ez egy klasszikus beruházási probléma. A kereslet egy újságra (esetleg karácsonyfára) egy ismert eloszlás ξ valószínűségi változó. Az újságos c egység pénzért veszi és $(d > c)$ egységért adja el. Ha x darabot vesz, akkor $\xi \leq x$ esetén

$$d\xi - cx = -c(x - \xi) + (d - c)\xi,$$

míg $\xi > x$

$$dx - cx = -(d - c)(\xi - x) + (d - c)\xi$$

lesz a haszna.

Szándékosan nem feszegettük, mi is a cél a felsorolt modellekben. Látni fogjuk, hogy ezt igen alaposan meg kell fontolni és nem mindig határozható meg egyértelműen.

A diéta problémáról azt láthatjuk, hogy esetleg bármekkora ráfordítás mellett sem elégíthető ki egy valószínűséggel az $Ax \geq b$ feltétel. Szerencsés esetben meg tudjuk becsülni a feltétel sérüléséből származó kárt, és ezt hozzáadva a cx célfüggvényhez áthidalható ez a probléma.

A másik megközelítés, hogy az $Ax \geq b$ teljesülését egy előre megadott, lehetőleg nagy p valószínűséggel követeljük meg. Ez a p a rendszerünk *megbízhatósági szintje*, amely függhet például a műszaki szabványoktól.⁸

Bizonyos esetekben a valószínűségi változók helyettesítése a várható értékükkel elfogadható megoldáshoz vezet. Tulajdonképpen így jártunk el a korábbiakban. Nézzük meg e helyett egy más ötletet és a hollandiai *gátmagasítás* problémáját, amelyet van Dantzig vizsgált 1956-ban.

Gátmagasítás és a Bernoulli elv

A Bernoulli elv szerint egy sztochasztikus rendszerben definiálunk egy *hasznossági függvényt* és ennek várható értékét maximalizáljuk. (Ekvivalensen *kockázat függvényt* és ennek várható értékét minimalizáljuk.) Jelen esetben a kockázati függvény nem más, mint a költség.

Legyen H_0 a gát jelenlegi, H az elegendő magassága; ezzel az x magasítás

$$x = H - H_0.$$

Nincs kár, ha a tengerszint H alatt marad, különben az áradás okozta kár V . A statisztikákból ismerjük a tengerszint eloszlás függvényét. Ennek alapján annak az eseménynek a $p(H)$ valószínűsége, hogy egy éven belül meghaladja a H magasságot

$$p(H) = p_0 e^{-\alpha(H-H_0)}, \quad p_0 = e^{-\alpha H_0},$$

⁸Természetesen a diéta probléma alkalmas lehet erőművek, energiaszolgáltató rendszerek, vízgazdálkodási problémák stb. modellezésére. Mindazonáltal ezek a problémák matematikai szempontból nagyon nehézek. Bár több fontos speciális esetben hatékonyan megoldható, de ezekkel itt nem foglalkozhatunk.

ahol p_0 a H_0 szint meghaladásának valószínűsége, α pedig egy pozitív konstans.

Legyen $I(x)$ a gát x -szel történő emelésének teljes költsége, és tegyük fel, hogy ez $I(x) = 0$ ha $x=0$, míg, I_0+kx , ha $x > 0$, ahol I_0 és k pozitív konstansok. (Az I_0 interpretálható felvonulási költségként, az építés költsége pedig lineáris függvénye a magasításnak.) A jelenlegi költség várható értékének kiszámításánál két dolgot kell figyelembe vennünk:

- (i) az $I(H - H_0)$ determinisztikus építési költséget
- (ii) az 1., 2., ... években bekövetkező esetleges kár által okozott költségeknek a jelenre visszavetített költségét. Mivel ez utóbbi a j -edik évben

$$p(H)V(1 + 0,01\delta)^{-j},$$

ahol δ az állandónak feltételezett kamatláb, az összeg:

$$I(H - H_0) + p(H)V \sum_{j=1}^{\infty} (1 + 0,01\delta)^{-j} \approx I(x) + 100p(H)V/\delta.$$

A minimum meghatározásához vegyük a

$$\frac{d}{dx}(I(x) + 100p_0e^{-\alpha x}V/\delta) = 0$$

egyenlet gyökét, amely a $x = \frac{1}{\alpha} \log \frac{100p_0V\alpha}{\delta k}$ megoldást adja.

A portfólió probléma

Mint említettük, az $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, $x_i \geq 0$ feltételek mellett keresünk megoldást, a nyereségünk pedig a véletlentől függő $\sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ összeg. Ha helyettesítenénk⁹ a ξ_i -t a $\mu_i = E(\xi_i)$ várható értékével, egy triviális hátizsák feladathoz jutnánk:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (*) \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

⁹Ez a Bernoulli elv alkalmazása lenne jelen esetben.

Ha $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, akkor a (*) optimális megoldása $x_1^* = 1$, $x_i^* = 0$, ha $1 < i \leq n$. Könnyen látható azonban, hogy általában, ha ismételjük ezt a stratégiát, az egy valószínűséggel csódhöz vezet. Sokféle próbálkozás történt elfogadható megoldás keresésére, amely egyszerre ígér jó befektetést és védelmet a csőd ellen.

Ezekből két megközelítést vázolunk. Ha feltehető, hogy a $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$ vektorok függetlenek és azonos eloszlásúak, ahol ξ_i^j az i -edik valószínűségi változó j -edik évben felvett értéke, akkor egy nagyon egyszerű szabály adódik. Nem az $E(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i) = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$ várható értéket kell maximalizálni, hanem a nyereség logaritmusának várható értékét, az $E(\log(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i))$ -et. (A bizonyítást, mely az ún. *martingál konvergencia* tételre alapul, mellőzzük.)

Sajnos amilyen elegáns ez a megoldás, annyira támadható is: a befektetések nyereségének függetlenségének és az azonos eloszlásának feltételezése irreális a gyakorlatban. Valamint a módszer nem használja ki, hogy további statisztikák nyerhetők a ξ_1, \dots, ξ_n változókból. Ezenkívül csak határértékben optimális, és nem tudjuk mennyire véd a csőd ellen.

Orvosolhatjuk ezeket a bajokat Markowitz ún. *hatékony portfólióit* használva.¹⁰ Tegyük fel, hogy nemcsak a ξ_1, \dots, ξ_n változók $\mu_i = E(\xi_i)$ várható értékei, hanem a változók C kovariancia mátrixa is rendelkezésre áll, ahol

$$c_{ij} = E[(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)].$$

Ennek segítségével kifejezhetjük egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ portfólió (megoldás) *varianciáját*

$$\text{Var}(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i) = E[(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_i) x_i)^2] = x^T C x.$$

Egy x portfólió *hatékony*, ha várható hozama, $E[\sum_i \xi_i x_i]$, nem növelhető a variancia növelése nélkül, és varianciája nem csökkenthető a várható hozam csökkentése nélkül. A hatékony portfólió tehát egyfajta optimum: adott nyereséget feltételezve a minimális kockázattal jár, illetve egy rögzített kockázati szint mellett maximális nyereséget ígér. Ha $\rho > 1$ hozam elérése a célunk,

¹⁰Ezeket Markowitz 1952-ben kezdte vizsgálni, és 1990-ben közgazdasági Nobel-díjjal ismerték el az eredményeit.

akkor a következő ún. *kvadratikus programozási probléma* megoldása a válasz.

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T C x \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \rho \\ & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A feladat egy x^* megoldását *optimális portfóliónak* nevezzük. Nyilvánvalóan egy optimális portfólió egyben hatékony portfólió is.

Megjegyzések: A feladat célfüggvénye ebben az esetben az ismeretlen kvadratikus (négyzetes) függvénye, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j x_i$ alakú, azaz nem lesz lineáris. Ezeknek a megoldásával nem foglalkozhatunk, de utalunk rá, hogy számos hatékony algoritmust fejlesztettek ki, melyek a kvadratikus programozási feladatok megoldására is alkalmasak. A másik felmerülő nehézség a szimmetrikus C mátrix $n(n+1)/2$ elemének kiszámítása. (Ezeket természetesen a korábbi megfigyelésekből kell meghatároznunk.) Mindkét nehézséget áthidalhatjuk, ha a kovariancia minimalizálása helyett megelégszünk az *átlagos abszolút eltérés* $E[|\sum_j (\xi_j - \mu_j) x_j|]$ mennyiség minimalizálásával.¹¹

A Konno-Yamazaki-féle MAD modell

Konno és Yamazaki 1990-ben javasolt módszere így jár el, valamint a μ_i várható értékek és c_{ij} kovariancia együtthatók kiszámítását elkerüli; közvetlenül használja a megfigyelt adatokat. (Az átlagos abszolút eltérés angol neve után, *mean absolute deviation*, a modell neve MAD.)

Ha T megfigyelést végeztünk a múltban, r_{jt} jelöli a j -edik befektetés hozamát a t -edik megfigyelésnél és

$$r_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}, \quad a_{jt} = r_{jt} - r_j,$$

akkor a portfólió optimalizálás a következő alakban írható fel:

¹¹Valójában a legfontosabb esetben, a többváltozós normális eloszlás esetében, a két módszer *ekvivalens*.

$$\min \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right|$$

$$(*) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n r_j x_j &\geq \rho \\ \sum_{i=1}^n x_j &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A (*) probléma nem LP, de hasonlóan a mátrixjátékoknál alkalmazott gondolathoz LP feladatra redukálható:

$$\min \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

$$\begin{aligned} -y_t \leq \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \leq y_t \quad t = 1, \dots, T \\ \sum_{j=1}^n r_j x_j &\geq \rho \quad (**) \\ \sum_{i=1}^n x_j &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ezzel a modellel lehetővé válik egészen nagy, való életbeli problémák megoldása. Nem szabad elfelejtenünk azonban, hogy a kapott megoldás csak egy javaslat: egy tényleges portfólió kiválasztásánál számtalan egyéb szempont is figyelembe vehető.

A szemi-MAD modell

Érdeemes meggondolnunk a MAD modellt, és egy kicsit változtatni rajta. Idézzük fel, hogy a $\sum_{j=1}^n a_{jt} x_j$ kifejezés adja a (becsült) várható hozamtól való előjeles eltérést a j -edik időpontban. Kézenfekvő, hogy ne ezek abszolút értékeinek összegét minimalizáljuk, hanem csak azon tagoknak az abszolút érték összegét, amelyek *negatívak*. (Valóban, hiszen ha várható hozam becslésénél jobban teljesít a j -edik időpontban a portfólió, az nem kellemtlen, hanem éppen kedvező esemény.) Bevezetve az $|x|^- := x$, ha $x \leq 0$ és $|x|^- := 0$, ha $x > 0$ jelölést, a probléma a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right|^{-} \\ & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \\ & \sum_{i=1}^n x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ennek a problémának az LP alakja könnyen megadható, és a MAD modellnél is egyszerűbb:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ & \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \geq y_t \quad t = 1, \dots, T \\ & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \\ & \sum_{i=1}^n x_j = 1 \\ & y_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Megjegyzés: A MAD és a szemi-MAD módszerek nagyjából ekvivalensek, ha az optimális portfóliók hozamainak eloszlása megközelítően szimmetrikus. Ez nem szükségképpen áll fenn, így a jelen vizsgálatok szerint hasznosabbnak tűnik a szemi-MAD modell használata, hiszen a várható számítási ideje mindenképpen kisebb.

9. előadás

A következőkben néhány speciális optimalizálási illetve megbízhatósági feladatot vizsgálunk. Közös tulajdonságuk csupán a véletlen eseményektől való függés lesz majd.

Az újságárus probléma

Amint már korábban definiáltuk egy újságos c egység pénzért veszi és ($d > c$) egységért ad el egy újságot. Ha x darabot vesz, akkor $\xi \leq x$ esetén

$$d\xi - cx = -c(x - \xi) + (d - c)\xi,$$

míg ha $\xi > x$

$$dx - cx = -(d - c)(\xi - x) + (d - c)\xi$$

lesz a haszna. Természetesen csak akkor várható értelmes válasz, ha van valamilyen feltételezésünk a kereslet eloszlásáról. Legyen ez az eloszlás először diszkrét, és jelöljük a $\xi = i$ esemény valószínűségét p_i -vel, azaz $Pr(\xi = i) = p_i$. A várható haszon így a következő lesz:

$$(d - c)E\xi - \sum_{i < x} c(x - i)p_i - \sum_{i > x} (d - c)(i - x)p_i,$$

amely akkor maximális, ha a

$$\sum_{i < x} c(x - i)p_i + \sum_{i > x} (d - c)(i - x)p_i$$

összeg minimális. Ez értelmezhető úgy, mint egy várható büntetés, ha a ξ aktuális értéke eltér x -től; c egységet kell fizetni a $\xi < x$ és $d - c$ egységet az $x < \xi$ esetben. Az első esetben az eladatlan újság ára jelenik meg, a másodikban az elszalasztott lehetőséget kell "megfizetni." Pszichikailag a két költség között nagy különbség lehet, az optimalizálás szempontjából ellenben semmi. Ennek megfelelően egy döntés lehetőleg az utóbbi alapján hozandó.

Ha a véletlen igény folytonos eloszlást követ, amelynek sűrűségfüggvénye f , akkor az x változót is célszerű folytonosnak tekinteni. Ekkor, az előzővel analóg módon, a minimalizálandó kifejezésünk

$$g(x) = c \int_{-\infty}^x (x - z)f(z)dz + (d - c) \int_x^{\infty} (z - x)f(z)dz.$$

A számolás kedvéért átírva a $g(x)$ függvényt

$$\begin{aligned}
g(x) &= c \int_{-\infty}^x (x-z)f(z)dz + c \int_x^{\infty} (x-z)f(z)dz + d \int_x^{\infty} (z-x)f(z)dz = \\
&= cx \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz - c \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz - dx \int_x^{\infty} f(z)dz + d \int_x^{\infty} zf(z)dz.
\end{aligned}$$

Ezt x szerint deriválva kapjuk

$$g'(x) = c - d \int_x^{\infty} f(z)dz + dx f(x) - dx f(x) = d(F(x) - 1) + c,$$

ahol $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz$, a ξ változó eloszlás függvénye. A g függvény minimum helye a $g'(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapható meg, mely az $x_0 = F^{-1}((d-c)/d)$ értéket adja az előbbieket szerint.

Példa: Legyen egy újság kiskereskedelmi ára $c = 50$, az eladási ára pedig $d = 70$. A megfigyelések szerint egy elárusító helyen a ξ kereslet egyenletes eloszlást követ 40 és 60 között. (Az egyszerűség kedvéért folytonos modellel számolunk, bár könnyen látható, hogy a diszkrét modell most ugyanezt az értéket adja.) Így az eloszlás függvény $F(z) = Pr(\xi < z)$,

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < z \leq 40 \\ z/20 - 2 & \text{ha } 40 < z \leq 60 \\ 1 & \text{ha } 60 < z < \infty. \end{cases}$$

Az F a $(40, 60)$ intervallumon invertálható, és $F^{-1}(z) = 20z + 40$. Ezzel $F^{-1}((d-c)/d) = F^{-1}(2/7) = 45$ egész és $5/7$, azaz durván 46 újságot célszerű rendelni, mellyel a várható nyereség

$$\begin{aligned}
(d-c)E - c \int_{-\infty}^x (x-z)f(z)dz - (d-c) \int_x^{\infty} (z-x)f(z)dz = \\
20 \int_{40}^{60} z/20 dz - 50 \int_{40}^{46} (46-z)/20 dz - 20 \int_{46}^{60} (z-46)/20 dz = \\
= 1000 - 45 - 98 = 857.
\end{aligned}$$

Példa: Legyen most $d = 3$, $c = 2$ és a ξ kereslet kövessen λ paraméterű Poisson eloszlást.¹² Ekkor az optimális x érték meghatározásánál minimalizálandó

¹²A Poisson eloszlás nagyon sok véletlen folyamatban, pl. bolyongások ill. telefonhívások stb. felbukkan, így sokkal természetesebb a feltételezése ebben az esetben, mint az egyenletes eloszlásnak.

$$\sum_{i < x} c(x-i)p_i + \sum_{i > x} (d-c)(i-x)p_i$$

a következő alakot ölti

$$f(x) := \sum_{i < x} 2(x-i) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} + \sum_{i > x} (i-x) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

Tekintsük x -et folytonos változónak; ekkor f -et “differenciálva” a

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \sum_{i < x} 2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} - \sum_{i > x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = 0$$

egyenlet gyökét kell megkeresnünk. Minden diszkrét eloszlásra $\sum_i p_i = 1$, így speciálisan $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i e^{-\lambda} / i! = 1$, azaz

$$\sum_{i < x} 2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = 2 - 2 \left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \sum_{i > x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \right).$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{i > x} \lambda^i e^{-\lambda} / i!$ sokkal kisebb, mint $\lambda^x e^{-\lambda} / x!$, ha x nem túl kicsi λ -hoz képest, így az egyenlet nagyjából

$$0 = 1 - \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \approx 1 - \frac{\sqrt{2\pi x} (e\lambda)^x e^{-\lambda}}{x^x},$$

ahol az $n! \approx (\sqrt{2\pi n})(n/e)^n$ közelítést, azaz a Stirling formulát használtuk. Ezzel

$$\left(\frac{e\lambda}{x} \right)^x = \sqrt{2\pi x} e^\lambda,$$

amelynek e alapú logaritmusát véve

$$x(\log \lambda + 1) - x \log x = \lambda + \frac{1}{2} \log(2\pi x).$$

Ha λ és x közel van egymáshoz, akkor $\log \lambda \approx \log x$, melyet az előző egyenletbe írva az

$$x^* = \lambda + \log \lambda + \frac{1}{2} \log(2\pi) \approx \lambda + \log \lambda + 1$$

megoldás adódik.

Hálózati megbízhatóság

Egy korábban tárgyalt modellhez hasonlóan adott egy irányítatlan G gráf az s és t kitüntetett pontokkal, továbbá G éleihez valószínűségeket rendelünk. Értelmezésünk szerint egy élhez rendelt szám az él járhatóságának (tkp. *létezésének*) a valószínűsége, és az élek létezései független események. Láttuk, hogy ekkor például a legnagyobb valószínűséggel létező $s - t$ út keresése a legrövidebb út problémára vezethető vissza.

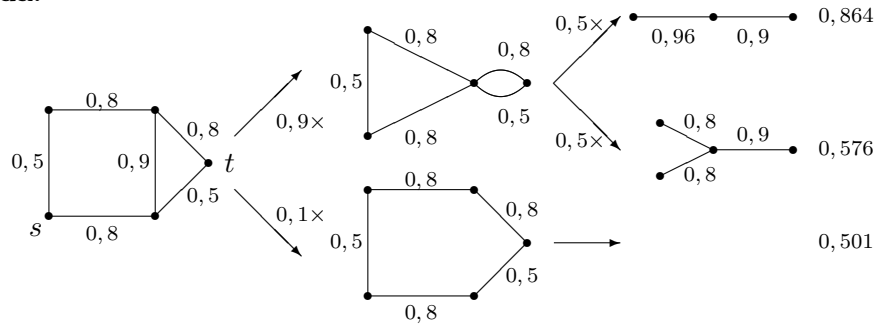
Sokkal nehezebb probléma kiszámolni azt, milyen valószínűséggel juthatunk el s -ből t -be. Ez olyannyira nehéz, hogy hatékony algoritmus nem ismert rá ez idő szerint, mi több, nem is remélt. Ez annál inkább szomorú, mert a probléma kezelhetősége lenne az előfeltétele olyan döntések vizsgálatához, hogy melyik él valószínűségét érdemes növelni és mennyivel, vagy éppen mit okozna a hiánya. Nem túl nagy feladatok azonban megoldhatók a lehetséges esetek megfelelő csoportosításával. A gondolat egy rekurzív algoritmus, amely az adatok számának függvényében *exponenciális* időt igényel.

Legyen G a kiindulási gráf és válasszunk ki egy $e \in E(G)$ élt, melynek valószínűségét jelöljük $p(e)$ -vel. Jelölje továbbá $G \setminus e$ és G/e rendre azokat a gráfokat amelyekből elhagytuk az e élt, illetve ahol az e él két végpontját egybeejtjük, azaz *összehúzzuk* e -t. Ekkor $Pr(G)$ -vel jelölve az $s - t$ elérhetőség valószínűségét

$$Pr(G) = (1 - p(e))Pr(G \setminus e) + p(e)Pr(G/e),$$

és így az eredeti feladatot két kisebb problémára vezettük vissza.

Példa:



Vegyük észre, hogy egy párhuzamos élpár, melyeknek valószínűsége p_1 és p_2 , helyettesíthető egy $p_1 + p_2 - p_1p_2$ valószínűségű éllel. Az alsó ág kiszámolása hasonlóan megy, illetve ha olyan részgráfra jutunk, amit már kiszámoltunk, az felhasználható. Így $Pr(G) = 0,72 \times 0,9 + 0,501 \times 0,1 = 0,6981$. Összehasonlítva ezt a legnagyobb valószínűségű úttal látható, hogy míg az csak 0,516 valószínűségű, az összefüggőségre ennél sokkal nagyobb az esély.

Független alkatrészek megbízhatósága

Tegyük fel, hogy egy n alkatrészből álló szerkezet működéséhez mindnek a működése szükséges, és ezek egymástól függetlenül mennek tönkre. A szerkezet megépítésénél az i -edik alkatrészre két különböző megbízhatóságú és árú választási lehetőségünk van: egy q_i valószínűséggel működő, s_i árú és egy p_i valószínűséggel működő, r_i árú, ahol $q_i < p_i$ és $s_i < r_i$, $1 \leq i \leq n$. A műszaki előírás szerint a szerkezetnek p valószínűséggel működnie kell. A cél az alkatrészek olyan kiválasztása, amely a szabványnak megfelel és minimális költségű.

Használjuk az $x_i \in \{0, 1\}$ változót a modellben a q_i , ekkor $x_i = 0$, illetve a p_i , ekkor $x_i = 1$, valószínűséggel működő alkatrész alkalmazásának kódolására. Ekkor a működési valószínűség pontosan

$$\prod_{i=1}^n q_i \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{x_i}$$

lesz, míg a költség

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n s_i,$$

ha $c_i := r_i - s_i$, $1 \leq i \leq n$ esetén. A cél tehát a

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \prod_{i=1}^n q_i \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{x_i} \geq p \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

feladat megoldása. Bevezetve a $b := \log(p / \prod_{i=1}^n q_i)$ és az $a_i := \log(p_i / q_i)$ jelölést ez ekvivalens az alábbi egész értékű LP feladattal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

ez a korábban ismertett hátság problémához hasonlóan oldható meg; például a korlátozás és szétválasztás (*branch and bound*) módszerével.

Nem zérus összegű játékok

Az életben előforduló játékoknak csak kis része zérus összegű, a legtöbb esetben nem ez a helyzet. Ezekkel a játékokkal hihetetlenül sokféle problémát modellezhetünk. Sajnos ennek ára van. A zérus összegű játékok elméletében oly hasznosnak bizonyult kevert stratégiák általában nem adnak jó választ, mi több, már azt sem könnyű megfogalmazni mit értsünk optimális megoldás alatt. Nem áll módunkban az összes koncepció ismertetése, még kevésbé részletes elemzése. Ehelyett vázolunk néhány lényeges ötletet, elsősorban olyanokat, melyek beleillenek az eddigi tárgyalásmódunkban.

Példa 1. Két ásványvizet forgalmazó vállalat (Appolinaris és Perrier) versenyeznek a piacon. A lehetséges stratégiák egy, illetve két dollárért adni az ásványvíz palackját. Az egyes stratégiák alkalmazása mellett keletkező hasznot táblázatban foglaltuk össze. A mátrixba írt számpár első eleme a sor-, a második az oszlopjátékos haszna az adott stratégia pár mellett.

		Perrier	
		1\$	2\$
Appolinaris	1\$	0, 0	5000, -5000
	2\$	-5000, 5000	0, 0

Könnyen látható, hogy palackonként 1 dollárért kell adni az ásványvizet. Ez akár a nyeregpont létezésére való hivatkozással, akár az első sor (oszlop) dominanciájának megmutatásával a második sor (oszlop) felett történhet.

Általában is kimondhatjuk: a dominancia a zérus összegű játékoknál látott módszerrel analóg módon használható. (Vegyük észre, hogy a fenti játék igazából felfogható zérus összegű játékként.)

Példa 2. Egy hasonló, bár kicsit komplikáltabb esetben két vállalat, a Tökéletes és a Varázslatos, mütyüröket árulhat 1, 2 vagy 3 dolláros áron. A lehetőségeket a korábbiak szerint rendeztük táblázatba; a nyereség/veszteség mértékét az eladási ár és a piaci részesedés változásai miatt változó termelési költségek szabják meg.

		Tökéletes		
		1	2	3
Varázslatos	1	0, 0	50, -10	40, -20
	2	-10, 50	20, 20	90, 10
	3	-20, 40	10, 90	50, 50

Ez a játék nem zérus összegű, és nincs domináns stratégia sem. Új gondolatra van szükség, ez az ún. *Nash egyensúly* vagy *Nash equilibrium*.¹³

Definíció. Egy stratégia pár **Nash egyensúlyi helyzet**, ha egyik játékos sem tudja stratégiát változtatással növelni nyereményét, amennyiben a másik nem változtat a stratégiáján.

A példánkban a (3,3) stratégia pár *nem* Nash equilibrium, hisz a Várázslatos áttérve a 2 dolláros stratégiára növelheti hasznát. Hasonlóan beláthatjuk, hogy az (1,1) stratégián kívül nincs Nash egyensúlyi helyzet, így a mindkét cég által felszámított 1 dolláros ár a “reális” ár. Némely közgazdász úgy véli, a piacgazdaság versenyhelyzetének hatását sikerült így leírni: az alacsony árakat. Ha a verseny nem lehetséges (pl. nem egy dolláros műtűrök, hanem csak néhány cég által gyártott harci repülő a tét), akkor ez a mechanizmus nem képes alacsony árakat garantálni. A Nash egyensúlyi helyzet a dominanciát használó megoldások kiterjesztése, és a bemutatottnál jóval általánosabb feltételek mellett is létezik. Az alábbi példa szerint nem ad egyértelmű megoldást.

Példa 3. Két rádióállomás (Lökött és Laza) három profiltól választhat. Sugározhatnak rockot (R), komolyzenét (K) és híreket (H). Az adott programok hallgatósága 50, 30 és 20 százalék. Ha egy állomás egyedül fed le egy programot, akkor megszerzi annak a hallgatóságát (és a vele arányos reklámbevételt), ha a másikkal együtt, akkor fele-fele arányban osztoznak. Mátrix formában:

		Laza		
		R	K	H
Lökött	R	25, 25	50, 30	50, 20
	K	30, 50	15, 15	30, 20
	H	20, 50	20, 30	10, 10

Könnyen ellenőrizhető, hogy csak a (K, R) és az (R, K) stratégiapár Nash egyensúlyi helyzet. Nehezebb eldönteni, mit jelent ez a megoldás. Melyik valósul majd meg, és milyen stratégiát válasszanak a játékosok? Úgy tűnik, a Nash equilibriumok meghatározása távolról sem ad választ kérdéseinkre. Egy lehetséges továbblépési irány annak vizsgálata, mit hozhat a *koordináció*

¹³A fogalmat és a vele kapcsolatos legfontosabb tételeket John Forbes Nash alkotta meg az 50-es évek elején. Később a német Reinhard Selten és a magyar Harsányi János ért el jelentős eredményeket ebben az irányban, amit 1994-ben a hármójuk között megosztott közgazdasági Nobel-díjjal ismertek el.

játékosok egyes csoportjai között, illetve hogyan *osztható el* a közösen szerzett haszon. Ez a motivációja az ún. *n-személyes játékok* tanulmányozásának. Mielőtt rátérnénk erre, megemlítünk még egy példát, amely azt sugallja, hogy a Nash egyensúlyi helyzet valamilyen értelemben jó megoldás, és ha problémáink is vannak vele az az élet és nem a modell meghatározatlanságából ered.

Példa 4. “Mely oldalán haladjunk az útnak” játék. Két autó halad egymással szemben és a találkozásnál dönteniük kell az út jobb vagy bal szélére húzódnak. A kissé fiktív 10 értéket rendelve a biztonságos továbbhaladáshoz, illetve az összeütközéshez az alábbi mátrixot kapjuk:

		Honda	
		Bal	Jobb
Fiat	Bal	1, 1	-10, -10
	Jobb	-10, -10	1, 1

Mind a (Bal, Bal), mind a (Jobb, Jobb) Nash egyensúlyi helyzet, de ez nem sokat segít rajtunk, ha belekényszerülünk egy ilyen játékba. A társadalmi konvenciókkal szokás koordinálni az efféle szituációkat, s mint tudjuk a konkrét esetre mindkét megoldásra van példa. Így aztán nem is baj, hogy a modellünk megoldása nem egyértelmű. Ha az lenne, akkor már nem az életet írná le, hanem az előítéleteinket.

Példa 5. Az evolúció biológiában nagyon fontos szerepet kaptak egyes nem zérusösszegű játékok. Az alábbi példa az ún. *Galamb-Héja* modell, amellyel egy populáció *evolúciósan stabil stratégiáit* (ESS) szemléltethetjük. Egy galambfajon belül - találkozás esetén - két egyed között kétféle viselkedés lehetséges: kitérnek egymás elől vagy harcba kezdenek. A kitéréssel esetleg elvesztenek egy erőforrást (pár, élelem, fészkelőhely stb), míg a konfliktus sérüléssel, energia vagy idő pocséklással jár. Ha mindkét galamb kitérne, akkor az egyikük megszerzi az erőforrást, legyen ez egyenlő esélyű. Egy “galamb” azaz békés egyed találkozik egy “héjával” azaz egy harcias egyeddel, akkor a “galamb” kitér, elkerüli a sérülést, de elveszti az erőforrást, ami így a “héja” zsákmánya lesz. Két “héja” találkozása mindkettőre nézve jelentős hátránnyal jár.

Az egyedek vagy egyik, vagy a másik viselkedést követik; kérdés, melyik a jobb? Könnyen látható, akár egyik, akár másik viselkedés válik kizárólagossá, egy olyan egyed, amely ettől a normától elér jelentős előnybe kerül.

Tehát a cél egy olyan stabil helyzet megtalálása, melyben az egyed számára nincs ok változtatni a viselkedésén. Oldjuk meg ezt egy fiktív ki-

fizetési mátrix esetén.

	galamb	héja
galamb	2, 2	-1, 5
héja	5, -1	-9, -9

Az “galamb-héja” eloszlás x és $1 - x$, azaz x valószínűséggel békés egy egyed, $1 - x$ -szel agresszív. Feltéve, hogy a populáció elég nagy, egy “galamb” várhatóan $2x - 1(1 - x) = 3x - 1$, egy “héja” pedig $5x - 9(1 - x) = 14x - 9$ nyereséget könyvelhet el. Egyensúly, azaz ESS akkor van, ha $3x_0 - 1 = 15x_0 - 9$, vagyis $x_0 = 2/3$. Tehát a populáció előre meghatározható arányban mutat békés vagy harcias viselkedést. Nem meglepő, ha csökkentjük az erőforrás értékét (ami 3 volt a példában) illetve az időét, akkor a békés, míg ha a sérülés kockázatát (8), akkor a harcias viselkedés terjed a populációban. Az alábbi felállásban $x_0 = 9/10$.

	galamb	héja
galamb	1, 1	0, 2
héja	2, 0	-9, -9

Ezt az aprócska modellt nehéz túlértékelni: meglepően széles a jelenségek köre, melyre képes magyarázatot adni.

Példa 6. Széles körben ismert az ún. *Prisoner Paradox*, azaz az fogoly dilemma. Ez a vádalku lassan nálunk is meghonosodó intézménye által keletkező “játék”, egy klasszikus mátrixa:

	vall	tagad
vall	-5, -5	0, -10
tagad	-10, 0	-1, -1

Ebben a “közös optimum” a tagad-tagad, ami nyilván nem Nash egyensúlyi helyzet, hisz a vall-vall az egyedüli ilyen.

n-személyes játékok

Az n -személyes játékok vizsgálatát Neumann János és Oskar Morgenstern kezdte el. Mint korábban utaltunk rá, nem valamiféle “három személyes sakk”, vagy a futball leírása a cél, hanem a racionális osztozkodás törvényeinek tanulmányozása abban az esetben, mikor a játékosok egy tetszőleges csoportjának “ereje” ismert.

Definíció. Egy n -személyes játék alatt a következő rendszert értjük:

Adott az $I = \{1, 2, \dots, n\}$, a játékosok halmaza. Egy $S \subseteq I$ halmazt

koalíciónak nevezzük, és adott egy $v : 2^I \rightarrow \mathbf{R}$ (a koalíciókhoz egy valós számot rendelő) ún. **karakterisztikus függvény** úgy, hogy

$$(1.) v(\emptyset) = 0$$

$$(2.) v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ ha } S, T \subseteq I \text{ és } S \cap T = \emptyset.$$

A $v(S)$ jelenti szemléletesen azt a hasznot (kifizetést, hatalmat stb.), amit az S -ben lévő játékosok egymással összefogva együttesen elérhetnek (akár a többiek ellenére is). A $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ az $S \cap T = \emptyset$ esetén azt fejezi ki, hogy a két csoport összefogva legalább annyit elér, mint a külön szerzett haszon összege.¹⁴ Ezt *szuperadditív tulajdonságnak* hívjuk.

Példa 1. *Ingtalan fejlesztés (két vásárlós piac)*

Egy földműves által birtokolt föld mezőgazdasági értéke 100 ezer dollár. Két vevő pályázik rá, az egyik lakásépítéssel 200 ezer, a másik bevásárló központ létrehozásával 300 ezer dollár hasznot érhet el a föld felhasználásával. Vegyük észre, hogy míg a földműves egymagában is képes hasznát venni a földjének, addig az építők nem. Ez a következő 3-személyes játéknak felel meg:

$I = \{1, 2, 3\}$, ahol 1: földműves, 2, 3 pedig a két vevőjelölt.

$$\begin{array}{ll} v(\emptyset) = 0 & v(\{1,2\}) = 200000 \\ v(\{1\}) = 100000 & v(\{1,3\}) = 300000 \\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 0 \\ & v(\{1,2,3\}) = 300000 \end{array}$$

Általában az érték a különböző tulajdonosok felhasználásában a , b és c , ahol $a < b < c$.

Példa 2. *A többségi játékok*

Ez a klasszikus 50%+1 szavazattal megvalósuló döntéseket modellezi.

$$I = \{1, \dots, n\}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{esetén "S nyer"} \\ 0 & \text{esetén "S veszít"} \end{cases}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |S| > n/2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

¹⁴Az összefogással ezt el is tudják érni, hisz megtehetnék, hogy külön-külön játszanak $v(S)$ illetve $v(T)$ nyereményt szerezve, majd utána egyesítenék a nyereményüket.

Példa 3. *A súlyozott többségi játékok*

Az i -edik játékosnak w_i szavazata van és q szavazat kell a győzelemhez.
 $I = \{1, \dots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Jelöljük ezt a játékot a rövidebb $(q; w_1, w_2, \dots, w_n)$ formával. Vegyük észre, hogy például a $(3; 2, 2, 2, 2)$ "játék" *nem* játék a definíciónk szerint, mert a v függvény *nem* superadditív.

Definíció. Egy n -személyes játék **egyszerű**, ha a v karakterisztikus függvény csak 0 és 1 értéket vesz fel.

Példa 4. *Az ENSZ Biztonsági Tanács működése.*

A BT-nek 5 állandó és 10 ideiglenes tagja van. Egy határozat életbe lép, ha mind az öt állandó és legalább négy ideiglenes tag megszavazza. Ez felírható, mint $(39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ súlyozott többségi játék.

Imputációk (kifizetések)

Az n -személyes játékokban a játékosoknak jutó *ésszerű* kifizetéseket akarjuk meghatározni. Egy kifizetést egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -dimenziós valós vektorral írhatunk le, ahol x_i az i -edik játékos része. Aesophus meséjével ellentétben feltesszük, hogy az osztozkodást csak a v karakterisztikus függvény befolyásolja, valamint a játékosok tisztában vannak az érdekeikkel és megvédik azokat.¹⁵ Szóba jön az alábbi két szempont:

1. $x_i \geq v(\{i\})$, $i = 1, \dots, n$, szóban "Egyéni racionalitás"
2. $\sum_{i=1}^n x_i = v(I)$, avagy "Pareto optimalitás."

Az 1. pont azt fejezi ki, hogy az egyik játékos sem fogad el olyan kifizetést, amelynél jobbat (mindenféle koalíció nélkül) egymaga is képes elérni. A $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(I)$ annyit tesz: nem osztható több, mint amennyi van. Az egyenlőség viszont megköveteli, hogy a játékosok által megszerezhető maximális összeget osszuk szét. (Azaz egyfajta kooperációra "kényszeríthetjük" a játékosokat.)

Definíció. Az olyan $x \in \mathbf{R}^n$ vektorokat, amelyekre teljesülnek az 1. és 2. feltételek, **imputációknak** hívjuk, az összes imputáció halmazát pedig $A(v)$ -vel jelöljük.

¹⁵Valóján ez elég erős és az életben ritkán teljesülő feltétel.

Példa 4. $I = \{1, 2, 3\}$, $v(S) = 0$, ha $|S| < 2$, míg $v(S) = |S|/3$ különben.
Ekkor az imputációk halmaza

$$A(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}.$$

Az imputációk $A(v)$ halmaza “túl nagy”, így általában nem tekinthető megoldásnak. Különböző, többé-kevésbé ésszerű feltételekkel szokás szűkíteni az $A(v)$ -t, és a kapott részhalmazt deklarálni a létrejehető megoldások halmazának. A sokféle megközelítés számos vitára adott alkalmat és a mai napig sem lehet egyértelmű győztest hirdetni. Mi három koncepciót fogunk vázolni, a *mag (core)*, a *stabil halmaz* és a *Shapley érték* fogalmát. Ezek mindegyike nagyon tanulságos.

Definíció. Ha $x, y \in A(v)$, akkor egy $\emptyset \neq S \subseteq I$ **hatékonyan preferálja** x -et y -nal szemben, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$ esetén és $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Jelben $x \succ_S y$.

Az elnevezés és a motiváció nyilvánvaló. Az $x_i > y_i$ $i \in S$ miatt az S -beli játékosok jobban kedvelik x -et, mint y -t. A $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ a hatékonyság, ugyanis az S koalíció kikényszerítheti az y elvetését és a számára előnyösebb x_i ($i \in S$) kifizetést garantálhatja tagjainak.

Példa 5. Vegyük a 4. példában szereplő játékot és az $x = (1/3, 5/12, 1/4)$, $y = (1/2, 1/3, 1/6)$ és $z = (9/24, 1/3, 7/24)$ vektorokat. Látható, hogy $x, y, z \in A(v)$, továbbá $x \succ_{\{2,3\}} y$ ($x_2 = 5/12 > 1/3 = y_2$, $x_3 = 1/4 > 1/6 = y_3$, és $x_2 + x_3 = 5/12 + 1/4 \leq v(\{2,3\}) = 2/3$). Hasonlóan belátható a $z \succ_{\{1,3\}} x$ reláció; ugyanakkor nincs olyan $\emptyset \subsetneq \{1,2,3\}$, amelyre $z \succ_S y$. (Ez azt jelenti, hogy míg egy rögzített S -re a “ \succ_S ” reláció tranzitív. Ezzel szemben ha úgy definiálunk egy “ \succ ” relációt, hogy $x \succ y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\emptyset \neq S \subseteq I$, melyre $x \succ_S y$, akkor ez a “ \succ ” reláció *nem tranzitív.*)

Definíció. Egy n -személyes játék **magja** azon x imputációkból áll, amelyekkel szemben egyetlen y imputációt sem preferál hatékonyan valamely nem üres S koalíció. Jelben a mag $C(v) := \{x \in A(v) : \text{nem létezik olyan } y \in A(v) \text{ és } \emptyset \neq S \subseteq I, \text{ hogy } y \succ_S x\}$.

Példa 6. Vegyük a $(7; 8, 1, 1)$ súlyozott többségi játékot. Itt $v(S) = 1$, ha $1 \in S$ és $v(S) = 0$, ha $1 \notin S$. Ezért $A(v) = \{x : x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ és } \sum_{i=1}^3 x_i = 1\} = \{(1, 0, 0)\}$, azaz $|A(v)| = 1$. Mivel egy imputáció van csak, $A(v) = C(v)$, és így $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$. Mint várható volt, az 1 “viszi az egészet.”

n-személyes játékok, a mag kiszámítása

Egy v karakterisztikus függvényű játék $C(v)$ magjában lévő vektorok joggal tekinthetők ésszerű megoldásoknak. Ezzel azonban nem értünk a problémák végére.

Példa 1. Számoljuk ki a $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségű játék magját. Tegyük fel, hogy $y \in A(v)$. Ekkor valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $y_i + y_j < 1$, hisz $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Megmutatjuk, hogy van olyan $z \in A(v)$ és $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $z \succ_S y$. Az indexek cseréjével feltehetjük, hogy $y_1 + y_2 < 1$, s mintegy a “maradékot” (y_3 -at) szétosztjuk az első és második játékos között: $z_1 := y_1 + y_3/2$, $z_2 := y_2 + y_3/2$. Így persze $z \succ_{\{1,2\}} y$. Másszóval bármely $y \in A(v)$ -re létezik olyan $z \in A(v)$ és nem üres $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ halmaz, hogy $z \succ_S y$. Ez persze azt jelenti, hogy a mag az üres halmaz, vagyis nem tudunk jó megoldást javasolni.

Szükségünk van tehát egyrészt a mag szerkezetének jobb megértésére a kényelmesebb kiszámítás érdekében, másrészt tennünk kell valamit, ha a mag üres. Az első problémára vonatkozik a mag leírása, mint konvex poliéder.

Tétel 16 *Egy v karakterisztikus függvényű n -személyes játékban az x imputáció eleme a magnak akkor és csak akkor, ha minden S koalícióra a $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ egyenlőtlenség teljesül.*

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan x vektort, amelyre teljesül az összes, a feltételben levő egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy van olyan $y \in A(v)$ és nem üres $S \subset I$, hogy $y \succ_S x$. Ekkor $y_i > x_i$ minden $i \in S$ és $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$ a hatékony preferencia miatt, amiből a

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i$$

ellentmondás adódik.

A másik irány bizonyításához tekintsünk egy, a feltétel valamelyik egyenlőtlenségét megsértő $x \in A(v)$ vektort, és legyen $\emptyset \neq S \subset I$, amelyre sérül; azaz $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Találni akarunk egy olyan $y \in A(v)$ vektort és $\emptyset \neq T \subset I$ halmazt, amelyre $y \succ_T x$. Az előbbieket miatt $v(S) = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$. Az y -t úgy állítjuk elő, hogy az ϵ -t “felosztjuk” az S koalíció tagjai között, azaz $y_i := x_i + \epsilon/|S|$, ha $i \in S$. Kérdés, mi legyen y_i , ha $i \notin S$? Az y vektornak benne kell lennie $A(v)$ -ben, így az egyéni racionalitás

feltételeit nem sértheti, azaz $y_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in I$. Ezek automatikusan teljesülnek, ha $i \in S$, hiszen $x \in A(v)$ és $y_i > x_i \geq v(\{i\})$ ha $i \in S$. Teljesülnie kell továbbá a Pareto optimalitásnak, vagyis $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$. Keressük hát az y_i -ket $i \notin S$ -re a következő alakban:

$$y_i = v(\{i\}) + \delta_i,$$

ahol $\delta_i \geq 0$. Ezzel

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i,$$

amiből a $\sum_{i \in S} x_i + \epsilon = v(S)$ és $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ miatt következik a

$$v(I) = v(S) + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i.$$

Átrendezve a δ_i -kre az alábbi feltétel adódik:

$$\sum_{i \notin S} \delta_i = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}).$$

Nevezzük a fenti egyenlet jobboldalát δ -nak, és defináljuk majd a δ_i -ket a $\delta_i := \delta / (n - |S|)$ formulával. Ekkor az y imputáció lesz, amennyiben $\delta \geq 0$. (Valóban, hisz $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ és $y_i \geq v(\{i\})$ $i \in I$ -re.) Végül δ nem negativitásának megmutatására használjuk a v függvény szuperadditivitását; $\sum_{i \notin S} v(\{i\}) \leq v(I \setminus S)$. Így

$$\delta = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}) \geq v(I) - v(S) - v(I \setminus S) \geq v(I) - v(I) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségben ($v(I) \geq v(S) + v(I \setminus S)$) ismét a szuperaditivitást használtuk, és ezzel kész vagyunk. \square

Példa 2. A tétel segítségével kiszámíthatjuk a korábban ismertetett ingatlan fejlesztés játék magját.

\mathbf{v}	$\mathbf{A}(\mathbf{v})$	$\mathbf{C}(\mathbf{v})$
$v(\{1\}) = 100000$	$x_1 \geq 100000$	$A(v)$ elemei, melyekre
$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$	$x_2 \geq 0$	(iii) $x_1 + x_2 \geq 200000$
$v(\{1, 2\}) = 20000$	$x_3 \geq 0$	(i) $x_1 + x_3 \geq 300000$
$v(\{1, 3\}) = 30000$	(ii) $\sum_{i=1}^3 x_i = 300000$	$x_2 + x_3 \geq 0$
$v(\{2, 3\}) = 0$		
$v(\{1, 2, 3\}) = 300000$		

(i) és (ii) $\Rightarrow x_2 = 0$, (iii) $\Rightarrow x_1 \geq 200000$, azaz a mag a következő:

$$C(v) = \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 30000 - x_1\}.$$

A várakozásnak megfelelően a 2. játékos kizáródik az üzletből, és a földet a 3. veszi meg egy 200 és 300 ezer dollár közti összegért. Ennél többet nem tudunk mondani, de ez természetes, hiszen a valóságban sem dönthető előre, mi lesz az ár. (Az függhet az alkufolyamattól.)

Stabil megoldások

Amennyiben a játék magja üres, nem tudunk ésszerű megoldást javasolni, és ez is hasznos információ. Elképzelhető más, stabilitást figyelembe vevő szempont alapján történő választás $A(v)$ -ből. Ez volt Neumann és Morgenstern eredeti gondolata.

Egy korábbi definíciónk egy G irányított gráfban egy független és domináló $S \subseteq V$ pontthalmaz *mag* vagy *stabil halmaz*. (Sajnos a magyar terminológia könnyen zavart okozhat, mivel ez a mag az angolban *kernel*, míg az előző tétellel karakterizált mag az *core*.) Egy n -személyes játék imputációinak $A(v)$ halmaza felfogható egy G_v gráfként; $V(G_v) = A(v)$, és $(x, y) \in E(G_v) \Leftrightarrow x \succ_S y$ valamely $S \subseteq I$ -re.

Definíció. Egy $B \subseteq A(v)$ halmaz **stabil megoldás** a v karakterisztikus függvénnyel meghatározott játékban, ha B mag (kernel, stabil halmaz) a G_v gráfban.

Megjegyzés: A “másik” mag (core) is leírható a G_v gráf segítségével: $C(v)$ azon pontok halmaza $A(v)$ -ben, amelyekbe nem fut be él, ha mint G_v -beli pontként tekintjük őket.

Az első pillantásra nem nyilvánvaló, mi értelme van a stabil halmazokat megoldásnak tekinteni. Az egyik motiváció lehet a stabil párosítási probléma, amelynek a megoldásai éppen egy gráf stabil halmazai. Továbbá stabil halmaz létezhet akkor is, ha a mag (core) üres.

Példa 3. A $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségi játékra láttuk, hogy $C(v) = \emptyset$. Legyen $B = \{(1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2)\}$, ekkor B *stabil halmaz*.

B független halmaz: Ha pl. $(1/2, 1/2, 0) \succ_S (1/2, 0, 1/2) \Rightarrow S = \{2\}$, de $1/2 \leq v(\{2\}) = 0$ nem teljesül; ellentmondás. A többi eset bizonyítása teljesen hasonló módon történhet.

B domináló halmaz: Legyen $x \in A(v)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ha $x_1 > 1/2$, akkor $x_2, x_3 < 1/2$, de ekkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 \geq \max\{x_2, x_3\}$, így az előző megjegyzés miatt $x_2, x_3 \leq 1/2$. Ha x_2 vagy éppen $x_3 = 1/2$, akkor $x \in B$. Ha viszont

mindkettő kisebb, mint $1/2$, akkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. Hasonló megfontolással adódik, hogy kontinuum sok stabil halmaz van: minden $c \in (0, 1/2)$ esetén a $B_c := \{(x_1, 1-c-x_1, c) : 0 \leq x_1 \leq 1-c\}$ halmaz stabil.

Példa 4. A 2. példában kiszámoltuk az ingatlanfejlesztés játék magját. Bármely n -személyes játékra, ha B egy stabil halmaz, akkor $C(v) \subseteq B$. Esetünkben egy B stabil halmaz feltétlenül bővebb $C(v)$ -nél ($B \setminus C(v) \neq \emptyset$), hiszen az $x = (100000, 100000, 100000) \in A(v)$ imputációra nem létezik olyan $y \in C(v)$ és $S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $y \succ_S x$. Megmutatjuk, hogy $B := \{(x_1, x_2, x_3) : 100000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$ egy stabil halmaz. *B független:* Legyen $x, y \in B$ és $x \succ_S y$. Mivel $x_2 = y_2 = 0$, az $x_1 > y_1$, akkor és csak akkor, ha $x_3 < y_3$, illetve $x_3 > y_3 \Rightarrow x_1 < y_1$. Tehát $S = \{1\}$ vagy $S = \{3\}$, ami lehetetlen.

B domináló: Tegyük fel, hogy egy $y \in B$ -re $y_2 > 0$. Legyen ekkor $x = (x_1, x_2, x_3) := (y_1 + y_2/2, 0, y_3 + y_2/2)$. Nyilvánvalóan $x \in B$ és $x \succ_{\{1,3\}} y$.

Egy stabil halmaz tehát a mag által sugalltól eltérő megoldásokat is megenged. Érdekes tulajdonsága, hogy "osztzkodást" írhat elő egy játékban, amelynek üres a magja (lásd 3. példa). Sajnos nem pusztán a nehezen kiszámíthatóságban hasonlít a magra; 1969-ben Lucas bebizonyította, van olyan játék, melynek nincs stabil halmaza. Egy karakterében különböző megközelítést jelent a *Shapley érték*, amely a játékosok "erejét", alkupozícióját hivatott modellezni.

A Shapley érték

A cél egy olyan Φ függvény definiálása, amely minden v karakterisztikus függvénnyel leírt játékhoz hozzárendel egy $\Phi(v) \in \mathbf{R}^n$ vektort. Az i -edik játékos *Shapley értéke* $\Phi_i(v)$, ha $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ és az alábbi axiómák teljesülnek Φ -re:

1. Legyen π az $I = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, és $w(S) = v(\pi(S))$ minden $S \subseteq I$ -re. Ekkor $\Phi_i(w) = \Phi_{\pi(i)}(v)$.
2. $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$.
3. Ha $v(S \setminus \{i\}) = v(S)$ minden $S \subseteq I$ -re, akkor $\Phi_i(v) = 0$.
4. Additivitás. Ha v és v' karakterisztikus függvények az I halmazon és $w = v + v'$, akkor $\Phi(w) = \Phi(v) + \Phi(v')$.

Megjegyzés: Az első axióma azt fejezi ki, hogy a játékosok ereje független az elnevezésüktől. A második a Pareto optimalitás analogonja, a megszerzhető haszon teljes felosztása. A harmadik szerint nulla az "értéke" annak a játékosnak, akinek lényegében nincs befolyása a játék menetére. Végül a negyedik azt követeli meg, ha két független játékot játszanak ugyanazon játékosok, akkor a nyereséményük a két játék összege lesz. Az igazán meglepő, hogy *van*, ráadásul pontosan egy, Φ függvény, amely eleget tesz ezeknek a szigorú feltételeknek.

Tétel 17 (Shapley) *A karakterisztikus függvények halmazán létezik egy egyértelműen meghatározott Φ függvény, amely eleget tesz az 1-4 axiómáknak. Továbbá*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

ahol

$$\gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Példa 5. (51; 49, 48, 3)

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) = \sum_{i \in S, |S|=2} \frac{1}{3!}(1-0) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},$$

azaz $\Phi(v) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Példa 6. Ingatlanfejlesztés

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &= \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{1\})) + (v(\{1, 3\}) - v(\{1\}))] + \\ &\quad + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})) = 216666 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}))] = 16666 \frac{2}{3}$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 3\}) - v(\{1\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))] = 66666 \frac{2}{3}$$

Példa 7. ENSZ, Biztonsági Tanács: (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)

Egy nem állandó i tagra azon S minimális koalíciók esetén nulla a $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, amelyek mind az öt állandó tagot és pontosan három

ideiglenes tagot tartalmaznak az i -edik tagon kívül. Ezek száma $\binom{9}{2}$, míg $\gamma(9) = 8!6!/15!$, azaz

$$\Phi_i(v) = \binom{9}{2} \frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865$$

Az első és második axióma miatt ha j egy állandó tagja a BT-nek, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} = \frac{1 - \frac{8}{7 \cdot 11 \cdot 13}}{5} \approx 0,1963.$$

Az öt állandó tag birtokolja tehát a döntéshozatal több, mint 98%-át, míg az ideiglenes tagok befolyása a 2%-ot sem éri el.

Játékok és döntések**A Shapley tétel következményei**

Az egyszerű játékokra (azaz, melyekben a $v(S) = 0$ vagy 1 minden S koalícióra) a Shapley érték kiszámítása egyszerűsödik.

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

és most, $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 1$ pontosan akkor, ha $v(S) = 1$ és $v(S \setminus \{i\}) = 0$ különben.

Legyen \mathcal{S}_i ($i \in S \subseteq I$) az i -t tartalmazó nyerő koalíciók halmaza, melyek az i -t elhagyva már nem nyerők. Így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|).$$

Példa 1. ENSZ Biztonsági Tanács Mint láttuk a döntéshozatal itt egy (39; 7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) súlyozott többségi játék. Ha i egy nem állandó tag és $S \ni i$ minimális nyerő koalíció, akkor S pontosan 5 állandó és 4 ideiglenes tagból áll. Ezen S halmazok száma $\binom{9}{3}$, így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(9) = \binom{9}{3} \gamma(9) = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865.$$

A szimmetria miatt, ha j egy állandó tag, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} \approx 0,1963,$$

míg az 5 állandó tag egyesített ereje $\approx 0,98153$. A példa mutatja, hogy egy súlyozott többségi játékban a játékosok valódi ereje és a szavazataik száma között messze nem lineáris a kapcsolat, illetve a gyengébb játékosok érdekérvényesítő képessége tragikusan kicsi. Elképzelhető viszont, hogy 7 ideiglenes tag összefog és *mindig* együtt szavaz. Ekkor együttes erejük $1/6$, csak úgy, mint az állandó tagoké ebben az esetben, míg a kimaradó 3 nem állandó tag ereje nulla! A régi tanács, *divide et impera*, matematikailag is alátámasztható.¹⁶

¹⁶Ezért is ideiglenesek a tagországok, így valószínűtlen az összefogásuk, illetve könnyebben befolyásolhatók.

Egyszerű játékok esetében elegáns valószínűségi interpretációja adható meg a Shapley értékeknek. Egy π permutációjára I -nek egy i elem *pivotális*, ha az i -t π -ben megelőző elemek által vesztes, de i -t hozzávéve győztes koalíciót alkotnak. Ha egy S nyerő, $S \setminus \{i\}$ vesztes koalíció, akkor S -re nézve $(s-1)!(n-s)!$ számú permutációban lesz i pivotális, ahol $s = |S|$.

Tétel 18 *Egy v karakterisztikus függvényű játékban $\Phi_i(v)$ egyenlő annak a valószínűségével, hogy i pivotális, amennyiben az I bármely permutációját azonos valószínűséggel választjuk.*

Példa 2. Az ausztrál parlamenti rendszer működése

Az ország hat szövetségi államból áll, és törvényeket ezek képviselői, illetve a szövetségi kormányzat hozza. Az elfogadás feltétele, hogy legalább öt állam, vagy két állam és a szövetségi kormányzat támogassa az adott törvényt. Egy permutációban a szövetségi kormányzat pivotális, ha a harmadik, a negyedik vagy ötödik helyen áll. Ezek egymást kizáró események, valószínűségük $1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$. Az egyes államok Shapley értéke egyenlő, $4/7 \cdot 1/6 = 2/21$, ami a szövetségi kormányzat erejének két kilencede.

Felmerül a kérdés, mi a Shapley érték és az imputációk kapcsolata.

Tétel 19 *Minden n -személyes játékra a $\Phi(v)$ vektor eleme az imputációk $A(v)$ halmazának.*

Bizonyítás. A 2. axióma szerint $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$, így a Pareto optimalitás teljesül. Az egyéni racionalitás $\Phi_i \geq v(\{i\})$ egyenlőtlenségei a következők miatt állnak. Először is a $v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(\{i\})$ a szuperadditivitás miatt. Ezzel

$$\Phi_i(v) \geq \sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|)v(\{i\}) = v(\{i\}) \sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|) = v(\{i\}),$$

hiszen

$$\sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|) = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{k-1} \gamma(|k|) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k)!}{(n-k)!(k-1)!n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

□

Összefoglalva az eddigieket, egy n -személyes játék elképzelhető megoldásai (kifizetései) az imputációk $A(v)$ halmaza. Mivel $A(v)$ -t

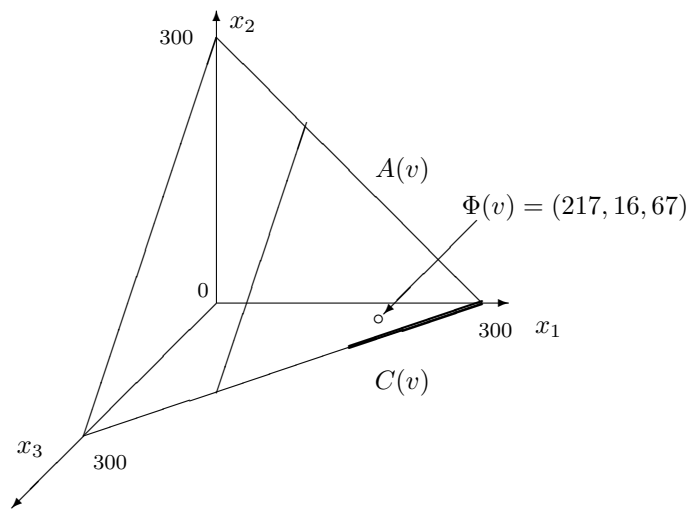
$$\sum_{i=1}^n x_i = v(I) \text{ egyenlet és az } x_i \geq v(\{i\}) \text{ (} i \in I \text{)}$$

egyenlőtlenségek határozzák meg, $A(v)$ egy konvex poliéder. A $C(v)$ meg az $A(v)$ -nek része, és szintén poliéder, hiszen

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subseteq I\},$$

míg egy stabil B halmazról tudjuk, hogy $C(v) \subseteq B \subseteq A(v)$. Végül a Shapley érték $\Phi(v)$ vektora szintén $A(v)$ -ben van.

Példa 3. Az ingatlanfejlesztés “megoldásai” (a koordinátákat ezer dollárban mérve).



Csoportok döntéshozatala

Az életben gyakran felmerül, hogy emberek egy csoportjának egy probléma megoldásának különböző alternatíváit sorba kell rendeznie.

Példa 1. Egy család autót vásárol, és a kereskedő a következő extrákat ajánlja: blokkolásgátló (ABS), légszák (L), légkondicionáló (AC) és sztereo rádió (S). Mivel mindet nem engedhetik meg maguknak, mindenki egy fontossági listát állít fel.

férj feleség 1. gyerek 2. gyerek

ABS	AC	S	AC
AC	L	AC	L
S	S	L	ABS-S
L	ABS	ABS	

A kérdés ezek után: mi legyen a közös sorrend? (Az ABS-S jelöléssel az érzékeltetjük, hogy megengedjük a döntetlent két alternatíva összehasonlításánál.)

Általánosan: Adott egy t elemű I halmaz (az egyének csoportja) és egy A , az alternatívák halmaza. Jelölje P az A sorrendjeinek (döntetlent megengedve) a halmazát, ekkor $P \times \dots \times P = P^t$ a lehetséges inputok tere, elemei az ún. *profilok*, jelük (P_1, \dots, P_t) . Egy $F : P^t \rightarrow P$ függvényt *konszenzus függvénynek* (social welfare function) hívunk. A célunk természetesen a valamely szempontból ésszerű konszenzus függvények vizsgálata.

Példa 1. Az egyszerű többség szabálya

Az $a, b \in A$ alternatívákra a csoport a -t b felé helyezi, ha az egyének többsége ezt tette. Sajnos ez a szabály *nem* vezet konszenzus függvényhez, mint azt az alábbi ún. *szavazói* vagy *Condorcet* paradoxon mutatja.

Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$.

P_1	P_2	P_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

A szabály szerint a megelőzi b -t, b megelőzi c -t és c megelőzi a -t, ami a rendezés tranzitivitása miatt nem lehetséges.

Példa 2. Borda érték

Egy $(P_1, \dots, P_t) \in P^t$ -re és $a \in A$ -ra definiáljuk a $b_i(a)$ értéket ($b_i : A \rightarrow \mathbf{N}$ függvény) az alábbi formulával: $b_i(a) := P_i$ -ben az a mögé helyezett alternatívák száma. A Borda érték pedig $b(a) := \sum_{i=1}^t b_i(a)$, és a csoport x -et y elé helyezi, ha $b(x) > b(y)$. Így valóban adódik egy konszenzus függvény; tulajdonképpen pl. a pontozásra alapuló sportágakban hasonló történik. Egy súlyos ellenvetés a módszer ellen az alábbi profil kiértékelése:

P_1	P_2	\dots	P_{t-1}	P_t
x	x		x	y
y	y		y	\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	x

Nyilvánvalóan $b(y) - b(x) = |A| - 1 - (t - 1) = |A| - t$, azaz ha az alternatívák száma nagyobb, mint a csoport mérete, akkor az y alternatívát a csoport x elé helyezi. Így az értékelés, ha más nem, nagyon érzékeny a hibákra, elfogultságokra, esetlegesen manipulációkra.

Példa 3. Lexikografikus rendezés

Helyezzük $x \in A$ -t $y \in A$ elé, ha P_1 -ben x megelőzi y -t. Ha P_1 -ben x és y esetleg azonos helyen van, nézzük P_2 -t és így tovább. Ez nyilvánvalóan konszenzus függvény, s így matematikai szempontból semmi baj sincs vele. A szó köznapi értelmében persze szó sincs konszenzusról, az egyes játékos *diktátor*.

Nem könnyű tehát minden igénynek eleget tevő konszenzus függvényt találni. Hasonló megközelítést alkalmazunk, mint a Shapley érték definíciójánál; megpróbálunk axiómákat adni egy megfelelő konszenzus függvényre. Az alábbi négy axiómát 1951-ben Arrow fogalmazta meg.

Arrow axiómák

1. (A konszenzus függvény és az egyéni értékelések pozitív asszociációja)
Ha egy adott profilra a konszenzus függvény a -t b elé helyezi, akkor ezt teszi a profil alábbi módosítása után is:
 - (a) Az egyének értékelésében az alternatívák sorrendje a -t kivéve nem változik.
 - (b) Minden értékelésben az a alternatíva és bármely más alternatíva sorrendje változatlan marad, vagy a javára változik.

2. (Függetlenség az irreveláns alternatívától) Legyen A_1 egy tetszőleges részhalmaza az alternatíváknak. Ha egy profilt úgy módosítunk, hogy minden egyén sorrendje az A_1 elemei között változatlan, akkor a konszenzus függvény ugyanazt a sorrendet adja A_1 elemei között az eredeti és a módosított profil esetében.

3. (A polgárok szuverenitása)
Bármely a és b alternatívákra van olyan profil, melyre a konszenzus függvény a -t b elé helyezi.

4. (Nincs diktátor)

Nincs olyan egyén, aki ha a -t b elé helyezi, akkor a konszenzus függvény is ezt teszi, függetlenül a többi egyén értékelésétől.

Az Arrow axiómák az igazságosságot és az ésszerűséget próbálják megőrizni. Ezért aztán eléggé meglepő és némileg talán kiábrándító a következő tétel.

Tétel 20 (Arrow) *Ha $t > 1$ és $|A| > 2$, akkor nem létezik az 1-4 axiómáknak eleget tevő konszenzus függvény.*

Megjegyzés: Arrow tétele rávilágít döntéshelyzetek bizonyos csapdáira. Egyik, gyakran megvalósuló megoldás a diktátor, egy másik választási lehetőségek szűkítése kettőre, rossz esetben *egyre*. A harmadik pedig, hogy felkészülünk a csapdákra, és megpróbáljuk feloldani a problémát minimális igazságtalanság árán.