# Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

9. Előadás

# Az optimalizálás alapfeladata

Keressük $f$ függvény maximumát

$$\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Lehetnek adottak korlátozó feltételek: $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m$ és/vagy $g_j(\boldsymbol{x}) = 0, j = m+1, \ldots, m+k$. Ha adottak, feltételes, különben feltétel nélküli optimalizálási feladatról beszélünk.

- $f$ és $g_i$ függvények lehetnek lineárisak (LP), vagy nemlineárisak is,
- de feltesszük, hogy folytonosak
- $\boldsymbol{x}$-re nincs $g_i$-ken kívül megszorítás (pl. nem köthetjük meg, hogy egészek)
- jelöljük $\mathcal{S}$-sel a lehetséges megoldások halmazát

# Az optimalizálás alapfeladata

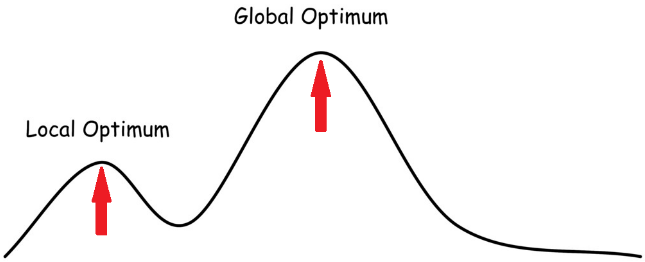
Mit jelent az, hogy $\boldsymbol{x}^*$ egy megoldás?

## Lokális optimum

Egy $\boldsymbol{x}^*$ lokális maximum (optimum), ha $\exists\delta > 0$, úgy, hogy $f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x})$ $\forall\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ és $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*|| < \delta$ esetén.

## Globális optimum

Egy $\boldsymbol{x}^*$ globális maximum (optimum), ha $f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x})$ $\forall\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ esetén.

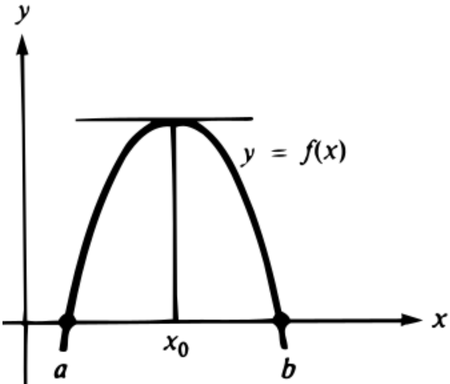


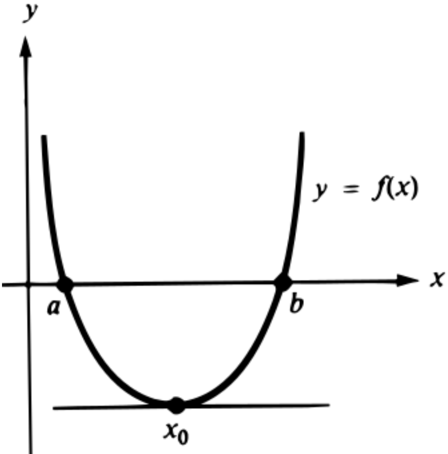
# Az optimalizálás alapfeladata – ábra

**Kérdés**

Mikor lesz minden lokális maximum (minimum) globális is?

Ha $f$ konkáv (konvex) függvény, akkor biztosan.



# Feltétel nélküli optimalizálás: Szükséges és elegendő feltétel optimalitásra

**Tétel (szükséges feltétel).** *Ha $x^*$ az $f(x)$ függvény maximuma (minimuma), akkor $f'(x^*) = 0$.*

Ez nem elegendő, ld. pl. $f(x) = x^3$ függvény.

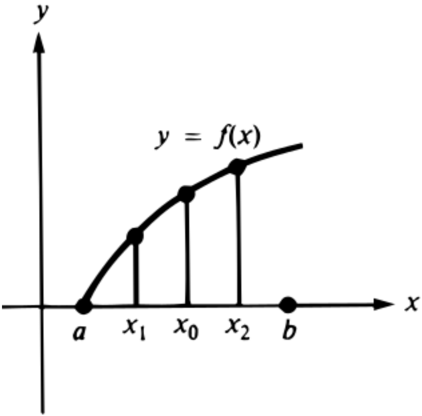
**Tétel (elegendő feltétel).** *Ha $f'(\boldsymbol{x^*}) = 0$ és $f''(x^*)$ negatív (pozitív), akkor $x^*$ lokális maximuma (minimuma) $f$-nek.*

Azokat a pontokat, ahol $f'(x) = 0$ **stacionárius pont**oknak nevezzük. A

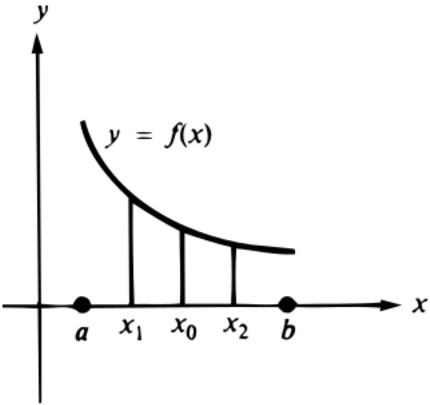
$$\max_{x \in [a,b]} f(x)$$

feladat megoldását a stacionárius pontjai illetve $a$ és $b$ közt keressük.

# Példák monoton függvényre

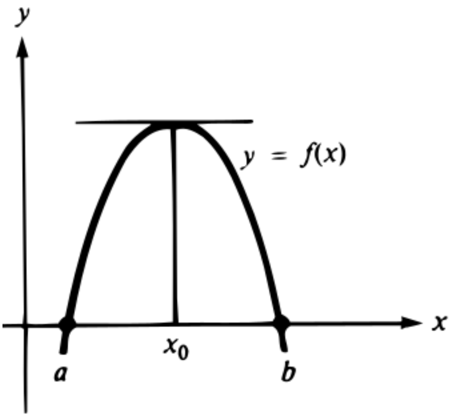



(a) $f'(x_0) > 0$
$f(x_1) < f(x_0)$
$f(x_2) > f(x_0)$
$x_0$ nem lokális szélsőértékhely




(b) $f'(x_0) < 0$
$f(x_1) > f(x_0)$
$f(x_2) < f(x_0)$
$x_0$ nem lokális szélsőértékhely

# Példák konkáv és konvex függvényekre

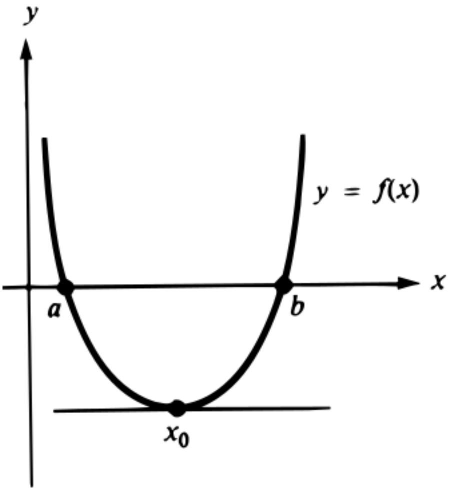



(c) $f'(x_0) = 0$

Ha $x < x_0$, akkor $f'(x) > 0$

Ha $x > x_0$, akkor $f'(x) < 0$

$x_0$ lokális maximum



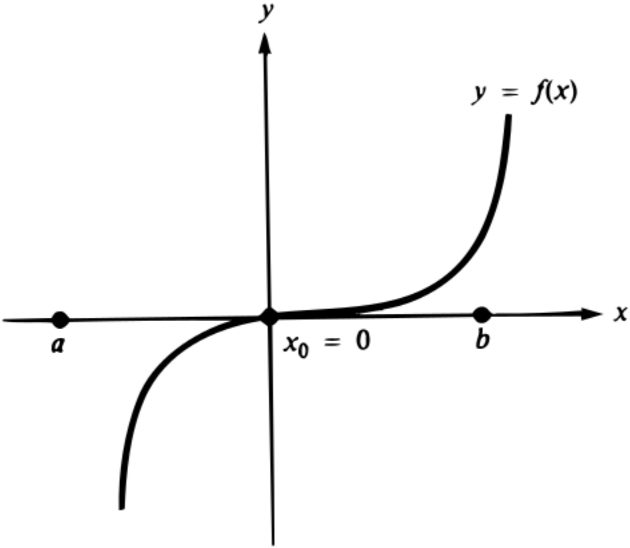

(d) $f'(x_0) = 0$

Ha $x < x_0$, akkor $f'(x) < 0$

Ha $x > x_0$, akkor $f'(x) > 0$

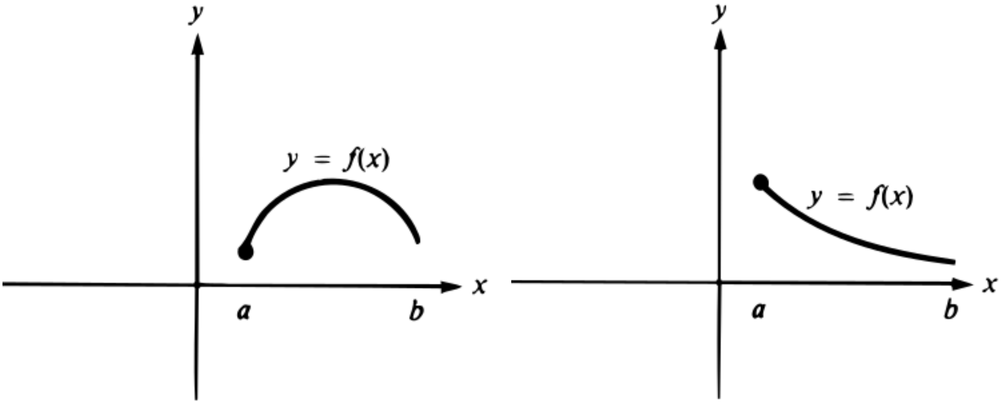
$x_0$ lokális minimum

# Példa se nem konkáv se nem konvex függvényre




(e) $x_0 = 0$ nem lokális maximum
vagy lokális minimum,
de $f'(x_0) = 0$

# Példa optimumra nem 0 derivälttal




(a) $f'(a) > 0$
$a$ lokális minimum

(b) $f'(a) < 0$
$a$ lokális maximum

# Legmeredekebb lejtő módszere

Több dimenziós feladatoknál az $f'(x) = 0$ feltételt felváltja a

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = (f'_{x_1}(\boldsymbol{x}), f'_{x_2}(\boldsymbol{x}), \ldots, f'_{x_n}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$$

szükséges feltétel. Ez nem feltétlenül könnyen megoldható egyenletrendszerre vezet, ezért iteratív megoldáshoz folyamodunk.

## Lokális kereső eljárás

Legyen $\boldsymbol{x}_0$ a kezdő megoldásunk, az iterációs lépés pedig

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \mu \boldsymbol{d}_i, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

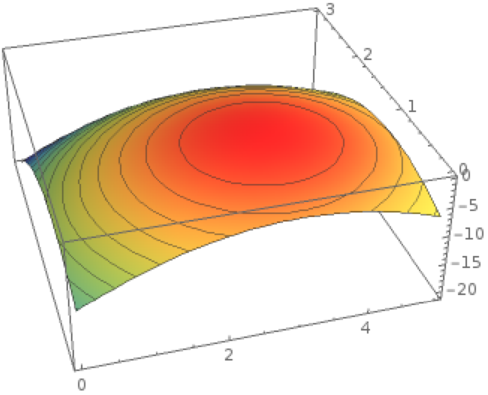
ahol $\boldsymbol{d}_i$ egy növekvő irány maximalizálásnál, $\mu$ pedig a lépéshossz. Ha $||\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i|| \leq \epsilon$, azaz az új lépes nem elég nagy, STOP.

Ahogy $f'(x)$ a növekvő irányba mutat 1D-ben, úgy $\nabla f(\boldsymbol{x})$ a legmeredekebb növekedés irányába mutat $n$D-ben. Így $\boldsymbol{d}_i = \nabla f(\boldsymbol{x}_i)$ jó választás.

$\mu$-t vagy az egydimenziós $\max_\mu \boldsymbol{x}_i + \mu \boldsymbol{d}_i$ feladat megoldásával, vagy közelítéssel határozzuk meg.

# Legmeredekebb lejtő: példa

**Példa.** Maximalizáljuk az $f(x,y) = -(x-3)^2 - 3(y-1)^2$ függvényt!




$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2(x-3) \\ -6(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 6-6y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = (0{,}0)$$

$$\boldsymbol{x}_1 = (0{,}0) + \mu(6{,}6) = (6\mu{,}6\mu),$$

vagyis

$\max_\mu f(6\mu{,}6\mu)$-t keressük!

$$\max_\mu f(6\mu{,}6\mu) = \max -(6\mu-3)^2 - 3(6\mu-1)^2 = \max -144(\mu-1/4)^2 - 3$$

$$\mu = 1/4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (6/4{,}6/4)\,!!!$$

Steepest.pdf

# Feltételes optimalizálás: Lagrange függvény

Adott a következő feltételes probléma

$$\begin{array}{ll} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\boldsymbol{x}) \\ & g_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1,\dots,m \end{array}$$

Az

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x})$$

függvényt a feladat **Lagrange függvény**ének nevezzük.

**Tétel (szükséges feltétel).** *Ha $\boldsymbol{x}^*$ az (1) feladat maximuma, akkor létezik $\boldsymbol{\lambda}^*$ amire $\boldsymbol{x}^*$ a Lagrange függvény stacionárius pontja, azaz $\nabla\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*) = 0$.*

A $\boldsymbol{\lambda}$ vektor elemeit **Lagrange multiplikátor**oknak nevezzük.

# Lagrange függvény – példa

**Példa.** Maximalizáljuk $f(x,y) = x + y$ függvényt, feltéve $x^2 + y^2 = 1$.

**Lagrange függvény.**

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = x + y - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

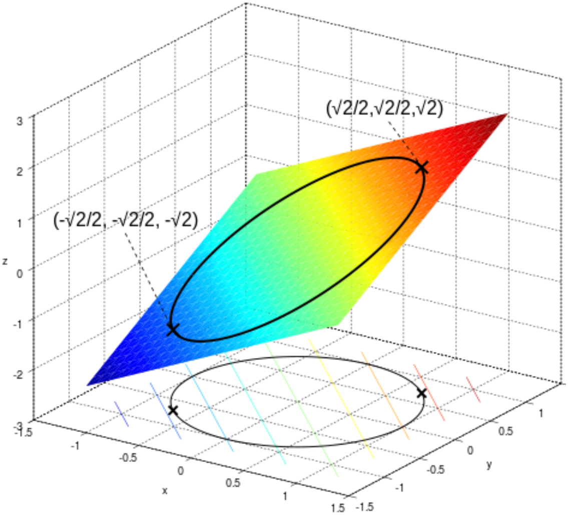
A szükséges feltétel

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}'_x \\ \mathcal{L}'_y \\ \mathcal{L}'_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megoldva: $x = y = 1/(2\lambda)$, $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$
így $(x,y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, illetve $(x,y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Ebből $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ a maximum, $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ a minimum.

# Lagrange függvény – példa




pelda1.pdf

# A log-barrier módszer

**Motiváció:** ahelyett, hogy megoldanánk egy feltételes optimalizálási feladatot, beépítjük a feltételeket a célfüggvénybe. (ld. mint Lagrange függvény)

**Ötlet:** Tegyük fel, hogy adott egy kezdő lehetséges megoldásunk ($x_0 \in \mathcal{S}$). „Készítsünk szakadékot” az $\mathcal{S}$ határán.

A feladat:

$$\begin{array}{ll} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{feltéve} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

**A barrier függvény:**

$$B_\mu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \mu\phi(\boldsymbol{x})$$

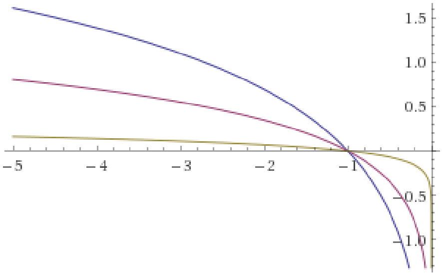
ahol $\phi(\boldsymbol{x})$ legyen $-\infty$ ha $\boldsymbol{x}$ nem megengedett megoldás, és kis negatív ha megengedett!

# A log-barrier módszer: A $\phi$ függvény lehetséges választásai

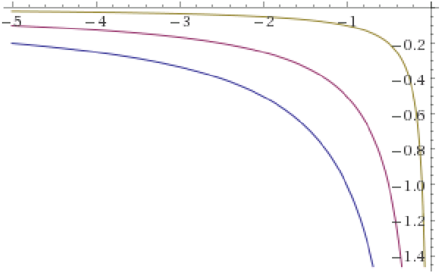
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(\boldsymbol{x}))$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\boldsymbol{x})}$$

Az $x \leq 0$ feltétel esetén




Az $x \leq 0$ feltétel esetén



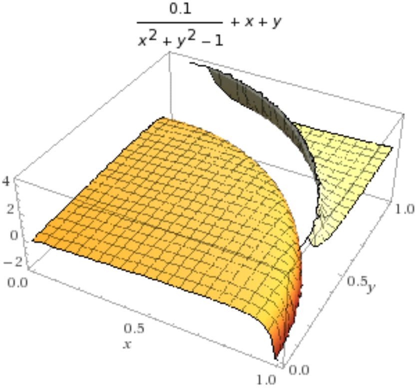

A $\mu$ paraméter megválasztása kontrollálja az akadály szigorúságát:

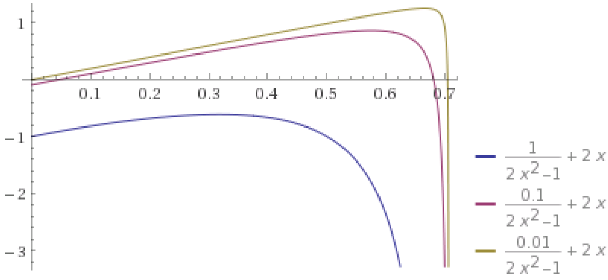
- $\mu$ nagy: fokozatos akadály (kék)
- $\mu$ kicsi: éles akadály (barna)

# A log-barrier módszer: példa

**Példa.** $\max x + y$ ha $x^2 + y^2 \leq 1$

$B_\mu = x + y + \frac{\mu}{x^2+y^2-1}$




Induljunk ki az $x_0$ megengedett kezdő megoldásunkból, oldjuk meg a $\max B_\mu$ feladatot, majd $\mu$-t fokozatosan csökkentve újra meg újra oldjuk meg a $\max B_\mu$ feladatot!

# A log-barrier módszer : Megjegyzések

- A $B_\mu$ feladatok megoldása tart az eredeti feladat megoldásához ha $\mu \to 0$, de nem éri el ha $g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$ $(B_\mu(\boldsymbol{x}^*) = -\infty\ \forall \mu > 0)$.

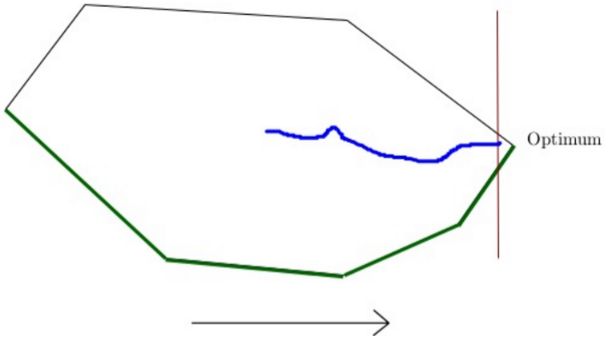
- Csak egyenlőtlenség feltételek mellett alkalmazható, különben nincs lehetséges megoldása !

- Kis $\mu$ esetén a barrier függvény rosszul kondícionált, azaz numerikusan nehezen megoldható (túl nagy a célfüggvényérték különbség kis lépésre is).

- A feltételeket nem hagyhatjuk figyelmen kívül : ha kilépünk a lehetséges tartományból a függvényünk vagy nem értelmezett (logaritmus), vagy rossz megoldást ad (reciprok).

# Szimplex vs. belső pontos módszer

A log-barrier módszer lineáris programozási feladatra való alkalmazásából született az ú.n. **belső pontos módszer**!



# Büntetőfüggvény

Mi a helyzet akkor, ha **nincs meg a kezdő lehetséges megoldás** (azaz egy belső pont...)?

**Ötlet:** Legyen a **büntető függvény**

$$P_\rho(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \rho\psi(\boldsymbol{x}),$$

ahol $\rho < 0$ szám a büntető paraméter és

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \boldsymbol{x} \text{ lehetséges megoldás} \\ > 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

**Cél:**

$$\max_{\boldsymbol{x}} P_\rho(\boldsymbol{x})$$

problémák sorozatának megoldása, ahol $\rho \to -\infty$.
Vagyis: a nem lehetséges megoldások esetén a célfüggvény legyen egyre kisebb.

# Büntetőfüggvény

Tekintsük a

$$
\begin{array}{ll}
\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{feltéve} & g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\
\text{feltéve} & g_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = m+1, \dots, l
\end{array}
$$

**feltételekkel** adott feladatot.

**A $\psi$ függvény lehetséges választásai:**

$$
\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(\boldsymbol{x})\} + \sum_{i=m+1}^{l} |g_i(\boldsymbol{x})|
$$

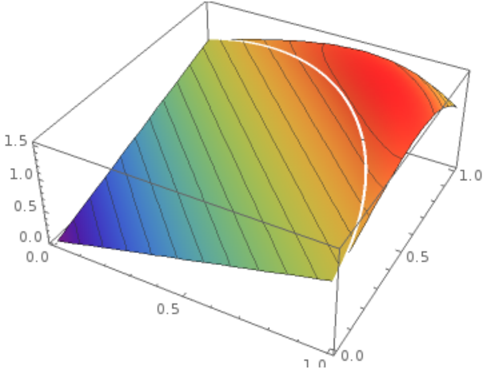
Vagy a négyzetes büntetőfüggvény

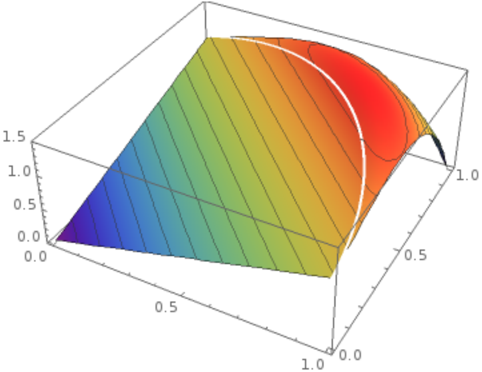
$$
\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(\boldsymbol{x})\}^2 + \sum_{i=m+1}^{l} g_i(\boldsymbol{x})^2
$$

# Büntetőfüggvény : példa

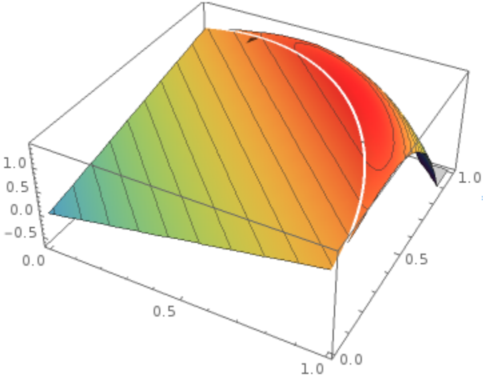
**Példa.** $\max x + y$ ha $x^2 + y^2 \leq 1$

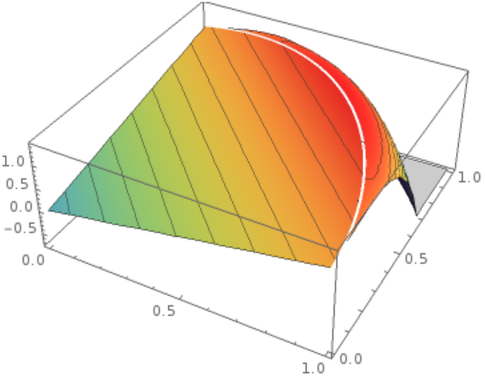
$P_\rho = x + y + \rho \max\{0, x^2 + y^2 - 1\}^2$

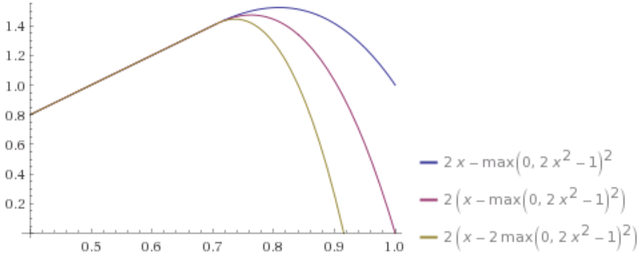


# Büntetőfüggvény: példa



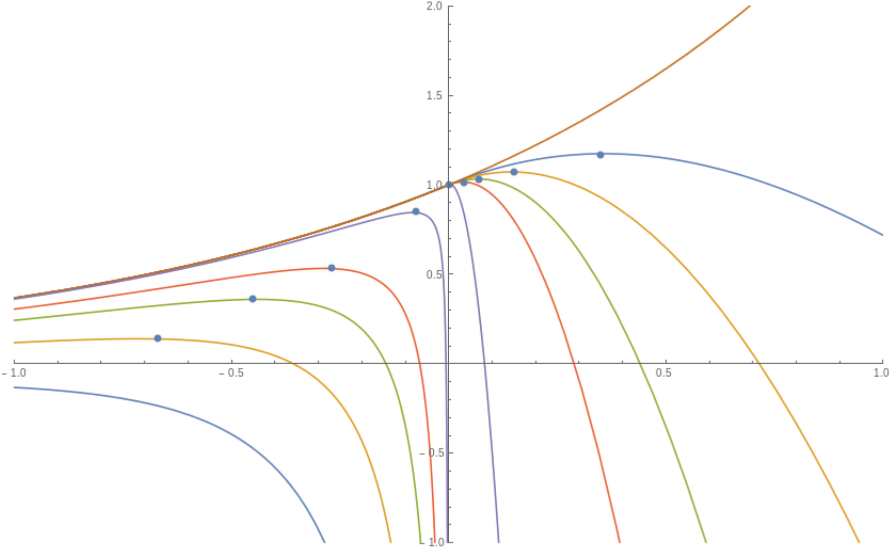



# Büntetőfüggvény

- Nem tudjuk előre, mekkora $\rho$ fog kelleni
- $\rho < 0$, ha $|\rho|$ túl nagy, a feladat rosszul kondicionált
- Csökkentsük fokozatosan $\rho$ értékét
- A keresést mindig az előző megoldásból indítsuk
- Ha konvergál a függvényérték, megállunk
- Van olyan feladat amire csak nem megengedett megoldást ad (ld. következő ábra)

# Barrier vs büntetőfüggvény – ábra

**Példa.** $\max e^x$ f.h. $x \leq 0$



# Barrier vs büntetőfüggvény – ábra

Barrier függvények

Büntető függvények