Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

8. Előadás

Egy példa

Adott két TV csatorna (N1, N2), melyek 100 millió nézőért versenyeznek. Tekintsük a szombat este 20-21 órás idősávot. Amikor a csatornák kihirdetik a műsorukat, nem ismerik a másik műsorát. A piackutatások alapján a különböző műsorok esetén N1 csatorna a következő nézőszámokra számíthat feltéve a N1 és N2 adását:

	N2		
N1	Western	Akciófilm	Vígjáték
Western	35	15	60
Akciófilm	45	58	50
Vígjáték	38	14	70

Például, ha N1 Western-t ad, N2 pedig Vígjátékot, akkor 60 millióan nézik N1-et, 100-60=40 millióan pedig N2-t.

Kérdés: Mi legyen a két csatorna stratégiája, hogy maximalizálják a nézettségüket?

Egy példa

Terminológia:

- N1: **sorjátékos**
- N2: **oszlopjátékos**
- A felírt mátrix: **kifizetési mátrix**
- {Western, Akciófilm, Vígjáték}: **stratégiák** halmaza
- Ez egy ún. **konstans összegű játék**: a két játékos „nyereségének” összege mindig 100

Na de hogyan oldjuk meg a feladatot?

Nézzük meg a kifizetési mátrix szerkezetét!

Egy példa

- Ha N1 Western-t ad, akkor lehet 60 milliós nézettsége (ha N2 Vígjátékot ad), de lehet csak 15 millió is (ha N2 Akciófilmet ad)
- ...azaz **legrosszab esetben** is garantált (várhatóan) 15 millió néző a Western-nel.
- De ha N1 vígjátékot ad, a helyzet rosszabb, mert csak 14 millió néző garantált.
- a legrosszabb esetek legjobbika, ha Akciófilmet ad: garantált 45 millió néző *N2 adásától függetlenül*

Egyszerűen: megnézi a **sorminimumokat** és veszi a legnagyobbat.

Analóg módón az oszlopjátékos N2 hasonlóan tesz: veszi az **oszlopmaximumokat** és veszi a legrosszabb esetet (legkisebbet)

Egy példa

Nem nehéz látni, hogy

$$\max(\text{sorminimumok}) \leq \min(\text{oszlopmaximumok})$$

A példánkban N1 az Akciófilmet fogja választani, N2 pedig a Westernt, így 45 vs. 55 millió lesz a nézők megoszlása. Látjuk, hogy itt

$$\max(\text{sorminimumok}) = \min(\text{oszlopmaximumok})$$

teljesül. Az egyenlőséget megvalósító stratégia párt **nyeregpontnak** hívjuk.

A nyeregponthoz tartozó érték (a példában 45) a **játék értéke.**

Zérusösszegű játékok

Teljes információs, véges, kétszemélyes, zérus (konstans) összegű játékok:

- **Teljes információs:** mindenki ismeri a játékszabályokat, ki mit léphet, mik a lépések eredményei
- **Véges:** véges számú játékos (most 2!), véges számú lehetséges lépéssel (a példában 3-3)
- **Zérus összegű:** pontosan annyit nyer az egyik játékos, mint amennyit a másik veszít

Az ilyen játékok leírhatók egy mátrixszal, ezért röviden **mátrix játékoknak** nevezzük őket

Mátrix játék kifizetési mátrix: olyan M mátrix, amelyben az m_{ij} elemek a sor játékos nyereményei, amennyiben a sor játékos i-t, az oszlop játékos a j stratégiát játssza a játékban

Zérusösszegű játékok - tiszta és kevert stratégia

Az előző játékban a játékosok (N1, N2) stratégiája determinisztikus volt: megvizsgálták a lehetséges kimeneteleket és választottak egy stratégiát (filmtípus) amit követnek. Ezt **tiszta stratégiának** hívjuk.

Vannak játékok, ahol nincs nyeregpont $\Rightarrow$ egyetlen, tiszta stratégia követése nem mindig garantálja a legjobb kifizetést (ld. következő példa).

Kevert stratégia

- adott n lehetséges lépés: $(s_1, \ldots, s_n)$ (stratégiahalmaz)
- s_i stratégiát x_i valószínűséggel játsszuk
- $x_i \geq 0$ és $x_1 + \cdots + x_n = 1$ (eloszlás a stratégiahalmaz felett)
- az **optimális stratégia**: ami maximalizálja a várható kifizetést (**kifizetés várható értékét** maximalizáljuk)

Példa – Betting game

Van egy francia kártyacsomagunk, aminek egy színét kiválasztjuk és mind a 13 lapját kiterítjük lefordítva.

Az első játékos (P1) felhúz egy lapot úgy, hogy a második játékos (P2) nem látja azt.

P1-nek két lehetősége van:

1. Eldobja a lapot és fizet egy dollárt a második játékosnak (Pass)
2. Lefordítva leteszi a lapot az asztalra, átadva a döntést a második játékosnak (Bet)

Amennyiben P1 nem dobott, azaz a játék folytatódik, akkor P2-nek szintén két lehetősége van:

1. Kiteríti P1 lapját (Call)
2. Passzol és fizet egy dollárt az első játékosnak (Fold)

Példa – Betting game

A lep terítésekor kétféle kimenetel lehetséges:

1. Ha a lap értéke magas (10, J, Q, K, A), P2 fizet 2$-t az P1-nek
2. Ha a lap értéke alacsony (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), P1 fizet 2$-t P2-nek

Mik lehetnek P1 stratégiái?

- Lap értékétől függetlenül dob (PP)
- Dob, ha a lap értéke magas, tart, ha alacsony (PB)
- Dob, ha a lap alacsony, tart, ha magas (BP)
- Lap értékétől függetlenül tart (BB)

P1 lehetséges stratégiái pedig:

- Call
- Fold

Példa – Betting game

Mi történik például, ha P1 BP-t játssza, míg P2 a Call-t? Várhatóan mennyit kereshet így az első játékos?

- Annak a valószínűsége, hogy magas lapot húz P1: $5/13$
- Annak a valószínűsége, hogy alacsony lapot húz P1: $8/13$

P1 várható („átlagos") **nyeresége** ebben az esetben:

$$5/13 * 2\$ + 8/13 * (-1\$) = 2/13\$$$

Mi történik például, ha P1 BP-t játssza, míg P2 Fold-ot?

Ekkor az **P1 várható nyeresége**:

$$5/13 * 1\$ + 8/13 * (-1\$) = -3/13\$$$

Példa – Betting game

A **kifizetési mátrix** a következő (*hf. számoljuk végig*)

	P2		
P1	Call	Fold	sormin
PP	-1	-1	-1
PB	-21/13	3/13	-21/13
BP	2/13	-3/13	-3/13
BB	-6/13	1	-6/13
oszlopmax	2/13	1	

A játék **zérusösszegű:** a két játékos kifizetésének összege (minden stratégiapárra) 0.

Azt is látjuk, hogy **nincs nyeregpont**.

Példa – Betting game: dominancia

Vegyük észre, hogy

- P1-nek a BP mindig jobb kifizetést ad, mind a PP
- P1-nek BB mindig jobb, mint PB

Azt mondjuk, hogy BP **dominálja** PP-t és BB **dominálja** PB-t.

⇒ Ha van domináns stratégia, azt eltávolíthatjuk a kifizetési mátrixból (hiszen biztosan nem fogjuk használni):

	P2	
P1	Call	Fold
BP	2/13	-3/13
BB	-6/13	1

Határozzuk meg, mi lesz a legjobb kevert stratégia P1-nek.

Példa – Betting game: kevert stratégia

- P1 válassza x_1 valószínűséggel BP-t és x_2 valószínűséggel BB-t.
- A kevert stratégia: (x_1, x_2); $x_1 + x_2 = 1$
- Várható kifizetés, ha P2 Call-t játszik: $\frac{2}{13}x_1 - \frac{6}{13}x_2$
- Várható kifizetés, ha P2 Fold-ot játszik: $-\frac{3}{13}x_1 + x_2$
- Legrosszabb esetben:

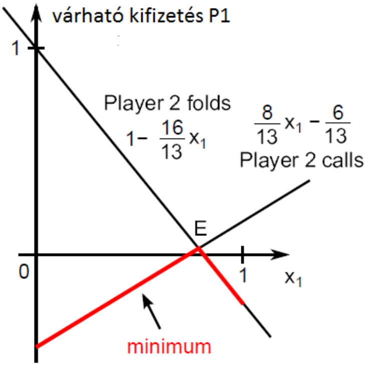
$$\min_{(x_1,x_2)} \{\frac{2}{13}x_1 - \frac{6}{13}x_2, -\frac{3}{13}x_1 + x_2\}$$

- Mivel $x_1 + x_2 = 1$, ezért egyszerűsítve:

$$\text{kimenetel} = \min_{x_1}\{\frac{8}{13}x_1 - \frac{6}{13}, -\frac{16}{13}x_1 + 1\}$$

Példa – Betting game: kevert stratégia

Ábrázolva a lehetséges kimeneteleket:



A **legjobb kevert stratégia** az E ponthoz tartozó $(x_1, x_2) = (19/24, 5/24)$ eloszlás.

Ez garantál várható értékben 1/39$ nyereséget.

Példa – Betting game: kevert stratégia

- Teljesen ugyanígy, P2 válassza y_1 valószínűséggel Call-t és y_2-vel Fold-ot.
- A legrosszabb esetben P2 várható kifizetése (vesztesége)

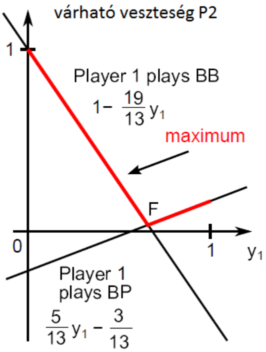
$$\max_{(y_1,y_2)} \{\frac{2}{13}y_1 - \frac{3}{13}y_2, -\frac{6}{13}y_1 + y_2\}$$

- mivel $y_1 + y_2 = 1$, ezért

$$\text{kimenetel} = \min_{y1}\{\frac{5}{13}y_1 - \frac{3}{13}, -\frac{19}{13}x_1 + 1\}$$

Példa – Betting game: kevert stratégia

Ábrázolva a lehetséges kimeneteleket:



A **legjobb kevert stratégia** az F ponthoz tartozó $(y_1, y_2) = (2/3, 1/3)$ eloszlás.

Ez garantál várható értékben 1/39$ veszteséget. A legjobb stratégia P2-nek, hogy 2/3 valószínűséggel Call-t, 1/3 valószínűséggel Fold-ot játszik.

Példa – Betting game: lineáris programozás

A (x_1, x_2), illetve (y_1, y_2) megkeresésének problémáját LP feladatként is megfogalmazhatjuk:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z & & & & & \\
\text{subject to} & \frac{2}{13}x_1 & - & \frac{6}{13}x_2 & \geq & z \\
 & -\frac{3}{13}x_1 & + & x_2 & \geq & z \\
 & x_1 & + & x_2 & = & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcl}
\min w & & & & & \\
\text{subject to} & \frac{2}{13}y_1 & - & \frac{3}{13}y_2 & \leq & w \\
 & -\frac{6}{13}y_1 & + & y_2 & \leq & w \\
 & y_1 & + & y_2 & = & 1 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Amit átírhatunk standard formára

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & & & & & z & & \\
\text{subject to} & -\frac{2}{13}x_1 & + & \frac{6}{13}x_2 & + & z & \leq & 0 \\
 & \frac{3}{13}x_1 & - & x_2 & + & z & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\
 & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & z \text{ unrestricted}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & & & & & w & & \\
\text{subject to} & -\frac{2}{13}y_1 & + & \frac{3}{13}y_2 & + & w & \geq & 0 \\
 & \frac{6}{13}y_1 & - & y_2 & + & w & \geq & 0 \\
 & y_1 & + & y_2 & & & = & 1 \\
 & & & & & y_1, y_2 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & w \text{ unrestricted}
\end{array}$$

Példa – Betting game: lineáris programozás

- A két LP egymás **duálisai**.
- Zérusösszegű játékoknál mindig ez a helyzet
- Erős dualitás $\Rightarrow$ a két LP célfüggvény értéke egyenlő: ez **a játék értéke**
- Az optimumok komplementárisan lazák $\Rightarrow$ a 2 megoldás egy **egyensúlypontot** ad: egyik játékos sem tud ennél jobbat ha eltér ettől a stratégiától: **Nash-egyensúly**

Tétel. (Luce és Raiffa 1989) *Bármely zérusösszegű játékhoz létezik egy LP feladat, amely megoldása a játék egyensúlya. Fordítva, minden LP feladathoz megadható egy zérusösszegű játék, amely egyensúlyi stratégiája az LP optimuma.*

A fogolydilemma

- A valóságban a legtöbb szituációban a játékosok nyeresége/vesztesége nem konstans (vagy nem 0). $\rightarrow$ lehetnek **loose-loose** és **win-win** helyzetek.
- például a kooperáló játékosok többet nyernek együtt, mint egymással versengve, külön-külön

Prototípus feladat a híres **fogolydilemma**: 2 bankrablót (Bonnie és Clyde) elfognak egy kisebb bűncselekmény miatt, de a bankrablást nem tudják bizonyítani. Külön cellában helyezik el őket, es a kerületi ügyész hallgatja ki őket.

1. Ha mindkettő vall, akkor 5-5 év börtönt kapnak
2. Ha csak az egyik vall, a másik tagad, akkor a beismerő szabadul a tagadó 20 év börtönt kap
3. Ha mindkettő tagad, akkor 1-1 év börtönt kapnak

A fogolydilemma

A kifizetési mátrix

	Clyde	
Bonnie	Vall	Tagad
Vall	(-5, -5)	(0, 20)
Tagad	(-20, 0)	(-1, -1)

Nem (konstans) zérusösszegű: ha vallanak, $-5-5=-10$ az összeg, míg ha tagadnak $-1-1=-2$.

Mi a legjobb, amit tehetnek?

Egy **egyensúlyi pont** ha **mindkettő vall**: ha bármelyik játékos változtat ezen, akkor 20 év börtönt kap.

Nash egyensúly (equlibrium): olyan stratégia pár, amely esetén egyik játékos sem tudja stratégiája változtatásával növelni a nyereségét, amennyiben a másik játékos nem változtat stratégiát

A fogolydilemma

De ha mindkettő meggondolja magát, es **tagadnak**: 1-1 évvel megússzák.

Pareto optimum: Olyan stratégia pár, amit nem tudunk úgy megváltoztatni, hogy valamelyik játékos kifizetése jobb legyen úgy, hogy a másik játékosé nem lesz rosszabb.

Ugyanakkor a fogolydilemmában a vall stratégia dominálja a tagad stratégiát $\Rightarrow$ az egyensúlyi stratégia (**NE**) egyértelmű **(vall, vall).**

Tétel. (John F. Nash) *Minden n-szereplős játéknak, melyben a stratégiák száma véges, van Nash-egyensúlya.*

- kevert stratégiákat is figyelembe vesszük
- az egyértelműség nem garantált

Iterált fogolydilemma

- A valóságban egy „játék” gyakran nem egyetlen interakció
- Múltbéli események alapján választhatunk stratégiát

Robert Axelrod „The evolution of cooperation” (1984): iterált fogolydilemma kísérlet

- Kutatók küldhettek be programot, mely iterált fogoly dilemmát játszik és körről-körre frissíti a stratégiáját
- A programok egymás ellen játszanak
- Mik a legjobb „evolúciós” stratégiák?
- Győztes: Anatol Rapoport tit-for-tat („jó tett helyébe jót várj”) stratégiája

A héja-galamb játék

Nem zérus összegű játékokat az **evolúció biológiában** is használnak modellezésre. A fogolydilemma mellett fontos példa a **héja-galamb játék**:

- Adott egy faj
- A faj egyedei kitérhetnek egymás elől vagy harcba szállhatnak egymással
- Mindkét viselkedésnek megvannak a maga előnyei és hátrányai
- Egy egyed vagy mindig kitér ("galamb" viselkedés), vagy mindig harcba száll ("héja" viselkedés)

Van-e evolúciósan stabil stratégia?

Ajánlott olvasmány: Sir John Maynard Smith: „Evolution and the Theory of Games" (1982)

A héja-galamb játék

- Legyen az egyedek közötti interakciók *fiktív kifizetési mátrixa* a következő

		A egyed	
		Galamb	Héja
B egyed	Galamb	(2, 2)	(-1, 5)
	Héja	(5, -1)	(-9,-9)

- Bármelyik viselkedés elterjedése esetén a kialakult normától eltérő egyed előnyhöz jut
- Milyennek kell legyen a két viselkedés eloszlása egy populációban, hogy egyetlen egyednek se érje meg„változtatni” ?
- Mikor válik a populáció evolúciósan stabillá ?

A héja-galamb játék

- Legyen a "héják" aránya a populációban x, a "galamboké" $(1-x)$
- A héják várható nyeresége $-9x + 5(1-x) = 5 - 14x$
- A galambok várható nyeresége $2(1-x) - x = 2 - 3x$
- Egyensúly esetén $5 - 14x = 2 - 3x$ azaz $x = \frac{3}{11}$
- A modellben...
  - egy erőforrás értéke 3
  - az idő értéke -1
  - a sérülés értéke -8

Használták még többek közt

- Nukleáris fegyverek leszerelésének modellezése
- Kubai rakétaválság játékelméleti modellje
- Stanley Kubrick Dr. Strangelove c. filmjében is megjelenik (kölcsönösen biztosított megsemmisítés elve)