Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

7. Előadás

Árazási interpretáció

Tekintsük újra az erőforrás allokációs problémát (vonat és katona gyártása, fa és festék kell)

$$
\begin{array}{rrll}
\text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 & & [\text{profit}] \\
& x_1 + x_2 & \leq 80 & [\text{fa}] \\
& 2x_1 + x_2 & \leq 100 & [\text{festék}] \\
& x_1, x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Legyen egy egység fa **piaci ára** y_1 (\$), egy egység festék ára y_2 (\$).

Mit tehet a gyártó?

- Eladhatja az erőforrásait (fa, festék) piaci áron
- Vehet további fát és festéket
- Gyárt a rendelkezésre álló erőforrásokból és eladja a játékokat

Mi a legjobb stratégia (feltéve, hogy mindent tényleg el tud adni)?

Árazási interpretáció

- Ha eladja a készletét $80y_1 + 100y_2$ profitra tesz szert
- Ha egy katona (piaci) **előállítási ára kisebb, mint az eladási ára**, azaz
$$y_1 + 2y_2 < 3(\$)$$
akkor a gyártó **korlátlan hasznot el tud érni**. **Miért?**

1 db katona gyártási költsége $y_1 + 2y_2 \Longrightarrow x_1$ db katona esetén: $(y_1 + 2y_2)x_1$ a költség

Mivel $y_1 + 2y_2 < 3$, legyen pl. $y_1 + 2y_2 = 2.9\$$ (költség), az eladási ár pedig $3\$$

$\Longrightarrow$ 1db katona esetén a profit $0.1\$ \Longrightarrow x_1$ db katona esetén: $0.1x_1\$$ (ami tetszőlegesen nagy lehet)

Árazási interpretáció

- Hasonlóan megy a dolog a vonatokra is: Ha egy vonat (piaci) **előállítási ára kisebb, mint az eladási ára**, azaz

$$y_1 + y_2 < 2(\$)$$

akkor a gyártó **korlátlan hasznot el tud érni**.

De hogyan működik a piac?

A piac (hosszú távon) **nem engedi, hogy a gyártó korlátlan haszonra tegyen szert**. Ellenkezőleg, úgy „állítja be” az árakat, hogy a gyártó a lehető legkisebb profitot realizálja.

Árazási interpretáció: a piac ár képzése

- A piac a következő optimalizálási feladatot „oldja meg” :

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcll} \text{Min} & 80y_1 & + & 100y_2 & & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & \geq 3 & & \text{[katonák]} \\ & y_1 & + & y_2 & \geq 2 & & \text{[vonatok]} \\ & & & y_1, y_2 & \geq 0 & & \end{array}}$$

Ezt hívjuk az eredeti feladat **duálisának**

Az eredeti feladatot (ez alapján) **primál** feladatnak hívjuk.

Primál-duál feladatpár

A primál feladat:

$$\begin{array}{lrcrl}
\text{Max} \quad z = & 3x_1 & + & 2x_2 & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 80 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq 100 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

A duál feladat:

$$\begin{array}{lrcrl}
\text{Min} \quad w = & 80y_1 & + & 100y_2 & \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \geq 3 \\
 & y_1 & + & y_2 & \geq 2 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq 0
\end{array}$$

Primál-duál feladatpár

A primál-duál feladatpár általánosan:

Primál feladat

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i = 1,2,\dots m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots n$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = z$$

Duál feladat

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \qquad j = 1,2,\dots n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots m$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

Primál-duál feladatpár

A primál-duál feladatpár általánosan, mátrix formában:

A primál feladat:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & c^T x & = & z \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

A duál feladat:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & b^T y & = & w \\ & A^T y & \geq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

A duál a (standard alakú) primából egyszerűen megkapható

- transzponáljuk A mátrixot
- „cseréljük fel” b és c vektorok szerepét
- cseréljük az egyenlőtlenségeket $\geq$-ra
- Max helyett Min feladatot írunk fel

Primál-duál feladatpár

Állítás. *A duál feladat duálisa az eredeti primál feladat.*

Bizonyítás. Átírva a duális feladatot maximalizálási standard alakra

Duál feladat

$$\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \le -c_j \qquad j = 1,2,\dots n$$

$$y_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\dots m$$

$$\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i = w$$

Duál duálisa

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \ge -b_i \qquad i = 1,2,\dots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots n$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} -(c_j) x_j = z$$

ami ekvivalens a primál feladattal.

∎

Gazdasági értelmezés

Tegyük fel, hogy az LP feladatunk egy korlátozott erőforrások mellett maximális nyereséget célzó gyártási folyamat modellje (ld. katona-vonat mintapélda):

- m – erőforrások száma
- n – gyártott termékek száma
- x_j – j termékből gyártott mennyiség
- a_{ij} – j termék egységnyi mennyiségének előállításához szükséges mennyiség a i erőforrásból
- b_i – az i erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség
- c_j – a j termék egységnyi előállításával (majd eladásával) keletkező haszon

Gazdasági értelmezés

A duál feladat megoldásában y_i^* a primál (eredeti) feladat i erőforrásához tartozó ún. **marginális ár**, vagy más néven **árnyék ár**.

- Az **erőforrás értéke** az LP megoldójának szemszögéből
- Az i erőforrás mennyiségének növelésével (bizonyos határokon belül) éppen y_i^*-gal nő a nyereség (azaz a célfüggvény értéke)
- Viszont ha „túl sok" van egy erőforrásból, az nem érhet sokat[1]
- Továbbá y_i^*-nál többet már nem érdemes fizetni az i erőforrásért, míg kisebbet igen

[1] ld. később komplementáris lazaság rész

Gyenge dualitás tétel

Tétel. (Gyenge dualitás) *Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$ lehetséges megoldása a primál feladatnak és $y = (y_1, \dots, y_m)$ lehetséges megoldása a duál feladatnak, akkor $c^T x \leq b^T y$,* azaz

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Vagyis a duális feladat bármely lehetséges megoldása felső korlátot ad a primál bármely lehetséges megoldására (azaz az optimális megoldásra is).

Bizonyítás. Egyszerű helyettesítés becsléssel:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

vagy mátrixosan:

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = (y^T A) x = y^T (Ax) \leq y^T b = b^T y$$

$\blacksquare$

Gyenge dualitás

- Látjuk, hogy a **korlátosság és a megoldhatóság nem függetlenek** egymástól
- Ha a primál nem korlátos, akkor a duálnak nincs lehetséges megoldása
- Hasonlóan, ha a duál nem korlátos, akkor a primálnak nincs lehetséges megoldása
- Lehetséges, hogy egyiknek sincs lehetséges megoldása
- De ha mindkettőnek van, akkor mindkettő korlátos
- Továbbá a primál és a duál feladat egyidejű optimalitása ellenőrizhető

Primál-duál esetek

		Primál		
		Nincs lehetséges megoldás	Van lehetséges megoldás	Nem korlátos
Duál	Nincs lehetséges megoldás	✓	X	✓
	Van lehetséges megoldás	X	✓	X
	Nem korlátos	✓	X	X

Erős dualitás tétel

Tétel. (Erős dualitás) *Ha* $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ *egy optimális megoldása a primál feladatnak és* $y^* = (y_1, \ldots, y_m)$ *optimális megoldása a duál feladatnak, akkor* $c^T x^* = b^T y^*$*, azaz*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \ \textit{és} \ x^{*T}(A^T y^* - c) = 0.$$

Egyszerűen: ha valamely i*-edik* **feltétel egyenlet nem éles** *(azaz nincs egyenlőség) a primál optimumban, akkor* **a kapcsolódó duál** y_i **változó** 0 **kell legyen**. *Visszafelé, ha egy primál* x_i *változó szigorúan pozitív, akkor a kapcsolódó duális feltétel egyenlet éles (=) kell legyen.* Ezt **komplementáris lazaságnak** hívjuk.

Erős dualitás tétel

A második rész **bizonyítása**:

$$0 \leq y^T(b - Ax) = y^T b - y^T Ax = b^T y - (A^T y)^T x \leq b^T y - c^T x = 0,$$

illetve

$$0 \leq x^T(A^T y - c) = (y^T A - c^T)x = y^T(Ax) - c^T x \leq y^T b - c^T x = b^T y - c^T x = 0.$$

$\blacksquare$

Erős dualitás tétel

Az **első rész bizonyítás vázlata** példán keresztül:

Példa. Adott a következő primál feladat:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \\
\hline
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & z
\end{array}$$

A feladat megoldásának utolsó szótára

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_5 & - & x_7 \\
x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & + & 11x_7 \\
x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & - & 3x_7 \\
\hline
z & = & 29 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 11x_5 & - & 6x_7
\end{array}$$

A duális feladat:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
 & y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\
 & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\
 & -y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & \geq & 5 \\
 & 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \\
\hline
\min & y_1 & + & 55y_2 & + & 3y_3 & = & w
\end{array}$$

- A duális egy optimális megoldása: $y^* = (11, 0, 6)$
- A primál feladat utolsó szótárában a mesterséges változók célfüggvény együtthatói: $c_5 = -11, c_6 = 0, c_7 = -6$ (*Mit veszünk észre?*)

Erős dualitás tétel

- A gyenge dualitási tétel miatt elég, ha találunk egy olyan (y_1^*, y_1^*, y_3^*) duál lehetséges megoldást, amelyre $\sum_{j=1}^{4} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{3} b_i y_i^*$
- Az eredeti feladat utolsó szótárából kiolvasható a duális feladat megoldása. *A példában*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_5 & & - & x_7 \\
x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & & + & 11x_7 \\
x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & & - & 3x_7 \\
\hline
z & = & 29 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & & -11x_5 & +0x_6 & & -6x_7
\end{array}
$$

A duális változók az eredeti feladat mesterséges változóihoz rendelhetők:

$$x_5 \longleftrightarrow y_1, x_6 \longleftrightarrow y_2, x_7 \longleftrightarrow y_3 \Rightarrow y_1 = 11, y_2 = 0, y_3 = 6$$

- Az általános esetben az utolsó szótárhoz érve kell számolással az optimumok egyenlőségét.

■

Dualitási tételből adódó lehetőségek

A **dualitás** fogalma rendkívül hasznos, mert **rugalmas hozzáállást teszt lehetővé** az LP feladatok megoldásánál.

1. A szimplex algoritmus iterációszáma közelítőleg a sorok számával arányos $\longrightarrow$ sok feltétel, kevés változó esetén érdemes áttérni a duálisra
2. Ha az első esetben szükség van 2 fázisra, míg a duálisnál nincs, érdemes áttérni
3. Ha menet közben kell új feltételeket hozzávenni az LP-hez $\longrightarrow$ a duál feladattal dolgozva az új feltétel csak egy új, nembázis változóként jelenik meg $\rightarrow$ hozzávesszük az aktuális szótárhoz, és folytatjuk a feladatmegoldást

Általános LP feladat

- Mi a helyzet akkor, ha az LP feladatunk **tartalmaz egyenlőséget** vagy **nem korlátozott változót** (ami felvehet negatív értéket is)?
- A jó hír, hogy ez kezelhető, ugyanis
  - az **egyenlőség feltétel** egy **nem korlátozott (duál) változóhoz** tartozik
  - egy nem korlátozott változó esetén egy egyenlőség feltétel kell legyen (a duálban)

Miért? Például tegyük fel, hogy $x_1 + x_2 = 80$ [fa]

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5x_1 + 2x_2 = (-1)\underbrace{(x_1 + x_2)}_{=80} + 3\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{\leq 100} \leq$$

$$\leq -80 + 3 \times 100 = 220\$$$

Azaz y_1 nem korlátozott (itt -1).

Általános LP feladat

- Visszafelé, tfh. x_1-nek nincs előjelre vonatkozó korlátozása
- Ekkor például
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4x_1 + 2x_2$$
nem igaz (pl. ha $x_1 = -1$; $x_2 \geq 0$ továbbra is áll)
- általánosan $3x_1 \leq (y_1 + 2y_2)x_1$ $[*]$, vagyis $y_1 + 2y_2$ értéket beállítva a maximális 3 értékre negatív x_1 esetén is igaz marad a $[*]$ felső becslés.
- Hasonlóan igaz, hogy
  - egy primál „$\geq$" feltétel egy nem-pozitív duál változóhoz tartozik
  - nem-pozitív primál változóhoz egy „$\geq$" duál feltétel tartozik

Általános LP feladat

Összegezve:

Primál (Max)	**Duál** (Min)
i-edik feltétel $\leq$	$y_i \geq 0$
i-edik feltétel $\geq$	$y_i \leq 0$
i-edik feltétel $=$	y_i nem korlátozott
$x_i \leq 0$	i-edik feltétel $\leq$
$x_i \geq 0$	i-edik feltétel $\geq$
x_i nem korlátozott	i-edik feltétel $=$

Általános LP feladat

Példa.
Primál

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\text{Max} \quad z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\
\hline
& x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_3 & \leq 80 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 100 \\
& x_1 & & & + & x_3 & \geq 40 \\
& & & & & x_1 & \text{nem korlátozott} \\
& & & & & x_2 & \leq 0 \\
& & & & & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

Duál

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\text{Min} \quad w = & 80y_1 & + & 100y_2 & + & 40y_3 & \\
\hline
& y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = 3 \\
& y_1 & + & y_2 & & & \leq 2 \\
& 0.5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq 1 \\
& & & & & y_1 & \geq 0 \\
& & & & & y_2 & \text{nem korlátozott} \\
& & & & & y_3 & \leq 0
\end{array}$$

LP feladatok megoldhatósága

Inkonzisztencia: egyenletek és egyenlőtlenségek egy m elemű

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i \in I$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in E$$

rendszere inkonzisztens, ha léteznek olyan $y_1, y_2, \ldots, y_m$ valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i < 0$$

$$y_i \geq 0 \qquad i \in I$$

LP feladatok megoldhatósága

Tucker lehetetlenségi tétele egyenlet és egyenlőtlenség rendszerekre.
Egyenletek és egyenlőtlenségek egy rendszere **akkor és csak akkor megoldhatatlan, ha inkonzisztens**

- Nem bizonyítjuk
- A tétel bizonyítható a lineáris programozás alaptételének és az erős dualitás tételének általános LP feladatokra vonatkozó formájára támaszkodva

Komplementáris lazaság

Ha a primál-duál feladatpár

$$\begin{array}{rrcl} \text{Max} & c^T x & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Min} & b^T y & & \\ & A^T y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

akkor azt mondjuk, hogy $x = (x_1, \ldots x_n)$ és $y_1 = (y_1, \ldots, y_m)$ **komplementárisak**, ha

$$y^T(b - Ax) = 0 \text{ és } x^T(A^T y - c) = 0.$$

Vagyis

- ha $y_i > 0$, akkor x-et az i-edik egyenletbe helyettesítve $=$-et kapunk („a feltétel **éles**")
- ha $x_i > 0$, akkor y-t a duális feladat i-edik egyenletébe helyettesítve az $=$ teljesül

Komplementáris lazaság

A **primál** feladat:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \text{Max } z = c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & \\ a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_6 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_6 & \leq & b_2 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A **duális**:

$$\begin{array}{rcrcl} \text{Min } w = b_1y_1 & + & b_2y_2 & & \\ a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & \geq & c_1 \\ a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & \geq & c_2 \\ a_{13}y_1 & + & a_{23}y_2 & \geq & c_3 \\ y_1 & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Komplementáris lazaság:

$$y_i(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3) = 0 \ (i = 1,2)$$

$$x_i(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 - c_j) = 0 \ (j = 1,2,3)$$

Komplementáris lazaság tétel

Az erős dualitás tételnél több is tudunk mondani:

Tétel. (Komplementáris lazaság) *Tegyük fel, hogy x a primál feladat optimális megoldása. Ekkor*

- *Ha y a* **duál optimális** *megoldása, akkor x és y* **komplementáris**
- *Ha y* **lehetséges** *megoldása a duálisnak és* **komplementáris** *x-szel, akkor y* **optimális** *megoldása a duálnak*
- **Létezik** *olyan* **lehetséges** *y megoldása a duálnak, hogy x és y* **komplementáris***.*

Komplementáris lazaság

Tekintsük a következő feladatot:

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrl}
\text{Max} & z = & 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \\
\hline
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq 5 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq 8 \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\
 & & & & & & & & x_1 & \text{nem korlátos} \\
 & & & & & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy vajon a következők egyike optimális megoldás-e:

- $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$
- $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$

Gondoljuk át, miért pont ezeket választottuk?

Komplementáris lazaság: példa

Annak ellenőrzéséhez, hogy a javasolt megoldások valamelyik optimális-e, kelleni fog a duális feladat:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\text{Max} & z = & 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \\
\hline
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq 5 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq 8 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\
& & & & & & & & x_1 & \text{nem korlátos} \\
& & & & & & x_2, & & x_3, \; x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Duál:

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\text{Min} & w = & 5y_1 & + & 8y_2 & + & y_3 & \\
\hline
& & y_1 & + & 3y_2 & & & = 6 \\
& & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq 1 \\
& & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq -1 \\
& & y_1 & & & + & y_3 & \geq -1 \\
& & & & & & y_1, \; y_2 & \geq 0 \\
& & & & & & y_3 & \text{nem korlátos}
\end{array}
$$

Komplementáris lazaság: példa

Az **első javaslat**: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$; tegyük fel, hogy ez optimális

- Ekkor létezik $y = (y_1, y_2, y_3)$ lehetséges megoldása a duálisnak ami komplementáris x-szel
  - Az első primál feltétel: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 2 + 0 + 0 = 4 < 5$ **nem éles** $\rightarrow y_1 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
  - A második primál feltétel: $3x_1 + x_2 - x_3 = 6 + 1 - 0 = 7 < 8$ **nem éles** $\rightarrow y_2 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
  - Ezek alapján az első duál feltétel: $y_1 + 3y_2 = 0 + 0 = 0 \neq 6 \rightarrow$ azaz (y_1, y_2, y_3) **nem lehetséges** megoldása a duálnak, de feltettük, hogy az $\Rightarrow x$ **nem optimális** megoldása a primálnak

Komplementáris lazaság: példa

Az **második javaslat**: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$; tegyük fel, hogy ez optimális

- Ekkor létezik $y = (y_1, y_2, y_3)$ lehetséges megoldása a duálisnak ami komplementáris x-szel
  - Az első primál feltétel: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 0 + 1 + 0 = 4 < 5$ **nem éles** $\rightarrow y_1 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
  - A második primál feltétel: $3x_1 + x_2 - x_3 = 9 + 0 - 1 = 8$ **éles**
  - A harmadik primál feltétel: $x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 1 + 0 = 1$ **éles**
  - Előjel feltételek is teljesülnek $(x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0) \Rightarrow x$ **lehetséges** megoldása a primálnak

Komplemetáris lazaság : példa

- Nézzünk meg a x értékeit a duálra vonatkozóan
  - x_1 nem korlátos $\rightarrow$ első duál feltétel $y_1 + 3y_2 = 6$ **éles** (szükségszerűen)
  - $x_3 > 0 \rightarrow$ a harmadik duál feltételnek **élesnek** kell legyen : $y_1 - y_2 + y_3 = -1$
- Összegezve az eddigieket :

$$
\begin{array}{ccccccl}
y_1 & & & & & = & 0 \\
y_1 & + & 3y_2 & & & = & 6 \\
y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & -1
\end{array}
$$

  - Ennek az egyértelmű megoldása : $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 1$. A konstrukcióból adódóan ez komplementáris x-szel.
- Az utolsó lépés annak ellenőrzése, hogy y lehetséges megoldása-e a duálnak. Igen $\Rightarrow x$ **optimális** megoldása a primálnak.

Komplementáris lazaság: összegzés

Összefoglalva:

1. Adott x (javasolt primál megoldás), ellenőrizzük, hogy lehetséges-e
2. Nézzük meg mely y_i változóknak kell 0-nak lennie
3. Nézzük meg mely duál feltételeknek kell élesnek lennie $\rightarrow$ egyenletrendszert kapunk
4. Oldjuk meg ezt a rendszert
5. Ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás lehetséges megoldása-e a duálnak

Ha minden lépés sikeres volt, akkor az adott x optimális, különben nem.

Kérdés: mi van akkor, ha x lehetséges, de nem bázismegoldás?