Operációkutatás I.

2018/19-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

5. Előadás

Vektorok

- **Skalár** = egy szám; lehet valós ($\pi = 3.14\dots$), racionális ($3/4$), egész (5, -8), stb.
- **Vektor** = számok egy sorozata, pl. $(3, 1, 0, 2)$, gyakran írjuk

  $x = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **sorvektor**, vagy $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **oszlopvektor**

- $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ c **skalárszorosa**:

$$cx = \begin{bmatrix} cx_1 & cx_2 & \cdots & cx_n \end{bmatrix}$$

- 2 (azonos méretű) vektor, $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ és $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ **összege**:

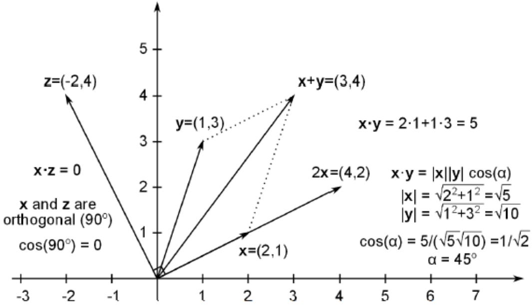
$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Vektorok

- 2 (azonos méretű) vektor, $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ és $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ **skalárszorzata**:

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 \cdots + x_ny_n$$

- x és y **ortogonális**, ha $xy = 0$



Mátrixok

- **Mátrix** = számtáblázat; pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $m \times n$ mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{A i-edik sora}} \qquad \left.\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}\right\} \text{A j-edik oszlopa}$$

- A mátrix **skalárszorosa**:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Mátrixok

- 2 (azonos méretű) mátrix **összeadása**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Egy $n \times m$-es és egy $m \times k$ mátrix **szorzata**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 10 & 19 \\ 13 & 11 & 18 & 31 \\ 15 & 2 & 14 & 19 \\ 14 & 2 & 11 & 24 \end{bmatrix} \qquad (2,3,0,1) \cdot (1,0,2,0) = 2$$

  - Fontos: mátrixokra általában $AB \neq BA$
  - Ezt kivéve a mátrix összeadás és szorzás ugyanúgy viselkedik, mint a (valós) számoknál (zéruselem, egységelem, asszociativitás, disztributivitás)
  - Egy n hosszú (oszlop)vektort egy $n \times 1$-es mátrixnak tekintjük

Mátrixok

- Mátrix és vektor szorzata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Mátrix transzponáltja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Megj: $(A^T)^T = A$ és $(AB)^T = B^T A^T$

Lineáris egyenletrendszerek

- Egy lineáris egyenletrendszer

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- vagy mátrixos formában írva $Ax = b$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek

- Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- szorozzuk meg mindkét oldalt (balról!) a következő mátrixszal

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

- ez nem változat az egyenletrendszer megoldásán (determináns $\neq 0$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek

- Visszaírva egyenletrendszer formára

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 6x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & + & \frac{13}{3}x_4 & = & -\frac{10}{3} \\ & & x_3 & + & \frac{7}{3}x_4 & = & -\frac{4}{3} \end{array} \quad \to\to \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 5 & + & 6x_4 \\ x_2 & = & -\frac{10}{3} & - & \frac{13}{3}x_4 \\ x_3 & = & -\frac{4}{3} & - & \frac{7}{3}x_4 \\ \hline \end{array}$$

- A jobboldal **szótár** formában van: x_4-nek értéket adva (pl. $x_4 = 0$) leolvashatunk egy megoldást

Kérdés: Hogyan választottuk ki a mátrixot, amivel szoroztunk?
$\Longrightarrow$ A mátrix **inverzét** használtuk (ld. Gauss elimináció)!

- A mátrix inverze A^{-1} mátrix, amelyre $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (I az egységmátrix)

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Vegyük a **Standard alakú LP** feladatot:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

A nemnegatív mesterséges változók bevezetésével:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n+m$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Ez **mátrix alakban** a következőképp írható le:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = z$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

A mátrixok és vektorok a leírásban:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

A feladat **mátrix alakban**

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ \hline \max c^T x & \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy egy szótárat egyértelműen meghatároznak a bázisváltozói.

- Legyen $\mathcal{B}$ a bázisváltozók, $\mathcal{N}$ a nembázis változók **indexhalmaza**

Bontsuk szét a mátrixokat és vektorokat a bázisváltozókhoz és a nem bázisváltozókhoz tartozó részek szerint

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Legyen B az **bázisváltozókhoz tartozó** A-beli oszlopvektorokból álló mátrix

Legyen N a **nembázis változókhoz tartozó** A-beli oszlopvektorokból álló mátrix

Bontsuk szét a vektorokat is: $c = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{B}} \\ c_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Így a **mátrix alak a szétbontott mátrixokkal**

$$Ax = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}}$$

$$c^T x = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{B}} & c_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}}$$

Azaz az optimalizálási probléma a következő:

$$\begin{aligned} Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\overline{\max c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}}}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Feltéve, hogy $\boldsymbol{B}$ **invertálható**, a következő levezetés igaz:

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} &= b \\
B^{-1}(Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}}) &= B^{-1}b \\
B^{-1}Bx_{\mathcal{B}} + B^{-1}Nx_{\mathcal{N}} &= B^{-1}b \\
x_{\mathcal{B}} + B^{-1}Nx_{\mathcal{N}} &= B^{-1}b \\
x_{\mathcal{B}} &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathcal{N}}
\end{aligned}$$

A célfüggvényben helyettesítsük $x_{\mathcal{B}}$-t a kapott kifejezéssel:

$$\begin{aligned}
z = c^T x &= c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} \\
&= c_{\mathcal{B}}^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathcal{N}}) + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} \\
&= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}b + (c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}N)x_{\mathcal{N}}
\end{aligned}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Összerakva az eddigieket:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathcal{N}}$$

$$\overline{\quad z = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}b + (c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}N)x_{\mathcal{N}} \quad}$$

A **bázismegoldás**, mikor $x_{\mathcal{N}} = 0$:

$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, és a célfüggvény érték: $z = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}b$.

A **megoldás optimális**, ha $c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}N \leq 0$, azaz a nembázis változók együtthatói nempozitívak.

Példa.

Tekintsük újra a minta LP feladatunkat (katonák és vonatok gyártása)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2 & \\ x_1 \quad + x_2 &\leq 80 \\ 2x_1 \quad + x_2 &\leq 100 \\ x_1 \qquad\quad &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A feladat „mátrixos” formában $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Példa.

A szokásos feladatunk mesterséges változókkal bővített alakja:

$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 & & & & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 80 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 100 \\ & x_1 & & & & +x_5 & = 40 \\ & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Ekkor

$$Ax = (B \quad N)\begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} = b$$

A szimplex tábla

A következő táblázatos formába tudjuk rendezni a feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	1	1	0	0	80
x_4	2	1	0	1	0	100
x_5	1	0	0	0	1	40
	3	2	0	0	0	$0+z$

Ezt **szimplex táblának** hívjuk. A bázismegoldás a „szokásos"

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0, 80, 100, 40).$$

Hajtsunk végre egy pivot lépést a klasszikus szabály szerint. Ehhez csak x_1 és x_2 z-beli együtthatóit (3, illetve 2) kell vizsgálni $\Longrightarrow$ x_1 a **belépő változó**.

A szimplex tábla

Mi legyen a **kilépő változó**? $\Longrightarrow$ hányadosteszt, pozitív helyeken! A korábban tekintett negatív együtthatók a rendezés miatt most pozitívak!

Bázisváltozó	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	**Hányadosteszt**
x_3	1	1	1	0	0	80	$80/1 = 80$
x_4	2	1	0	1	0	100	$100/2 = 50$
x_5	1	0	0	0	1	40	$40/1 = 40 \leftarrow \min$
	3	2	0	0	0	0	$0{+}z$

$\Longrightarrow$ x_1 belép a bázisba, x_5 kilép a bázisból. A megfelelő (kék) elemet **generálóelemnek** nevezzük ($\text{gen} = 1$)

Mi lesz a következő táblázat?

Jelölje R_1, R_2, R_3, R_z a táblázat sorait fentről lefelé.

A szimplex tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
R_1	x_3	1	1	1	0	0	80
R_2	x_4	2	1	0	1	0	100
R_3	x_5	1	0	0	0	1	40
R_z		3	2	0	0	0	$0+z$

A pivot lépés utáni szimplex tábla kiszámolása:

Számolás		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$(-1/\text{gen}) \times R_3 + R_1$	x_3	0	**1**	1	0	**-1**	**40**
$(-2/\text{gen}) \times R_3 + R_2$	x_4	0	**1**	0	1	**-2**	**20**
$(1/\text{gen}) \times R_3$	x_1	1	**0**	0	0	**1**	**40**
$(-3/\text{gen}) \times R_3 + R_z$		0	**2**	0	0	**-3**	**-120** $+ z$

A szimplex tábla

- Az eljárás analóg módon tovább folytatható (és ugyanúgy történik minden, mintha a szótárral dolgoznánk)
- Figyeljük meg, hogy csak a táblázat elemei (számok és sor/oszlop indexek) számítanak $\Longrightarrow$ egyszerű implementációs lehetőség
- Különböző pivot szabályok, leállási feltételek ugyanúgy működnek, mint a szótár esetén
- Érdeklődőknek: ld. Imreh Balázs könyve

Módosított szimplex algoritmus

- A már ismert szimplex algoritmus más megvilágításban
- A működése ugyanaz, csak végrehajtott számítások különböznek
- Minden iterációban az új szótárat a kiindulási standard feladat együtthatóiból írjuk fel
  - Minden szótárat egyértelműen meghatároz a bázisa
  - Csak a belépő- és a kilépőváltozó információjára van szükség
  - Csökken a kerekítési hibák hatása a végeredményre
  - Ritka mátrixokra a gyakorlatban gyorsabbnak bizonyul
- *Jelölés* - N_{x_j} : az N mátrix x_j változóhoz tartozó oszlopvektora

Módosított szimplex algoritmus egy példán keresztül

Példa.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\ \hline \max\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & z \end{array}$$

Áttérés egyenletekre

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\ \hline 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & = & z \end{array}$$

Módosított szimplex algoritmus

- $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1,2\}$
- Mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & & 1 & \\ 0 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Módosított szimplex algoritmus

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathcal{N}}$$

$$z = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}b + (c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}N)x_{\mathcal{N}}$$

- **1. iteráció**
  - Legyen $y' = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$
    ($\sim$ oldjuk meg $y'B = c_{\mathcal{B}}$ egyenletrendszert $\Rightarrow z = y'b + (c_{\mathcal{N}}^T - y'N)$)

$$y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $c_{\mathcal{N}}^T - y'N$ minden eleme ≤ 0? (ha igen STOP $\Rightarrow$ OPT)

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{N} = \{1{,}2\}$$

  - Belépőváltozó: x_1 (klasszikus szabály; most Bland szerint is)

Módosított szimplex algoritmus

- Mi legyen a kilépő változó? $\Rightarrow$ hányadosteszt, legszűkebb korlát!
  - $\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N_{x_1})_i}$ $(i = 1,2,\dots)$ hányadosokat kell vizsgálni
  - $\Leftrightarrow$ Létezik-e olyan $t \in \mathbb{R}_0^+$ érték, amelyre

$$\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} - t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow t = 1,\ \mathcal{B} = \{3,4,5\}$$

  - $\Rightarrow$ Kilépőváltozó: x_3

$$(B^{-1}b)_i \leftarrow (B^{-1}b_i - tN_{x_1})_i$$

$$\Rightarrow B^{-1}b \leftarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$x_1 \leftarrow t = 1$

$\mathcal{B} = \{3,4,5\}\backslash\{3\} \cup \{1\} = \{1,4,5\}$ (bázisváltozók)

$x^* = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ (aktuális bázismegoldás)

Módosított szimplex algoritmus

- $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{2,3\}$

- Mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & & 1 & \\ 0 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

HF. folytassuk a 2. iterációval!

Módosított szimplex algoritmus

- Módosított szimplex algoritmus lépései

1. Oldjuk meg az $y'B = c_{\mathcal{B}}^T$ egyenletrendszert
2. $c_{\mathcal{N}}^T - y'N$ minden eleme ≤ 0?
   - Igen $\Rightarrow$ az aktuális bázismegoldás optimális, az algoritmus megáll
   - Nem $\Rightarrow$ folytatás a 2. ponttal
3. Válasszuk a nembázis változók közül belépőváltozónak valamely x_i-t, amelyre a $c_{\mathcal{N}}^T - y'N$ vektor i-edik komponense > 0 (ld. Pivot szabályok)
4. Oldjuk meg a $By'' = N_{x_i}$ egyenletrendszert ($\sim$ hányadosteszt)
5. Létezik-e olyan $t \in \mathbb{R}_0^+$ érték, amelyre $B^{-1}b - ty'' < 0$?
   - Igen $\Rightarrow$ folytatás a 6. ponttal
   - Nem $\Rightarrow$ az LP feladat nem korlátos, az algoritmus megáll

Módosított szimplex algoritmus

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb t értéket, amelyre még $B^{-1}b - ty'' \geq 0$
2. Válasszuk a bázisváltozók közül kilépőváltozónak valamely x_j-t, amelynek egyenletéhez tartozó $B^{-1}b - ty''$ komponens 0
3. Módosítsuk a bázismegoldást: $x_j = t$ és $B^{-1}b = B^{-1}b - ty''$
4. Módosítsuk a bázist: $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus \{i\} \cup \{j\}$, folytatás az 1. ponttal

- Az algoritmus minden iterációban csak a célfüggvény együtthatókat és a belépőváltozó együtthatóit számítja ki
- Egy szimplex iteráció kiszámítását két **Gauss eliminációra** vezeti vissza

Motiváció

- A cél annak meghatározása, hogy a bemeneti adatok változásai milyen hatással vannak az optimumra (vagy fízibilitásra)
- Miért érdekes ez? Bizonyos értékek (pl. árak, munkaidő, anyagköltség) csak becslések: szeretnénk tudni, hogy „mennyit hibázhatunk", **mennyire érzékeny a megoldás** ezen értékek változásaira

Hogyan tudjuk megváltoztatni a feladatot?

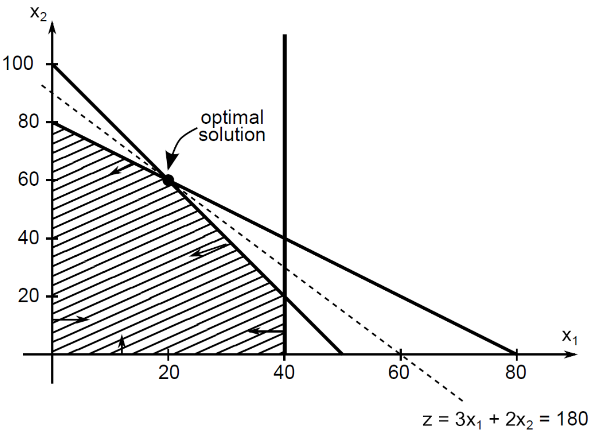
- megváltozik a célfüggvény (az együtthatók)
- megváltozik egy feltétel jobb oldala
- új változó lép be
- új feltétel lép be

Az első kettőt vizsgáljuk részletesebben.

Érzékenységvizsgálat – a szokásos példa

A szokásos példánk és grafikus megoldása:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Max} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
 & x_1 & & & \leq & 40 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

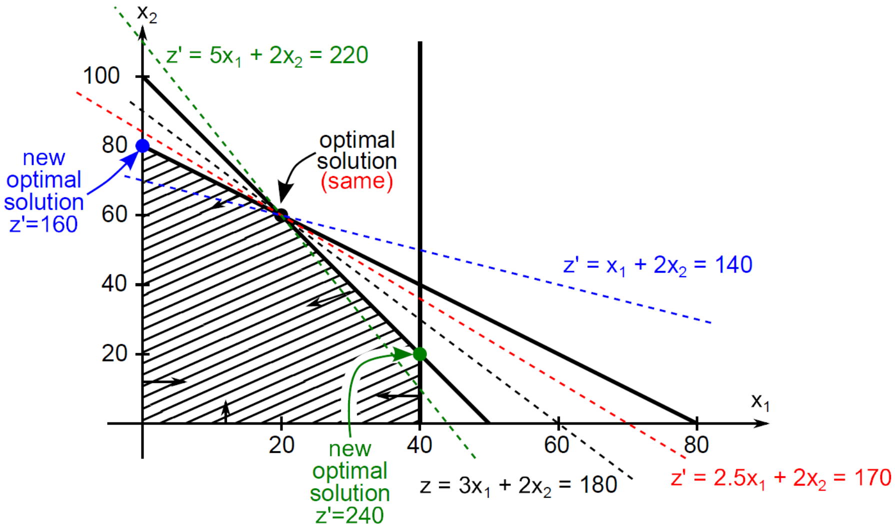


Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

- Az optimális megoldás $x_1 = 20, x_2 = 60$.
- Változtassuk meg $c_1 = 3$ célfüggvény együtthatót 2.5-re (azaz egy katona ára 2.5$-ra csökken) $\to z' = 2.5x_1 + 2x_2 \to$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ megoldás még mindig optimális, $z' = 170$.
- Most legyen $c_1 = 1 \to z' = x_1 + 2x_2 \to$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ nem optimális ($z' = 140$), például az $x_1 = 0, x_2 = 80$ jobb ($z' = 160$)
- Mi van ha $c_1 = 5$? $\to z' = 5x_1 + 2x_2 \to$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ nem optimális ($z' = 220$), például az $x_1 = 40, x_2 = 20$ jobb ($z' = 240$)

Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

Grafikusan illusztrálva:



Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

$$\begin{array}{rcrcl}
\text{Max} & 3x_1 & + & 2x_2 & \\
& x_1 & + & x_2 & \le 80 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \le 100 \\
& x_1 & & & \le 40 \\
& & & x_1, x_2 & \ge 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\
x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\
\hline
z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\
x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\
x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\
\hline
z & = & 180 & - & x_3 & - & x_4
\end{array}$$

Bármely szótár esetén a bázisváltozók segítségével mindig ki tudjuk fejezni a célfüggvényt:

$$z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20 + x_3 - x_4) + 2(60 - 2x_3 + x_4) = 180 - x_3 - x_4$$

Ezzel lehetőségünk van a módosított problémához felírni a szótárt:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\multicolumn{7}{c}{c_1 = 2.5} \\
x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\
x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\
x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\
\hline
z' & = & \multicolumn{5}{c}{2.5x_1 + 2x_2} \\
& = & 50 & + & 2.5x_3 & - & 2.5x_4 \\
& + & 120 & - & 4x_3 & + & 2x_4 \\
z' & = & 170 & - & 1.5x_3 & - & 0.5x_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcr}
\multicolumn{7}{c}{c_1 = 1} \\
x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\
x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\
x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\
\hline
z' & = & \multicolumn{5}{c}{x_1 + 2x_2} \\
& = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\
& + & 120 & - & 4x_3 & + & 2x_4 \\
z' & = & 140 & - & 3x_3 & + & x_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcr}
\multicolumn{7}{c}{c_1 = 5} \\
x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\
x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\
x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\
\hline
z' & = & \multicolumn{5}{c}{5x_1 + 2x_2} \\
& = & 100 & + & 5x_3 & - & 5x_4 \\
& + & 120 & - & 4x_3 & + & 2x_4 \\
z' & = & 220 & + & x_3 & - & 3x_4
\end{array}$$

Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

c_1 mely értékeire (milyen tartományon) marad az eredeti feladat optimális megoldása továbbra is optimum?

$$z' = c_1x_1 + 2x_2 = c_1(20 + x_3 - x_4) + 2(60 - 2x_3 + x_4)$$

$$= (20c_1 + 120) + (c_1 - 4)x_3 + (2 - c_1)x_4$$

Optimális, ha minden együttható nempozitív, azaz kell

$$c_1 - 4 \leq 0 \text{ és } 2 - c_1 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq c_1 \leq 4$$

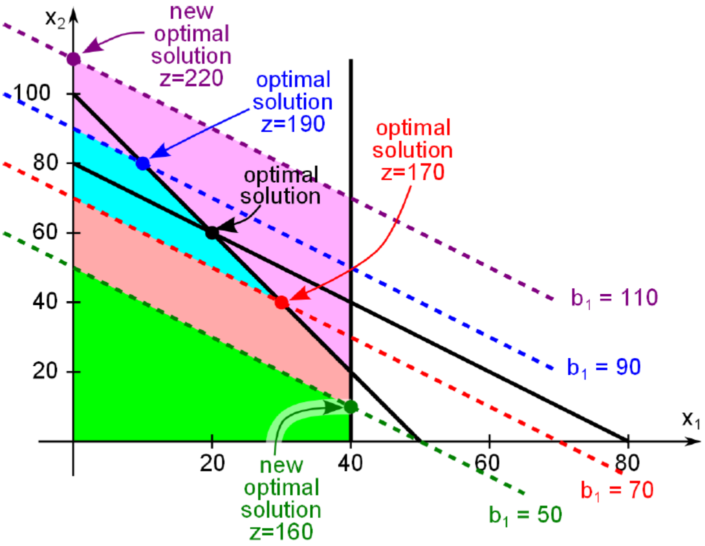
Feladat. *Nézzük meg hasonlóan c_2 együtthatóra (egy vonat ára).*

Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

- Az optimális megoldásban a bázis $\{x_1, x_2, x_5\}$.
- Változtassuk meg $b_1 = 80$-at az első feltételben 70-re (kevesebb a fa) $\rightarrow x_1 + x_2 \leq 70 \rightarrow$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ **nem optimális**; az új optimum $x_1 = 30, x_2 = 40$, a **bázis ugyanaz** $\{x_1, x_2, x_5\}$
- Legyen most $b_1 = 50 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 50 \rightarrow$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ **nem lehetséges**; az új optimum $x_1 = 10, x_2 = 40$, **új bázis** $\{x_1, x_2, x_4\}$
- Ha $b_1 = 90 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 90 \rightarrow$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ **lehetséges de nem optimális**; az új optimum $x_1 = 10, x_2 = 80$, **bázis ugyanaz**
- Ha $b_1 = 110 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 110 \rightarrow$ az $x_1 = 20, x_2 = 60$ **lehetséges de nem optimális**; az új optimum $x_1 = 10, x_2 = 80$, **új bázis** $\{x_2, x_4, x_5\}$

Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

Grafikusan:



Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

b_1 mely értékeire (milyen tartományon) marad az eredeti feladat optimális megoldása továbbra is optimum?

Írjunk $b_1 = 80$ helyett $80 + \Delta_1$-et, ahol Δ_1 lehet pozitív és negatív is. Mi lesz a szótárral?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & (80+\Delta_1) & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} (x_3-\Delta_1) & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_3' & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

ahol $x_3' = x_3 - \Delta_1$. **Ugyanaz a szótár**, csak most x_3 helyett x_3' van $\rightarrow$ ugyanazok a pivot lépések, ugyanazt a végső szótárt kell kapjuk (csak x_3'-vel)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & x_3' & - & x_4 \\ x_2 & = & 60 & - & 2x_3' & + & x_4 \\ x_5 & = & 20 & - & x_3' & + & x_4 \\ \hline z & = & 180 & - & x_3' & - & x_4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & (x_3-\Delta_1) & - & x_4 \\ x_2 & = & 60 & - & 2(x_3-\Delta_1) & + & x_4 \\ x_5 & = & 20 & - & (x_3-\Delta_1) & + & x_4 \\ \hline z & = & 180 & - & (x_3-\Delta_1) & - & x_4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & (20-\Delta_1) & + & x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & (60+2\Delta_1) & - & 2x_3 & + & x_4 \\ x_5 & = & (20+\Delta_1) & - & x_3 & + & x_4 \\ \hline z & = & (180+\Delta_1) & - & x_3 & - & x_4 \end{array}$$

Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

Ha lehetséges a szótár, akkor optimumban vagyunk, mivel minden célfüggvény együttható nem-pozitív. $\rightarrow$ Lehetséges, ha $x_1, x_2, x_5 \geq 0$. Legyen $x_3 = x_4 = 0$, ekkor

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 20 - \Delta_1 \geq 0 \\ x_2 = 60 + 2\Delta_1 \geq 0 \\ x_5 = 20 + \Delta_1 \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1 \leq 20 \\ \Delta_1 \geq -30 \\ \Delta_1 \geq -20 \end{array}\right\} \boxed{-20 \leq \Delta_1 \leq 20}$$

Gondolkozzunk egy az általános formulákon a mátrixos leírást használva.