Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

4. Előadás

Kétfázisú szimplex módszer

A **standard alakú LP** feladathoz tartozó szótár

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{}{z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

- Ha minden $\boldsymbol{b_i \geq 0}$ $i = 1,2,\ldots,m$, akkor mehet a szimplex algoritmus
- Mit tehetünk, ha nem ez a helyzet?

Az első fázis

Példa:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{Max} \quad z = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 4 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq -5 \\ & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq -1 \\ & & & x_1, & & x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

A kapcsolódó induló szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_4 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \\ x_5 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & -1 & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 \\ \hline z & = & & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \end{array}$$

Ez **nem lehetséges** (*nem fízibilis*) induló szótár, mert $x_5, x_6 < 0$ a bázismegoldásban.

Az első fázis

Ötlet: Vezessünk be egy **új mesterséges változót** (x_0) és tekintsük a következő **segédfeladatot**:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\text{Max} \quad w = & & & & & & & -x_0 & \\
& 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq -5 \\
& -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq -1 \\
& & & & & x_1, x_2, & & x_3, x_0 & \geq 0
\end{array}
$$

x_4, x_5, x_6 mesterséges változók bevezetésével:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
\text{Max} \quad w = & & & & & & & -x_0 & & & \\
& 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_0 & + & x_4 & = 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & + & x_5 & = -5 \\
& -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & + & x_6 & = -1 \\
& & & & & & & & & x_i & \geq 0
\end{array}
$$

Vegyük a **legnegatívabb jobboldalú** egyenletet (2-es):
Fejezzük ki x_0-t ebből, a többiből a mesterséges változókat.

Az első fázis

Az így adódó kezdő szótár:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_0 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 \\
x_4 & = & 9 & & & - & 2x_2 & & & + & x_5 \\
x_6 & = & 4 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_5 \\
\hline
w & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_5
\end{array}
$$

Ami már egy lehetséges induló szótár.

Az első fázis

Tétel. *A standard feladatnak akkor és csak akkor létezik lehetséges megoldása, ha $w = 0$ a hozzá felírt segédfeladat optimuma.*

Bizonyítás.

- Tfh. létezik a kiindulási feladatnak egy lehetséges x megoldása
- Ekkor a $(x_0 = 0, x)$ optimális megoldása a segédfeladatnak és $w\left((x_0 = 0, x)\right) = 0$
- Fordítva, tfh. a segédfeladat optimuma 0 és egy optimális megoldása x^*
- Ekkor $x_0^* = 0$, elhagyva x_0^*-t x^*-ből a kiindulási feladat egy lehetséges megoldását kapjuk

∎

Szimplex módszer

Ha **a segédfeladatot megoldjuk a szimplex algoritmussal és annak optimuma** $\boldsymbol{w = 0}$, akkor a megoldás legutolsó szótárából könnyen felírhatunk egy olyan szótárat, amely:

- az eredeti feladat szótára
- bázismegoldása lehetséges megoldás is egyben

A szótár felírásának lépései:

1. Ha $x_0 = 0$ szerepel a feltételek között, akkor elhagyjuk
2. Ha x_0 bázisváltozó, akkor az egyenletének jobb oldalán lévő nem 0 együtthatójú változók valamelyikét belépőváltozónak x_0-t kilépőváltozónak tekintve végrehajtunk egy pivot lépést
3. Elhagyjuk x_0 megmaradt előfordulásait
4. A célfüggvény egyenletét lecseréljük az eredeti célfüggvényre, amit átírunk az aktuális bázisváltozóknak megfelelően

Szimplex módszer: kétfázisú algoritmus

1. fázis lépései

1. Ha a standard feladat szótárának bázismegoldása lehetséges megoldás, akkor jöhet a 2. fázis
2. Ha nem, akkor társítsuk a segédfeladatot, és készítsük el annak átalakított szótárát
3. Oldjuk meg az átalakított szótárból indulva a segédfeladatot
4. Ha a segédfeladat optimuma < 0, akkor nincs 2. fázis, a standard feladatnak nem létezik megoldása
5. Ha a segédfeladat optimuma 0, akkor készítsünk egy a kiindulási feladat szótárával ekvivalens, lehetséges bázismegoldású szótárat az 1. fázisban futtatott szimplex algoritmus utolsó szótára alapján

2. fázis lépései

1. Hajtsuk végre a szimplex algoritmust az első fázisból kapott szótárból indulva

Szimplex módszer : példa

Az induló szótárunk :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 \\ x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 \\ \hline z & = & & & 2x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Látjuk, hogy kétfázisú szimplex módszerre van szükség.

Írjuk fel a segédfeladatot :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\ \hline w & = & & & & & & - & x_0 \end{array}$$

Szimplex módszer: példa

A legnegatívabb jobboldalú egyenlet: $x_3 = \cdots \Rightarrow$ ebből fejezzük ki x_0-t

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_0 & = & 5 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_4 & = & 11 & & & - & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline w & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Belépő változó: x_2, kilépő változó: x_0:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 5 & + & x_1 & - & x_0 & + & x_3 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & + & 2x_0 & - & x_3 \\ \hline w & = & & & & - & x_0 & & \end{array}$$

Optimum: $x_0 = 0$, $w = 0 \Rightarrow$ elhagyjuk x_0-t, vissza az eredeti célfüggvényre.

Szimplex módszer: példa

Az kiindulási feladattal ekvivalens szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 5 & + & x_1 & + & x_3 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_3 \\ \hline z & = & & & 2x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Innen kapjuk (x_2 helyére $5 + x_1 + x_3$-at helyettesítve a jobboldalon)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 5 & + & x_1 & + & x_3 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_3 \\ \hline z & = & 5 & + & 3x_1 & + & x_3 \end{array}$$

Végül a 2-es fázist végrehajtva leolvashatjuk a megoldást.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 5.5 & - & 0.5x_4 & + & 0.5x_3 \\ x_1 & = & 0.5 & - & 0.5x_4 & - & 0.5x_3 \\ \hline z & = & 6.5 & - & 1.5x_4 & - & 0.5x_3 \end{array}$$

A lineáris programozás alaptétele

Tétel. *Tetszőleges standard alakú lineáris programozási feladatra teljesülnek az alábbi állítások*

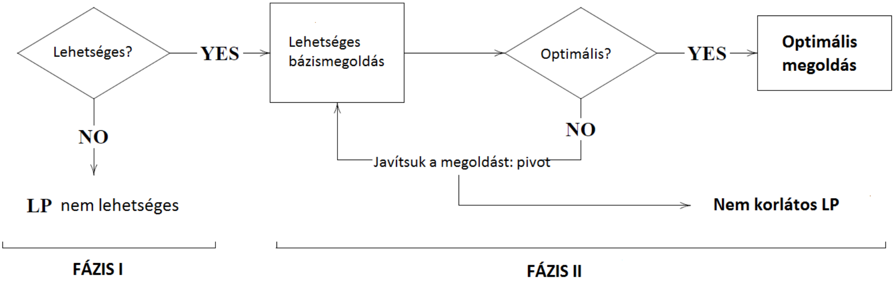
- *Ha nincs optimális megoldása, akkor vagy nem korlátos vagy nincs lehetséges megoldása.*
- *Ha van lehetséges megoldása, akkor van lehetséges bázismegoldása is.*
- *Ha van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is.*

Bizonyítás.

- A szimplex módszer 1. fázisa eldönti, hogy létezik-e lehetséges megoldás
- Ha igen, akkor megad egy lehetséges bázismegoldást is
- Valamelyik, terminálást biztosító pivot szabállyal a 2. fázis eldönti, hogy nem korlátos-e a feladat
- Ha korlátos a feladat, akkor a 2. fázis megad egy optimális bázismegoldást

∎

LP alaptétele - Kétfázisú szimplex folyamatábra



Optimális megoldások számossága

- Lehetséges megoldásból több, akár végtelen sok is lehet
- Hány optimális megoldás létezik?
- **Lehet egyetlen optimális** megoldás

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_2 & + & 3x_4 & - & 2x_6 \\
x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & 2x_4 & + & 1x_6 \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & + & 2x_4 & & \\
\hline
z & = & 13 & - & 3x_2 & - & x_4 & - & x_6
\end{array}
$$

Optimális megoldások számossága

- **Lehet több optimális** megoldás

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 3 & + & x_2 & - & 2x_5 & + & 7x_3 \\
x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6x_5 & - & 8x_3 \\
x_6 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2x_5 & - & x_3 \\
\hline
z & = & 8 & & & & & - & x_3
\end{array}
$$

Hagyjuk el az utolsó oszlopot és a célfüggvényt:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_4 & = & 3 & + & x_2 & - & 2x_5 \\
x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6x_5 \\
x_6 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2x_5
\end{array}
$$

Az egyenletrendszer megoldásai az eredeti feladat optimumai.

Optimális megoldások számossága

- x_1, x_4, x_6, nemnegatívak
- Az optimumok leírhatók az alábbi egyenlőtlenség rendszerrel

$$\begin{array}{rcrcl} -x_2 & + & 2x_5 & \leq & 3 \\ 5x_2 & - & 6x_5 & \leq & 1 \\ -9x_2 & - & 2x_5 & \leq & 4 \\ & x_2, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Lehetőség ad **másodlagos célfüggvény** szerinti optimalizálásra.

Szimplex algoritmus sebessége

- Mennyire gyors a szimplex algoritmus?
- Mekkora feladatokat lehet vele elfogadható időn belül megoldani?
- **Átlagos** és **legrosszabb eset** analízis
- A futási idő mérhető a feladat méretének függvényében
- A sebesség egy mértéke, hogy hány iterációs lépést kell végrehajtani
  - Ciklizáció $\Rightarrow$ az algoritmus soha nem ér véget
  - Legfeljebb $\binom{n+m}{m}$ iteráció lehet (ahányféle bázis)
  - $n = m$ esetben, a *Stirling-formulát* használva[1]

$$\approx \frac{4^n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$$

[1] $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$

A szimplex algoritmus sebessége

- A minimálisan szükséges iterációk száma is lehet exponenciálisan sok: V. Klee és G. J. Minty példája ('72) ($n = m$)

$$
\begin{aligned}
2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i &\le 100^{i-1} & \qquad i &= 1,2,\ldots,n \\
x_j &\ge 0 & \qquad j &= 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

$$
\max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j
$$

- Speciálisan, ha $n = m = 3$-ra

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max \quad z = & 100x_1 & + & 10x_2 & + & 1x_3 & & \\
\hline
& x_1 & & & & & \le & 1 \\
& 20x_1 & + & x_2 & & & \le & 100 \\
& 200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & \le & 10000 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

A szimplex algoritmus sebessége

- Legnagyobb együttható (klasszikus) szabállyal $2^n - 1$ iteráció kell
- **Legnagyobb növekmény szabállyal** (minden iterációs lépésben az a nembázis változót választjuk, melynek bázisba lépésével a leginkább nő a célfüggvény) is exponenciálisan sok iteráció kellhet (R. Jeroszlov, 1973)
- Legrosszabb esetben exponenciálisan sok iterációra van szükség
- Léteznek-e ennél jobb felső korláttal rendelkező algoritmusok?
  - Léteznek polinomiálisan sok iterációt igénylőek, pl.
  - L. G. Khachiyan *ellipszoid módszere*
  - N. Karmarkar *projektív algoritmusa*
  - Belső pontos módszerek

A szimplex algoritmus sebessége - New York Times, 1979. nov. 7.


"All the News That's Fit to Print"

The New York Times

LATE CITY EDITION

NEW YORK, WEDNESDAY, NOVEMBER 7, 1979

Similar Transportation Bond Issues Are Passed in New York and Jersey

CARTER SAID TO ASK FOR LOYALTY CHECK OF AIDES ON POLITICS

IRAN'S CIVIL GOVERNMENT OUT; HOSTAGES FACE DEATH THREAT; OIL EXPORTS BELIEVED HALTED

STUDENTS WARN U.S.

Ayatollah Instructs Secret Revolutionary Council to Form a Cabinet

F.A.A. Seeks Fine of $1.5 Million For 'Unairworthy' Braniff Flights

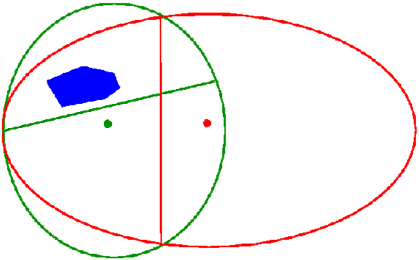
Main Iran Oil Port Reported Closed And Prices of Spot Petroleum Soar

Interior Dept. Assailed On Missing a Deadline For Species Protection

Energy Dept. Accuses 9 Refiners Of $1.18 Billion Oil Overcharges

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

INSIDE



A szimplex algoritmus sebessége - New York Times, 1984. nov. 19.

BREAKTHROUGH IN PROBLEM SOLVING

By JAMES GLEICK
Published: November 19, 1984

A 28-year-old mathematician at A.T.&T. Bell Laboratories has made a startling theoretical breakthrough in the solving of systems of equations that often grow too vast and complex for the most powerful computers.

The discovery, which is to be formally published next month, is already circulating rapidly through the mathematical world. It has also set off a deluge of inquiries from brokerage houses, oil companies and airlines, industries with millions of dollars at stake in problems known as linear programming.

These problems are fiendishly complicated systems, often with thousands of variables. They arise in a variety of commercial and government applications, ranging from allocating time on a communications satellite to routing millions of telephone calls over long distances. Linear programming is particularly useful whenever a limited, expensive resource must be spread most efficiently among competing users. And investment companies use the approach in creating portfolios with the best mix of stocks and bonds.

A szimplex algoritmus sebessége - Lehet-e matematikát szabadalmaztatni ?

- Az AT&T 1985-ben szabadalmi védettség alá helyzete Karmarkar algoritmusát $\rightarrow$ U.S. Patent 4,744,026 : „Methods and apparatus for efficient resource allocation", 1988.
- AT&T KORBX számítógép : 8.9 millió USD piaci áron ! Első vevő a Pentagon volt...
- Karmarkart kiközösítették a terület vezető matematikusai
- A szabadalmi védettség 2006-ban járt le.

A szimplex algoritmus sebessége

- Dantzig megfigyelése szerint, ha $m < 50$ és $n + m < 200$, akkor általában $3m/2$ iterációt igényel az algoritmus
- Ritkán fordul elő, hogy több, mint $3m$ lépés szükséges
- Egy másik megfigyelés szerint az iterációk száma $cm \log n$ körül ingadozik, ahol c egy konstans
- Jelenleg is aktívan kutatott terület

(*Figyeljük meg a formulák asszimmetriáját n és m paraméterekre*)