

Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatika Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

3. Előadás

Szimplex algoritmus

Adott a standard alakú **LP feladat**:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = z$$

A standard LP feladathoz tartozó **szótár**:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Szimplex algoritmus

Most feltesszük, hogy $b_1 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$, azaz a feladathoz felírt **szótár bázismegoldása**

$$x = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

lehetséges megoldás.

- *A negatív jobb oldalú feltételt ($\exists i : b_i < 0$) tartalmazó standard feladatokkal később foglalkozunk*

A Szimplex algoritmus bevezetése

A szimplex algoritmus:

- Algoritmus: **iteratív optimum keresés**
- **Ismételt áttérés más szótárakra** a következő feltételek betartása mellett:
 - ① Minden iteráció **szótára ekvivalens** az előző iterációéval
 - ② Minden iteráció szótárának bázismegoldásán a **célfüggvény értéke nagyobb vagy egyenlő**, mint az előző iterációén
 - ③ Minden iteráció **bázismegoldása lehetséges megoldás**

Felmerülő kérdések:

- **Mi alapján térjünk át** egy másik szótárra?
- **Hogyan térjünk át**, hogy a feltételek teljesüljenek?
- **Honnan tudjuk**, hogy az aktuális bázismegoldás **optimális**?
- **Létezik-e** minden LP feladatnak **optimuma**?

Szimplex algoritmus - definíciók

Pivot lépés: új szótár megadása egy bázis és nembázis változó szerepének felcserélésével (ld. példa)

Belépőváltozó: a szimplex algoritmus egy iterációnak belépőváltozója az a nembázis változó, ami a következő szótárra áttérés hatására bázisváltozóvá válik

Kilépőváltozó: a szimplex algoritmus egy iterációnak kilépőváltozója az a bázisváltozó, ami a következő szótárra áttérés hatására nembázis változóvá válik

Szótárak ekvivalenciája: két szótár ekvivalens, ha az általuk leírt egyenletrendszer összes lehetséges megoldásai és a hozzájuk tartozó célfüggvényértékek rendre megegyeznek

Szimplex algoritmus

Tétel. *A pivot lépés előtti és az utána előálló új szótár ekvivalensek.*

Bizonyítás.

- Egyenleteket átrendezni ekvivalens átalakítás
- Egy egyenlethez egy másik konstans-szorosát hozzáadni ekvivalens átalakítás



Szimplex algoritmus

Hogyan térjünk át, hogy a feltételek teljesüljenek?

$$\begin{array}{rccccr} x_4 & = & 4 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & \\ x_5 & = & 6 & - & x_1 & & & - & 4x_3 & \\ x_6 & = & 2 & & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \\ \hline z & = & 10 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \end{array}$$

- A bázisváltozók nemnegativitásából eredő korlátok x_2 -re ($x_1 = 0, x_3 = 0$):

$$x_4 \geq 0 \Rightarrow 4 - 2x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x_2$$

$$x_6 \geq 0 \Rightarrow 2 - 2x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x_2$$

- A **legszűkebb korlátot** adó egyenletből fejezzük ki x_2 -t (ld. hányadosszabály)

Szimplex algoritmus

Honnan tudjuk, hogy az aktuális bázismegoldás optimális?

$$\begin{array}{rccccr} x_4 & = & 4 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & \\ x_5 & = & 6 & - & x_1 & & & - & 4x_3 & \\ x_6 & = & 2 & & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \\ \hline z & = & & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & \end{array}$$

Tétel. Ha egy szótárban nincs pozitív c_j ($j = 1, 2, \dots, n + m$) célfüggvény együttható és negatív b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) konstans a feltételek egyenleteiben, akkor a szótár bázismegoldása optimális megoldás.

Bizonyítás. Indirekten könnyen belátható.



Szimplex algoritmus

Létezik-e minden LP feladatnak optimuma?

$$\begin{array}{rccccr} x_4 & = & 4 & + & x_1 & - & 2x_2 & & & \\ x_5 & = & 6 & + & x_1 & & & - & 4x_3 & \\ x_6 & = & 2 & & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \\ \hline z & = & & & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & \end{array}$$

Látjuk, hogy x_1 tetszőlegesen növelhető az aktuális bázismegoldásban \Rightarrow a célfüggvény így tetszőlegesen nagy értéket felvehet

Nem korlátos LP feladat: ha az LP feladat maximalizálandó (minimalizálandó) és célfüggvénye tetszőlegesen nagy (kicsi) értéket felvehet a lehetséges megoldásainak halmazán, akkor a feladatot **nem korlátosnak** nevezzük.

Szimplex algoritmus

$$\begin{array}{rcllclcl} x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & \dots & - & a_{1n}x_n \\ x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & \dots & - & a_{2n}x_n \\ & & & & & & \vdots & & & \\ \hline z & = & z^* & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & \dots & + & c_nx_n \end{array}$$

Tétel. *Ha egy szótárban van olyan pozitív c_j ($j = 1, 2, \dots, n + m$) célfüggvény együttható, hogy minden $-a_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) együttható nemnegatív, akkor az LP feladat, amihez a szótár tartozik, nem korlátos.*

Bizonyítás. Indirekten könnyen belátható.



A szimplex algoritmus

Bemenet/Input: Egy *lehetséges* induló szótár.

Kimenet/Output:

- $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ **optimális bázismegoldás**
- z^* **a célfüggvény optimuma**

(Egy *lehetséges* induló szótárra van szükségünk, azaz feltesszük, hogy minden b_i konstans ($i = 1, 2, \dots, m$) nemnegatív az induló szótárban, azaz **a szótár bázismegoldása lehetséges megoldás**. Azzal az esettel, amikor ez nem teljesül, később foglalkozunk)

A szimplex algoritmus

Az algoritmus lépései:

- 1 A szótárban $c_j \leq 0$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re?
 - Igen \Rightarrow az aktuális bázismegoldás **optimális**, az algoritmus megáll
 - Nem \Rightarrow folytatás a 2. ponttal
- 2 Válasszuk a nembázis változók közül belépőváltozónak valamely x_k -t, amelyre $c_k > 0$ (pozitív célfüggvény együttható)
- 3 $-a_{ik} \geq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, m$ -re?
 - Igen \Rightarrow az LP feladat **nem korlátos**, az algoritmus megáll
 - Nem \Rightarrow folytatás a 4. ponttal
- 4 Legyen l valamely index, amelyre $-a_{lk} < 0$ és $\left| \frac{b_l}{a_{lk}} \right|$ minimális (hányadoseszt)
- 5 Hajtsunk végre egy **pivot lépést** úgy, hogy x_k legyen a belépőváltozó és az l . feltétel bázisváltozója legyen a kilépő; folytatás az 1. ponttal

A szimplex algoritmus

Csak egy keretalgoritmus.

- Melyik változót válasszuk a belépőváltozónak a 2. pontban?
- Melyik feltételből válasszuk a kilépőváltozót a 4. pontban?

Pivot szabály: olyan szabály, ami egyértelművé teszi, hogy a szimplex algoritmusban mely változók legyenek a belépő- és a kilépőváltozók, ha több változó is teljesíti az alapfeltételeket

Klasszikus Szimplex algoritmus pivot szabálya:

- A lehetséges belépőváltozók közül válasszuk a legnagyobb c_k értékűt, több ilyen esetén azok közül a legkisebb indexűt
- A lehetséges kilépőváltozók közül (hányadosteszt!) válasszuk a legkisebb l indexű egyenlet változóját

Más pivot szabályok is léteznek. (ld. később)

Ciklizáció

Biztosan leáll az algoritmus véges számú lépés után?

- Mi van, ha az algoritmus első lépésében mindig nem a válasz (nem optimális az aktuális megoldás)?

Degenerált iterációs lépés: olyan szimplex iteráció, amelyben nem változik a bázismegoldás.

Degenerált bázismegoldás: olyan bázismegoldás, amelyben egy vagy több bázisváltozó értéke 0

Ciklizáció: példa

- Példa: degenerált iterációs lépés és bázismegoldás

- 1. iteráció

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{x_5} & = & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 9x_4 \\
 x_6 & = & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\
 x_7 & = & 1 - x_1 \\
 \hline
 z & = & \boxed{10x_1} - 57x_2 - 8x_3 - 24x_4
 \end{array}$$

- 2. iteráció

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\
 \boxed{x_6} & = & -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\
 x_7 & = & 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + x_5 \\
 \hline
 z & = & \boxed{53x_2} + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5
 \end{array}$$

Ciklizáció: példa

• 3. iteráció

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \boxed{x_1} & = & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{3}{4}x_5 & - & \frac{11}{4}x_6 \\
 x_2 & = & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 2x_4 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 \\
 x_7 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 4x_4 & - & \frac{3}{4}x_5 & - & \frac{11}{4}x_6 \\
 \hline
 z & = & & & \boxed{\frac{29}{2}x_3} & - & 98x_4 & - & \frac{27}{4}x_5 & - & \frac{53}{4}x_6
 \end{array}$$

• 4. iteráció

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 x_3 & = & & - & 2x_1 & + & 8x_4 & + & \frac{3}{2}x_5 & - & \frac{11}{2}x_6 \\
 \boxed{x_2} & = & & & x_1 & - & 2x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 & + & \frac{1}{2}x_6 \\
 x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
 \hline
 z & = & & - & 29x_1 & + & \boxed{18x_4} & + & 15x_5 & - & 93x_6
 \end{array}$$

Ciklizáció: példa

• 5. iteráció

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{x_3} & = & 2x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{9}{2}x_6 \\
 x_4 & = & \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_6 \\
 x_7 & = & 1 - x_1 \\
 \hline
 z & = & -20x_1 - 9x_2 + \boxed{\frac{21}{2}x_5} - \frac{141}{2}x_6
 \end{array}$$

• 6. iteráció

$$\begin{array}{rcl}
 x_5 & = & 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\
 \boxed{x_4} & = & -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \\
 x_7 & = & 1 - x_1 \\
 \hline
 z & = & 22x_1 - 93x_2 - 21x_3 + \boxed{24x_6}
 \end{array}$$

Ciklizáció: példa

● 7. iteráció

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \boxed{x_5} & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{11}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 9x_4 \\
 x_6 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 \\
 x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
 \hline
 z & = & & & \boxed{10x_1} & - & 57x_2 & - & 8x_3 & - & 24x_4
 \end{array}$$

● Visszakaptuk a kiindulási feladatot

Ciklizáció: ha a szimplex algoritmus valamely iterációja után **egy korábbi iteráció szótárát kapjuk meg újra**, akkor azt ciklizációnak nevezzük

Ciklizáció

Tétel. *Ha a szimplex algoritmus nem áll meg, akkor ciklizál.*

Bizonyítás. Tekintsünk két szótárat (melyeket a szimplex algoritmus során kapunk) amelyeknek ugyanazok a bázisváltozói:

- 1. szótár

$$x_4 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$$

$$x_5 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3$$

$$x_6 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3$$

$$z = v + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

- 2. szótár

$$x_4 = b'_1 - a'_{11}x_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3$$

$$x_5 = b'_2 - a'_{21}x_1 - a'_{22}x_2 - a'_{23}x_3$$

$$x_6 = b'_3 - a'_{31}x_1 - a'_{32}x_2 - a'_{33}x_3$$

$$z = v' + c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3$$

Ciklizáció

- Ha egy $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, z$ megoldása az egyiknek, akkor a másikonak is (mivel a két szótár ekvivalens)
- Legyen x_k tetszőleges nembázis változó (pl. $x_k = x_1$), t tetszőleges valós szám
- Vegyük a következő megoldását az első szótárnak
 - $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0$
 - $\Rightarrow x_i = b_i - a_{i1}t$ ($i = 4,5,6$) és $z = v + c_1t$
- Ez megoldása a másik szótárnak is (mivel ekvivalensek), ezért:

$$b_i - a_{i1}t = b'_i - a'_{i1}t \quad i = 4,5,6$$

$$v + c_k t = v' + c'_k t$$

Ciklizáció

Azaz a két szótár nem csak ekvivalens, hanem megegyezik.

- Általános esetben $\binom{n+m}{m}$ (véges!) különböző módon lehet bázist választani:

$$x_i = b_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij} x_j \quad i \in \mathcal{B}$$

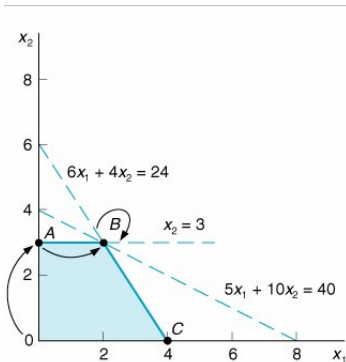
$$z = v + \sum_{j \in \mathcal{B}} c_j x_j$$

- **Ha az algoritmus nem áll meg**, akkor lesz olyan iteráció, amikor egy korábbi bázismegoldás, **korábbi szótár kerül elő újra**, azaz ciklizál.

A ciklizáció elkerülhető megfelelő pivot szabály alkalmazásával. ■

Illusztráció

Ciklizáció szemléletesen (2 változós feladat esetén): több korlátozó feltételhez tartozó egyenes megy át ugyanazon a ponton:



Bland szabály (1977)

Legkisebb index szabálya:

- A lehetséges belépőváltozók közül a legkisebb indexűt, E_S
- A lehetséges kilépőváltozók közül a legkisebb indexűt választjuk

Tétel. *A szimplex algoritmus véget ér, ha a legkisebb index szabályt használjuk*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. (Egy bizonyítás megtalálható pl. Pluhár András: Operációkutatás I. jegyzetében)

Lexikografikus szabály

A **ciklizáció oka a degeneráció**, azaz bázisváltások 0 értékűvé válása a bázismegoldásokban. (*ld. Ciklizáció: példa*)

- Adjunk hozzá a kezdő szótár minden feltételének jobb oldalához egy pozitív ε_i konstans (*mit jelent ez geometriailag?*)
- Minden feltételre legyenek ezek különböző nagyságrendűek a következőképpen
$$0 < \varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll \dots \ll \varepsilon_m$$
- Szimplex algoritmus során biztosan nem "ütik ki" egymást
- Nem lesznek degenerált bázismegoldások \Rightarrow nincs ciklizáció

Lexikografikus szabály

- *Példa*: feladat induló szótára (látjuk, hogy degenerált)

$$\begin{array}{rcll}
 x_3 & = & \frac{1}{2} & - x_2 \\
 x_4 & = & & - 2x_1 + 4x_2 \\
 x_5 & = & & x_1 - 3x_2 \\
 x_6 & = & & - x_1 + 6x_2 \\
 \hline
 z & = & 4 & + 2x_1 - x_2
 \end{array}$$

- Szótár konkrét értékek helyett szimbolikus ε -okkal kiegészítve

$$\begin{array}{rcll}
 x_3 & = & \frac{1}{2} + \varepsilon_1 & - x_2 \\
 x_4 & = & & + \varepsilon_2 - x_1 + x_2 \\
 x_5 & = & & + \varepsilon_3 + x_1 - 3x_2 \\
 x_6 & = & & + \varepsilon_4 - 2x_1 + 4x_2 \\
 \hline
 z & = & 4 & + 2x_1 - x_2
 \end{array}$$

Lexikografikus szabály

- 1. iteráció után

$$\begin{array}{rcllcl}
 x_3 & = & \frac{1}{2} & + & \varepsilon_1 & & & - & x_2 \\
 x_4 & = & & & \varepsilon_2 & & - & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & + & \frac{1}{2}x_6 & - & x_2 \\
 x_5 & = & & & \varepsilon_3 & + & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & - & x_2 \\
 x_1 & = & & & & & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & + & 2x_2 \\
 \hline
 z & = & 4 & & & & \varepsilon_4 & - & x_6 & + & 3x_2
 \end{array}$$

- 2. iteráció után

$$\begin{array}{rcllcl}
 x_3 & = & \frac{1}{2} & + & \varepsilon_1 & & - & \varepsilon_3 & - & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & + & \frac{1}{2}x_6 & + & x_5 \\
 x_4 & = & & & \varepsilon_2 & & - & \varepsilon_3 & - & \varepsilon_4 & + & x_6 & + & x_5 \\
 x_2 & = & & & & & \varepsilon_3 & + & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & - & x_5 \\
 x_1 & = & & & & & 2\varepsilon_3 & + & \frac{3}{2}\varepsilon_4 & - & \frac{3}{2}x_6 & - & 2x_5 \\
 \hline
 z & = & 4 & & & & 3\varepsilon_3 & + & \frac{5}{2}\varepsilon_4 & - & \frac{5}{2}x_6 & - & 3x_5
 \end{array}$$

Lexikografikus szabály

- Az utolsó szótár optimális
- Elhagyjuk az ε -okat:

$$\begin{array}{rcll} x_3 & = & \frac{1}{2} & + \frac{1}{2}x_6 & + & x_5 \\ x_4 & = & & & + & x_6 & + & x_5 \\ x_2 & = & & - & \frac{1}{2}x_6 & - & x_5 \\ x_1 & = & & - & \frac{3}{2}x_6 & - & 2x_5 \\ \hline z & = & 4 & - & \frac{5}{2}x_6 & - & 3x_5 \end{array}$$

Lexikografikus szabály

Lexikografikus szabály:

- egészítsük ki szimbolikus ε konstansokkal az induló szótárat, majd
 - A **lehetséges belépőváltozók közül** válasszuk a **legnagyobb** c_k értékűt, több ilyen esetén azok közül a legkisebb indexűt
 - A **lehetséges kilépőváltozók közül** válasszuk azt, amelynek l indexű egyenletére az együtthatókból álló vektor **lexikografikusan a legkisebb**

Tétel. *A szimplex algoritmus biztosan véget ér, ha a lexikografikus szabály szerint választunk kilépő változót*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

Összefoglalva:

- A *legnagyobb növekmény* (ld. gyakorlat) és a klasszikus pivot szabály ciklizálhat
- A Bland és a lexikografikus szabály esetén nincs ciklizáció
- A *véletlen pivot* szabály választással az algoritmus 1 valószínűséggel terminál

Lexikografikus szabály

- *Példa*: a különböző pivot szabályok közötti különbségekre

$$x_9 = 5 - 10x_1 - 5x_3 - x_5 - 3x_7$$

$$x_8 = 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 - 4x_7$$

$$x_2 = 2 + 4x_1 - 2x_3 - 5x_5 - 8x_7$$

$$x_4 = 4 - 8x_1 + 4x_3 - 5x_5 - 2x_7$$

$$x_6 = 3 - x_1 - 2x_3 - 5x_5$$

$$z = 27 + x_1 + 2x_3 - 11x_5 + 6x_7$$

- A klasszikus, lexikografikus, legkisebb index és legnagyobb növekmény szabályok mind különböző belépő- kilépőváltozó párokat választanak (HF: ellenőrizzük!)

Boomington sörfözde

A Bloomington Sörfözde **pilzenit** és angol **világos sört** állít elő.

A pilzeni eladási ára 5\$ hordónként, a angol világosé 2\$ hordónként. Egy hordó pilzeni előállításához 5 kg árpamaláta és 2 kg komló szükséges. Egy hordó világos sörhöz pedig 2 kg árpamaláta és 1 kg komló kell.

Rendelkezésre áll 60 kg árpamaláta és 25 kg komló.

Fogalmazzunk meg egy LP-t, amellyel maximalizálható a bevétel! Oldjuk is meg. Nézzük meg grafikusan is!

Reklámköltség minimalizálása

A Dorian Auto cég luxusautókat és teherautókat gyárt. A vállalat úgy gondolja, hogy vásárlói legnagyobb valószínűséggel magas jövedelmű nők és férfiak. Ennek a fogyasztói csoportnak a megnyerésére a cég egy komoly tévé-hirdetési kampányt indított és elhatározta, hogy 1 perces reklámhelyeket vásárol kétféle típusú tévéműsorban: vidám műsorokban és futballmeccsek alatt.

Minden kabarébeli reklámot 7 millió magas jövedelmű nő és 2 millió magas jövedelmű férfi néz. Minden futballmeccs alatti reklámot 2 millió magas jövedelmű nő és 12 millió magas jövedelmű férfi néz. Az egyperces kabarébeli reklám 50 ezer dollárba kerül, és az egyperces futballmeccs alatti reklám ára 100 ezer dollár. A cég azt szeretné, ha hirdetéseit legalább 28 millió magas jövedelmű nő és 24 millió magas jövedelmű férfi látná.

Alkalmazzuk a lineáris programozást arra, hogy a Dorian cég a reklám céljait minimális költségek mellett érje el!