Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatika Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

2. Előadás

LP alapfeladat

A lineáris programozás (LP) alapfeladata **standard formában**

$$
\boxed{
\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots & + c_nx_n & = z \\
\text{Felt.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \vdots & & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots & + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & & x_1, \dots, x_n & \geq 0
\end{array}
}
$$

Alapfogalmak

Lineáris programozási feladat: keressük meg adott lineáris, $\mathbb{R}^n$ értelmezési tartományú függvény (célfüggvény) szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) értelmezési tartományának adott lineáris korlátokkal (feltételekkel) meghatározott részében.

Lehetséges megoldás: olyan $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy p_i-t x_i-be helyettesítve ($\forall i = 1, \ldots, n$) kielégíti a feladat feltételrendszerét.

Lehetséges megoldási tartomány: az összes lehetséges megoldás (vektor) halmaza.

Optimális megoldás: olyan lehetséges megoldás, ahol a célfüggvény felveszi maximumát/minimumát.

Példa – product mix

A lineáris programozási feladat:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2 & \\ x_1 \quad + x_2 &\leq 80 \\ 2x_1 \quad + x_2 &\leq 100 \\ x_1 \qquad\quad &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lehetséges megoldás: $x = (20, 20)$ (20 katona, 20 vonat)

Optimális megoldás: $x* = (20{,}60)$ (20 katona, 60 vonat)

Optimum értéke: $z* = 180$ (azaz $180 profitot érhet el a cég)

Egy lineáris program felírása

1. Válasszuk meg a döntési változókat
2. Határozzuk meg a célt és a célfüggvényt (lineáris függvény)
3. Írjuk fel a korlátozó feltételeket (lineáris egyenlőtlenségek)
4. Határozzuk meg a változók értelmezési tartományát (előjel feltételek)

Példa: A posta probléma

Kiindulás:

- Egy postán az egyes munkanapokon különböző számú teljes munkaidejű dolgozóra van szükség. Egy dolgozó egymást követő 5 munkanapon dolgozik (pl. hétfő-péntek, szerda-vasárnap, stb.)
- Az egyes napokon szükséges dolgozói létszámot a következő táblázat tartalmazza.

Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
17	13	15	19	14	16	11

Feladat: Minimalizáljuk a dolgozók számát a feltételek kielégítése mellett.

Példa: A posta probléma

Döntési változók: $x_1, \ldots, x_7$

- x_i: azon dolgozók száma, akik az i-edik napon kezdik meg a munkát ($i = 1, \ldots, 7$ – hétfő: $i = 1$)

Cél: a dolgozók számának minimalizálása

Célfüggvény:

- $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

Korlátozó feltételek:

- Pl.: Hányan dolgoznak hétfőn? $\Rightarrow$ Azok dolgoznak hétfőn, akik hétfőn, csütörtökön, pénteken, szombaton vagy vasárnap kezdenek dolgozni, azaz: $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$

Példa: A posta probléma

A lineáris program felírása:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 17 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad + x_7 &\geq 19 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 11 \\
x_i &\geq 0 (i = 1, \ldots, 7)
\end{aligned}
$$

Az általános standard alak tömören

Standard alakú lineáris programozási feladat (maximalizálás):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_i x_i = z$$

Részletesen kiírva az együtthatókat

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
\hline
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & = & z
\end{array}$$

Az eddigiek összegzése

- A Lineáris Program (LP) egy optimalizálási probléma, ahol
  1. cél egy lineáris (cél)függvény maximalizálása/minimalizálása
  2. a lehetséges megoldások halmazán, mely halmazt lineáris egyenlőtlenségek határoznak meg
- Standard alak: minden feltétel $\leq$-egyenlőtlenség (maximalizálás), vagy $\geq$-egyenlőtlenség (minimalizálás) és minden változó nemnegatív

Az eddigiek összegzése

Állítás. *Minden lineáris programozási feladathoz megadható egy vele ekvivalens standard alakú feladat.*

- Áttérés minimalizálásról maximalizálásra

$$\min \quad -x_1 + 2x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \max \quad x_1 - 2x_2$$

- Egyenlőségek helyettesítése egyenlőtlenségekkel

$$2x_1 + 3x_3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_3 \geq 1, \quad 2x_1 + 3x_3 \leq 1$$

- Nem 0 alsó korlátos és korlát nélküli változók helyettesítése 0 alsó korlátosakkal

$$-3 \leq x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad y \geq 0, \quad y - 3 \geq -3, \quad x_1 := y - 3$$

- '$\geq$' irányú egyenlőtlenségek szorzása -1-gyel

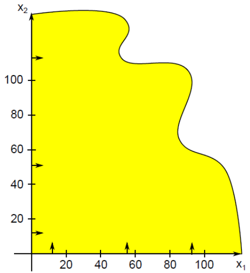
$$x_1 - x_2 \geq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -x_1 + x_2 \leq -4$$

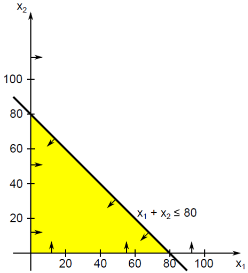
Az LP feladat megoldása

Tekintsük újra az erőforrás allokációs problémát:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 80 \\
2x_1 + x_2 &\leq 100 \\
x_1 &\leq 40 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Mi a lehetséges megoldások halmaza? $\rightarrow$ Ábrázoljuk!

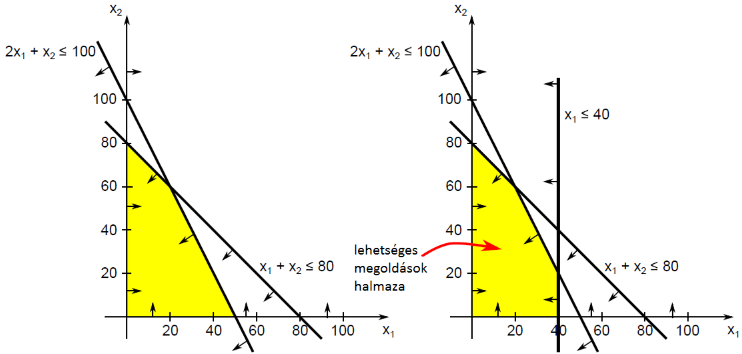




Kezdjünk az $x_1, x_2 \geq 0$-val, majd vegyük az $x_1 + x_2 \leq 80$ feltételt

Az LP feladat megoldása

Hozzáadva a $2x_1 + x_2 \leq 100$ és az $x_1 \leq 40$ feltételeket.

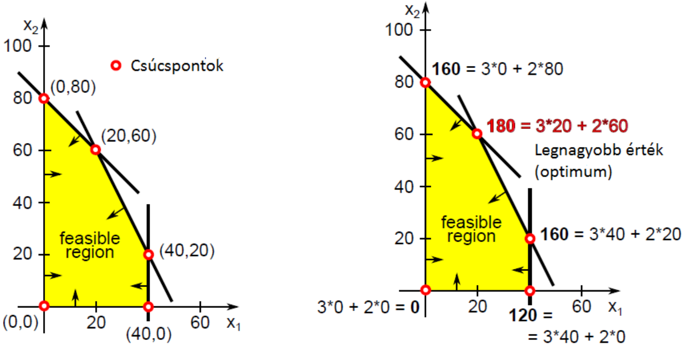


Csúcs (extremális) pont: két egyenes metszéspontja (az egyeneseink a korlátozó feltételeinket ábrázolják egyenlőség teljesülése esetén)

Az LP feladat megoldása

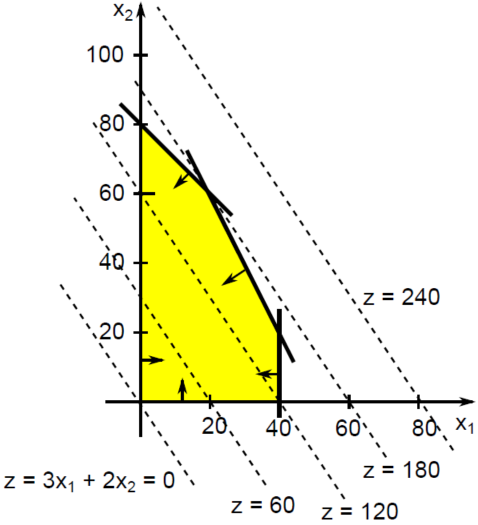
Tétel. *Ha egy LP feladatnak van* **optimális** *megoldása (azaz ahol a célfüggvény felveszi a maximumát/minimumát), akkor olyan* **optimális megoldása** *is van, ami a lehetséges megoldási tartomány* **csúcspontja***.*

Feladat: Kerssük meg az összes csúcspontot és értékeljük ki ezekben a pontokban a $3x_1 + 2x_2$ célfüggvényt.



Probléma: Lehet, hogy túl sok csúcspont van. *Az LP geometriájára egy későbbi előadáson visszatérünk.*

Az LP feladat megoldása



Mesterséges változók

Tekintsük újra a minta LP feladatunkat (katonák és vonatok gyártása)

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 80 \\
2x_1 + x_2 &\leq 100 \\
x_1 &\leq 40 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ahhoz, hogy az egyenlőtlenségeinket egyenlőségekre cseréljük, **adjunk hozzá mesterséges változókat** az egyenlőtlenségek bal oldalaihoz:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 80 \\
2x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\
x_1 + x_5 &= 40 \\
x_1, \dots, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Szótár

Tekintsük a mesterséges változók bevezetésével kapott rendszerünket:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & z & = & 3x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & = & 80 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 100 \\
& x_1 + x_5 & = & 40 \\
& x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Fejezzük ki a mesterséges változókat az egyes egyenletekből:

$$
\boxed{
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\
x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\
\hline
z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2
\end{array}
}
$$

Ezt hívjuk **szótárnak**.

Szótár

A mesterséges változókkal bővített általános feladat:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m \\
\hline
c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & & & = & z
\end{array}
$$

Ebből a szótár:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \ldots & - & a_{1n}x_n \\
x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - & \ldots & - & a_{2n}x_n \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \ldots & - & a_{mn}x_n \\
\hline
z & = & & & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n
\end{array}
$$

Szótár – terminológia

Természetes (vagy döntési) változók: a standard alakú feladatban szereplő változók $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Mesterséges (vagy slack) változók: a szótár felírásakor felvett új, nemnegatív változók $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$

Bázisváltozók (Bázis): a szótár feltétel egyenleteinek bal oldalán álló változók

Nembázis változók: a szótár feltételeinek jobb oldalán álló változók

Szótár bázismegoldása: olyan x vektor, amelyben a nembázis változók értéke nulla, (ezért) a bázisváltozók értékei az őket tartalmazó egyenletek jobb oldali konstansai,

Lehetséges (feasible) bázismegoldás: olyan bázismegoldás, ami egyben lehetséges megoldás is, azaz a szótárra teljesül, hogy $b_i \geq 0$, $i = 1,2, \ldots, m$ a bázismegoldásban

Egy lehetséges kezdő megoldás - product mix mintapélda

Legyen $\underline{x_1 = 0}$ és $x_2 = 0$. Ekkor az

- $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 80, x_4 = 100, x_5 = 40$

egy lehetséges megoldása (a mesterséges változók bevezetésével kapott) feladatnak. (*A változók nemnegatívok és minden egyenletet kielégítenek*)

A célfüggvény értéke ekkor $z = 0$.

Próbáljuk meg növelni a célfüggvény értékét!

$\Longrightarrow$ Például növeljük x_1 értékét az aktuális $(x_1 = 0)$ értékéhez képest.

A célfüggvény érték növelése

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\color{blue}{x_3} & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\
\color{blue}{x_4} & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\
\color{blue}{x_5} & = & 40 & - & x_1 & & \\
\hline
z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2
\end{array}$$

Legyen $\underline{x_1 = 20}$, $x_2 = 0$. Ekkor

- $x_3 = 60, x_4 = 60, x_5 = 20$, a célfüggvényérték $z = 60$. $\rightarrow$ **lehetséges megoldás**

Legyen most $\underline{x_1 = 40}$, $x_2 = 0$. Ekkor

- $x_3 = 40, x_4 = 20, x_5 = 0$, a célfüggvényérték $z = 120$. $\rightarrow$ **lehetséges megoldás**

Növeljük tovább, legyen $\underline{x_1 = 50}$, $x_2 = 0$. Ekkor

- $x_3 = 30, x_4 = 0, x_5 = -10$. $\rightarrow$ **nem lehetséges megoldás**

A célfüggvény érték növelése

Kérdés: Meddig tudjuk x_1 értékét növelni, mielőtt egy változó negatívvá nem válik?

Legyen $\underline{x_1 = t}$ és $x_2 = 0$. Ekkor a megoldás lehetséges, ha

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_3 & = & 80 & - & t & - & x_2 & \geq & 0 & \Rightarrow & t \leq 80 \\ x_4 & = & 100 & - & 2t & - & x_2 & \geq & 0 & \Rightarrow & t \leq 50 \\ x_5 & = & 40 & - & t & & & \geq & 0 & \Rightarrow & t \leq 40 \end{array}$$

Azaz x_1 maximális értéke $x_1 = 40$ lehet, ekkor $x_5 = 0$ lesz.

- Fejezzük ki x_1-et az x_5-öt tartalmazó egyenletből: $x_1 = 40 - x_5$.
- Minden egyenletben x_1-et cseréljük ki $40 - x_5$-re.

Azt mondjuk, hogy x_1 **belép a bázisba**, míg x_5 **kilép a bázisból**.

$\Rightarrow$ Új (de az előzővel ekvivalens) szótárat kapunk.

A célfüggvény érték növelése

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ \boxed{x_5} & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & + & \boxed{3x_1} & + & 2x_2 \end{array}$$

A harmadik egyenletből $x_1 = 40 - x_5$, ebből adódik

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & & & (40 - x_5) & & \\ x_3 & = & 80 & - & (40 - x_5) & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2(40 - x_5) & - & x_2 \\ \hline z & = & 0 & + & 3(40 - x_5) & + & 2x_2 \end{array}$$

A célfüggvény érték növelése

Azaz az új szótárunk

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 40 & & & - & x_5 \\
x_3 & = & 40 & - & x_2 & + & x_5 \\
x_4 & = & 20 & - & x_2 & + & 2x_5 \\
\hline
z & = & \mathbf{120} & + & 2x_2 & - & 3x_5
\end{array}$$

Bázisváltozók: $\{x_1, x_3, x_4\}$

Nembázis változók: $\{x_2, x_5\}$

Aktuális bázismegoldás: $x_2 = 0, x_5 = 0;\ x_1 = 40, x_3 = 40, x_4 = 20$

Célfüggvény (aktuális) értéke: $z = 120$

A hányados teszt

Az előző gondolatmenet automatizálható az ún. **hányadosteszt** segítségével.

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}}$$

hányados
x_4-re

$$\frac{100}{2} = 50$$

$x_3 : \frac{80}{1} = 80,\ x_4 : \frac{100}{2} = 50,\ x_5 : \frac{40}{1} = 40$

A **legkisebb hányados** x_5-nél adódik : $\Rightarrow$ x_5 a kilépő változó

A hányados teszt

Az új szótár :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 40 & & & - & x_5 \\ x_3 & = & 40 & - & x_2 & + & x_5 \\ x_4 & = & 20 & - & x_2 & + & 2x_5 \\ \hline z & = & 120 & + & 2x_2 & - & 3x_5 \end{array}$$

Folytassuk a gondolatmenetet : a célfüggvény értéke x_2 növelésével növelhető.
Meddig ? $\rightarrow$ hányadosteszt

x_1 : az egyenlet nem tartalmazza x_2-t $\rightarrow$ nincs korlátozás,
x_3 : $\frac{40}{1} = 40$, x_4 : $\frac{20}{1} = 20$

A legkisebb hányados x_4-nél adódik $\Rightarrow$ x_4 a kilépő változó :

$$x_4 = 20 - x_2 + 2x_5 \Rightarrow x_2 = 20 - x_4 + 2x_5$$

A hányados teszt

Mindenhol x_2 helyére $20 - x_4 + 2x_5$-et helyettesítve az új szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 40 & & & - & x_5 \\ x_2 & = & 20 & - & x_4 & + & 2x_5 \\ x_3 & = & 20 & + & x_4 & - & x_5 \\ \hline z & = & 160 & - & 2x_4 & + & x_5 \end{array}$$

A célfüggvény értéke x_5 növelésével tovább növelhető.

Hányadosteszt:

$x_1 : \frac{40}{1} = 40$,
$x_2 : x_5$ itt **pozitív együtthatóval szerepel** $\rightarrow$ nem ad korlátot!
$x_3 : \frac{20}{1} = 20$

A legkisebb hányados x_3-nél adódik $\Rightarrow$ x_3 a kilépő változó:

$$x_3 = 20 + x_4 - x_5 \Rightarrow x_5 = 20 + x_4 - x_3$$

A hányados teszt

Mindenhol x_5 helyére $20 + x_4 - x_3$-et helyettesítve az új szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\ x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\ \hline z & = & 180 & - & x_3 & - & x_4 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy nem tudjuk tovább növelni a célfüggvény értékét $\rightarrow$ **optimális megoldást** találtunk:

$x_1 = 20, x_2 = 60, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 20$; célfüggvény érték: $z = 180$.