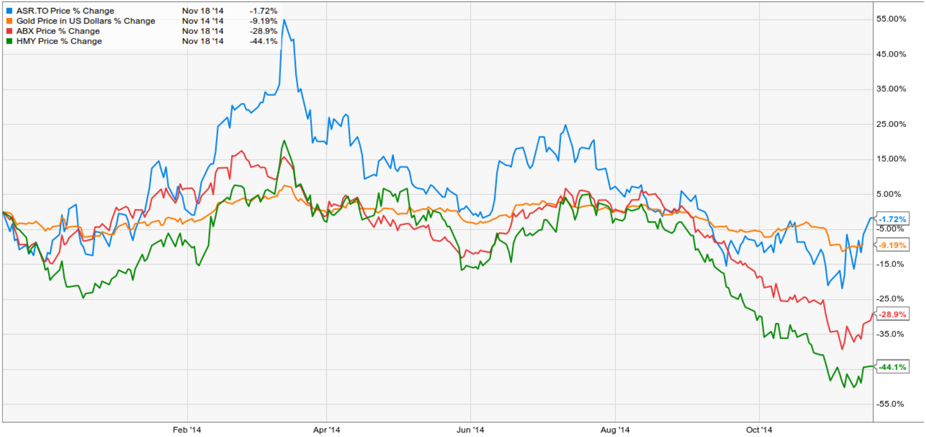
Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

12. Előadás

Portfólió probléma



Portfólió probléma

Adott részvények (kötvények,tevékenységek, stb.) egy halmaza

Kérdés: Hogyan állítsunk össze belőlük portfóliót?

Egy r részvénybe való befektetés várható hozama legyen: $\mathbf{E}(r)$ (A befektetés hozamának múltbéli megfigyeléseiből számított várható érték)

Cél: Maximális hozamú portfólió összeállítására n darab befektetés esetén

Felírható egy **LP feladat**:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{[tőke]}$$

$$x_i \geq 0 \qquad [r_i\text{-be fektetett rész}]$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(r_i) x_i \qquad \text{[várható nyereség]}$$

Portfólió probléma

Ha $\mathbf{E}(r_1) \geq \mathbf{E}(r_2) \geq \ldots \geq \mathbf{E}(r_n)$ (ez feltehető), akkor az optimális megoldás $x_1^* = 1$, $x_2^* = \cdots = x_n^* = 0$, a nyereség pedig $\mathbf{E}(r_1)$.

Általában igaz, ha ezt a stratégiát ismételjük, akkor 1 valószínűséggel csődbe megyünk.

$\Rightarrow$ többféle próbálkozás született (sőt, a terület most is nagyon aktív) a megoldásra. Ebből kettőt vizsgálunk:

1. **Markowitz-modell**, 1952; Nobel-díj 1990
2. **MAD modell** (Konno-Yamazaki, 1990)

Portfólió probléma – példa

Legyen egy r részvénybe való befektetés kockázata $\mathbf{D}(r)$ (A befektetés hozamának múltbéli megfigyeléseiből számított szórás).

Tekintsük a következő befektetések hozamait az utóbbi 3 évben:

	1. év	2. év	3. év
Ingatlan	0.05	-0.03	0.04
Értékpapír	-0.05	0.21	-0.10

A várható **hozamok**:

$\mathbf{E}(r_i) = \frac{0.05-0.03+0.04}{3} = 0.02$ és $\mathbf{E}(r_e) = \frac{-0.05+0.21-0.10}{3} = 0.02$

A **kockázatok**:

$$\mathbf{D}(r_i) = \sqrt{\frac{(0.02-0.05)^2+(0.02+0.03)^2+(0.02-0.04)^2}{3}} \approx 0.036 \text{ és}$$

$$\mathbf{D}(r_e) = \sqrt{\frac{(0.02+0.05)^2+(0.02-0.21)^2+(0.02+0.10)^2}{3}} \approx 0.164$$

Portfólió probléma – példa

Ha a tőkénk 75%át ingatlanba, 25%-át kötvénybe fektetjük, akkor a **portfólió hozama**:

$$\mathbf{E}(r_p) = \frac{(0.75 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot -0.05)}{3} + \frac{(0.75 \cdot -0.03 + 0.25 \cdot 0.21)}{3} + \frac{(0.75 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot -0.10)}{3} =$$
$$= (0.025 + 0.03 + 0.005)/3 = 0.02$$

az egyes években való hozamokat átlagolva.

A portfólió kockázata:

$$\mathbf{D}(r_p) = \sqrt{\frac{(0.02 - 0.025)^2 + (0.02 - 0.03)^2 + (0.02 - 0.005)^2}{3}} \approx 0.019$$

A befektetések **átlagos kockázata**: $0.75 \cdot 0.036 + 0.25 \cdot 0.164 = 0.068$

$\Rightarrow$ a diverzifikáció csökkenti a kockázatot

Portfólió probléma – példa

	1. év	2. év	3. év
Ingatlan	0.05	-0.03	0.04
Értékpapír	-0.05	0.21	-0.10

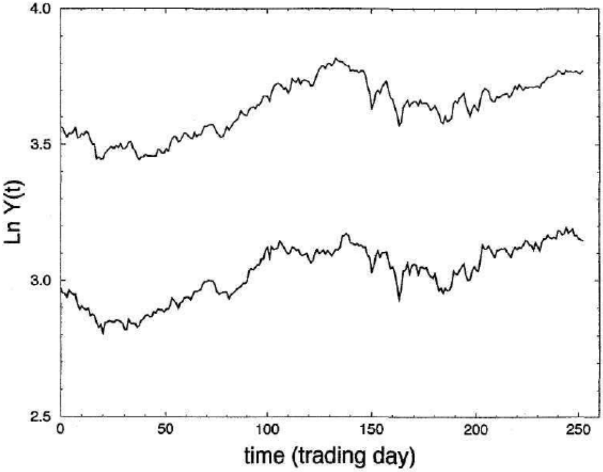
Kovariancia: két független (véletlen) változó (lineáris) együttmozgásának mértéke:

$$\mathbf{C}_{i,e} = \frac{(0.02-0.05)\cdot(0.02+0.05)}{3} + \frac{(0.02+0.03)\cdot(0.02-0.21)}{3} + \\ + \frac{(0.02-0.04)\cdot(0.02+0.10)}{3} = -0.005$$

Korreláció: normalizált kovariancia $\rho_{i,e} = \frac{-0.005}{0.036\cdot 0.164} = -0.84$

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- $\rho > 0$ azonos irányú együttmozgás
- $\rho = 0$ nincs együttmozgás ($\sim$ függetlenség, de $\neq$ függetlenség)
- $\rho < 0$ ellentétes irányú együttmozgás

Portfólió probléma – példa



ábra. Coca-Cola és Procter&Gamble részvények árfolyama árfolyama 1990-ben

Portfólió probléma – Markowitz-modell

Mindez **általánosan**:

- $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ a portfólióban lévő részvények
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az egyes befektetések aránya a portfólióban
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ és $x_i \geq 0 (\forall i)$

Kockázat: variancia (szórásnégyzet a szórás helyett)

Kovariancia mátrix: a részvények hozamainak páronkénti kovarianciáit tartalmazó mátrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{C}_{ii} = \mathbf{D}^2(r_i) = \mathrm{Var}(r_i)$

Portfólió probléma – Markowitz-modell

A portfólió kockázata:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(r_i)x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{C}_{ij}x_ix_j\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$$

Hatékony portfólió: hozama nem növelhető a kockázatának növekedése nélkül, illetve kockázata nem csökkenthető a várható hozamának csökkenése nélkül

A hatékony portfólió egyfajta **optimum**:

- adott hozam mellett minimális kockázat
- adott kockázat mellett maximális hozam

Portfólió probléma – Markowitz-modell

Legyen R egy **elvárt minimális hozamszint**. Felírható egy kvadratikus programozási feladat:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E(r_i)x_i &\geq R \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= 1 \\
x_i &\geq 0 \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

$$\min x^T \mathbf{C} x$$

Azaz **minimalizáljuk a kockázatot** egy **elvárt hozam elérése mellett**.

A feladat egy megoldását optimális portfóliónak nevezzük.

Portfólió probléma – Markowitz-modell

Néhány megjegyzés:

- kvadratikus célfüggvényű optimalizálási feladattal nem foglalkoztunk külön
- vannak hatékony algoritmusok a megoldására
- másik nehézség: $\mathbf{C}$ mátrix elemeinek számítása (becslése a múlt alapján)
- helyette használhatjuk pl. az átlagos abszolút eltérés $\mathbf{E}(|\sum_i (r_i - \mathbf{E}(r_i))x_i|)$ maximalizálását [1]

[1] ha $r = (r_1, \ldots, r_n)$ többváltozós normális eloszlást követ, akkor a két módszer ekvivalens

MAD modell

- **M**ean **A**bsolute **D**eviation
- Konno és Yamazaki által kidolgozott modell **a megfigyelt adatokat közvetlenül használja fel** és elkerüli $\mathbf{E}(r_i)$ és $\mathbf{C}$ kiszámítását
- Legyen T megfigyelésünk az n befektetésre és jelölje r_{it} az i. befektetés hozamának t-edik megfigyelését
- Vezessük be az alábbi jelöléseket

$$r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it} \text{ és } a_{it} = r_{it} - r_i$$

azaz az átlagos megfigyelt hozam, és az egyes megfigyelések eltérése az átlagtól.

Portfólió probléma – MAD modell

A következő **optimalizálási feladat** írható fel:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\min \; \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \right|$$

A feladat nem LP, de azzá alakítható!

Portfólió probléma – MAD modell

MAD modell LP-re átírva:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i \geq -y_t \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i \leq y_t \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$y_t \geq 0 \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$\min \; \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

Portfólió probléma – szemi-MAD modell

- **A MAD modell javítható**
- A t. időpontban a portfólió becsült előjeles eltérése a várható hozamtól

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i = \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i)x_i$$

  - A pozitív eltérés kedvező
  - A negatív eltérés a problémás

- Vezessük be a következő jelölést

$$x^- = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

azaz a szám negatív része

Portfólió probléma – szemi-MAD modell

A portfólió **optimalizálás felírható** a következő alakban

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\min \; \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \right)^{-}$$

Az LP-vé alakítás még egyszerűbb, mint a MAD esetében!

Portfólió probléma – szemi-MAD modell

A semi-MAD modell LP-re átírva:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i &\geq -y_t & \qquad & t = 1,2,\ldots,T \\
\sum_{i=1}^{n} r_i x_i &\geq R & & \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= 1 & & \\
y_t &\geq 0 & & t = 1,2,\ldots,T \\
x_i &\geq 0 & & i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}$$

$$\min \; \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

Portfólió probléma – MAD vs. szemi-MAD

Néhány megjegyzés:

- A két módszer nagyjából ekvivalens, ha az optimális portfóliók hozamainak eloszlása közel szimmetrikus
- ...ez nem szükségszerűen van így...
- ...ezért a szemi-MAD hasznosabbnak tűnik, mert a várható számítási idő rövidebb

CAPM modell

- **C**apital **A**sset **P**ricing **M**odel[2] = Tőkepiaci eszközök árazásának modellje

A modell **alapfeltételezései**:

1. **Tökéletes verseny** (∼ nincsenek startégiai lépések az árfolyamok megváltoztatására)
2. Költségmentes és azonnali információáramlás
3. **Nincsenek adók** és tranzakciós költségek
4. **Egyperiódusos** modell
5. A befektetők **kockázatkerülők**, azonos az információhalmazuk
6. Csak (korlátlanul osztható) pénzügyi eszközök (∼ részvény, kötvény)
7. Mindenki számára a**zosan elérhető kockázatmentes kamatláb** (∼ alapkamat)

[2] Treynor, Sharpe (Nobel díj), Lintner, Mossin

CAPM modell

- Legyen a **kockázatmentes** kamatláb r_f
- egy globális piaci (**kockázatos**) kamatláb r_m
- egy r_i részvény (**kockázatos**) várható hozama $\mathbf{E}(r_i)$

Sharpe: létezik egy β mennyiség úgy, hogy

$$\mathbf{E}(r_i) - r_f = \beta(\mathbf{E}(r_m) - r_f)$$

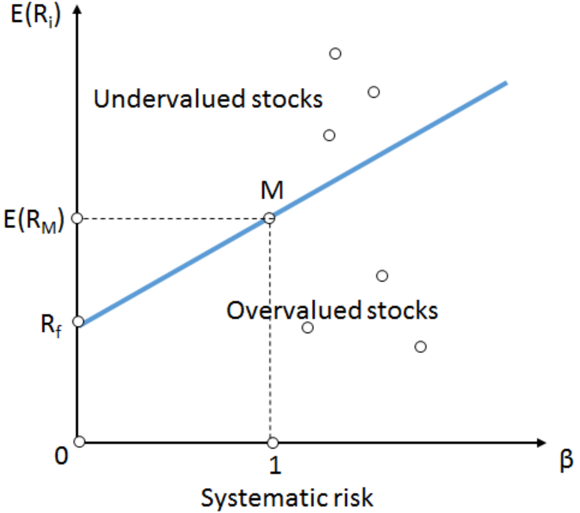
ahol

$$\beta = \frac{\mathbf{C}_{r_i, r_f}}{\mathrm{Var}(r_f)} = \frac{\mathbf{E}(r_i r_f) - \mathbf{E}(r_i)\mathbf{E}(r_f)}{\mathbf{E}(r_f^2) - (\mathbf{E}(r_f))^2}$$

- $\mathbf{E}(r_i) - r_f$: kockázati prémium
- $\mathbf{E}(r_m) - r_f$: piaci prémium

CAPM modell

$\mathbf{E}(r_i) = r_f + \beta(\mathbf{E}(r_m) - r_f)$ egy egyenest ad meg



ábra. A β és az ún. „security market line” :