Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

10. Előadás

Vállalatelhelyezés

Vállalatelhelyezés

Amikor egy új telephelyet kell nyitni, hogy valamilyen szolgáltatást, vagy terméket biztosítunk néhány keresleti pontnak, az egyik legfontosabb kérdés, hogy *hova* helyezzük azt a célfüggvény optimalizálásához.

Egy új vállalat megnyitása stratégiai döntés, általában nagy beruházást igényel és nem változtatható könnyedén.

Vállalatelhelyezési feladat:

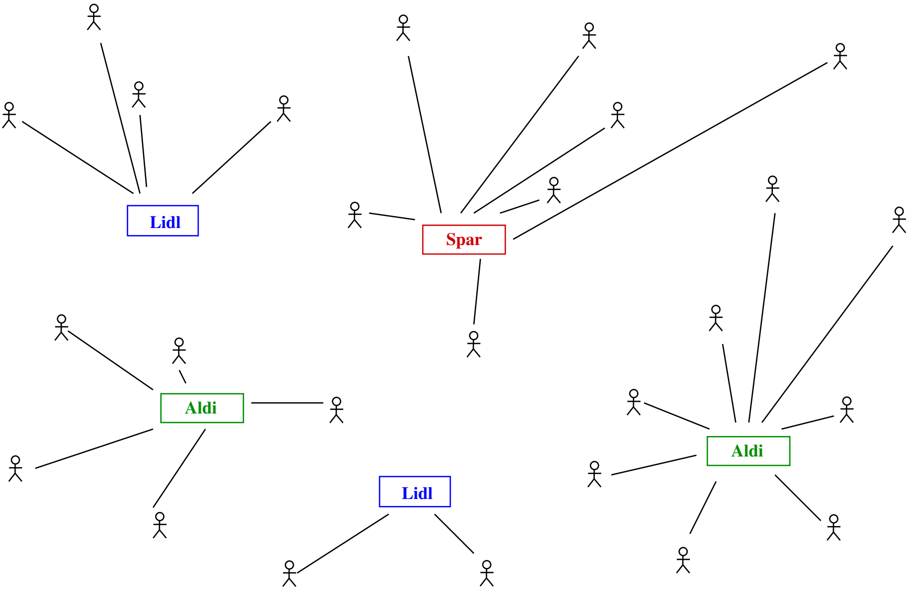
Köz szféra:

- iskolák
- tűzoltóállomások
- kórházak
- szemétlerakók

Privát szektor:

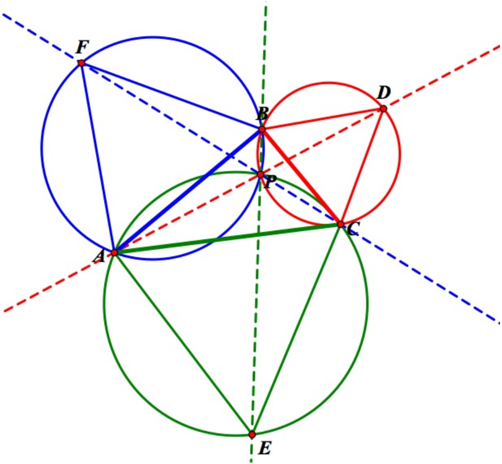
- szupermarketek
- benzinkutak
- éttermek
- pékségek

Példa elhelyezési feladatra



Az első elhelyezési feladat

A Fermat-Weber probléma volt az első elhelyezési feladat, amit már a 17. században meg akartak oldani.



A francia matematikus, Pierre de Fermat adta fel Torricellinek, az olasz fizikusnak a feladatot:

> *"Ha adott egy síkon három pont, találd meg a negyedik pontot úgy, hogy a három adott ponttól vett távolságainak összege a lehető legkisebb legyen."*

1909-ben Alfred Weber használta ezt a három pontos modelt, hogy ipari alkalmazásokban minimalizálja a teljes utiköltséget. Ez a megfogalmazás a legegyszerűbb folytonos vállalatelhelyezési feladatot adja.

A matematikai modell

Keressük azt az $\mathbf{x}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátájú) pontot, amire az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ pontok súlyozott össztávolsága minimális, azaz

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|$$

ahol w_i egy pont súlya és $\|.\|$ az Euklidészi távolságot jelöli, azaz

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_i^2}.$$

A síkon vett három pontra ez

$$\begin{aligned}
\min \quad & w_1 \sqrt{(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2} + \\
+ \quad & w_2 \sqrt{(x_1 - a_{21})^2 + (x_2 - a_{22})^2} + \\
+ \quad & w_3 \sqrt{(x_1 - a_{31})^2 + (x_2 - a_{32})^2}.
\end{aligned}$$

Elhelyezési feladat hozzávalói

Keresési tér: ahol az új vállalatot keressük, lehet

- diszkrét
- hálózat
- folytonos

Keresleti pontok: felhasználók, vásárlók, akinek a keresletét kell kielégíteni. Lehet

- pontokba aggregált
- folytonos (adott sűrűségfüggvénnyel)
- mennyisége ismert vagy valószínűsített

Vállalatok száma: hány telephelyet válasszunk, lehet

- egy
- több

Döntési változók: a helyen kívül néha változó a

- kapacitás
- minőség (méret)
- áru ára

Célfüggvény: mi szerint optimalizáljunk

- minisum
- minimax
- max profit

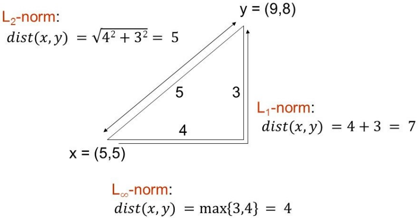
Távolságfüggvény

A távolságfüggvény függhet a keresési tértől, általában

- diszkrét esetben előre adott
- hálózatnál gráfelméleti legrövidebb út, tehát $x \in (v_i, v_j)$ él és v_k csúcs esetén

  $$d(x, v_k) = \min\{x + d_{ik}, l_{ij} - x + d_{jk}\},$$

  ahol d_{ij} a v_i és v_j csúcs távolsága
- folytonos esetben lehet
  - Euklidészi, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_i^2}$,
  - Manhattan-i, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_i|$,
  - Végtelen norma, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i|$.



Center és medián feladat

Legyen adva m keresleti pont, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, és ezek kereslete $w_1, w_2, \ldots, w_m$.
Feltéve, hogy adott a távolságfüggvény, $d_i(x)$, ami $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{x}$ távolságát adja meg, keressük az $\mathbf{x}$ pontot, ahol a célfüggvény:

Medián

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i d_i(\mathbf{x})$$

konvex függvény, könnyű megoldani

iskolák, raktárak

Másnéven Fermat-Weber probléma

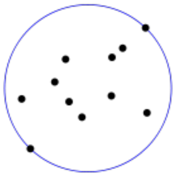
Geogebra Weiszfeld Europa

Center

$$\min \max_{i=1,\ldots,m} w_i d_i(\mathbf{x})$$

ez is konvex, de nem mindenhol differenciálható

vészelhárítási szervek



Anti-center és anti-medián feladat

Itt is m keresleti pont, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, és ezek kereslete $w_1, w_2, \ldots, w_m$ van megadva a $d_i(x)$ távolságfüggvény mellett.

Anti-medián

$$\max \sum_{i=1}^{m} w_i d_i(\mathbf{x})$$

konvex függvény, de most MAX!!!

börtön, nem-kívánt vállalat (pl. zajos, büdös)

Anti-center

$$\max \max_{i=1,\ldots,m} w_i d_i(\mathbf{x})$$

ez is konvex, nem mindenhol differenciálható

veszélyes üzemek, pl. atomerőmű

p-center és p-medián feladat

Itt is adott m keresleti pont, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, és ezek kereslete $w_1, w_2, \ldots, w_n$, illetve a távolságfüggvény, $d_i(\mathbf{x})$.

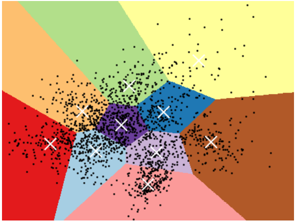
Egy keresleti pont mindig a hozzá legközelebbi vállalatot választja.

Keressük p darab új vállalat helyét, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$-t, ami minimalizálja

p-medián

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i \min_{j=1,\ldots,p} d_i(\mathbf{x}_j)$$

iskolák, raktárak, klaszterezés

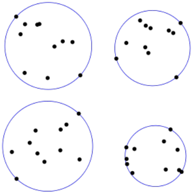


GO

p-center

$$\min \max_{i=1,\ldots,m} w_i \min_{j=1,\ldots,p} d_i(\mathbf{x}_j)$$

vészelhárítási szervek



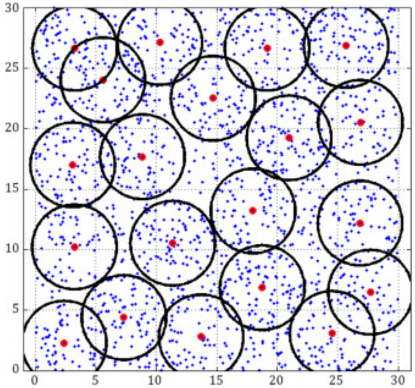
nem konvex, nem konkáv függvények, nem könnyű megoldani

Fedési feladatok

Tegyük fel, hogy a telepítendő üzemek csak egy bizonyos sugáron belül tudják kielégíteni a keresletet.

Adott sugár mellett keressük az új vállalat (vagy vállalatok) helyét, maximalizálva a lefedett keresletet.

$$\max \sum_{\substack{i=1 \\ \exists j \ d_i(\mathbf{x}_j) \leq R}}^{m} w_i$$



Versenyző vállalatok

- A kereslet lehet fix vagy rugalmas.
- Már létezhetnek vállalatok, saját vagy versenytársé.
- A vásárlók dönthetnek melyik vállalatot válaszják.
- Ezt többnyire vonzási függvény segítségével teszik.
- A vonzóság a távolsággal fordítottan arányos.
- A vonzás alapján lehet bináris, vagy arányos.
- Néha el kell dönteni az áru árát is.

Köszönöm a figyelmet!

Őszi félévben tartok **Optimalizálási Modellek** spec.koll.t (laborgyakorlat), ahol modellezéssel, azaz szöveges feladatok matematikai felírásával és azok megoldásával foglalkozunk.

Hasonló témában érdeklődő hallgatóknak feladatok, TDK, szakdolgozat téma, stb. Érdeklődj emailen: boglarka@inf.szte.hu