Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

10. Előadás

Bevezetés

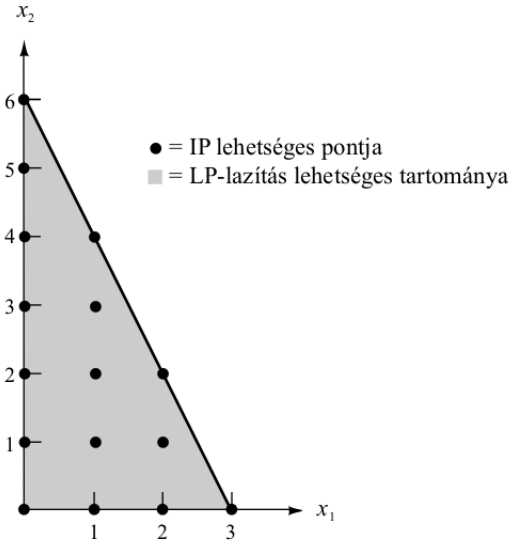
Egy olyan LP-t, amelyben mindegyik változó egészértékű, **tiszta egészértékű programozási feladat**nak hívunk (IP).Például

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & & \text{egész} \end{array}$$

Egy olyan LP-t, amelyben csak néhány változóra követeljük meg az egészértékűséget, **vegyes egészértékű programozási feladat**nak nevezünk (MIP). Fenti példában, ha $x_1, x_2 \geq 0, x_2$ egész a feltétel, akkor egy MIP feladatot kapunk (x_1 folytonos).
Egy olyan egészértékű programozási feladatot, amelyben mindegyik változó bináris, azaz értéke csak 0 vagy 1 lehet, **0–1 IP**-nek hívunk.

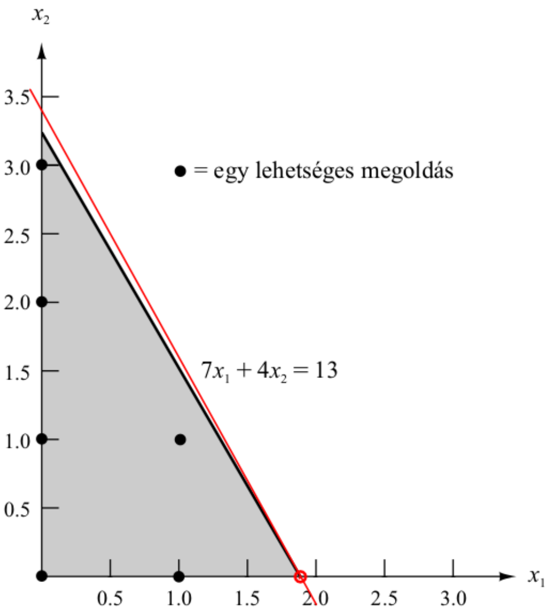
LP-lazítás

Egy egészértékű programozási feladat **LP-lazítása** az az LP, amelyet úgy kapunk az IP-ből, hogy a változókra tett **minden egészértékűségi vagy 0–1 megkötést eltörlünk**.



Állítások

- Bármelyik IP lehetséges megoldáshalmaza része az LP-lazítása lehetséges megoldástartományának.
- Maximalizálásnál az LP-lazítás optimum értéke $\geq$ az IP optimum értékénél.
- Ha az LP-lazítás lehetséges megoldáshalmazának minden csúcspontja egész, akkor van egész optimális megoldása ami az IP megoldása is egyben.
- Az LP-lazítás optimális megoldása bármilyen messze lehet az IP megoldásától.



A korlátozás és szétválasztás módszere egészértékű programozási feladatok megoldására

Példa

A Telfa asztalokat és székeket készít. Egy asztalhoz 1 óra munka és 9 négyzetméter deszkalap szükséges, egy székhez pedig 1 óra munka és 5 négyzetméter deszkalap. Jelenleg 6 óra munka és 45 négyzetméter deszkalap áll rendelkezésre. Egy asztalon a nyereség 8$, egy széken 5$. Írjunk fel egy IP-t a Telfa nyereségének maximalizálására!

Megoldás

Legyen x_1 a készítendő asztalok száma, x_2 a készítendő székek száma.Mivel x_1-nek és x_2-nek is egész értékeket kell felvennie, a Telfának a következő IP-t kell megoldania:

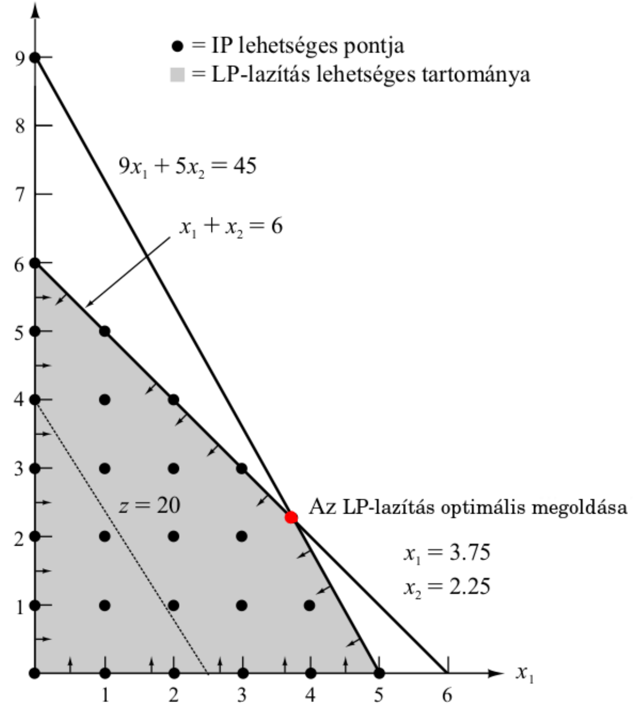
$$
\begin{array}{lrcll}
\max & z & = & 8x_1 + 5x_2 & \\
\text{f.h.} & x_1 + x_2 & \leq & 6 & \text{(munkaidő feltétel)} \\
 & 9x_1 + 5x_2 & \leq & 45 & \text{(deszkalap feltétel)} \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0, \text{egész} &
\end{array}
$$

1. lépés

Megoldjuk az LP-lazítást (1. részfeladat). Ha a megoldás egészértékű, kész vagyunk, ez az IP optimális megoldása.

2. (iteratív) lépés

Ha van lezáratlan részfeladatunk, azt egy x_i nem egész változója szerint két részfeladatra bontjuk. Ha x_i értéke x_i^*, akkor $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ illetve $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$ feltételeket vesszük hozzá a részfeladatunkhoz.



$x_1 = 3.75$ tört értékű, így eszerint bontjuk fel a feladatunkat:

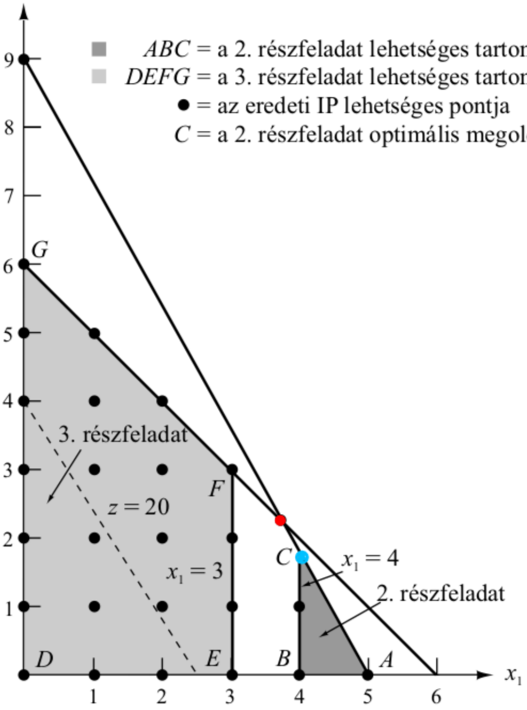
2. részfeladat

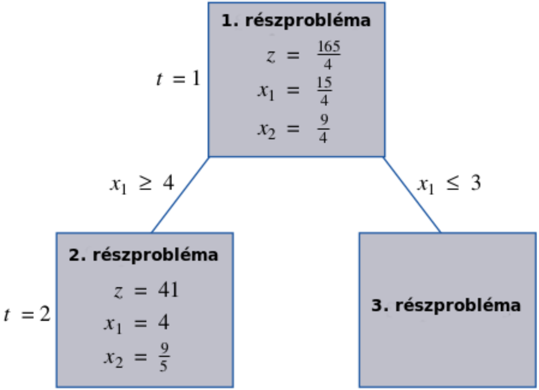
Az 1. részfeladat + az $x_1 \geq 4$ feltétel.

3. részfeladat

Az 1. részfeladat + az $x_1 \leq 3$ feltétel.

Így kizártuk az $x_1 \in]3,4[$ nem egész megoldásokat.





- a részproblémákat egy fába rendezzük
- a gyökér az LP-lazítás, az 1. részfeladat
- a leszármazottai a ágaztatott részproblémák
- a hozzávett feltételt az élen adjuk meg
- a csúcsokban az LP-k optimális megoldásait jegyezzük

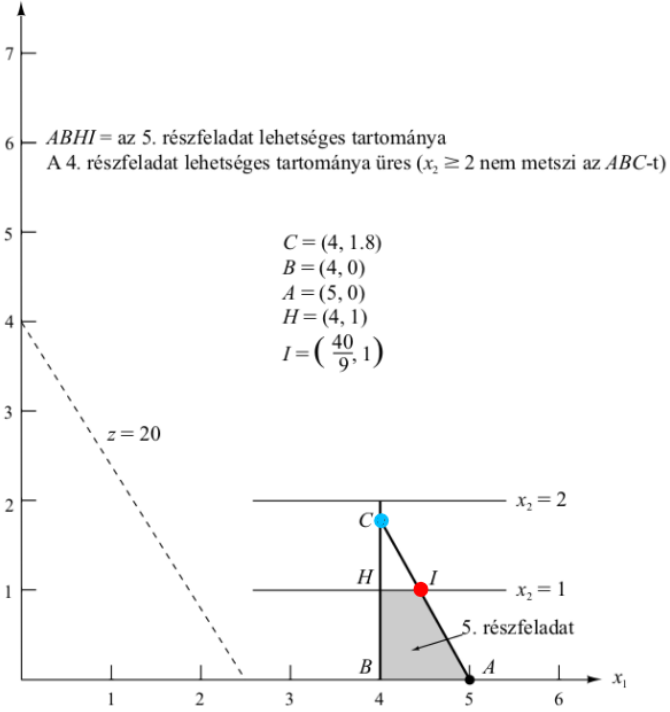
A 2. részprobléma megoldása az x_2 változóban törtértékű, így ezt eszerint ágaztatjuk el.

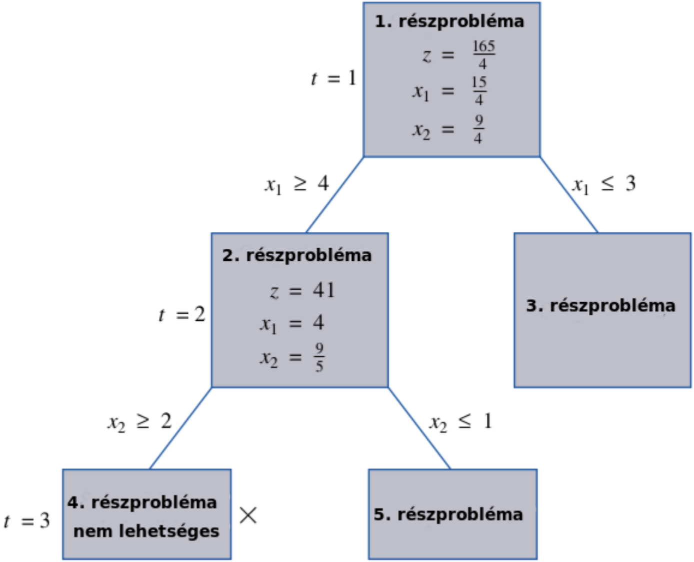
4. részfeladat

2. részfeladat + az $x_2 \geq 2$ feltétel
=
1. részfeladat + az $x_1 \geq 4$ és $x_2 \geq 2$ feltételek

5. részfeladat

2. részfeladat + az $x_2 \leq 1$ feltétel
=
1. részfeladat + az $x_1 \geq 4$ és $x_2 \leq 1$ feltételek





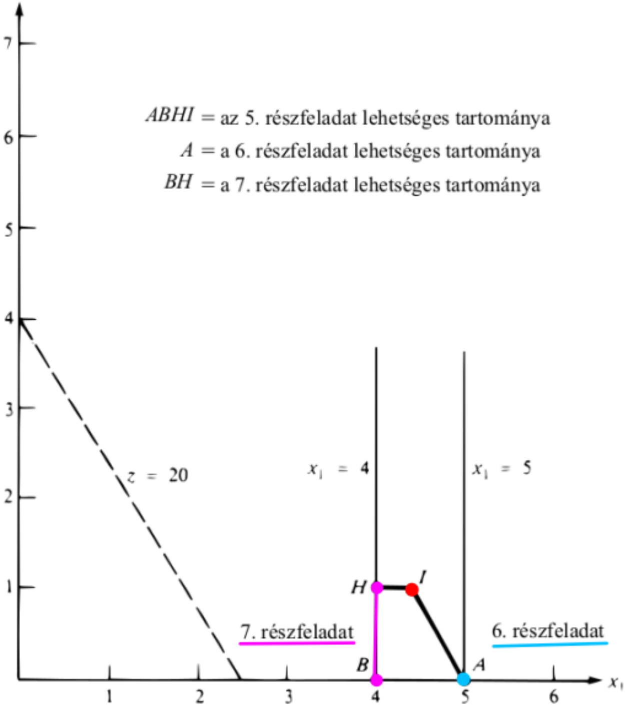
A 4. részproblémának nincs lehetséges megoldása, így ezt a levelet lezárjuk.

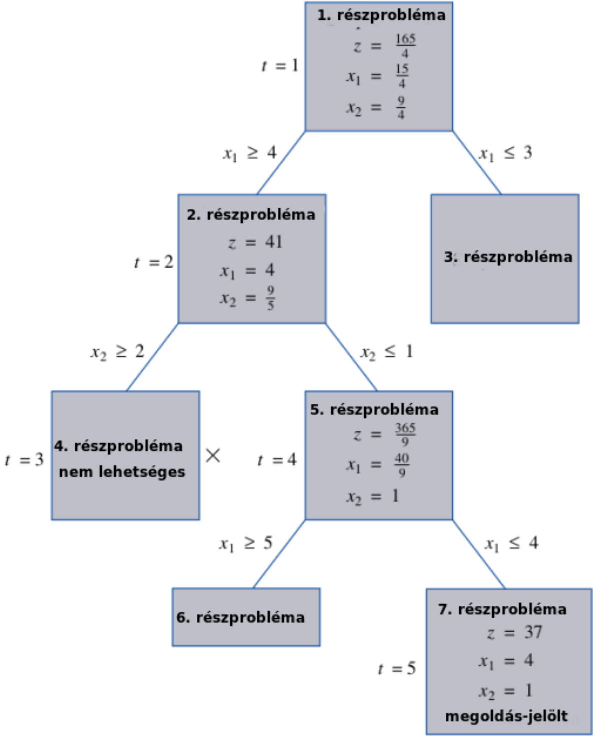
6. részfeladat

5. részfeladat + az $x_1 \geq 5$ feltétel

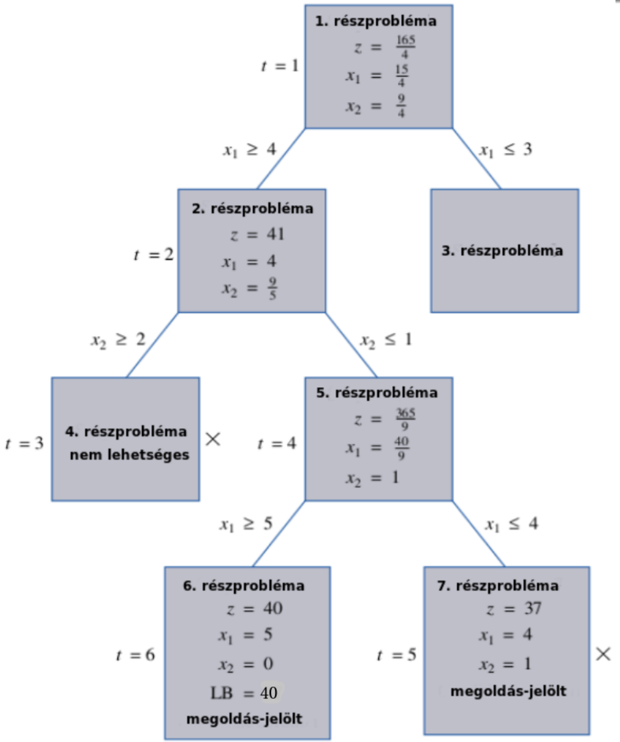
7. részfeladat

5. részfeladat + az $x_1 \leq 4$ feltétel

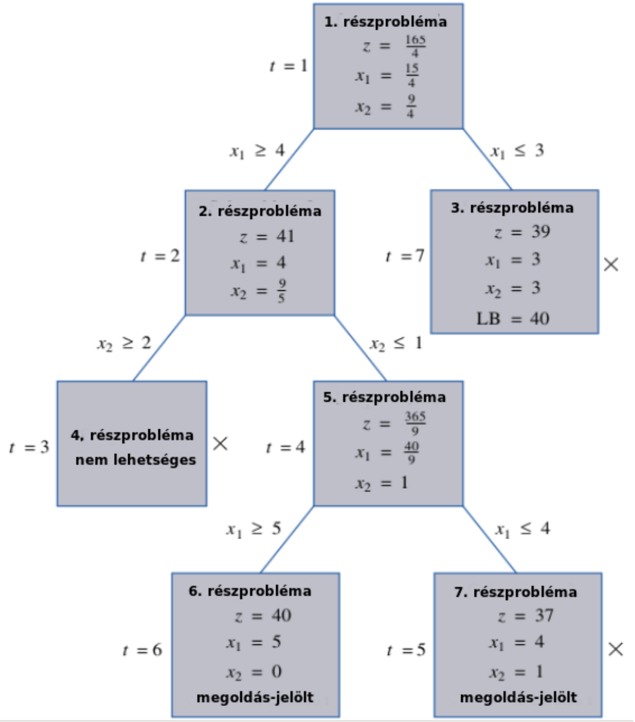




A 7. részproblémának a megoldása egészértékű, így ezt a levelet lezárjuk. A megoldás-jelölt z értéke egy alsó korlát az eredeti IP optimális z értékére, vagyis $LB = 37$.



A 6. részproblémának a megoldása egészértékű, így ezt a levelet lezárjuk, $LB = 40$. Ez alapján a 7. részprobléma megoldását elvetjük.



A 3. részproblémának a megoldása egészértékű, így ezt a levelet lezárjuk. Ezt a részproblémát akkor is lezárhatnánk, ha nem lenne egészértékű, mivel $z = 39 < LB = 40$, így a részfeladatban nem lehet a megoldás-jelöltünknél jobb lehetséges megoldás.

Az IP optimális megoldását a 6. részprobléma megoldása adja.

Egy csúcs felderített (lezárt), ha

- nincs lehetséges megoldása
- megoldása egészértékű
- felderítettünk már olyan egész megoldást, ami jobb a részfeladat megoldásánál (maximalizálásnál $z \leq LB$)

Egy részfeladatot kizárunk, ha

- nincs lehetséges megoldása
- felderítettünk már olyan egész megoldást, ami jobb a részfeladat megoldásánál (maximalizálásnál $z \leq LB$)

Korlátozás és szétválasztás módszere hátizsák feladatra

Hátizsák probléma

Egy olyan IP-t, amelyben csak egy feltétel van, **hátizsák feladatnak** hívunk.

Példa

Josie Camper egy kétnapos túrára készül. Négy tárgy van, amire szüksége lehet, de csak 1400 grammot tud ezekből elvinni. A tárgyak súlya, illetve haszna Josie szerint

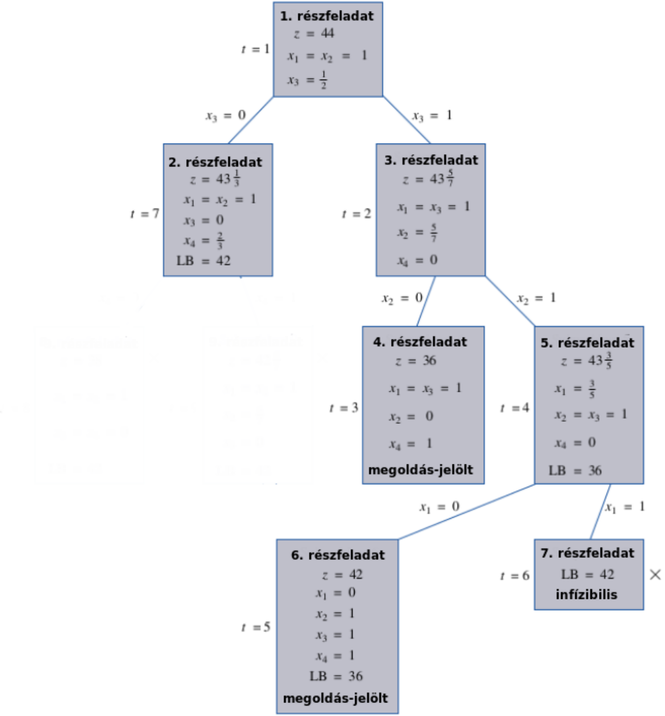
Tárgy	Súly(100g)	Haszon	Relatív hasznosság	Sorrend
Tablet	5	16	3.2	1.
Laptop	7	22	3.1	2.
Okosteló	4	12	3	3.
Elemlámpa	3	8	2.7	4.

Matematikai modell

Legyen $x_i = 1$ ha az i. tárgyat viszi, $x_i = 0$ ha marad. Ekkor a feladat

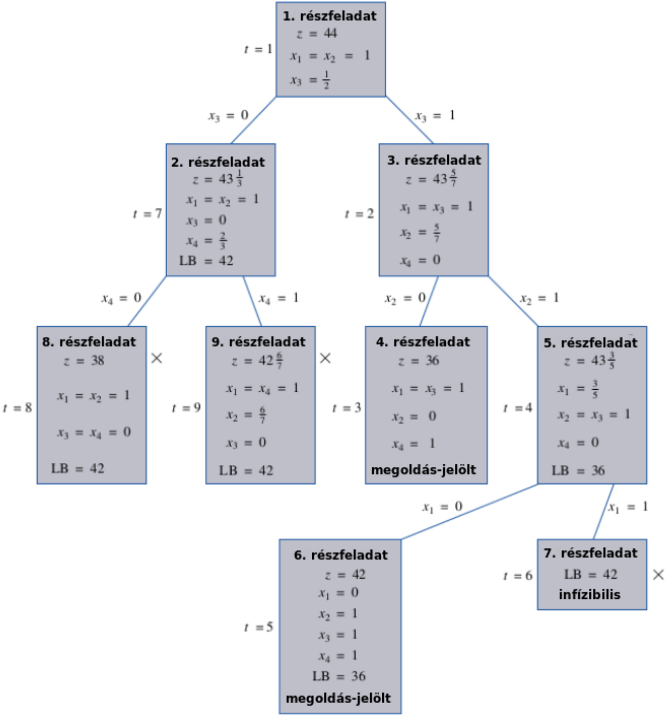
$$\begin{array}{rl} \max & z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{f.h.} & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

Az LP-lazítás megoldása könnyen számítható: a relatív hasznosság szerint tesszük be sorba a tárgyakat a hátizsákba, ami nem fér, annak csak tört részét.
A tablet meg a laptop bekerül, ezzel 1200 g a súlya, a teló 400 g, ennek a fele fér bele: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, z = 16 + 22 + 0.5 * 12 = 44$.
Az egyetlen tört változó szerint szétbontjuk: $x_3 = 1$ (már csak 100 g-nyi tárgyat keresünk) vagy $x_3 = 0$ (csak 3 tárgyból keresünk).



Tárgy	Súly	Haszon
Tablet	5	16
Laptop	7	22
Okosteló	4	12
Lámpa	3	8

2. lépésben az $x_3 = 1$ feltétellel kiegészített feladatot oldjuk meg. Majd hozzávesszük a $x_2 = 0$ feltételt, így kapunk egy egész megoldást, ami alsó korlát a feladat megoldására: LB$=36$. A 6. részfeladat megoldása egész, LB$=$42-re módosul. A 7. részf. nem lehetséges, mind a 4 tárgy nem fér bele a hátizsákba.



Tárgy	Súly	Haszon
Tablet	5	16
Laptop	7	22
Okosteló	4	12
Lámpa	3	8

A 8. részf. elvethető, mert $z \leq LB$.
A 9. részf. elvethető, hiszen a célfüggvény együtthatók miatt minden egész megoldáshoz egészértékű hasznosság tartozik, így az LB=42-nél jobb megoldás nem lehet ezen az ágon sem.

Záró gondolatok a korátozás és szétválasztásról

- Hátizsák feladatnál legrosszabb esetben 2^n részfeladatot kell megoldani, vagyis NP-nehéz (nem polinomiális időben megoldható) a feladat.
- Egészértékű feladatnál ez még rosszabb, 2^{Mn}, ahol M a lehetséges egészek száma egy változóra.
- Duál szimplex algoritmussal úgynevezett meleg indítással gyorsítható az LP-k megoldása. Ilyenkor az apa optimális szimplex táblából indulunk és a hozzávett nem lehetséges feltételből kell duál szimplex lépéseket végrehajtani.
- A fa bejárása lehet LIFO (Last In First Out) azaz mélységi bejárás vagy FIFO (First In First Out) szélességi bejárás.

Modellezési trükkök

Fix költség

Ha gyártunk egy terméket fix költséget kell fizetni, azaz ha $x_i > 0$ a költség K-val nő. Hogy lehet ezt modellezni ?

Modellben

- Legyenek új változók, $y_i = 1$ ha gyártjuk az i. terméket, 0 különben.
- $x_i \leq My_i$, ahol M nagyobb mint az i. termék maximum gyártható mennyisége
- célfüggvénybe Ky_i költség szerepel

Minimum mennyiség

Hogy írjuk fel, ha gyártunk az i. termékből, akkor minimum 1000-et gyártsunk ?

Modellben

- Legyenek új változók, $y_i = 1$ ha gyártjuk az i. terméket, 0 különben.
- $x_i \geq 1000y_i$

Vagy-vagy feltétel

Vagy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ teljesüljön, vagy $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$.

Modellben

- Legyen az új változó $y = 1$ ha $g \leq 0$, 0 ha $f \leq 0$.
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My$, ahol M nagyobb mint f és g maximuma
- $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y)$

Ha-akkor feltétel

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ feltétel teljesülése esetén a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ feltétel is teljesüljön, de ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ nem teljesül, akkor mindegy, hogy a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ teljesül-e vagy sem.

Modellben

- Legyen az új változó $y = 1$ ha $f > 0$, 0 ha $f \leq 0$.
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My$, ahol M nagyobb mint f és $-g$ maximuma
- $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq -M(1 - y)$