Operációkutatás I.

2018/2019-2.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

1. Előadás

Követelmények, teljesítés feltételei

- Vizsga anyaga
  - Előadásokhoz tartozó **diasor**
  - Az előadásokon **elhangzott anyag**
- Vizsga menete: írásbeli vizsga
  1. egy LP modell felírása (a kiadott feladatok közül) + kérdéssor (alapvető fogalmak, tételek, nehezebb összefüggések)
  2. osztályzási szempontok: ld. előadás honlapja
- Fontos jelölések a jegyzetben
  - **Definíció vastag kék**
  - **Tétel vastag piros**
- Érdemjegy határok
  - 5: 80%+
  - 4: 70%-79%
  - 3: 60%-69%
  - 2: 50%-59%

Követelmények – gyakorlat

- A gyakorlaton 2 db dolgozat lesz:
  - 2 dolgozat az előadás időpontjában a TIK-ben, coospace-es teszt: március 19. és május 7.
  - 4 db házi feladat Coospace-en
- **A teljesítés feltétele**:
  - A 2 dolgozat összpontszámának legalább 50%-át el kell érni
  - Külön-külön legalább 30-30%-ot az egyes dolgozatokból
  - 4-ből 3 házi feladat beadása helyesen
- Javító dolgozat a szorgalmi időszak utolsó héten pénteken, illetve vizsgaidőszak első hetében lesz

További ajánlott irodalom

- Bajalinov Erik, Imreh Balázs: Operációkutatás. Polygon, 2001.
- Pluhár András: Operációkutatás I. kézirat
  http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/lp.pdf

Mi az operációkutatás?

- **Problémamegoldási technikák** és módszerek, melyek **valós** életben felmerülő **feladatok megoldására** dolgoztak (és dolgoznak) ki, például
  - optimalizálási eljárások
  - szimulációk
  - sztochasztikus modellek
  - döntéselmélet
  - adatelemzés
- Elnevezés: a II. világháború idején az USA hadsegere egy speciális kutatócsoportot hozott létre → katonai operációk matematikai megalapozása, döntéstámogatás
  - Meghatározó tagja George Dantzig
  - **lineáris programozás (LP)** (újra) megalkotása és
  - hatékony algoritmus az LP feladat megoldására → **szimplex módszer**

Miért fontos a lináris programozás?

- Számos probléma formalizálható lineáris programozási feladatként
- Hatékony megoldási módszerek léteznek a megoldására
- vagy legalábbis jó közelítését adja a megoldásnak
- Bonyolult problémákat tudunk kezelni

Néhány pozitív példa

- CITGO petróleum: Klingman és társai (1987) különböző „opkut” módszerek alkalmazott: a modellek kb. 70 millió $-t spóroltak a cégnek évente (finomítók működésének és a kínálat elosztásnak az optimalizálása)
- San Francisco-i rendőrség járőrszolgálat beosztás: Taylor és Huxley (1989), 5 millió $ megtakarítás évente (számos más város átvette a módszert)
- GE hitelkártya szervíz: Makuch és társai (1989), fizetési rendszer kialakítása

Jelenleg is rendkívül fontos **alkalmazási területek**: logisztika és szállítmányozás, közlekedés – útvonaltervezés, ütemezési problémák, stb.

Mivel foglalkozunk a félév során?

- Lineáris programozás (LP) – szimplex módszer
- A nemlineáris optimalizálás alapjai
- Pénzügyi modellezés
- További példák valós alkalmazásokra

Erőforrás allokáció – product mix

Kiindulás:

- Egy kis játékgyártó cég kétféle terméket gyárt: katonákat és vonatokat. Mindkét termék gyártása két fázisból áll: fafaragás, majd lakkozás-festés

Költségek:

- Egy katona előállítási költsége: \$10 anyagköltség, \$14 munkadíj; 1 óra fafaragás, 2 óra lakkozás-festés
- Egy vonat előállítási költsége: \$9 anyagköltség, \$10 munkadíj; 1 óra fafaragás, 1 óra lakkozás-festés

Erőforrások:

- Fafaragó műhely: 80 munkaóra
- Lakkozás-festés: 100 munkaóra

Erőforrás allokáció – product mix

Ár:

- 1 db katona ára $27
- 1db vonat ára $21

További megkötés: A katonára való keresletcsökkenés miatt a cég legfeljebb 40 katonát akar gyártani.

Kérdés: Mi az optimális (legjobb) gyártási stratégia (azaz melyik termékből mennyit gyártsunk), hogy a cég profitját maximalizáljuk?

Terminológia

döntési változók	$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$
változók értelmezési tartománya	$x_1, x_1 \geq 0$
cél	max/min probléma
célfüggvény (max/min)	$2x_1 + 5x_2$
korlátozások (egyenletek, egyenlőtlenségek)	$3x_1 + 2x_2 \leq 10$

Erőforrás allokáció – product mix

Döntési változók:

- x_1: a gyártandó katonák száma
- x_2: a gyártandó vonatok száma

Cél: a profit maximalizálása

- $\$27 - \$10 - \$14 = \$3$: a profit, ha eladunk egy katonát $\Rightarrow 3x_1$ a profit, ha x_1 db katonát adunk el
- $\$21 - \$9 - \$10 = \$2$: a profit, ha eladunk egy vonatot $\Rightarrow 2x_2$ a profit, ha x_2 db vonatot adunk el

Célfüggvény:

- $z = 3x_1 + 2x_2$: a profit, ha eladunk x_1 katonát és x_2 vonatot

Erőforrás allokáció – product mix

Korlátozások:

- x_1 katona és x_2 vonat gyártásához
  - $1x_1 + 1x_2$ óra fafaragás szükséges; összesen 80 óra áll rendelkezésre
  - $2x_1 + 1x_2$ óra lakkozás-festés kell; összesen 100 óra áll rendelkezésre
- a gyártott katonák száma, x_1, nem lehet több, mint 40

Változókra vonatkozó korlátozások: x_1 és x_2 nemnegatív (*és egész...*).

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ & \begin{array}{rrl} x_1 & +x_2 & \leq 80 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq 100 \\ x_1 & & \leq 40 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array}}$$

Ezt a rendszert **programnak** hívjuk. **Lineáris**, mert

- a célfüggvény a döntési változók lineáris függvénye
- a korlátozó feltételek lineáris egyenlőtlenségek

Keverés probléma – blending

Kiindulás:

- Egy gyár olyan ötvözetet gyárt, ami 30% ólmot, 30% cinket és 40% ónt tartalmaz.
- Ezt már létező ötvözetek keverésével gyártják le. A létező ötvözetek összetételét és árát a következő táblázat tartalmazza:

Ötvözet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Keverék
Ólom (%)	20	50	30	30	30	60	40	10	10	30
Cink (%)	30	40	20	40	30	30	50	30	10	30
Ón (%)	50	10	50	30	40	10	10	60	80	40
Ár ($ / kg)	7.3	6.9	7.3	7.5	7.6	6.0	5.8	4.3	4.1	min

Feladat: Minimalizáljuk a gyártási költséget.

Keverés probléma – blending

Döntési változók: $x_1, x_2, \ldots, x_9$, ahol

- x_i: az i-edik létező ötvözetből használt mennyiség egy egységnyi keverékhez

A döntési változókra $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 1$ kell, hogy teljesüljön.

A következő lineáris programot írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
\text{Min} & z = 7.3x_1 & + 6.9x_2 & + 7.3x_3 & + 7.5x_4 & + 7.6x_5 & + 6.0x_6 & + 5.8x_7 & + 4.3x_8 & + 4.1x_9 & \\
 & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & + x_8 & + x_9 & = 1 \\
 & 0.2x_1 & + 0.5x_2 & + 0.3x_3 & + 0.3x_4 & + 0.3x_5 & + 0.6x_6 & + 0.4x_7 & + 0.1x_8 & + 0.1x_9 & = 0.3 \\
 & 0.3x_1 & + 0.4x_2 & + 0.2x_3 & + 0.4x_4 & + 0.3x_5 & + 0.3x_6 & + 0.5x_7 & + 0.3x_8 & + 0.1x_9 & = 0.3 \\
 & 0.5x_1 & + 0.1x_2 & + 0.5x_3 & + 0.3x_4 & + 0.4x_5 & + 0.1x_6 & + 0.1x_7 & + 0.6x_8 & + 0.8x_9 & = 0.4 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_9 & \geq 0
\end{array}
$$

Tényleg szükségünk van minden egyenletre?

Erőforrás allokáció - második példa

Kiindulás:

- Egy bútorgyártó cég 4 különböző típusú széket gyárt.
- Minden székhez fára és acélra van szükség.
- Az egyes székek gyártáshoz szükséges mennyiségeket, az egy-egy szék eladásából származó profitot és a rendelkezésre álló anyagmennyiségeket a következő táblázat mutatja:

	Szék1	Szék2	Szék3	Szék4	Elérhető mennyiség
Acél	1	1	3	9	4400 (kg)
Fa	4	9	7	2	600 (kg)
Profit	$12	$20	$18	$40	max

Feladat: Melyik termékből mennyit gyártsunk, hogy a profit maximalizáljuk (feltéve, hogy minden legyártott terméket el tudunk adni)?

Erőforrás allokáció - második példa

Döntési változók: x_1, x_2, x_3, x_4

- x_i: az i-edik székből gyártandó darabszám; $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,3,4)$

Cél: a profit maximalizálása

Célfüggvény:

- $z = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$

Korlátozó feltételek:

- legfeljebb 4400 kg acél áll rendelkezésre: $x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 \leq 4400$
- legfeljebb 600 kg fa áll rendelkezésre: $4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 600$

Összegezve, a lineáris programunk:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrl}
\text{Max} & z = 12x_1 & + 20x_2 & + 18x_3 & + 40x_4 & \\
& x_1 & + x_2 & + 3x_3 & + 9x_4 & \leq 4400 \\
& 4x_1 & + 9x_2 & + 7x_3 & + 2x_4 & \leq 600 \\
& & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0
\end{array}}$$

A lineáris programozás alapfeladata

A lineáris programozás (LP) alapfeladata **standard formában**

$$
\boxed{
\begin{array}{lrl}
\text{Max} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & = z \\
\text{Felt.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \vdots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & x_1, \dots, x_n & \geq 0
\end{array}
}
$$

Lineáris programozási feladat: keressük meg adott lineáris, $\mathbb{R}^n$ értelmezési tartományú függvény (célfüggvény) szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) értelmezési tartományának adott lineáris korlátokkal (feltételekkel) meghatározott részében.

Lehetséges megoldás: olyan $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy p_i-t x_i-be helyettesítve ($\forall i = 1, \dots, n$) kielégíti a feladat feltételrendszerét

Lehetséges megoldási tartomány: az összes lehetséges megoldás (vektor) halmaza

Optimális megoldás: olyan lehetséges megoldás, ahol a célfüggvény felveszi maximumát/minimumát