EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Jelek és rendszerek

Pletl Szilveszter, Kincses Zoltán

2019

Európai Unió
Európai Szociális
Alap
Magyarország Kormánya
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Tartalom

1. Bevezető

Mindennapjaink során gyakran találkozunk a „rendszer” és a „jel” fogalmakkal, mely fogalmak igen általánosak és nehéz őket speciálisan meghatározni. Mindenképp kijelenthetjük, hogy a jelek és rendszerek elmélete, és annak gyakorlati alkalmazása nélkül nem működnének korunk mérnöki megoldásai. A mérnökök nagy szerepet játszanak az egyes megoldások tervezése, kivitelezése és működtetése terén. A mérnök-informatikus szakemberek esetében elengedhetetlen a jel és rendszerelmélet terén való kompetencia megszerzése. A Jelek és rendszerek tárgy a mérnök informatikus alapszakos hallgatók számára a legtöbb felsőoktatási intézményben alapozó és kötelező tárgyként szerepel a tantervben. A témakörben számos, minőséges tankkönyv, jegyzet és példatár készült. A jel és rendszerelmélet területe nagyon széles, az egyes elemek különböző mélységgel tárgyalhatók, jelen tankönyv a témakör lefedését tekintve nem törekszik a teljességre, és az alapképzésben használható, nem túl mély elméleti tárgyalásmódot alkalmazza. Az első fejezetben áttekintésre kerül az időben folytonos és diszkrét jelek leírása, a folytonos és diszkrét idejű lineáris idővariáns (Linear Time Invariant, LTI) rendszerek jellemzése, tulajdonságainak ismertetésére, továbbá bemutatásra kerülnek a diszkrét és folytonos idejű legfontosabb alapfüggvények is.

Az irodalomjegyzékben számos művet sorolunk fel, amelyekre jelen tankönyv megírásakor részben támaszkodtunk. A belső hivatkozásokat általában mellőztük, de minden állítás, amely említésre kerül, megtalálható a felsorolt művekben.

1.1. Tantárgyleírás

(1.) Tantárgy neve: **Jelek és rendszerek**	**Kreditértéke: 3**
A tantárgy **besorolása: kötelező**	
A tantárgy elméleti vagy gyakorlati jellegének mértéke, „képzési karaktere”: 80-20% (kredit%)	
A **tanóra**[1] **típusa**: előadás. és **óraszáma**: 30 az adott **félévben**, (*ha nem (csak) magyarul oktatják a tárgyat, akkor a* ***nyelve****:*) Az adott ismeret átadásában alkalmazandó **további** (*sajátos*) **módok, jellemzők** *(ha vannak)*: előadás, magyarázat, közös feladatmegoldás és megbeszélés, önálló feladatmegoldás (zárthelyi). Az előadás nagyrészt az oktató aktivitására épül, de a félév során több közös feladatmegoldás valamint feladatmegbeszélés is lesz, valamint egy darab zárthelyi megírása kötelező.	
A **számonkérés** módja (koll. / gyj. / **egyéb)**: kollokvium Az ismeretellenőrzésben alkalmazandó **további** (*sajátos*) **módok** *(ha vannak)***:** A félévközi zárthelyi minimum szintjének teljesítése után a vizsgaidőszakban írásbeli és szóbeli számonkérés a tematika témaköreinek megfelelően az órai anyag alapján	
A tantárgy **tantervi helye** (hányadik félév): **3**	
Előtanulmányi feltételek *(ha vannak)*: Kalkulus I, Diszkrét matematika	
Tantárgy-leírás: az elsajátítandó **ismeretanyag tömör, ugyanakkor informáló leírása**	

A tantárgy célja:
A tantárgy a jel és rendszerelmélettel kapcsolatos alapokat ismerteti. Részletesen kitér a jelek és rendszerek folytonos és diszkrét időtartományban való vizsgálati módszereinek megismerése. A tantárgy célja, hogy megismertesse a hallgatókat a fontosabb folytonos és diszkrétidejű jelekkel valamint azok feldolgozásával, a rendszerek idő és frekvenciatartománybéli vizsgálatával, a szűrők működésével, valamint a mintavételezés és digitalizálás problematikájával. További cél, jártasság kialakítása a jelek és rendszerek vizsgálatára alkalmas programok felhasználására.

Témakörök/tartalom:
1. Általános áttekintés, jel és rendszertechnikai alapfogalmak.
2. Néhány fontosabb folytonos és diszkrét idejű jel, valamint azok konvolúciója.
3. Rendszerek osztályozása, soros és párhuzamos kapcsolása, stabilitás.
4. Folytonosidejű és diszkrét idejű lineáris rendszerek tulajdonságai.
5. Folytonosidejű és diszkrét idejű jelek Fourier analízise.
6. Folytonos idejű LTI rendszerek frekvencia és Laplace-operátor tartományban
7. Diszkrét idejű jelek és rendszerek a z-operátor tartományban.

A **2-5** legfontosabb *kötelező,* illetve *ajánlott* **irodalom** (jegyzet, tankönyv) felsorolása bibliográfiai adatokkal (szerző, cím, kiadás adatai, (esetleg oldalak), ISBN)

Fodor György: Jelek és rendszerek. Műegyetem Kiadó, 2006, ISBN 963 420 869

Zoran Gajić: Linear Dynamic Systems and Signals. Prentice Hall, 2003, ISBN 0-201-61854-0

Lantos Béla: Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Egyváltozós szabályozások. Akadémiai Kiadó, 2. kiadás, 2005, ISBN 963 05 8249

Edward W. Kamen, Bonnie S. Heck: Fundamentals of Signals and Systems Using The Web and MATLAB, Second Edition. 2000, Prentice-Hall.

Azoknak az **előírt** s**zakmai kompetenciáknak, kompetencia-elemeknek** *(tudás, képesség* stb., *KKK* ***7.*** *pont*) a felsorolása, **amelyek kialakításához a tantárgy jellemzően, érdemben hozzájárul**

A KKK-ban szereplő kompetenciák, amelyek kialakításához a tantárgy hozzájárul:

Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia
Ismeri a villamosmérnöki szakterület műveléséhez szükséges általános és specifikus matematikai, természet- és társadalomtudományi elveket, szabályokat, összefüggéseket, eljárásokat.	Képes alapvető hardver és szoftver ismereteit felhasználva számítógépek kezelésére és programozására.	A megszerzett villamosmérnöki ismeretei alkalmazásával törekszik a megfigyelhető jelenségek minél alaposabb megismerésére, törvényszerűségeinek leírására, megmagyarázására.	Önállóan képes szakterületén átfogó, megalapozó szakmai kérdések értelmezésére.
Ismeri a villamosmérnöki szakterület legfontosabb elméleteit, összefüggéseit és ezek terminológiáját.	Képes irányítástechnikai eszközök alkalmazására.	Nyitott és fogékony a szakterületével kapcsolatos új, korszerű és innovatív eljárások, módszerek alkalmazására.	Villamosmérnöki feladatok megoldása során önállóan választja ki és alkalmazza a releváns problémamegoldási módszereket.

Ismeri a villamosmérnöki szakterület ismeret- és tevékenységrendszeréne k alapvető tényeit, határait, korlátait.	Képes alkalmazás szintű ismeretei felhasználásával a kiválasztott specializációban mérnöki feladatok megoldására (tervezés, fejlesztés, üzembe helyezés, üzemeltetés, szolgáltatás, karbantartás).	Megosztja tapasztalatait munkatársaival. -	Irányítás mellett közreműködik a műszaki szakterület szakembereivel adott projekt megvalósításában.
Ismeri a villamosmérnöki szakterületen használt tervezési elveket.	Képes alkalmazni a szakterület tanulási, ismeretszerzési és adatgyűjtési módszereit.	-	Felelősséget vállal szakmai döntéseiért, az általa, valamint irányítása alatt végzett munkafolyamatokér t.
Ismeri az elektronika, az infokommunikáció, az irányítástechnika, az elektronikai technológia és a villamos energetika alapvető tervezési elveit, módszereit és eljárásait.	Képes a szakterületének jellemző online és nyomtatott szakirodalmának feldolgozására magyar és idegen nyelven, és annak mérnöki feladatokra való felhasználására.	-	A műszaki szakterületen képesítésének megfelelően önirányító és irányító.
-	Képes arra, hogy szakterületének megfelelően, szakmailag adekvát módon, szóban és írásban kommunikáljon anyanyelvén és legalább egy idegen nyelven.	-	-
-	Gyakorlati tevékenységek elvégzéséhez megfelelő	-	-

	kitartással rendelkezik.		

A tantárggyal kialakítandó <u>konkrét</u> tanulási eredmények

Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia
Tisztában van a legfontosabb jel és rendszertechnikai alapfogalmakkal	Képes eligazodni a jel és rendszertechnika alapfogalmaiban, alkalmazott jelölésrendszerében. Képes a szintetikus és analitikus gondolkodásra	Törekszik a jel és rendszertechnikai alapfogalmak, valamint a jelölésrendszer alkalmazására	Önállóan használja a rendszertechnikai alapfogalmakat és jelölésrendszert
Ismeri a tipikus folytonos és diszkrét idejű vizsgálójeleket, valamint azok konvolúcjóját	Képes a folytonos és diszkrét idejű jelek csoportosítására, előállítására	Kész a folytonos és diszkrét idejű jelek alkalmazására rendszertechnikai vizsgálatokban	Önállóan alkalmazza a diszkrét és folytonos idejű jeleket a rendszertechnikai vizsgálatokban
Felismeri a különböző rendszerosztályokat	Képes a rendszerek osztályozását elvégezni	Szem előtt tartja a rendszerosztályozás alapelveit	Kreatívan elvégzi a rendszerosztályozási feladatokat
Tiszában van a rendszerek soros és párhuzamos kapcsolásával valamint stabilitásával	Képes értelmezni a sorosan és párhuzamosan kapcsolt rendszerek működését és meghatározni stabilitásukat	Tudatosan alkalmazza a rendszerek soros és párhuzamos kapcsolásának alapelveit, és stabilitásvizsgálati módszereit	Önállóan meghatározza az eredő rendszer átviteli függvényét, a rendszerek stabilitását
Ismeri a folytonos és diszkrét idejű lineáris rendszerek tulajdonságait	Alkalmazza a rendszerosztályozás során a folytonos és diszkrét idejű rendszerek tulajdonságait	Figyelembe veszi a folytonos és diszkrét idejű rendszerek tulajdonságait	Önállaóan meghatározza a folytonos és diszkrét idejű rendszertulajdonságokat
Tisztában van a folytonos és diszkrét idejű jelek Fourier analízisével	Képes a folytonos és diszkrét idejű jelek Fourier analízisének elvégzésére	Tudatosan alkalmazza a Fourier analízist a folytonos és diszkrét idejű jelek esetében	Útmutatás nélkül elvégzi a Fourier analízist a folytonos és diszkrét idejű jeleken
Ismeri a folytonos LTI rendszer válaszának meghatározási módszereit frekvencia és Lapalce-operátor tartományban	Képes meghatározni a folytonos LTI rendszer válaszát frekvencia és Lapalce-operátor tartományban	Tudatosan alkalmazza a Bode-diagramot és a Laplace-transzformációt a folytonos LTI rendszer válaszának meghatározásához	Autonóm módon képes a folytonos LTI rendszerek idő és frekvenciatartománybéli válaszának meghatározására
Tisztában van a diszkrét idejű jelek és rendszerek z-operátor	Képes elvégezni a diszkrét idejű jelek és rendszerek vizsgálatát	Kész a diszkrét idejű jelek és rendszerek vizsgálati módszereinek	Önállóan is alkalmazza a diszkrét idejű jelek és rendszerek z-operátor

tartományban történő vizsgálatával	z-operátor tartományban	megfelelő alkalmazására z-operátor tartományban	tartományban történő vizsgálati módszereit

Tantárgy felelőse (*név, beosztás, tud. fokozat*)**: Pletl Szilveszter, főiskolai tanár, PhD**

Tantárgy oktatásába bevont oktató(k), ha van(nak) (*név, beosztás, tud. fokozat*)**:**
Kincses Zoltán, adjunktus, PhD, Vadai Gergely, adjunktus, PhD

2. Jel és rendszerelméleti alapfogalmak.

Ebben a fejezetben kerül sor a jelekkel és rendszerekkel kapcsolatos elmélet rövid áttekintésére, időben folytonos és diszkrét jelek leírására, a folytonos és diszkrét idejű lineáris idővariáns (Linear Time Invariant, LTI) rendszerek jellemzésére és tulajdonságainak ismertetésére. Ez a fejezet tartalmazza a jelek és rendszerek reprezentációjához szükséges matematikai alapfogalmakat. Diszkrét és folytonos idejű esetben bemutatásra kerülnek a legfontosabb alapfüggvények, mint az impulzusfüggvény, egység ugrásfüggvény, komplex exponenciális függvény. A fejezet kitér a rendszerek, valamint azok üzemmódjainak, osztályainak bemutatására, továbbá bemutatja a lineáris időinvariáns rendszereket is.

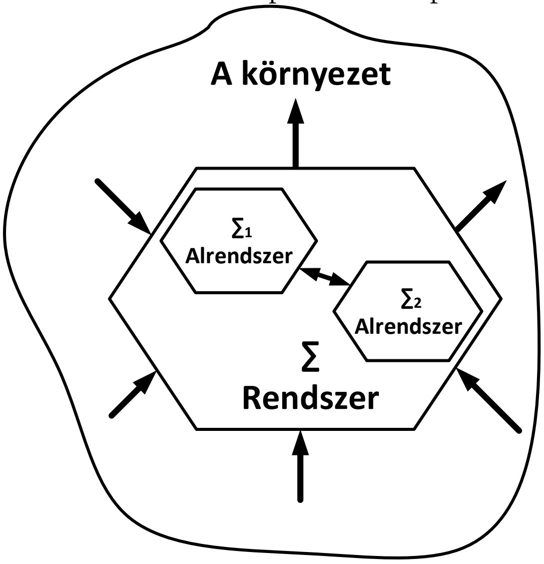
2.1. Rendszertechnikai alapfogalmak

A tananyag megértése érdekében mindenképp tisztázni kell néhány a rendszerrel kapcsolatos alapfogalmat. A rendszer fogalmának meghatározása többféle szempontból lehetséges. Napjainkban rendszerként tekintünk minden fizikai és algoritmikus megvalósításra. A fizikai megjelenési forma hardveres, míg az algoritmikus lehet szoftveres is. A történelem során több jelentős definíció jelenik meg a rendszereket illetően. Az első csoportba tartoznak a matematikai modellek irányából megközelítő definíciók, a második csoport definíciói a rendszert, mint relációk által összekapcsolt elemek halmazát tekintik, míg a harmadik csoportba sorolható meghatározások a bemenet, kimenet, információfeldolgozás fogalmával operálnak. Szadovszkij szerint: „a rendszert alkotó halmaz elemei között meghatározott viszonyok és összefüggések jóvoltából az elemek együttese olyan összefüggő egésszé válik, amelyben minden egyes elem végsősoron valamennyi többi elemmel összefügg, és tulajdonságai ennek az összefüggésnek a figyelembevétele nélkül nem érthetők meg. A rendszer tulajdonságai viszont nem egyszerűen az alkotóelemek tulajdonságainak összegeként állnak elő, hanem az elemek közötti összefüggések és viszonyok jelenléte és specifikuma által nyernek meghatározást”. A továbbiakban a mérnökök számára két egyenértékű érdemes definíció kerül megadásra:

1. A valóságnak minden térben elhatárolt részét, ahol a különböző anyag- és mozgásformák elemeit kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolják össze, rendszernek nevezzük.
2. A rendszer, valóságos vagy elképzelt objektumok viszonylag jól körülhatárolható olyan halmaza, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak egybe.

Elméleti szempontból rendszernek tekinthető minden olyan transzformáció, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel. A rendszer elemének tekintjük azt az objektumot, amelyet a rendszer vizsgálatához már további részekre nem szükséges felbontani. A rendszer elemei közötti és a környezethez fűződő összefüggések és kapcsolatok megvalósításai lehetnek egyszerű vagy bonyolult fizikai, kémiai, biológiai vagy információs jellegűek. A rendszer leírását, az összefüggések matematikai meghatározását, a matematikai modellt röviden (bár nem eléggé szabályosan) szintén a rendszer szóval jelöljük.

Mivel minden természetben előforduló, vagy ember által létrehozott rendszer, folyamat, jelenség kölcsönhatásban van egymással, ha bármilyen rendszert tanulmányozunk is, figyelembe kell vennünk a környezet hatását a rendszerre, és a rendszer hatását a környezetre. Ezek a hatások lehetnek olyanok, amelyek a rendszer meghatározott pontjaiban összpontosulnak, például a rendszer egy elemére ható erő formájában. A hatások azonban lehetnek elosztottak is, ekkor az egész rendszernek vagy valamelyik részének felületére, esetleg minden egyes pontjára hatnak. Ilyen elosztott jellegűek a hőmérséklet, vagy nyomás hatásai, amelyek egy rendszer felületének bizonyos részeire hatnak, vagy a gravitációs és mágneses terek hatásai stb.. A rendszer és környezete összetartozó, dialektikus egységet képező fogalmak. Szétválasztásuk, a rendszer határvonalainak kijelölése, a rendszer körül határolása a feladattól, a vizsgálati szemponttól a beavatkozást igénylő szituációtól függ. A 2-1. ábra vázlatosan tünteti fel a rendszert a tér olyan részeként, amelyben összes elemei, és a környezethez fűződő összes kapcsolata összpontosítva (koncentrálva) vannak.



2-1. ábra – A rendszer és környezete.

A kapcsolatokat ábrázoló nyilak a hatások terjedésének irányát mutatják. Minden rendszer jellemezhető az azt felépítő elemek tulajdonságaival, és azokkal a kapcsolatokkal, amelyek az adott rendszer és környezet kölcsönhatását jellemzik. Fontos tény, hogy akármilyen részletesen és alaposan is tanulmányozzuk a rendszer tulajdonságát és viselkedését, sohasem tudjuk figyelembe venni mind azt a végtelen sok tényezőt, amely a rendszert közvetve vagy közvetlenül befolyásolja. Ezért minden tanulmányozás, kísérlet eredményét csakis megfelelő fenntartással fogadhatjuk el és alkalmazhatjuk a gyakorlatban.

A valóságban jelentkező rendszerek sokfélék. Működésük során jellemzően jól meghatározott törvényeket, törvényszerűségeket követnek. Például fizikai rendszerek esetében mindenkor érvényesülnek a fizika törvényei. A törvényszerűségeket figyelembe véve a rendszerekről gyakran alkotunk modellt, legtöbbször matematikai modellt. A rendszerekről alkotott matematikai modell a lényegkiemelésnek, az elvonatkoztatásnak az általánosításnak és az egyszerűsítésnek köszönhetően jellegzetes struktúrájúvá válik. A rendszerek elemzése során megkülönböztetünk mikroszkopikus és makroszkopikus hozzáállást. A mikroszkopikus esetében az elemzés minden részletre teljes mélységében kiterjed, míg a makroszkopikus esetben a lényegkiemelés technikáját alkalmazva, csak a főbb jellemvonások alkotják az elemzés tárgyát. A matematikai modell és annak struktúrája jól leírja a modellezendő rendszert, és kellő általánosítást is hordoz magában. Ennek köszönhetően a jelek és rendszerek körébe tartozó elméletek és technikák mindegyike, majdnem kivétel nélkül elvonatkoztathatók a konkrét fizikai előfordulásoktól és általánosítva alkalmazhatók különböző specializációkkal rendelkező rendszerekre. Így történhet meg, hogy a jelek és rendszerek témájában kifejlesztett elméletek sikerrel alkalmazhatók az élet számos területén. Gyakran alkalmazzuk őket elemzési feladatokra, előre meghatározott célt megvalósító rendszerek építésére/szintézisére, információ kinyerésére, energia továbbítására. Mindezen feladatok megoldhatók: elektromos rendszerek, hidraulikus rendszerek, pneumatikus rendszerek, gazdasági rendszerek, hang és képfeldolgozási rendszerek, kommunikációs rendszerek, automatizálási rendszerek ás még sok a világunkban előforduló rendszerek esetében is.

A rendszerekben keringő és áthaladó hatásokat, amelyek információs kapcsolatokat valósítanak meg, jeleknek nevezik, ugyanis a jelnek legfontosabb jellemvonása az információtartalom. Elmondható, hogy a jel minden olyan folyamat, amelynek segítségével az információ anyagi jellegűvé válik és továbbítható vagy tárolható. Jelekkel jellemezhetők a kölcsönhatások úgy a rendszer és környezete, mint a rendszert alkotó alrendszerek között.

A továbbiakban külön foglalkozunk a jelekkel, azok tulajdonságaival, azonban mindig szem előtt kell tartani, hogy a **jelek csupán az őt létrehozó rendszerektől lesznek olyanok amilyenek!** Valójában a bennük rejlő információ az őt létrehozó és módosító rendszertől és az átviteli csatornától függ és változhat.

2.2. A jel fogalma

Az egyes elemek, alrendszerek egymásra hatása csak akkor lehetséges, ha kapcsolatban állnak egymással. Általában érvényes, hogy a kapcsolatban levő elemek kölcsönhatásban vannak. A kölcsönhatások információ, anyag vagy energia átadását jelentik. Amennyiben a kapcsolat információtartalma a lényeges, azaz azok az ismeretek, amelyeket az elem vagy rendszer más rendszerek vagy elemek állapotáról kap, vagy a saját állapotáról közöl, akkor az ismereteket hordozó anyagi forma csak másodrangú jelentőségű lesz. Általában érvényes, hogy a jel vagy jelzés valami egyebet reprezentál, mint önmagát. A való világban az információtartalom sokféleképpen közölhető pl. az emberek beszéd által való kommunikációja, a méhek tánca a rovarok feromonok által való jelzése.

Mérnöki szemmel a **jel** meghatározása: *A rendszerekben keringő és áthaladó hatásokat, amelyek információs kapcsolatokat valósítanak meg, jeleknek nevezzük.* A jelnek legfontosabb jellemvonása az információtartalom (közleménytartalom), az energiaszint nagysága csak másodlagos jelentőségű.

Legtöbbször a jelet, mint időtől függő információt hordozó mennyiséget határozzák meg. E meghatározás csak részben igaz, ugyanis gyakran jelként tekintünk azon függvényekre is melyek független változóként nem tartalmazzák az időt, valamint előfordul, hogy komplex függvényeket is jelként kezelünk.

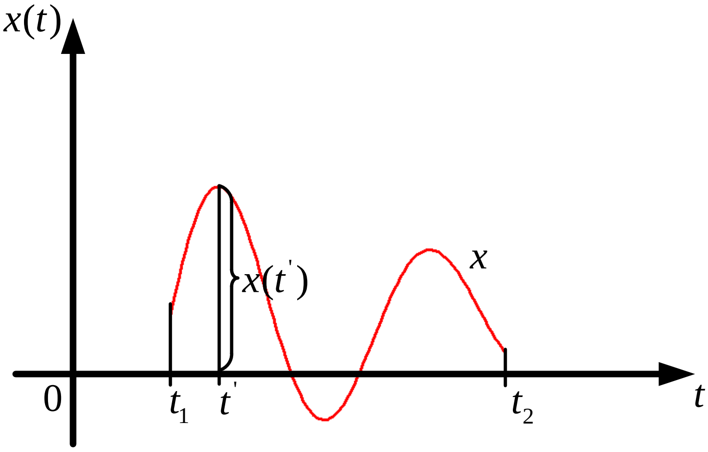
Jelhordozó fizikai mennyiség lehet minden mérhető fizikai, kémiai állapothordozó, amelynek segítségével az információ anyagi jellegűvé válik és továbbítható vagy tárolható. Matematikai modell esetén a jeleket **változó**kkal jelöljük. Jelhordozó jelölése esetén a változónak fizikai értelme van.

Jellemző jeleknek nevezzük azokat az állapothatározókat, amelyek a rendszer állapotát vagy állapotának változását jellemzik vagy befolyásolják (pl. nyomás, hőmérséklet, koncentráció). Tehát a jellemző olyan jel, amely lényeges a rendszerben, és mint olyan a rendszer állapothatározóinak értékéhez vagy értékváltozásához rendel információt.

Az a rendszer vagy közeg, amelyen keresztül kapjuk a jelet, a hírközlő csatorna. A jeleket nagy távolságra lehet közvetíteni, így megvalósítható a térben elválasztott rendszerek közötti kapcsolat is. Ilyenkor a csatornára különálló rendszerként tekintünk, melynek egy bemenete és egy kimenete biztosan van, éspedig a továbbítandó jel a csatorna egyik és másik végén. A csatorna feladata pedig az információ továbbítása. A jelek rögzítése (memorizálása) lehetővé teszi, hogy megfelelő idő elteltével közvetítsük őket, és így az időben elválasztott rendszerváltozási folyamatokat is össze lehet kapcsolni, a tárolt információt bármikor fel lehet használni.

2.2.1. A jel, mint egyváltozós függvény

Az egydimenziós jeleket matematikai szempontból, nagyon gyakran egyváltozós függvényekként kezeljük. Ezek a függvények egyértelmű kapcsolatot valósítanak meg egy független változó és egy függő változó között. A függvény független változója az argumentuma. A függvény értelmezési tartományát a független változó tartománya jelenti, a függő változó összes értéke pedig a függvény értékkészlete. A jel értelmezési tartományán legtöbb esetben az időt, értékkészletén pedig a vizsgált jel által leírt fizikai mennyiség értékét értjük. Az időfüggő jeleket, mint egyváltozós függvényeket kisbetűvel u, x, y, z jelöljük. Az x jel t pillanatbani értékét $x(t)$- vel jelöljük, $x(t)$ a jel pillanatnyi értéke. Amennyiben másképp nincs meghatározva, akkor a független változó a valós számok halmazából, határ nélkül bármely értéket felvehet, vagyis $t \in \mathbb{R}$. Amennyiben a jel értelmezési tartománya a valós számok halmazának részhalmazára $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ korlátozódik, akkor ezt $t \in \mathbb{T}$-vel jelöljük. Az $x(t)$ jel pillanatértékeinek tartománya, az $x: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{X}$ leképezés értékkészlete, vagyis $x(t) \in \mathbb{X}$. Az $x(t) \in \mathbb{X}$ leképezés rendezett párokat, $x = \{(t, x(t)) | t \in \mathbb{T}\}$ határoz meg. Ezen pontpárokat grafikonnal is ábrázolhatjuk. Tegyük fel, hogy a jel értelmezési tartománya $\mathbb{T} = (t_1, t_2)$, ekkor x egy derékszögű koordináta rendszerben olyan grafikonnal ábrázolható, amely a t_1 és t_2 között értelmezett. t_1 előtti és t_2 utáni értékekre nincs értelmezve a jel pillanatértéke. Amint azt a függvényeknél is szokásos, ábrázoláskor a független változót a vízszintes tengelyre, a függő változót pedig a függőleges tengelyre vesszük fel, ahogy ez a 2-2. ábran**Hiba! A hivatkozási forrás nem található.** is látható.

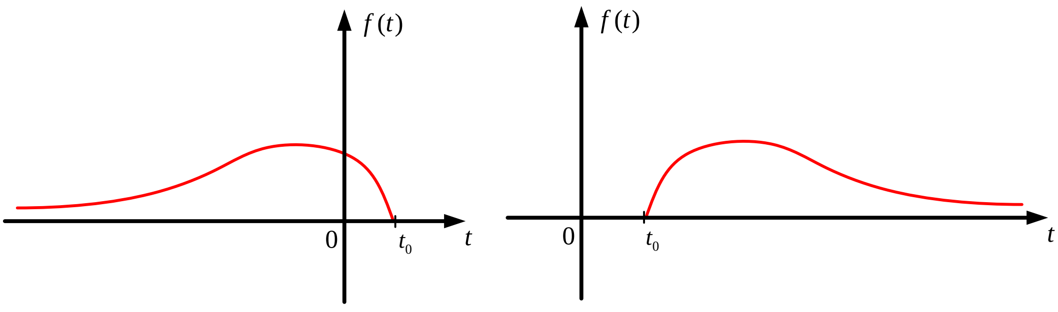


2-2. ábra. – A jel grafikus ábrázolása.

Amennyiben a jel egy (t_0, t_1) intervallumba eső szeletére szeretnénk hivatkozni, akkor ezt megtehetjük az $x_{(t_0,t_1)}$ jelöléssel, vagyis $x_{(t_0,t_1)} = \{(t, x(t)) | t \in (t_0, t_1)\}$ és $t_0 < t_1$. A független változó (t_0, t_1) intervallumát a jel megfigyelési intervallumának nevezzük, ami lehet:

- nyílt (t_0, t_1), ami nem tartalmazza a határokat, ahol érvényes, hogy $t_0 < \mathrm{t} < t_1$,
- zárt $[t_0, t_1]$ ami tartalmazza a határokat, vagyis ahol érvényes, hogy $t_0 \leq \mathrm{t} \leq t_1$
- és félig nyílt $[t_0, t_1)$ ahol érvényes, hogy $t_0 \leq \mathrm{t} < t_1$ vagy $(t_0, t_1]$ ahol érvényes, hogy $t_0 < \mathrm{t} \leq t_1$.

Néhány példa az értelmezési tartomány meghatározására: jobbról és balról is korlátort $\mathbb{T} = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, csak balról korlátolt $\mathbb{T} = [t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$, csak jobbról korlátolt $\mathbb{T} = (-\infty, t_0] \subset \mathbb{R}$ nem korlátolt $\mathbb{T} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (2-3. ábra).



2-3. ábra. – Korlátolt jel grafikus ábrázolása.

Egy jel esetében az értékkészlete iránt is lehetnek megkötések. Ezen megkötések eredhetnek például a jelhordozó fizikai mennyiség természetéből az információt továbbító csatorna tulajdonságaiból vagy más objektív okból. Egy ilyen megkötésként szerepelhet, hogy a jel pillanatnyi értékének abszolút értéke minden időpillanatban korlátos, például 1 alá van korlátozva, amit formalizálva is felírhatunk: $|x(t)| < 1 \ \forall t \in (t_1, t_2)$. Egy másik megkötés, hogy a teljes jel abszolút értékének integrálja korlátos, például öt alatt van: $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\, dt < 5$. Vegyük észre, hogy az első feltétel a pillanatértékekre vonatkozik, a másik pedig a teljes jelre. Legyen $\mathcal{X}$ azon függvények/jelek halmaza, melyek kielégítik a fenti két feltételt. Amennyiben, a független változó pillanatnyi értékétől eltekintünk és hivatkozni szeretnénk a teljes jelre, ekkor ezen egyes függvények/jelek jelölése az x, $x(\cdot)$ vagy $\{x(t)\}$, tehát $x(\cdot)$ jelöli a teljes jelet, míg az adott jel t pillanatértékét az $x(t)$ jelöli.

A valóságban vannak olyan helyzetek, amikor az információ nem egy, hanem több független változó értékére meghatározott, ekkor a matematikai modellezés folyamán, egyváltozós függvények helyett többváltozós függvényekként kezelendő a jel. Ilyen jel például egy kétdimenziós kép által képviselt információ, ami a szélességi és magassági koordinátáktól függően vesz fel értéket, vagy mozgó kép esetén harmadik dimenzióként az idő is jelentkezik.

2.2.2. A jeleken végezhető elemi módosítások

A jelfeldolgozás és azon belül is a digitális jelfeldolgozás egy önálló tudományterület. Ebben a részben csak azon műveletekkel foglalkozunk, melyek szükségesek a tananyag további részének megértéséhez.

A jelek átalakíthatók vagy módosíthatók annak érdekében, hogy minél inkább alkalmasak legyenek az általuk hordozni kívánt információ reprezentálására, a hordozott információ kinyerésére vagy kommunikációs csatornán történő továbbítására esetleg tárolására.

A jeleken végzett műveletek két csoportba sorolhatók: a független változó módosítására és az érték módosítására. A független változó módosítása egy leképezés, mely során a régi $\mathbb{T}_r$ tartomány átképződik az újba $\mathbb{T}_u$ a következők szerint: $\vartheta: \mathbb{T}_r \to \mathbb{T}_u$. A függő változó módosítása is egy leképezés, mely során a régi $\mathbb{X}_r$ tartomány átképződik az újba $\mathbb{X}_u$ a következők szerint: $\varphi: \mathbb{X}_r \to \mathbb{X}_u$. Leggyakrabban ezek a módosítások olyan leképezések, melyek egyértelműek és létezik az inverzük, monoton függvények.

Az alábbiakban kövér szedéssel meghatározunk néhány fontos elemi módosítást.

Az amplitúdó lineáris skálázását erősítővel érhetjük el. Skálázáskor átméretezzük a jel értékkészletét. A művelet eredménye az: $x(t) \to A \cdot x(t)$ transzformációval adható meg. Amennyiben $|A| > 1$ erősítésről, míg amikor $|A| < 1$ gyengítésről beszélünk. Amikor pedig $A < 0$, akkor jel értékei a skálázás mellett még előjelet is váltanak. A módosítás inverze az $\frac{1}{A}$ val való szorzás. Például hang jel esetében a skálázás valóban erősebb vagy gyengébb hangerőt jelent.

Az eltolás a független változóban, független változónak időt tekintve siettetést vagy késleltetést jelent a jelnél. Amennyiben $\tau > 0$ és elvégezzük a következő műveletet $x(t) \to x(t-\tau)$ akkor késleltetést, míg a $x(t) \to x(t+\tau)$ esetében siettetést érünk el a jelnél. Hang jel esetében ezen módosítások a hang késleltetését vagy siettetését jelentik.

A független változó lineáris skálázása zsugorítást vagy nyújtást jelent az eredeti jelet tekintve. Éspedig: $x(t) \to x(a \cdot t)$, ha $|a| > 1$ zsugorítást, míg $|a| < 1$ nyújtást eredményez a jelre vonatkozóan. Az $a < 0$ tükrözést jelet az idő tengelyen. Például hang jel esetében a zsugoritás gyorsabb lejátszást és magasabb hangokat a nyújtás pedig lassabb lejátszást és mélyebb hangokat jelent.

Egyszerű **reflexió**, amikor $a = -1$, ekkor az eredmény jel az ordinátára nézve az eredetinek tükörképe. Például hang jel esetében a reflexió visszafelé történő lejátszást jelent.

Egy következő, összetett művelet a jel felbontása páros és páratlan összetevőire. A jelek fontos tulajdonsága a párosság ás a páratlanság. Páros a jel, ha a független változó minden értékére fennál, hogy $x(t) = x(-t)$, páratlan ha $x(t) = -x(-t)$. **Minden valós jel felbontható páros és páratlan összetevői összegére** a következő szerint: $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$, ahol $x_p(t)$ a jel páros, míg $x_n(t)$ a jel páratlan összetevője. **A jel páros összetevője** az $x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ összefüggéssel, míg **a jel páratlan összetevője** az $x_n(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$ összefüggéssel határozható meg. Tehát a páros jel szimmetrikus az ordinátára nézve, a páratlan jel pedig szimmetrikus az origóra nézve. Jelek közötti műveltvégzésnél jelentkező igazságok, hogy:

- Páros jelek összege, különbsége, szorzata és hányadosa páros jel lesz;
- Páratlan jelek összege, különbsége páratlan jelet eredményez;
- Páratlan jelek szorzata és hányadosa páros jel lesz.

A felsoroltakban csupán az alapvető jelmódosítások kerültek bemutatásra, a tankönyv a későbbi fejezeteiben foglalkozik még további, összetettebb módosításokkal, jelfeldolgozási módszerekkel.

2.2.3. Jelek felosztása

A jeleket különböző szempontok alapján osztályokba sorolhatjuk. A felosztás/osztályozás azért is szükséges, hogy a továbbiakban az egyes osztályba tartozó jelek együttesen legyenek tárgyalhatók.

A teljesség igénye nélkül a jelek felosztásának szempontjai lehetnek:

- értékkészlet szerint,
- lefolyás szerint,
- az érték meghatározottsága szerint,
- az információ megjelenési formája szerint,
- a jelhordozó fizikai mennyiségek szerint,
- az információ terjedési iránya szerint.

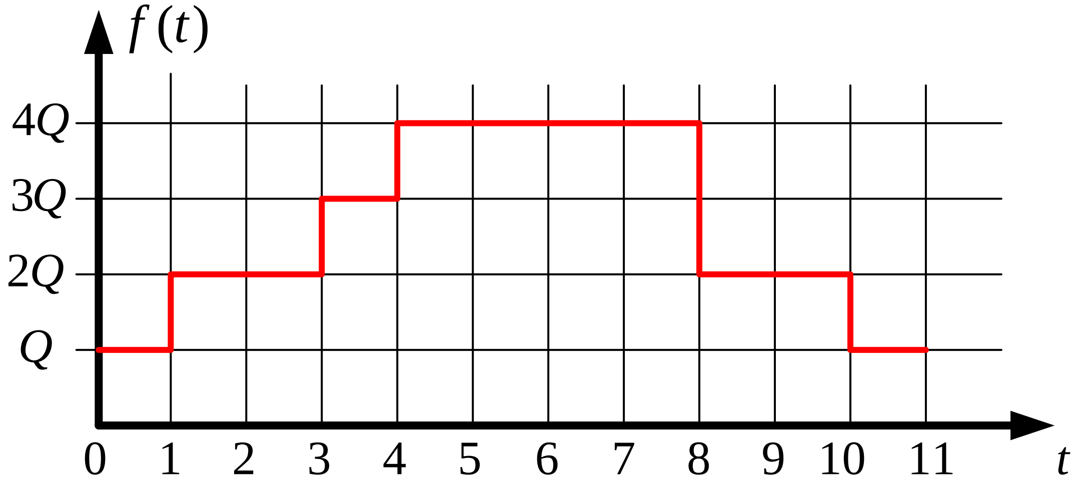
Az alábbiakban bemutatásra kerülnek a fentiekben felsorolt jelcsoportok.

2.2.3.1. Jelek értékkészlet szerinti felosztása

Jelölje $\mathbb{X}$ a jel értékeinek halmazát, ekkor értékkészlet szerint az alábbi két csoportba sorolhatjuk a jelet:

- **Folytonos** a jel, ha – meghatározott tartományban – tetszés szerinti értéket vehet fel és **értékkészlete folytonos**, vagyis egy összefüggő tartomány. Ekkor $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, vagyis az értékkészlet halmaza részhalmaza a végtelen elemű valós számok halmazának. Ilyen jel például egy szinuszos jel $x(t) = sin(t)$.
- **Szakaszos** a jel, ha – meghatározott tartományban – csak meghatározott, diszkrét (izolált) értékeket vehet fel, egy megszámlálható számhalmaz elemeiből, két szomszédos diszkrét értéke közötti értékkészlete hiányzik. Az ilyen jel, időbeni lefolyása szerint lehet folyamatos, de értékkészletében diszkrét. Az ilyen jelet nevezzük még **lépcsősnek**, **kvantáltnak**, vagy **diszkrét értékűnek**. Ekkor az értékek halmaza, számosságát tekintve véges, $\mathbb{X} = \{\cdots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots\}$. Legyen $x_n \in \mathbb{X}$ a halmaz tetszőleges n –edik indexű eleme, ahol $n \in \mathbb{Z}$ (n eleme a valós számok halmazának), ekkor az indexel egyértelműen meghatározott lehet az érték $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$.Ekkor lehetséges, hogy a jel pillanatnyi értékét ne az értékével, hanem a halmazban elfoglalt helyével, indexével adjuk meg, ugyanis $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$. A lehetséges értékek sora megadható az indexek függvényeként: $x = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, ahol $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

  Az indexek és az értékek megfeleltetésének egyértelműsége miatt az értékek halmazát monoton növekvő sorba rendezzük, így igaz, hogy ha $i > j \to x_i > x_j$. Példaként tekintsünk (2-4. ábra) egy állandó Q lépésközű kvantált jelet a következők szerint: $\mathbb{X} = \{0, Q, 2Q, 3Q, 4Q\}$.

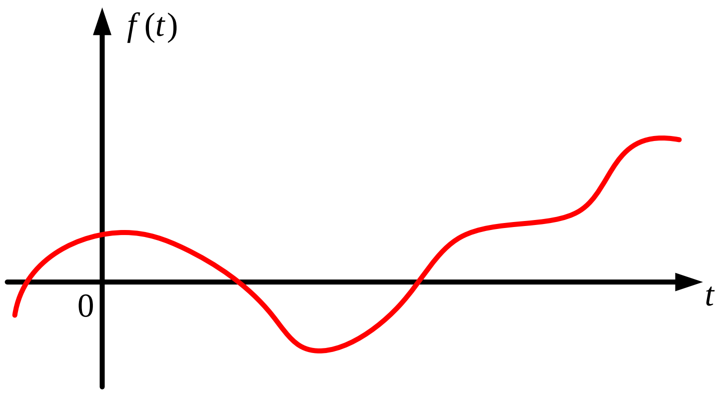


2-4. ábra. – Szakaszos jel.

2.2.3.2. Jelek lefolyás szerinti felosztása

Amint már említettük a jelek értelmezési tartománya legtöbb esetben az idő, ezért az értelmezési tartomány (független változó) szerinti felosztást szokásos lefolyás szerintinek is nevezni. A független változó feletti meghatározottság szerint az alábbi két csoportba sorolhatjuk a jeleket:

- **Folyamatos** a jel, ha a független változó egy adott tartományában megszakítás nélkül fennáll (2-5. ábra). A folyamatos jelek a független változó két értéke között végtelen sok értékre meghatározottak. Tegyük fel, hogy a jel értelmezési tartománya $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ ekkor, folyamatos jel esetében követelmény, hogy az egyértelműen definiált legyen a teljes $\mathbb{T}$ felett esetleg, néhány véges számú pont képezhet kivételt. Amennyiben a független változó az idő és a jel folyamatos, akkor folytonos idejű jelről beszélünk. A magyar terminológiában a folytonos idejűségnek a jele az „FI" míg az angol nyelvű terminológiában a CT (continuous-time).

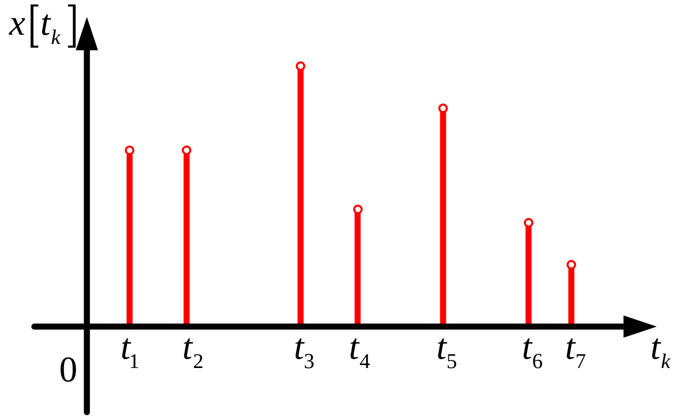


2-5. ábra. – Általános folytonos idejű jel.

A jelek valós matematikai függvények, de néhány rajtuk végzett transzformáció hatására komplex értékeik is lehetnek. A későbbiekben szó lesz ilyen jelekről is.

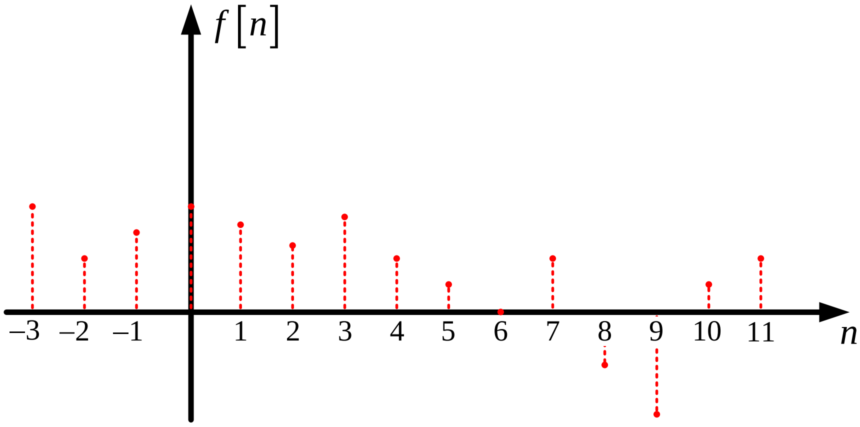
- **Szaggatott** a jel, ha az a független változó egy adott tartományában csak megszakításokkal áll fenn. Ilyenkor az információszolgáltatás csupán a független változó bizonyos értékeire értelmezett. A jel a független változó meghatározott értékeiben szolgáltat információt, a többi értékeknél nem meghatározott. Ezekre az értékekre a jel nem definiált! Időt alkalmazva független változóként eljutunk a diszkrét idejű jel fogalmához. A magyar terminológiában a diszkrét idejűség jele a “DI”, míg az angol nyelvű terminológiában DT (discrete-time).

Tegyük fel, hogy a jel a független változó $\mathbb{T}$ halmazból vett értékeire definiált, $\mathbb{T} = \{\cdots, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \cdots\}$. Legyen $t_k \in \mathbb{T}$ a halmaz tetszőleges k–adik indexű eleme, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ekkor az indexel egyértelműen meghatározott az időpont. Ezek szerint lehetséges, hogy a független változó értékét a halmazban elfoglalt helye, indexe a következő leképezéssel $t: \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ adja meg, ugyanis $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_N\}$ rendezetté, monotonná tehető. A lehetséges értékek sora megadható az indexek függvényeként: $t = \{(k, t_k) | k \in \mathbb{K}\}$, ahol $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{Z}$. Amennyiben a $\mathbb{T}$ halmaz rendezett és monoton növekvő, akkor az időpont az indexével egyértelműen meghatározott. A diszkrét idejű jel matematikai meghatározása ekkor $x = x[k]$. Az egyértelmű megkülönböztetés érdekében a folyamatos jelet jelölő függvénynél egyszerű zárójeleket alkalmazunk, míg a szaggatott jel esetében középzárójelet. Így $y(\cdot)$ egy FI míg az $y[\cdot]$ egy DI jel jelölése. Amennyiben az egymást követő időpontok közötti különbség nem állandó, akkor a jel nem ekvidisztáns időpontokban meghatározott amint az a 2-6. ábra látható.



2-6. ábra. – Szakaszos jel.

A DI jelek fontos halmaza az állandó egymást követő időpontokban meghatározott jelek halmaza, ahol T egy állandó lépésköz. A mérnöki világ számos területén, például a digitális jelfeldolgozás az irányítástechnika esetében használatos elméletek feltételezik az ekvidisztáns lépésközt, nem állandó lépésköz esetében nem is érvényesek ezek az elméletek. A változó lépésközzel meghatározott jeleket vagy újramintavételezzük, vagy folytonos idejűként kezeljük. Az alábbi példában (2-7. ábra) bemutatott jel értékkészlete legyen: $\mathbb{T} = \{-3T, -2T, -T, 0, T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T, 7T, 8T, 9T, 10T, 11T\}$.



2-7. ábra. – Diszkrét idejű jel.

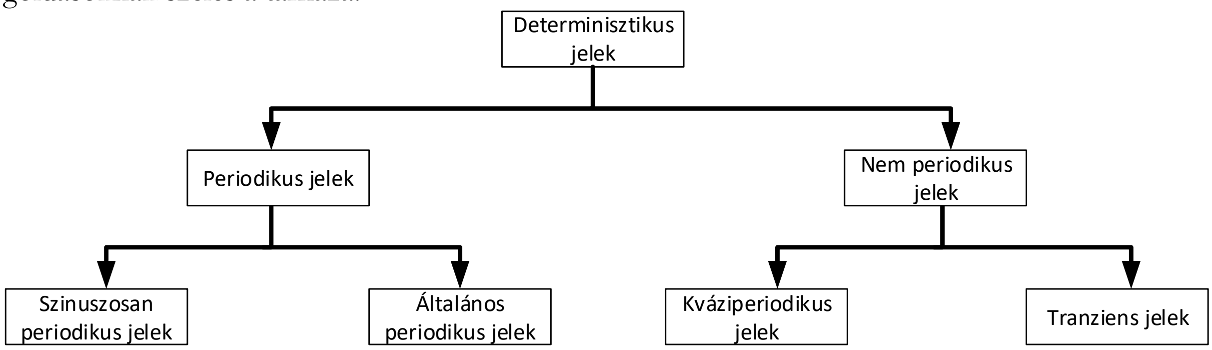
A 2-7. ábra látható $f[n]$ függvény esetében n a független változó indexét jelöli, ami a mintavételi periodusidővel szorozva átváltható diszkrét időpillanatok sorává.

- A **belépő jelek** melyek a független változó negatív értékeire azonosan nulla értékűek, mérnöki szempontból fontos szerepet játszanak a valós rendszerek elemzése szempontjából. A belépő jeleket csak pozitív időértékekre szoktuk elemezni. A folyamatos és a szaggatott jelek is lehetnek belépő jelek. A belépő jelek értelmezési tartománya általában $\mathbb{T} = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{T} = [0, t_1] \subset \mathbb{R}$.

2.2.3.3. A jelek érték meghatározottsága szerinti felosztása

A jelek felosztása értékük meghatározottsága szerint inkább a matematikai modellezésük szempontjából érdekes. Két fő csoportot és további tíz alcsoportot különböztetünk meg (2-8. ábra).

Determinisztikus a jel, ha értéke a független változó minden értékére egy meghatározott függvénnyel egyértelműen megadható, zárt matematikai összefüggéssel modellezhető. Determinisztikus jelek esetében igaz, hogy a hozzá tartozó jelhordozót elegendő pontossággal lehet mérni és megismételhető folyamat hozza létre. A valóságban előforduló jelek nem ilyenek, de némi elhanyagolással sokszor ilyen jellel közelíthetők. Mivel a determinisztikus jelek egy vagy többváltozós függvényekkel jól leírhatók, így a velük kapcsolatos elméleti technikáknak, megoldásoknak széles a tárháza.



2-8. ábra. – A Determinisztikus jelek felosztása.

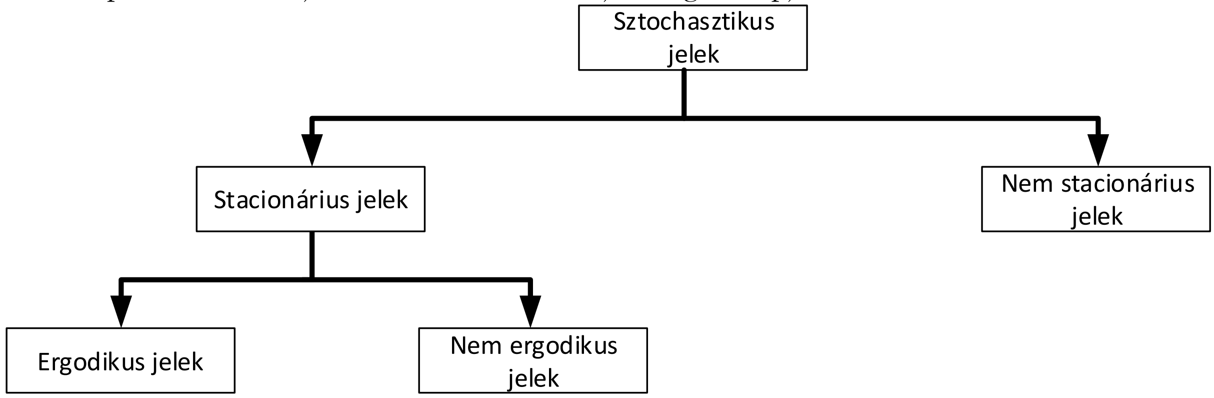
A determinisztikus jeleket további két osztályba sorolhatjuk: a **periodikus jelek** osztályába és a **nemperiodikus** (aperiodikus) **jelek** osztályába (2-8. ábra).

A periodikus jel szabályosan ismétlődő részek egymás utáni sorozatából áll elő, esetükben érvényes hogy $x(t) = x(t + T)$. Az a jel, amely nem periodikus az aperiodikus jel. A periodikus jelek feloszthatók még **általános periodikus** jelekre és a **harmonikus jelek**re (2-8. ábra).

A harmonikus jelek egyfrekvenciás jelek, amelyek harmonikus rezgésekről szolgáltatnak információt. Példa egy ilyen harmonikus jelre az $x(t) = A \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$, ahol A a harmonikus mozgás amplitúdója, ω_0 a harmonikus mozgás körfrekvenciája, φ_0 harmonikus mozgás kezdőfázisa és t a futó idő. Matematikai szempontból a harmonikus rezgést leíró modell formálisan végtelen hosszú ideig tart ugyan, de mérnöki szemmel mi tudjuk, hogy minden folyamatosan változik, így a rezgő állapot is valamikor kialakul és valamikor véget ér.

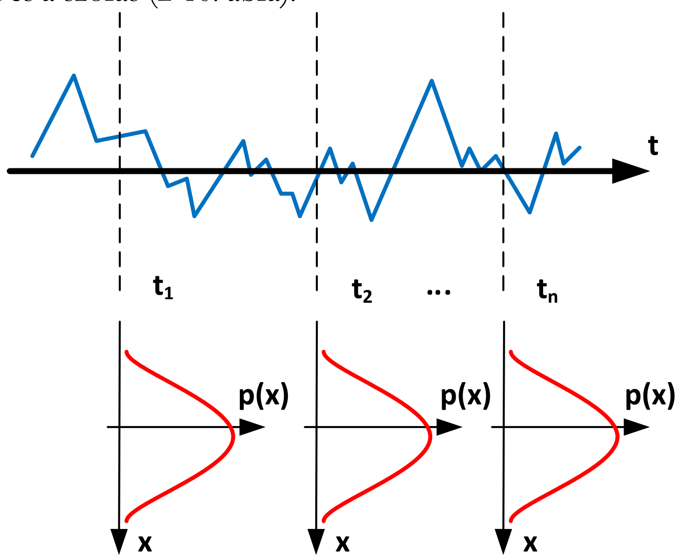
Az aperiodikus jeleket az $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt < \infty$ feltétel alapján további két csoportba soroljuk; a **tranziens jelek**re amelyekre érvényes az előbbi feltétel és a **nem tranziense jelek**re amelyekre pedig nem (2-8. ábra). A nem tranziens jeleket szokás még kvázi periodikus jeleknek is nevezni. A tranziens jelek általában egy egyszeri felfutással és lefutással rendelkező jelek, amelyek az átmeneti folyamatokról hordoznak információt. A valóságban minden jel ilyen, minden jel valamikor/valahogyan létrejön és valamikor/valahogyan megszűnik.

Sztochasztikus vagy véletlen a jel, ha véletlen lefolyású. A sztochasztikus jel nem modellezhető függvényekkel, esetükben nem tudunk egyértelmű időfüggvényt megadni. A sztochasztikus jel csak a valószínűség-számítási módszereivel írható le, ilyenkor a jel statisztikus tulajdonságait kell megadni, mint például az amplitúdóeloszlás a várható értékét és a szórását. A sztochasztikus jel minden időpillanatban a rá jellemző statisztikus tulajdonságok alapján vesz fel értékeket.



2-9. ábra. - A Sztochasztikus jelek felosztása.

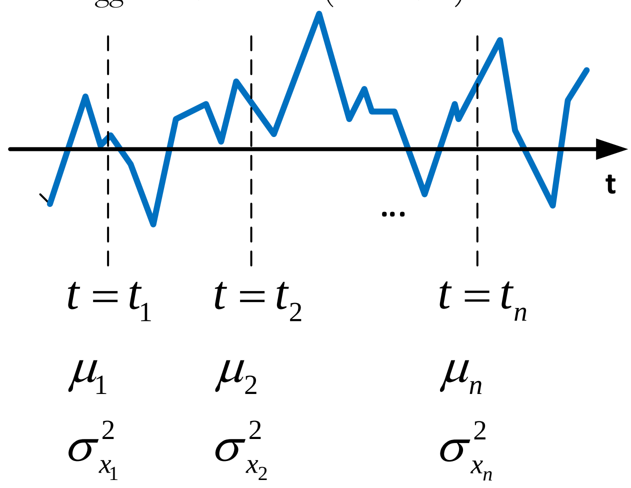
A sztochasztikus jeleket két csoportba sorolhatjuk: a **stacionárius** és a **nem stacionárius** sztochasztikus jelekre (2-9. ábra). A stacionárius sztochasztikus jel sűrűségfüggvénye a jel teljes értelmezési tartományán állandó. Például stacionárius esetben normális eloszlás esetén nem változik a várható érték és a szórás (2-10. ábra).



)

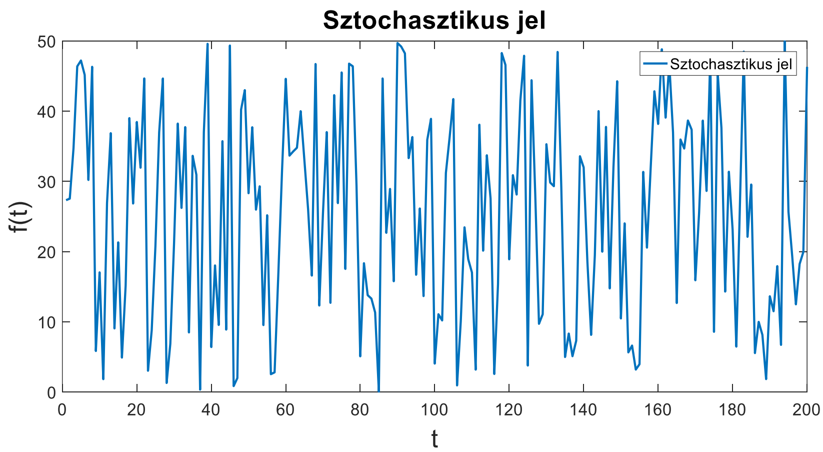
2-10. ábra. – Stacionárius sztochasztikus jel.

A nem stacionárius esetben a jel valószínűségi jellemzői (eloszlásfüggvény, valószínűségi paraméterek) függnek a független változótól (2-11. ábra).



2-11. ábra. – Nem stacionárius sztochasztikus jel.

A sztochasztikus jelek egy különleges esete a fehér zaj (2-12. ábra). A fehér zaj esetében maga a jelző azt igyekszik takarni, hogy úgy, mint a fehér fény esetebében – l ami minden színt egyforma mértékben tartalmaz – a fehér zajban is egyforma mértékben van jelen minden frekvenciájú komponens. Mint mindegyik jel, a fehér zaj is információt hordoz az őt létrehozó rendszerről, a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás például az őt létrehozó ősrobbanásról. A fehér zajjal szemben megkülönböztetünk még különböző típusú színes zajokat is.



2-12. ábra. – Sztochasztikus jel.

2.2.3.4. A jelek információ megjelenési formája szerinti felosztása

Amint az az előzőekben is kifejtésre került, a jel információt szolgáltat az őt létrehozó rendszerről. A jel valójában egy reláció és az általa képviselt információ helyes értelmezése érdekében mindenkinek mindenképp meg kell állapodni egy bizonyos koordináta rendszerben, metrikában, mértékben, mértékrendszerben. Ezen megállapodások függnek az jelben levő információ megjelenési formájától is. Az információ megjelenési formája szerint két nagy csoportba sorolhatjuk a jeleket, éspedig:

- **Analóg** a jel, ha az információt a jelhordozó fizikai mennyiség értéke vagy értékváltozása közvetlenül képviseli. Az analóg jel információtartalma tetszőlegesen kis változásokat is közvetíthet;
- **Digitális** a jel, ha az információ a jelhordozó számjegyet kifejező, diszkrét, jelképi értékeiben (kódjaiban) van jelen.

Mindkét megjelenési forma hordoz magában előnyöket és hátrányokat egyaránt. Napjainkban, az informatika világában igyekszünk az információt minél előbb digitális formába alakítani. A manapság alkalmazott technológiákkal a digitális forma könnyeben feldolgozható, kezelhető, továbbítható, tárolható.

2.2.3.5. A jelek jelhordozó fizikai mennyiség szerinti felosztása

Jelhordozó bármelyik fizikai vagy kémiai mennyiség lehet. A továbbiakban megemlítésre kerül néhány, a mérnöki gyakorlatban gyakran használt mennyiség. Ezen mennyiségek attól függően csoportosíthatók, hogy milyen az elsődleges rendszer besorolása. Például a korszerű számítógépekre alapozott irányítási rendszerekben a kétirányú információcsere villamos jelekkel történik. A villamos jelekkel működő rendszerek mellett optikai, elektromágneses, pneumatikus és hidraulikus rendszerek is gyakran képezik a vizsgálatok tárgyát. Az optikai rendszer jelhordozója a **fény**. Az elektromágneses rendszerek esetén **mikrohullám** továbbítja az információt. Pneumatikus rendszerek jelhordozója a **sűrített gáz**, a hidraulikus rendszereké pedig a **folyadék** és azon belül is leggyakrabban az olaj és annak nyomása. Előfordulhat, hogy a vizsgát rendszer vagy az információt továbbító csatorna a jellel kapcsolatban a szakemberek számára különös igényeket támaszt, ilyenkor figyelembe kell venni az igények által megfogalmazott megkötéseket. Például robbanásveszélyes üzemekben pneumatikus vagy megbízható, robbanás biztos villamos berendezéseket alkalmazunk az információ reprezentálására, továbbítására.

A villamos jelekkel működő rendszerek elterjedését indokolja, hogy a villamos energia széleskörben rendelkezésre áll, a villamos jelek nagy távolságra jól átvihetők, fizikai mennyiségek gyors változásait is képesek követni és a korszerű híradástechnika és számítógép-hálózati eljárások alkalmazásával könnyen csatlakoztathatók különböző berendezésekhez.

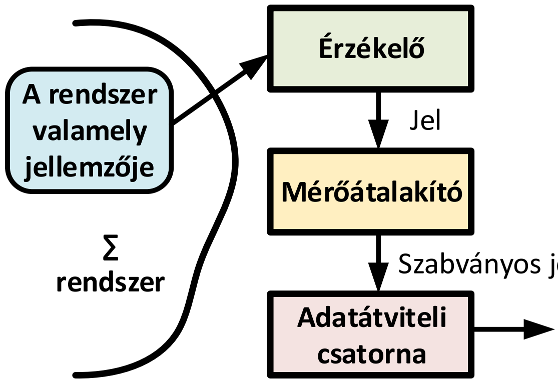
A villamos jel esetében a jelhordozó a **feszültség** vagy **áramerősség** és annak változása vagy változásának jellemzői lehetnek. Az információ közölhető a villamos jel amplitúdójával, frekvenciájával vagy fázisával, vagy az impulzusok amplitúdójával, az impulzusok vagy impulzusok közötti szünet időtartamának viszonyával vagy az impulzusok számával.

Az analóg villamos jelek amplitúdója általában valamely szabványos tartományba esik, így értékük gyakran a következő intervallumokba található: 0-1V, 0- 10V-os, 0-5mA, 0-20mA-es vagy 4-20mA.

2.2.3.6. A jelek információ terjedési irány szerinti felosztása

A rendszer és az őt körülvevő univerzum kölcsönhatással vannak egymásra. Az információ terjedése két rendszer között jeleken keresztül történik. Az információt szolgáltató rendszer a forrás vagy a generátor, az információt fogadó rendszer a nyelő vagy a fogyasztó. Ily megvilágításból azon jeleket, melyek a rendszerből a külvilág felé hatnak **kimenő jelek**nek, míg azokat melyeken keresztül a külvilág hat a rendszerre **bemenő jelek**nek nevezzük. Tipikusan a rendszer állapotáról a jellemző információkat az érzékelők szolgáltatják. A külvilág szereplői, pedig a beavatkozó szerveken keresztül hatnak a rendszerre. Jelek közvetítik az információt a rendszer állapotáról és a beavatkozások mértékéről.

Az érzékelési folyamatra példa a hőmérséklet ellenállás-hőmérővel való mérése. A hőmérséklet, mint állapotjelző, nem közvetíthető egy szabványos hírközlő csatornán keresztül. Ezért a rendszer egy adott pontjába egy ellenállás-hőmérőt helyezünk el, amelynek ellenállása a rendszer adott pontjának hőmérsékletével arányosan változik. Az ellenállás-hőmérő egy egyenáramú hídban helyezkedik el. Az ellenállás értéke arányosan változik a rendszer adott pontjának hőmérsékletével, így változtatva a hídban uralkodó feszültségviszonyokat. A hőmérsékletváltozástól függő feszültség a helyszínen érzékelhető. Ha ezt az információt nem a helyszínen, hanem attól távolabb akarjuk felhasználni, a híd kimenőjelét úgy kell átalakítani, hogy az zavarmentesen legyen átvihető egy irányító berendezés felé. Analóg megoldás esetében, e célra egy mérő-átalakítót használnak, amelynek bemenőjele a híd feszültsége, a kimenőjele pedig 0-20mA-ig terjedő áramjel.



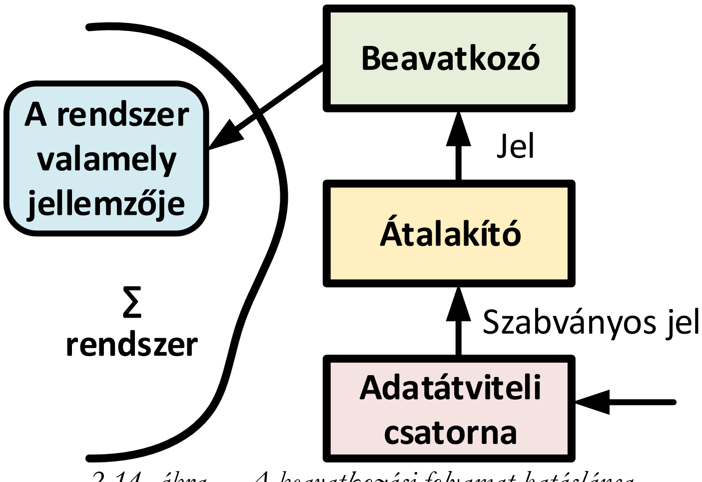
2-13. ábra. – Az érzékelési folyamat hatáslánca.

Ez a jel már szabványos, és egy vezetékekből felépített hírközlő csatornán, vagyis a hőmérsékletről szerzett információ különböző fizikai mennyiségek változásán keresztül, (hőmérséklet → ellenállás → feszültség → áramerősség) eljuthat egy áram jelet fogadó irányító berendezéshez (2-13. ábra).

Napjainkban tanúi vagyunk annak, hogy a hagyományos analóg technikájú villamos, pneumatikus vagy hidraulikus jeleket mind több esetben váltják fel a digitális jelek és kommunikációs csatornák. Digitális megoldás esetében az érzékelőt egy analóg-digitális átalakító (A/D átalakító) követi és a hírközlő csatorna a digitális jelet továbbítja. Az információ digitális formában való továbbítására a szakemberek számára jelenleg több szabvány is rendelkezésre áll, melyek a feladat jellegétől függően nyújtanak hatékony megoldást az adott problémára. Például az ipari kommunikációk terén, terepi szinten úgy az érzékelők, mint a beavatkozók esetében digitális jelek felhasználva hatékonyan alkalmazható az IO-Link szabvány (IEC 61131-9).

Az irányítástechnikában az egyszerű érzékelőn (ellenállás-hőmérő, hőelem, piezo elektromos nyomásérzékelő, stb.) kívül az érzékelő és mérő-átalakító együttesét, vagy digitális esetben az érzékelő és A/D (analóg-digitális) átalakító együttesét is érzékelőnek (szenzornak) nevezik. Amint az az előzőkből kitűnt az érzékelők és a beavatkozók általános esetben maguk is összetett rendszerek, melyek alrendszerei között különböző jellegű jelek szolgáltatják az információt, biztosítják a szükséges energiát. Az ezekben a rendszerekben alkalmazott alrendszerek mindegyikének fontos szerepe van. Például az érzékelőknek megfelelő pontosságúnak, megfelelő méréstartományúnak, lineárisnak, relatív gyorsnak és mindenképp megbízhatónak kell lennie. Ezen tulajdonságokat a teljes rendszer együttese, az egyes rendszerelemek helyes alkalmazásán keresztül tudja biztosítani.

A beavatkozás folyamata az érzékelésével ellentétes irányú (2-14. ábra). A beavatkozási folyamat során a jelek közvetítik az információt a beavatkozások mértékéről. A beavatkozáshoz szükséges energia is jeleken keresztül érkezik a beavatkozóhoz.



2-14. ábra. – A beavatkozási folyamat hatáslánca.

Amint azt a fentiekből láttuk, a jelek osztályokba sorolása segíti az általánosítást. Az osztályok gyakran ellentett párokat képeznek, meghatározva így egy jelnek egy adott szempont szerinti egyértelmű besorolását. A fenti csoportosítás nem teljes. Jelek lehetnek még például: belépő jelek és nem belépő jelek, véges teljesítményű jelek, véges energiájú jelek, periodikus jelek, páros vagy páratlan jelek. A jelek további besorolását a tankönyv alábbi fejezeteiben tárgyaljuk, ugyanis az adott osztályba tartozás megítéléséhez szükséges a jelet matematika szempontból alaposabban megvizsgálni.

2.3. Néhány fontosabb folytonosidejű jel

A továbbiakban bemutatásra kerül néhány fontosabb folytonosidejű (FI) jel. A fizikai rendszerekre igaz, hogy esetükben véges teljesítmény áll rendelkezésünkre, a bennük lezajló folyamatok lefolyása nem nulla időtartamú. Az alábbiakban vizsgált folytonosidejű jelek közül némelyik idealizált, a valóságban nem előforduló, mégis elméleti/matematikai szempontból jelentős, mert elősegíti a valós jelek elemzését és előállítását. Az alábbiakban vizsgálandó jelek formálisan végtelen hosszú ideig tartanak értelmezési tartományuk $\mathbb{T} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ és értékük sem mindig nullából indul és nullában ér véget. Műszaki szemmel tekintve a matematikai modellekre, azonban mi tudjuk, hogy a valós jelek nem ilyenek, értékük nullából indul és nullában ér véget. Az adott vizsgálójelre gyakran függvényként tekintünk, ugyanis így könnyebb modellezni és párhuzamot vonni a matematikában tanultakkal. Az alábbiakban bemutatásra kerülnek a következő vizsgálójelek: az ugrásfüggvény, az egységugrás vagy Heaviside-féle függvény, a szignum függvény vagy előjel függvény, a sorompó függvény, a Dirac delta impulzus az impulzus sorozat vagy fésűfüggvény, az egységnyi négyszög függvény, az egységnyi háromszög függvény, az egységnyi sinc függvény, a szinusz függvény, a komplex exponenciális függvény, a Dirihle féle függvény.

2.3.1. Az ugrásfüggvénnyel leírható jel

Az ugrásfüggvény kétértékű függvény. Tegyük fel, hogy a független változó $t = -\infty$ -től vesz fel értékeket $t = \infty$–ig, eközben az ugrásfüggvény értéke $t = t_0$ időpillanatban A ról B re vált. Az ugrásfüggvény folytonos idejű szakaszos függvény. Maga a függvény, az ugrás időpontjában felvett értékétől függően többféleképpen megadható, például az alábbi három módon: $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$.

$$h_1(t) = \begin{cases} A & t < t_0 \\ B & t \geq t_0 \end{cases}, h_2(t) = \begin{cases} A & t \leq t_0 \\ B & t > t_0 \end{cases}, h_2(t) = \begin{cases} A & t < t_0 \\ \frac{A+B}{2} & t = t_0 \\ B & t > t_0 \end{cases} \text{..............} \quad (2\text{-}1)$$

Bármely meghatározási mód választásával érvényes, hogy annak integrálja:

$$\int_\alpha^\beta h_i(t)dt = C, \quad i = 1{,}2{,}3 \text{ ....} \quad (2\text{-}2)$$

Ennek a tulajdonságnak köszönhető az a tény, hogy az ugrásfüggvény bármelyik változatával gerjesztett rendszer válasza mindig ugyan az. Továbbá, ezen függvényeken végzett műveletek, transzformációk, ugyan azt az eredményt adják. Az alakok jelfeldolgozási szempontból ekvivalensek.

2.3.2. Az egységugrásjel vagy Heaviside-féle függvénnyel leírható jel

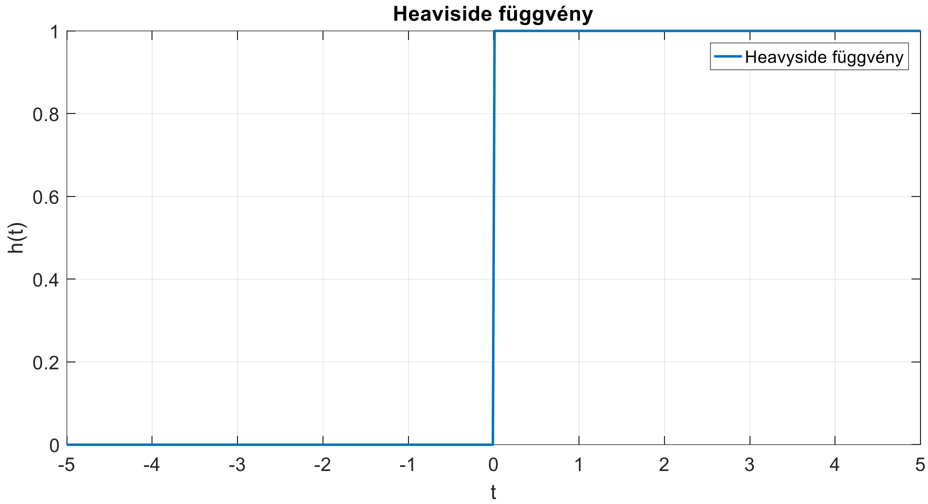
Az egységugrás függvény olyan ugrásfüggvény, amely nulláról egyre ugrik a független változó nulla értékében. Jelölése az irodalomban $\varepsilon(t)$, $u(t)$, $1(t)$, vagy $h(t)$ elnevezése pedig Heaviside függvény vagy csak egyszerűen egységugrás függvény (2-15. ábra). A függvény következőképpen definiálható:

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{..........} \quad (2\text{-}3)$$

Amennyiben a független változó az idő, akkor az egységugrás függvény alkalmas az ideális kapcsoló leírására, mely egy adott pillanatban ugrásszerűen változtatja állapotát nyitottból zártba, vagy fordítva. Ideális kapcsoló, mert a valóságban nem lehet nulla idő alatt állapotot váltani, a valóságban minden folyamat rövidebb vagy hosszabb ideig tartó átmenettel jár. Az egységugrás függvény értéke az ugrás pillanatában nem meghatározott valójában csak az a biztos, hogy a függvény határértéke a $t(-0)$ -ban nulla, a $t(+0)$ pedig egy. Nullában az egységugrásnak szingularitása van, értéke nem definiált. A valóságban a kapcsolás nem nulla ideig tartó átmenettel jár, mégis a legtöbb esetben jól modellezhető az ideális kapcsoló karakterisztikájával.

A Heaviside függvény egy másik alkalmazási területe a jelek belépő jellé alakítása, ugyanis bármilyen jelnek a Heaviside függvénnyel való szorzata belépő jel lesz. A belépő jelek jellemzője, hogy a független változó negatív értékeire nulla értékűek.

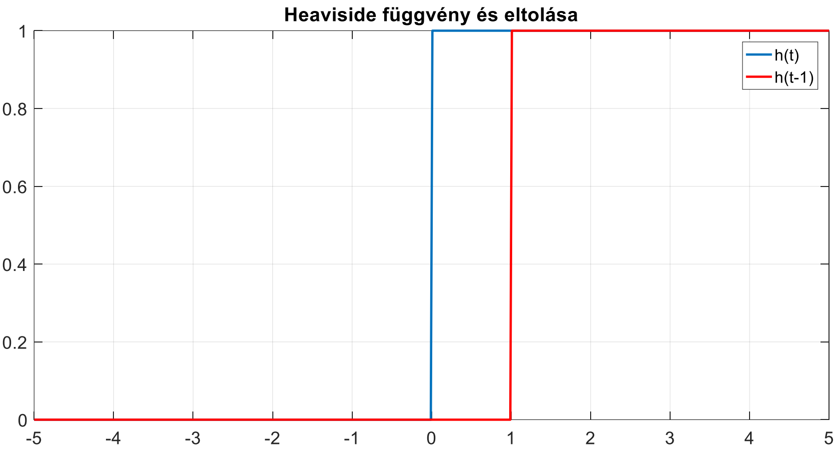
Amennyiben a független változó nem az idő, akkor az egységugrás alkalmas osztályozó feladatok modellezésére, például neurális hálózatok egy neuronja viselkedésének modellezésére.



2-15. ábra. – A Heaviside függvény.

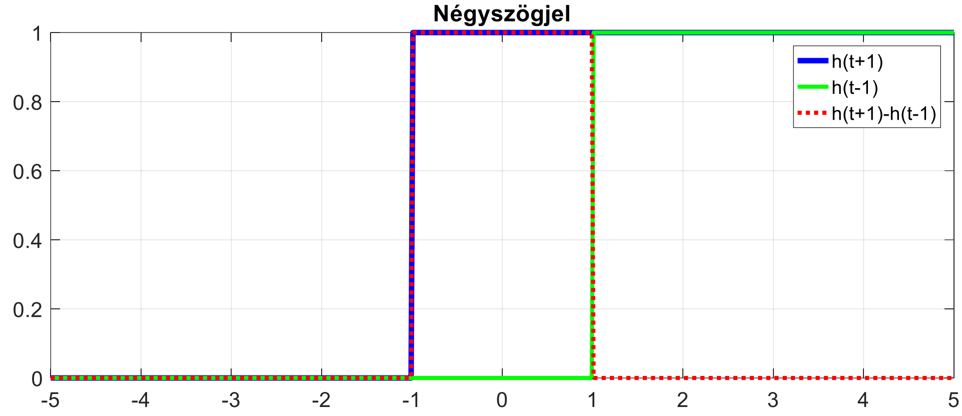
A Heaviside függvény, egyszerű műveletek felhasználásával alkalmas más függvények meghatározására is, példaként definiálhatjuk az egységugrás időbeni eltoltját (2-16. ábra) a következőképpen:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t > \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \qquad \text{(2-4)}$$



2-16. ábra. – Eltolt egységugrás függvény.

Az egységugrás függvény segítségével például négyszögjel állítható elő, az így kapott négyszögjellel ablakozható egy tetszőleges függvény. Ezt úgy érhetjük, el, hogy elemi egységugrás függvényekből készítünk egy általunk meghatározott szélességű ablakot, majd ezt összeszorozva a vizsgálni kívánt függvénnyel kapjuk az ablakozott jelet. Az 2-17. ábra pirossal került jelölősre a két egységugrásból előállított négyszög ablak.



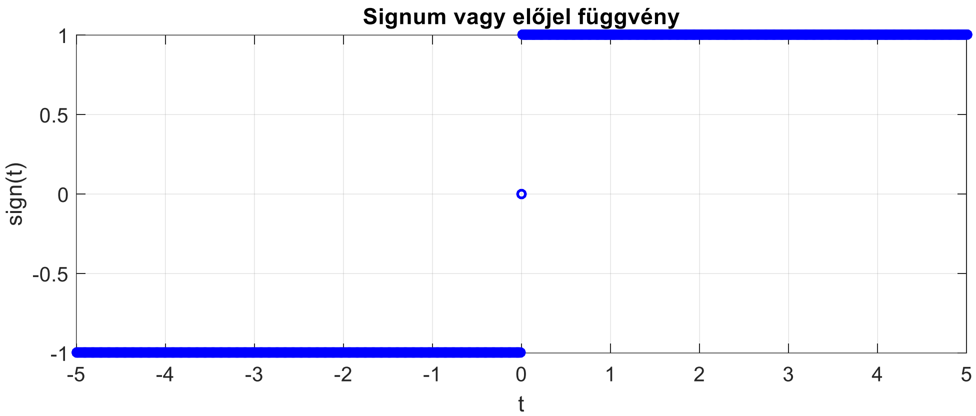
2-17. ábra. – Négyszög jel.

2.3.3. A signum függvénnyel, előjel függvénnyel leírható jel

Az előjelfüggvény egy olyan ugrásfüggvény, melynek értéke a független változó előjelét tükrözi. Az előjelfüggvény a jelek és rendszerek területén egy gyakran használt statikus nemlinearitás az alábbi egyenlet segítségével határozható meg analitikusan:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \text{(2-5)}$$

Az előjel függvény grafikusan ábrázolva a 2-18. ábra látható.



2-18. ábra. – Signum függvény.

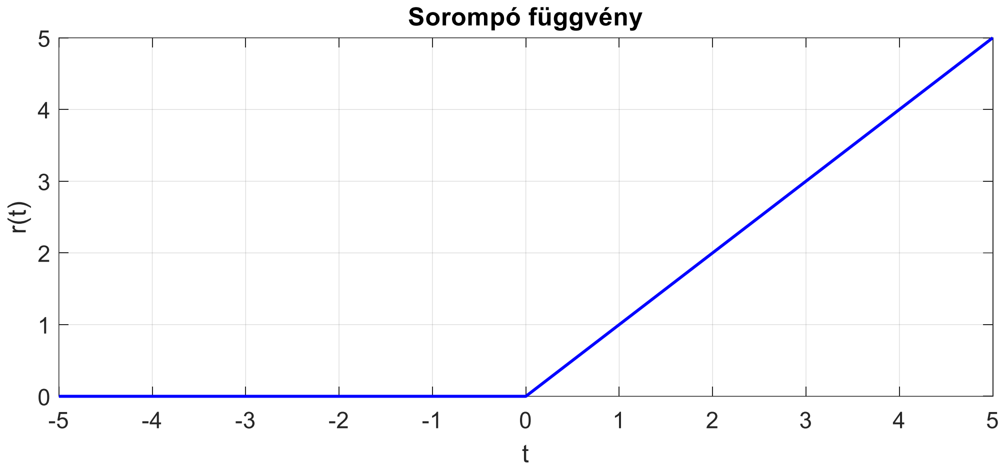
2.3.4. A sorompó jel

A rendszerek vizsgálatánál gyakran használatos a sebesség, vagy sorompó jel. A jel lényegében egy olyan függvénnyel modellezhető, mely értéke a független változó negatív értékeire azonosan nulla a pozitívokra pedig egységnyi iránytényezőjű egyenes függvény. Olyan jelek ábrázolására alkalmas, melyek egy adott pillanatban keletkeznek és utána értékük lineárisan nő. A sorompó jelet az alábbi egyenlet segítségével írhatjuk le analitikusan:

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{(2-6)}$$

A sorompófüggvény előállítható az egységugrás integráljaként: $r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$, ami egyben azt is jelenti, hogy a sorompófüggvény idő szerinti deriváltja a Heaviside függvény: $h(t) = \frac{dr(t)}{dt}$.

A sorompó függvény értelmezett a független változó minden értékére. Belépő jel, mert a független változó negatív értékeire azonosan nulla. Grafikusan ábrázolva a sorompó függvény a 2-19. ábra látható.



2-19. ábra. – Sorompó függvény.

2.3.5. A Dirac delta impulzus

Az ideális Dirac delta impulzus csak az elméletben létező jel, jelölése a $\delta(\cdot)$. Az ideális Dirac delta impulzus matematikailag függvénnyel modellezhető, éspedig olyannal, melynek értéke a független változó minden értékében nulla, kivéve a nulla értéket, ahol a függvény értéke végtelen nagy. Amint azt már az előzőkben említettük, a gyakorlatban nem lehet előállítani olyan jelet, melynek leíró függvénye szingularitással rendelkezik, például olyat, ami nulla idő alatt ugrik egyik értékről egy másikra. A valóságban, csak közelítéssel előállítható Dirac delta impulzus nagy jelentőséggel bír a jel és rendszerelmélet területén. Az alkalmazott matematikai módszerek, bizonyítások, levezetések és technikák, gyakran támaszkodnak az ideális Dirac delta impulzus függvényre és annak tulajdonságaira.

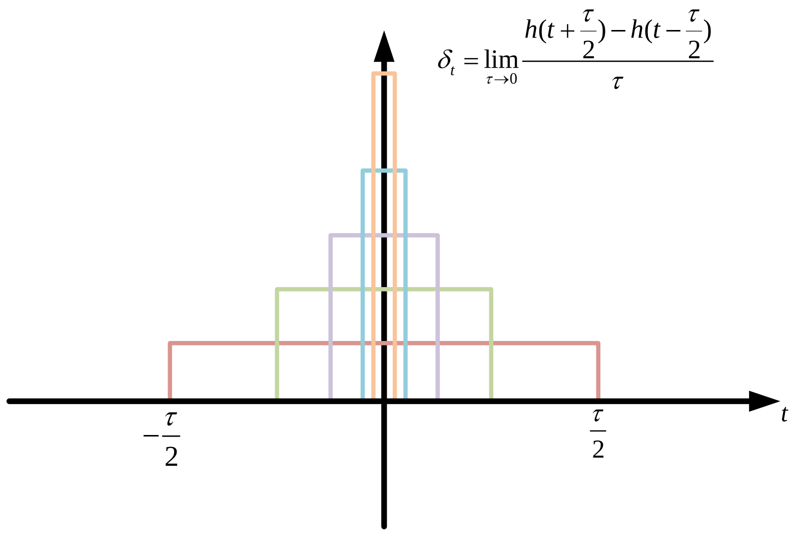
A könnyebb értelmezés érdekében a továbbiakban részletesen szó esik az ideális impulzus közelítéséről, az ideális impulzus többféle módon való bevezetéséről. Egy lehetséges út a közelítésre, hogy veszünk egy egységnyi területű négyszögjelet. Ez a négyszögjel, Heaviside függvények segítségével a következőképpen adható meg: $\delta_\tau(t) = \frac{h\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-h\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}{\tau}$. A példánkban a négyszögjel szélessége τ magassága pedig $\frac{1}{\tau}$, így a terület $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$, vagyis $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t)\,dt = 1$.

Az ideális Dirac delta impulzus függvényt úgy kapjuk meg, hogy a $\delta_\tau(\cdot)$ négyszögjel szélességét nulla felé közelítjük: $\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1}{\tau}\left(h\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - h\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\right)$. A határérték eredménye egy végtelen rövid ideig tartó végtelen nagy impulzus a nullában,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{(2-7)}$$

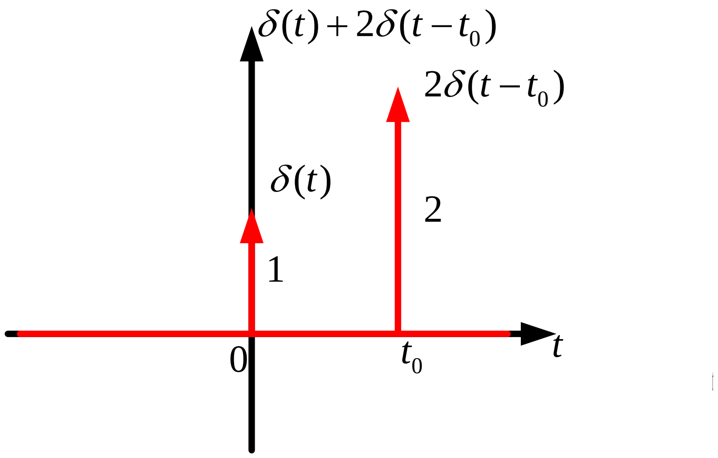
Fontos tény, hogy az impulzus területe továbbra is 1 marad, vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)\,dt = 1. \quad \text{(2-8)}$$



2-20. ábra. – A négyszögjel Dirac delta impulzussá válásának folyamata, grafikusan ábrázolva.

Tehát, 2-21. ábra az idő függvényében értelmezett ideális Dirac delta impulzus minden t értékre nulla, kivéve a $t = 0$ helyen, ahol értéke végtelen nagy, az impulzus alatti terület pedig egységnyi (2-20. ábra).



2-21. ábra. – Az ideális Dirac delta impulzus $\delta(t)$ és módosított változata $2\delta(t-t_0)$.

Az ideális Dirac delta impulzust meghatározó görbe alatti terület értéke, vagyis integrálja egy (1), ezért ábrázoláskor (2-21. ábra) egy felfelé mutató nyíl jelzi a végtelen amplitúdót, az egységnyi integrál értéket pedig a nyílhegy melletti számérték, esetünkben az „1”. A 2-21. ábra látható második függvény egy t_0-val jobbra eltol Dirac impulzus, melynek területe „2”, itt is a végtelen ugrást a nyíl szimbolizálja, a görbe alatti terület értékét pedig a mellé írt számjegy.

Legyen $x(\cdot)$ egy tetszőleges jel. Vizsgáljuk a jel és az ideális Dirac delta impulzus szorzataként kapott függvény alatti területet, ekkor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x(t)\cdot\delta(t)\big)\,dt = \int_{-0}^{+0}x(t)\,dt = x(0). \quad \text{(2-9)}$$

Amint az az eredményből kitűnik, bármely függvény Dirac delta impulzussal való szorzatának integrálja az adott jel nullában vett értékét adja. Más szóval az eljárás segítségével minta vehető a jelből egy tetszőleges időpillanatban, ugyanis: $\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x(t)\cdot\delta(t-t_0)\big)\,dt = x(t_0)$.

Ideális impulzust nem lehet előállítani, valójában egységnyi impulzusnak tekinthető minden olyan jel, amely olyan rövid ideig tart, hogy képes kiválasztani a mintavételezendő egy t_0-beli értékét.

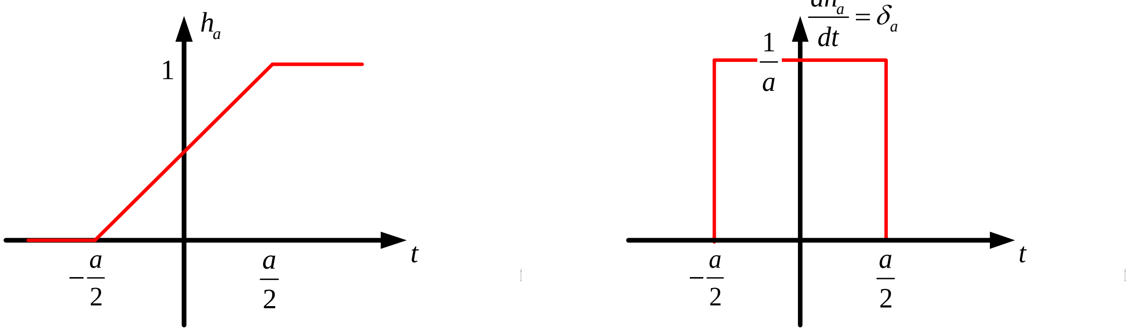
Néhány további tulajdonsága az ideális Dirac delta impulzus függvénynek:

- Nem korlátos, amplitúdójú végtelen értékű függvény,
- abszolút integrálható $\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(t)|dt = 1$,
- $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$,
- energiája végtelen, (amplitúdó négyzet integrálja)= ∞ ,
- $\int_a^b\big(f(t)\delta(t)\big)dt = \begin{cases} f(0), \text{ha } a < 0 < b \\ 0, \text{ha } a < b < 0 \text{ vagy } 0 < a < b \\ \text{nem definiált, ha } a = 0 \text{ vagy } b = 0 \end{cases}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$, amennyiben az $f(t)$ jel folytonos a $t = t_0$ helyen,
- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$, ha $x(t)$ függvény folytonos a $t = 0$-ban,
- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$ ha $x(t)$ függvény folytonos a $t = t_0$-ban.

A Heaviside függvény és a Dirac delta impulzus függvény egyaránt a valóságban nemlétező ideális jelek. A két jel között van egy fontos kapcsolat, éspedig a Heaviside függvény deriváltja a Dirac delta impulzus függvény. A kapcsolat egyértelművé válik ha elemezzük a 2-22. ábra szerint meghatározott $h_a(t)$ függvényt és annak deriváltját.

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & t < -a/2 \\ \frac{1}{a}\left(t + \frac{a}{2}\right) & |t| < a/2 \\ 1 & t > a/2 \end{cases} \quad \text{(2-10)}$$

A függvényre érvényes, hogy $\lim_{a\to 0}\big(h_a(t)\big) = h(t)$.



2-22. ábra. – A $h_a(t)$ függvény és annak deriváltja.

A $h_a(t)$ függvény deriváltja ekkor:

$$\frac{dh_a(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < -a/2 \\ \frac{1}{a} & |t| < a/2 \\ 0 & t > a/2 \end{cases} = \delta_a(t), \lim_{a\to 0}\left(\frac{dh_a(t)}{dt}\right) = \frac{dh(t)}{dt} = \lim_{a\to 0}\delta_a(t) = \delta(t). \quad \text{(2-11)}$$

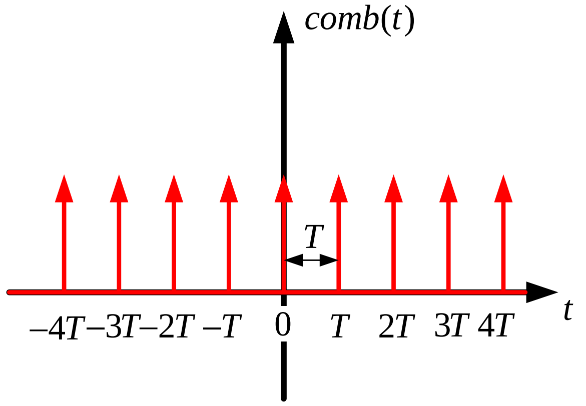
Tehát a Heaviside függvény deriváltja a Dirac delta impulzus. Ennek az inverze is igaz, ugyanis a Dirac delta impulzus idő szerinti integrálja a Heaviside függvény: $h(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

2.3.6. Az impulzussorozat

Az impulzussorozat modellezéskor matematikailag fésűfüggvénnyel modellezhető, ami valójában egy periodikus függvény, melynek minden T periodusában található egy ideális Dirac delta impulzus. A fésűfüggvény analitikusan egymástól egyenlő távolságra eltolt Dirac delta impulzusok összegéből állítható elő a következők szerint:

$$comb(t) = p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT) \quad \text{(2-12)}$$

, ahol n – egész szám. A 2-23. ábra grafikusan ábrázolja az impulzus sorozat függvényt.



2-23. ábra. – Az impulzus sorozat függvény.

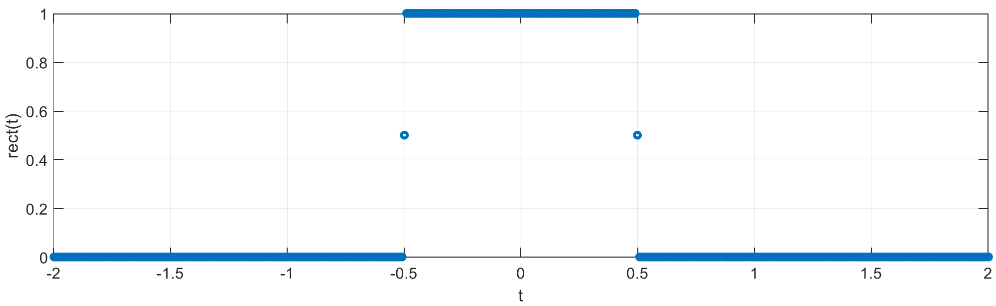
A fésűfüggvényt többek között, olyan matematikai eljárásoknál alkalmazzuk, ahol modellezni kívánjuk a jelek ideális mintavételezését.

2.3.7. Az egységnyi négyszögjel

Az egységnyi területű négyszög alakú jelet matematikailag egységnyi négyszög függvénnyel modellezhetjük. A függvény jelölése a $rect(t)$, melyet analitikusan az alábbi egyenlet segítségével adhatunk meg:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases} \qquad \text{(2-13)}$$

Grafikusan ábrázolva az egységnyi területű négyszögjelet a 2-24. ábra láthatjuk:



2-24. ábra. – Az egységnyi négyszög függvény.

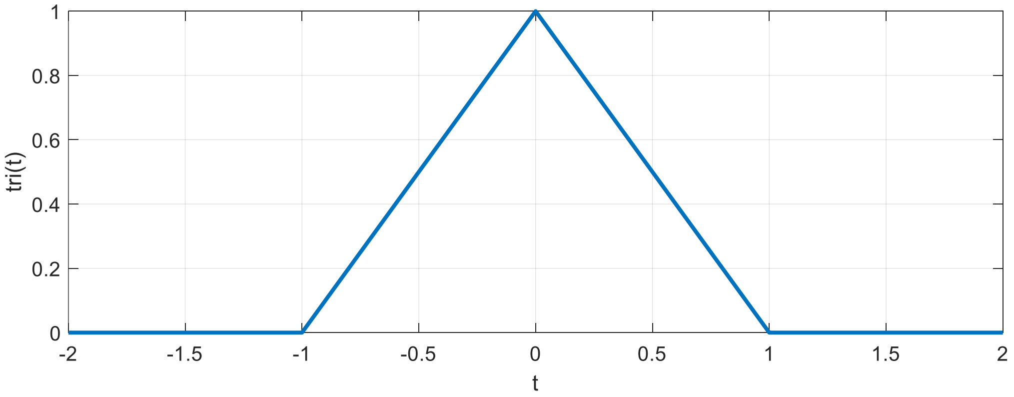
Az egységnyi négyszögfüggvény is egy ideális jel. Értéke nulla idő alatt ugrásszerűen megváltozik, két helyen is. A függvény deriváltja mindenütt nulla, kivéve az ugrások helyén, ahol két Dirac delta impulzus található, az egyik felfelé egységnyi területtel, a másik lefelé mutató (-1)-es területtel, $\frac{d\,rect(t)}{dt} = \delta(t + 1/2) - \delta(t - 1/2)$. A függvény alatti terület pedig $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect(t)}\, dt = 1$.

2.3.8. Az egységnyi háromszög jel

Az egységnyi háromszögjel egy olyan egyszer deriválható sima vizsgálójel, mely négy részből tevődik össze. Matematikailag modellezve, függvénnyel leírva értéke csak a független változó -1 és 1 közé eső részében nem nulla. Ott egyenesek mentén változik az érték. -1 és 0 között pozitív iránytényezővel változó egyenes, 0 és 1 között pedig negatív iránytényezővel változó egyenes. A függvény analitikus formában a következőképpen adható meg:

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| \ ; & |t| < 1 \\ 0 \quad ; & |t| > 1 \end{cases} \quad (2\text{-}14)$$

Grafikusan ábrázolva az egységnyi háromszög függvény a 2-25. ábra látható.

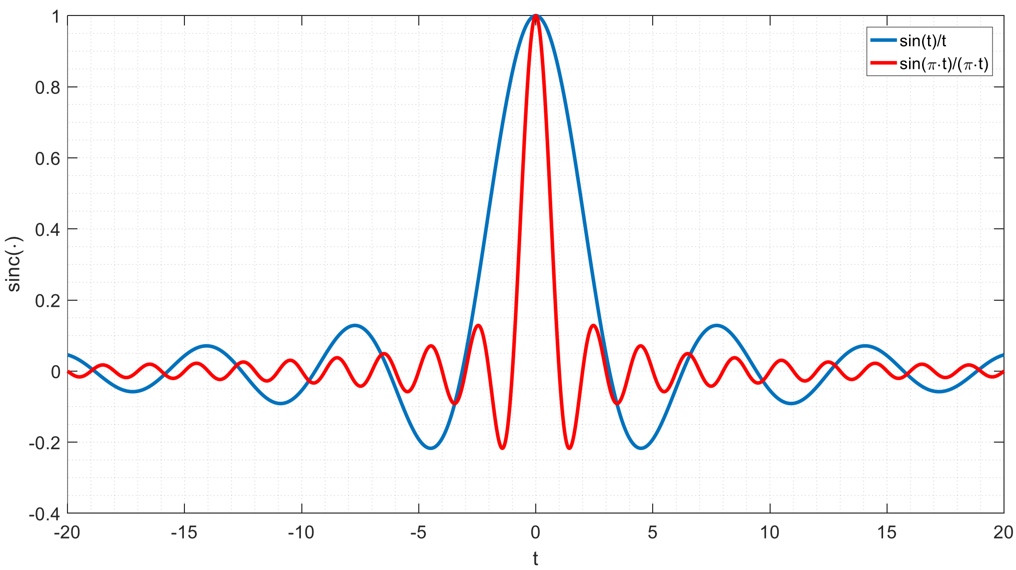


2-25. ábra. –Az egységnyi háromszög függvény.

Az egységnyi háromszögfüggvény nem rendelkezik szingularitással, egyszer deriválható. Alkalmas például sebesség profilok megadására.

2.3.9. Az egységnyi sinc jel

A jelek különböző transzformációi során úgy idő, mint frekvenciatartományban többször találkozunk a $sinc(\cdot)$ függvénnyel leírható jellel. Az irodalomban a $sinc(\cdot)$-ként szereplő függvény kétféle alakot takarhat, egyik a $sinc(t) = \frac{sin(t)}{t}$ a másik pedig a $sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$. Az első alak esetében beszélünk a nem normalizált $sinc(\cdot)$ függvényről a második alak a normalizált függvény. A 2-26. ábra látható mindkét változat.



2-26. ábra – A $sinc(\cdot)$ függvény.

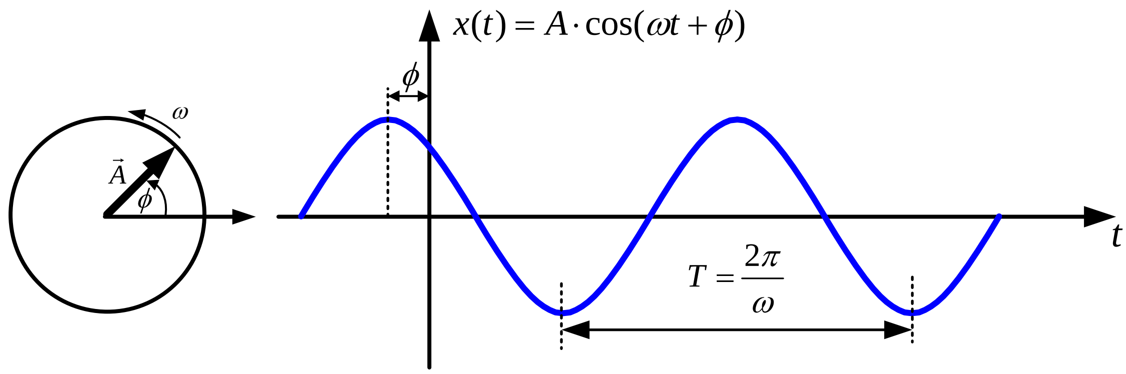
A 2-26. ábra kitűnik, hogy mindkét alaknak nullában van egy globális maximuma, amely értéke 1. Amplitúdójuk exponenciálisan csökken. A normalizált alak (a piros színnel megjelölt a 2-26. ábra) a független változó minden egész értékére nulla. A normalizált alak esetében a teljes függvény alatti terület $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(\pi t)}{\pi t}\, dt = 1$, míg a nem normalizáltnál: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(t)}{t}\, dt = \pi$. A jelfeldolgozásnál legtöbbször a normalizált alakot használjuk.

2.3.10. A harmonikus jel

Az állandó szögsebességgel forgó vektor vetületét a vízszintes és függőleges tengelyre ábrázoljuk szinusz és koszinusz függvénnyel. Általános esetben a harmonikus jel matematikai eszközökkel, szinuszfüggvénnyel vagy koszinuszfüggvénnyel modellezhető. A periodikus harmonikus jel például felírható a következők szerint:

$$x(t) = A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = A \cdot cos(2\pi f t + \phi) = A \cdot cos(\omega t + \phi) \qquad (2\text{-}15)$$

, ahol A a harmonikus jel amplitúdója, ω a jel körfrekvenciája, f a jel frekvenciája, T a jel periodusa és ϕ a jel fázisa.

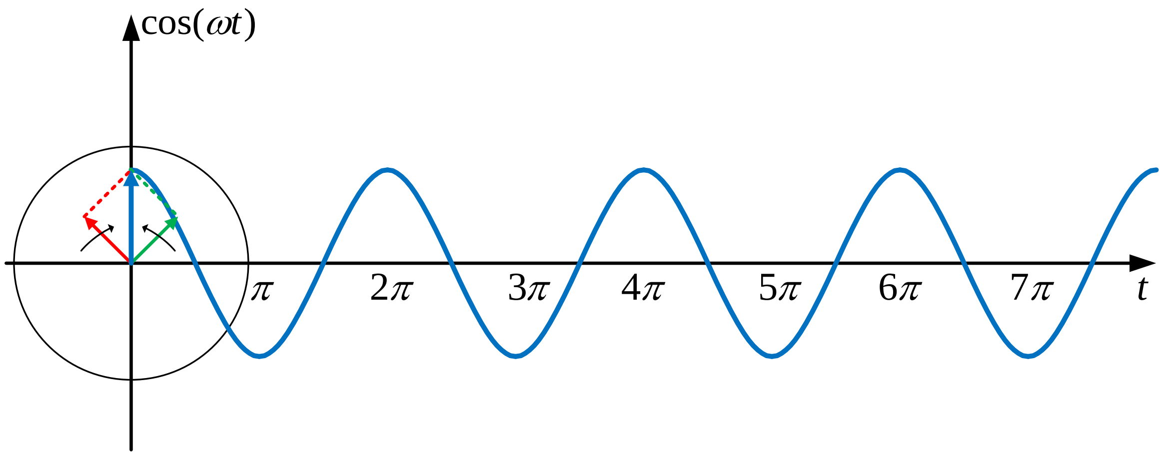


2-27. ábra. – A szinusz függvény.

Az Euler-képlet szoros kapcsolatot teremt a matematikai analízis és a trigonometria között. Az Euler képletet két formájában, ismeretes éspedig: $e^{j\alpha} = cos(\alpha) + jsin(\alpha)$és $e^{-j\alpha} = cos(\alpha) - jsin(\alpha)$. A két formát felhasználva belátható, hogy lehetővé teszi a szinusz és koszinusz függvényeknek az komplex exponenciális függvény súlyozott összegeként való értelmezését:

$$cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2},\ sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \qquad (2\text{-}16)$$

Tekintsünk egy ω állandó szögsebességet, ekkor $\alpha = \omega t$ és $e^{j\omega t}$ egy az óramutatóval ellentétes irányban forgó fázort határoz meg (2-28. ábra, zöld fázor), míg $e^{-j\omega t}$ az óramutatóval egy irányban forgó (2-28. ábra, piros fázor) vektort jelent. A szinusz esetében a vektorok vetülete a valós tengelyre minden esetben kioltják egymást és marad a képzetes tengelyre való vetületük. A negatív előjelű argumentum valójában negatív körfrekvenciát jelent!



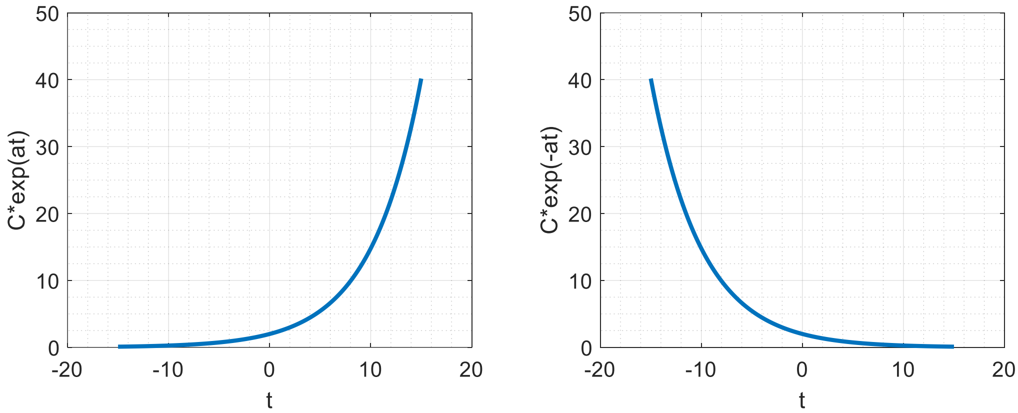
2-28. ábra. – A koszinusz az Euler képlet alapján.

A koszinusz esetében a vektorok vetülete a képzetes tengelyre minden esetben kioltják egymást és marad a valós tengelyre való vetületük (2-28. ábra). Itt is igaz, hogy az ellentétes irányú forgás, vagyis a negatív előjelű argumentum valójában negatív körfrekvenciát jelent!

A harmonikus jellel számos esetben találkozunk a gyakorlatban, mint például: forgó mozgások esetében, rezgőkörökben, a többtárolós magára hagyott rendszerek esetében, a 3 fázisú hálózati rendszerek esetében és még rengeteg más esetben.

2.3.11. Az exponenciális jel

Tekintsük egy olyan vizsgáló jelet, mely az $x(t) = Ce^{at}$ függvénnyel modellezhető. Amennyiben C és a valós számok, akkor $x(t)$ egy valós exponenciális függvény. A jelet leíró modell két paramétert tartalmaz, C megadja a jel értékét a független változó nulla értékére, a pedig megadja a jel görbületét. A 2-29. ábra grafikusan is demonstrálja a szóban forgó jel alakját.

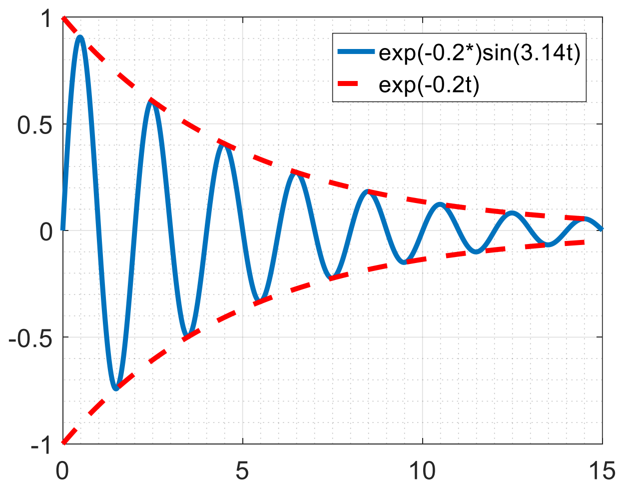


2-29. ábra. – A valós exponenciális függvény. a>0 és a<0 esetek, C=1.

Az exponenciális függvénnyel modellezhető jelnek nagy szerepe van az átmeneti jelenségek leírásánál.

A gyakorlatban több esetben előfordul a rendszerből nyert olyan jel, amikor is a harmonikus belépő jel exponenciális burkológörbe mentén változtatja amplitúdóját (2-30. ábra). A jel modellezhető a következők függvénnyel:

$f(t) = h(t)e^{at}sin(\omega t)$. .... (2-17)



2-30. ábra. – Az exponenciális burkológörbével ellőátott szinusz függvény.

A valóságban előforduló jelek gyakran összetettek, esetükben alkalmazható a komplex exponenciális függvénnyel való modellezés. A továbbiakban tekintsük és vizsgáljuk az $x(t) =$

Ce^{at} függvényt, ahol C és a általános esetben komplex számok, legyen $a = r + j\omega$. Egy speciális eset, ha a valós része nulla és C=1, akkor, $x(t) = e^{j\omega t}$.

Egy érdekes tulajdonsága ennek a jelnek, hogy periodikus. Ugyanis:

$$x(t) = e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t}e^{j\omega T} = e^{j\omega t} \quad (2\text{-}18)$$

, mert

$$e^{j\omega T} = e^{j\frac{2\pi}{T}T} = e^{j2\pi} = cos(2\pi) + jsin(2\pi) = 1 \quad (2\text{-}19)$$

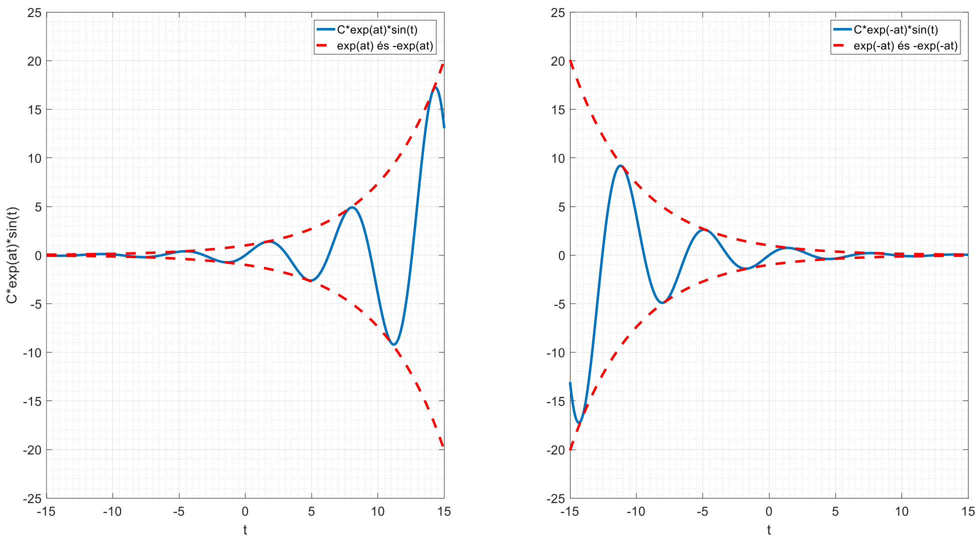
amennyiben $\omega = 0$, akkor $x(t) = 1$ és a jel periodikus minden T értékre, amennyiben $\omega \neq 0$, akkor a jel alapperiódusa az a T legkisebb pozitív érték , amire a jel periodikus. Vegyük észre, hogy az $x(t) = e^{j\omega t}$ és $\bar{x}(t) = e^{-j\omega t}$ jeleknek azonos a periódusuk, azaz $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, melynek körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Mivel általános esetben $a = r + j\omega$ komplex és $C = |C|e^{j\angle(C)}$ is komplex, valamint jelölje $\theta = \angle(C)$ ekkor $x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} = |C|e^{rt}e^{j(\theta+\omega t)}$, belátható, hogy jel amplitúdója exponenciálisan változik az időben a valós r értékétől függő görbülettel és hogy θ állandó fázisként van jelen a jelben.

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{rt}e^{j(\theta+\omega t)} = |C|e^{rt}\big(cos(\omega t + \theta) + jsin(\omega t + \theta)\big), \quad (2\text{-}20)$$

$$|C|e^{rt}\big(cos(\omega t + \theta) + jsin(\omega t + \theta)\big) =$$
$$= |C|e^{rt}\left(cos(\omega t + \theta) + jcos\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2\text{-}21)$$

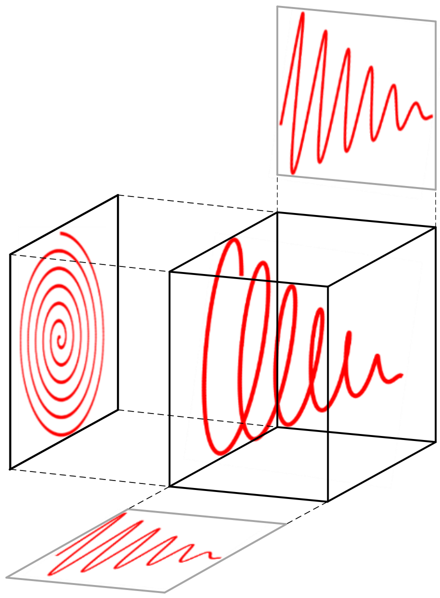
A jel valós és képzetes része ugyan abban a burkológörbében van, a kettő közötti különbség csak egy $\frac{\pi}{2}$ fáziseltolásban jelentkezik. A 2-31. ábra illusztrálja úgy a jel valós, mint a képzetes komponensének idő szerinti változását az r paraméter előjelétől függően.



2-31. ábra – Komplex exponenciális függvények valós részének idő szerinti változása $r > 0$ *és* $r < 0$ *esetekre.*

A komplex exponenciálissal modellezhető jel koncízen tartalmaz információt a jelben található frekvenciáról, fázisról és amplitúdó változásról az időben.

A 2-32. ábra mutatja, hogy hogyan értelmezhető három dimenzióban (valós, képzetes és idő) a komplex exponenciális idő szerinti változása és a kétdimenziós vetületek, valós-képzetes, valós-idő, képzetes-idő.



2-32. ábra – Komplex exponenciális háromdimenziós ábrázolása $r < 0$ *esetre.*

Ezzel a komplex exponenciális függvénnyel tudunk modellezni RLC körből származó elektromos jelet vagy például rugót, viszkóz surlódást és tömeget tartalmazó mechanikus rendszerből származó jelet és még jónéhány kéttárolós rendszerből származó jelet.

2.4. Néhány fontosabb diszkrétidejű jel

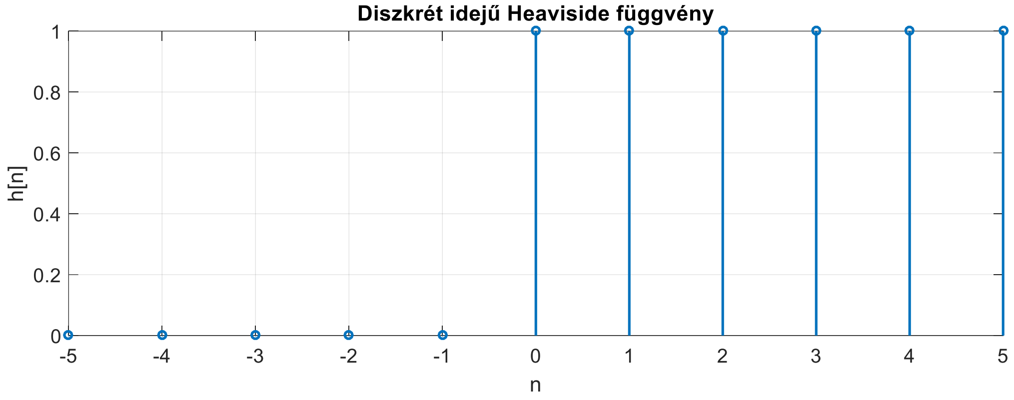
A folytonos idejű jelekhez hasonlóan a diszkrétidejű jelek esetében is érdemes külön elemezni néhány fontosabbat. A jelek és rendszerek diszkrét időben való elemzésének, tárgyalásának esetében is vannak olyan jelek, melyeket kiemelten érdemes kezelni. Ebben a részben csak olyan diszkrétidejű (DI) jelekkel foglalkozunk, melyek a független változó ekvidisztáns, egymástól egyenlő távolságra lévő értékeire definiáltak. A DI jel által leírt jelenségtől függően a DI jelek is lehetnek: periodikusak vagy aperiodikusak, determinisztikusak vagy sztochasztikusak, véges energiájúak vagy véges teljesítményűek. Néhány tulajdonságot tekintve, azonban az FI jel DI megfelelője eltér az FI esetben tárgyalttól, a továbbiakban erre külön felhívjuk a figyelmet. Az egyváltozós, DI jelek számok sorozatával, idősorral írhatók le. Az idősorban hordozott információ jellegétől függően ezek a számok lehetnek valósak vagy komplexek. Jelölésüket tekintve, nincs egységes jelölésmód a diszkrétidejű jelek ábrázolására. Jelöljük a diszkrétidejű jelet az $x(t)$-hez hasonlóan $t = nT$ helyettesítéssel $x[nT]$-vel, ahol T a mintavételezés periódusa n pedig egész szám. Gyakran a T-t elhagyhatjuk és így $x[n]$ jelölést kapjuk. A továbbiakban használjuk az $x[n]$ jelölést. Fontos megemlíteni, hogy a diszkrétidejű jelek esetében nem beszélünk szinguláris pontokról, vagy nem definiált pontokról, ugyanis egy adott mintavétel értéke mindig meghatározott. Két mintavétel közötti érték pedig nem létezik.

2.4.1. Az DI egységugrás jel

A folytonos idejű egységugráshoz hasonlóan meghatározható annak diszkrétidejű megfelelője. Az egységugrás jel olyan ugrásfüggvénnyel írható le, amely nulláról egyre ugrik a független változó nulla értékében és értelmezett a pozitív és negatív egész számok felett egyaránt. Jelölése az irodalomban $\varepsilon[n]$, $u[n]$, $1[n]$, vagy $h[n]$ elnevezése pedig DI Heaviside függvény vagy csak egyszerűen DI egységugrás függvény. Ez az igen gyakran alkalmazott jel a következőképen adható meg:

$$h[k] = \varepsilon[k] = \begin{cases} 0, ha\ k < 0 \\ 1, ha\ k \geq 0 \end{cases} \quad (2\text{-}22)$$

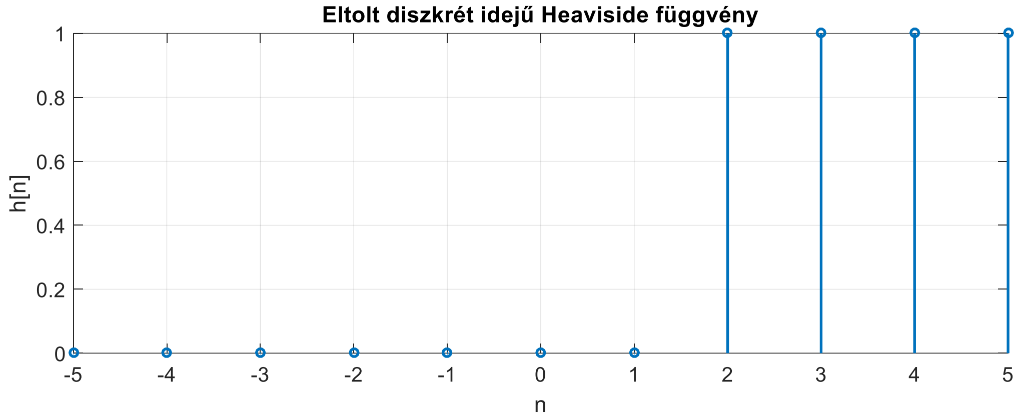
A függvény értéke $k < 0$ ütemekre 0, $k \geq 0$ ütemekre pedig 1 (2-33. ábra).



2-33. ábra. – A DI egységugrás függvény.

A folytonos idejű egységugráshoz hasonlóan itt is definiálhatunk tetszőleges i ütemmel eltolt egységugrás függvényt (2-34. ábra), amely eltolás a következőt jelenti:

$$\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0, ha\ k < i \\ 1, ha\ k \geq i \end{cases} \quad (2\text{-}23)$$

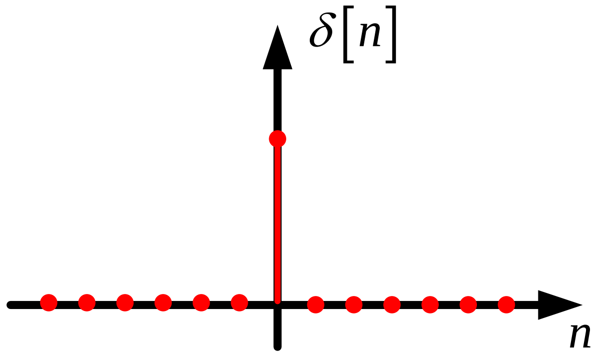


2-34. ábra – Eltolt DI egységugrás függvény.

A jelek és rendszerek területén való alkalmazását tekintve elmondható, hogy a DI egységugrás függvény jelentősége és alkalmazása megegyezik a FI Heaviside függvényével. Leírhat ideális kapcsolót, jeleket belépő jellé alakíthat, egyszerű műveletek felhasználásával alkalmas más jelek modellezésére.

2.4.2. Dirac-impulzus, egységimpulzus.

Az FI esetben megadott Dirac impulzussal ellentétben a DI változatát leíró matematikai modell a diszkrét időpontok mindgyikére értelmezett, értéke sosem végtelen, pontosabban mindenütt nulla (0) kivéve nullában, ahol egy (1) (2-35. ábra).



2-35. ábra. – Az egységimpulzus, DI Dirac impulzus.

A diszkrét idejű Dirac impulzust a következőképen definiálhatjuk:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad \text{(2-24)}$$

Itt is definiálhatjuk az egységimpulzus tetszőleges mintaszámmal való eltolását:

$$\delta[n-i] = \begin{cases} 0, ha\ n < i \\ 1, ha\ n = i \\ 0, ha\ n > i \end{cases} \quad \text{(2-25)}$$

Hasonlóan a folytonos idejű megfelelőjéhez érvényes, hogy:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\delta[n]) = 1 \quad \text{(2-26)}$$

és

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\delta[n] \cdot x[n]) = \delta[n]\, x[0] = x[0], \quad \text{(2-27)}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\delta[n-n_0] \cdot x[n]) = x[n_0], \quad \text{(2-28)}$$

alkalmas mintát venni bármilyen DI jelből, de rá nem érvényes a skálázhatóság tulajdonsága:

$$\delta[an] \neq \delta[n] \quad \text{(2-29)}$$

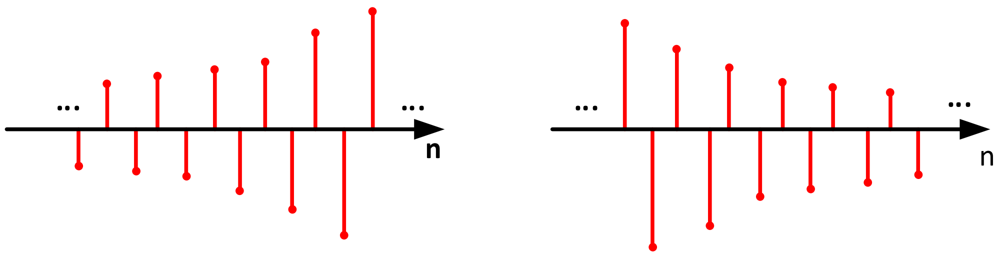
Az FI megfelelőjéhez hasonlóan DI esetben fennál az egységugrás és az egységimpulzus közötti kapcsolat, miszerint: $\varepsilon[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta[i]$ az egységugrás az egységimpulzus integrálja (összege), valamint $\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1]$ az egységimpulzus az egységugrás első deriváltja.

Az egységimpulzus nem ideális jel. Digitális változata könnyen előállítható, alkalmazását tekintve pedig az FI megfelelőjéhez analóg módon használható.

2.4.3. Diszkrétidejű komplex exponenciális

A valóságban jelentkező összetett viselkedések által létrehozott jel gyakran modellezhető a komplex exponenciálissal. A függvény sorozata a következőképen adható meg: $x[n] = C \cdot z^n$, ahol C és z általánosan komplex számok.

Egy lehetséges helyzet, hogy C és z valós értékek és C pozitív, ekkor négy lehetséges eset léphet fel. Előfordulhat, hogy z értéke nagyobb mint egy, ekkor exponenciálisan növekvő jelet kapunk, amennyiben z nulla és egy közötti érték, akkor exponenciálisan csökkenő a jel és ha negatív, akkor váltakozó előjelű lesz az eredmény, ugyanis ekkor n páros értékeire pozitív, a páratlanokra pedig negatív lesz a jel (2-36. ábra).



2-36. ábra. – A DI komplex exponenciális $|z| > 1$ *esetén (bal).* $|z| < 1$ *esetén (jobb).*

Amennyiben C és z komplex számok, akkor felírhatók exponenciális alakban:
$C = |C|e^{j\theta}$ és $z = |z|e^{j\Omega}$, akkor $x[n] = |C|e^{j\theta} \cdot \left(|z|e^{j\Omega}\right)^n$, $x[n] = |C||z|^n e^{j\theta} e^{j\Omega n}$, $x[n] = |C||z|^n e^{j(\Omega n + \theta)}$, felhasználva az Euler formulát:

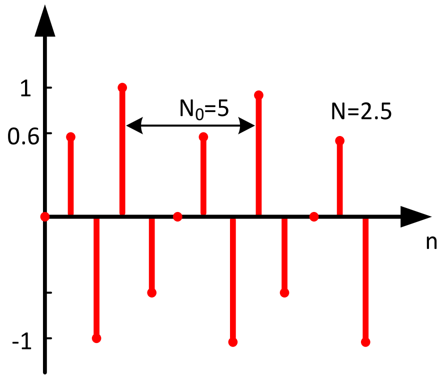
$$x[n] = |C||z|^n(\cos(\Omega n + \theta) + j\sin(\Omega n + \theta)). \quad \text{(2-30)}$$

Vegyük észre, hogy ha n dimenziónélküli egész szám, akkor Ω és θ dimenziója szög, mértékegysége pedig radián. Az $x[n]$ sor burkológörbéjét meghatározza $|z|$, Amennyiben $|z| = 1$, akkor a sor szinuszos, ha $|z| > 1$ akkor exponenciálisan növekvő, ha pedig $|z| < 1$ akkor exponenciálisan csökkenő amplitúdójú. Amennyiben $|C| = |z| = 1$ sorozat valós része a $\cos(\Omega n + \theta)$ képzetes része pedig a $\sin(\Omega n + \theta)$.

Adódik az igény, hogy megvizsgáljuk a komplex exponenciális periodicitását a frekvenciára nézve, az egyszerűség kedvéért vegyük a $|C| = |z| = 1$ és $\theta = 0$ értékeket, ekkor: $x[n] = e^{j\Omega n}$, belátható, hogy $x[n] = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n}e^{j2\pi n} = e^{j\Omega n}$, mert $e^{j2\pi n} = 1$. A komplex exponenciális Ω változtatásával periodikusan ugyanazon értékeket adja 2π periodussal. Ellentétben az FI megfelelőjével, ahol a frekvencia változásával mindig más jelalakot kapunk, a DI komplex exponenciálist és harmonikus jeleket csak alapsávban $0 \leq \Omega < 2\pi$ vagy $-\pi \leq \Omega < \pi$ között érdemes vizsgálni. Ennek az az oka, hogy folytonos esetben a frekvencia marad frekvencia, míg diszkrét esetben szöggel reprezentáljuk azt.

Egy másik lehetőség a komplex exponenciális periodicitására a futó index n oldaláról tekintve azt. Éspedig, hogy mikor lehet érvényes, hogy $x[n] = e^{j\Omega(n+N_0)} = e^{j\Omega n}$, ekkor N_0 az az egész érték amely után a jelsorozat ismétlődik. Ahhoz, hogy periodikus legyen a jel N_0-nak, és Ω-nak a következő feltételeket kell teljesítenünk: $x[n] = e^{j\Omega(n+N_0)} = e^{j\Omega n}e^{j\Omega N_0} = e^{j\Omega n}e^{jm2\pi} = e^{j\Omega n}$, vagyis $\Omega N_0 = m2\pi$, vagy $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N_0}$, ahol m és N_0 pozitív egészek. Ebből az következik, hogy a sorozat nem minden Ω–ra lesz periodikus, csak akkor, ha $\Omega/2\pi$ egy racionális számot képvisel. Lényeges különbség ez a folytonos idejű harmonikus jelekkel tapasztaltakkal szemben, ahol is bármilyen ω_0-ra periodikus volt a jel. Ha Ω megfelel a periodicitás feltételének, azaz $\Omega \neq 0$ valamint N_0-nak és m-nek nincs közös tényezőjük, akkor felírhatjuk az alap periodus egyenletét: $N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$.

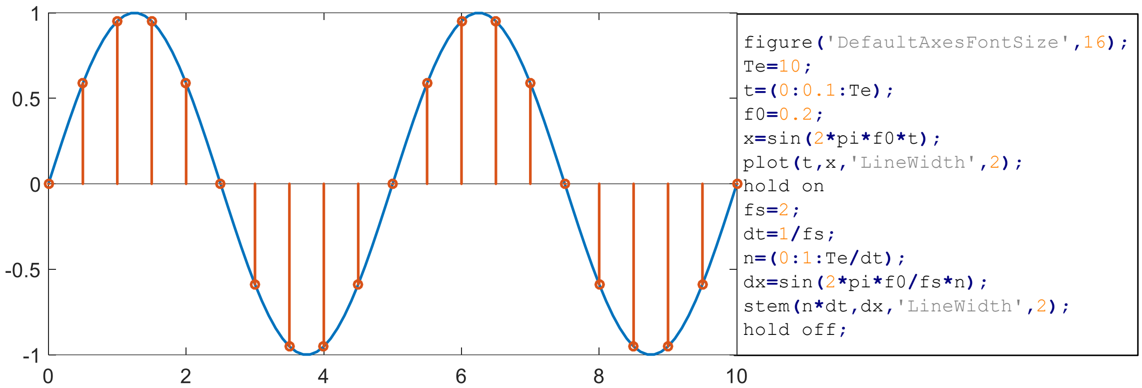
Példaként tekintsük az $x[n] = sin\left(\frac{2\pi}{2.5}n\right)$ DI jelet. Ebben az esetben $\Omega = \frac{2\pi}{2.5}$, ekkor $\Omega = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{2\pi m}{N_0}$, $\frac{10}{25} = \frac{m}{N_0}$, $\frac{2}{5} = \frac{m}{N_0}$, és végül a DI jel periódusa $N_0 = 5$ mert $m = 2$ (2-37. ábra).



2-37. ábra. – A példában szereplő DI jel

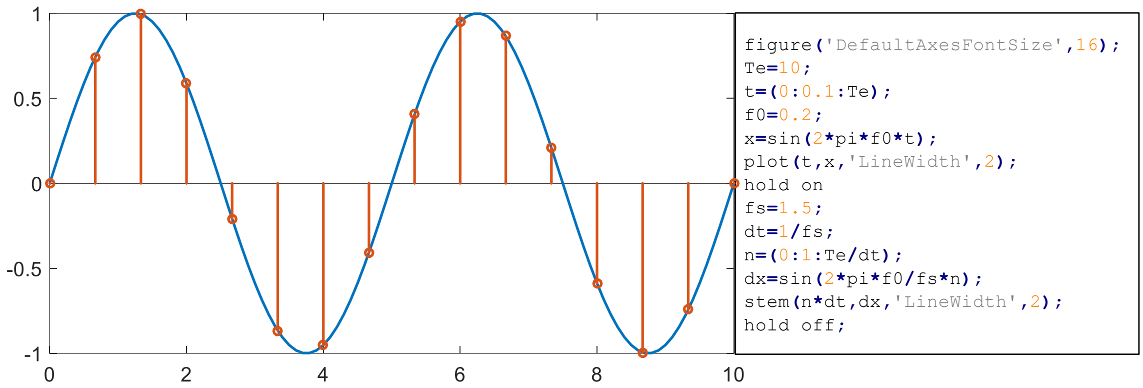
Egy másik példán keresztül bemutatjuk, hogy a FI harmonikus jel diszkretizálása után kapott DI jel periódusa függ a mintavétel frekvenciájától. Tekintsük az $x(t) = sin(2\pi f_0 t)$ FI jelet és mintavételezzük azt f_s mintavételi frekvenciával. Ekkor $x[n] = sin\left(2\pi f_0 \frac{1}{f_s} n\right)$ ekkor $\Omega = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$, és belátható, hogy a DI jel periódusa függ az $\frac{f_s}{f_0}$ aránytól.

A példánkban először legyen $f_0 = 0.2[Hz]$, $f_s = 2[Hz]$, ekkor a harmonikus jel periódusa $T = \frac{1}{f_0} = 5[sec]$, a mintavételezés periódusa pedig $\Delta T = \frac{1}{f_s} = 0.5[sec]$. A diszkrét jelsorozat körfrekvenciája $\Omega = 2\pi \frac{0.2}{2}$, másrészt periódusa a $\Omega = \frac{2\pi m}{N_0}$ kifejezés segítségével számítható, így $2\pi \frac{0.2}{2} = \frac{2\pi m}{N_0}$, $\frac{0.2}{2} = \frac{m}{N_0}$, $m = 1$ mellett a periódus: $N_0 = 10$,. A jel kirajzoltatását végző MATLAB kód és a kapott jelalak a 2-38. ábra látható.



2-38. ábra – Az FI jel diszkretizálása után kapott DI jel $f_s = 2[Hz]$ esetében

Ezután $f_0 = 0.2$ maradjon, a mintavételi frekvencia új értéke legyen: $f_s = 1.5$, ekkor $\Omega = 2\pi \frac{0.2}{1.5}$, így $2\pi \frac{0.2}{1.5} = \frac{2\pi m}{N_0}$, $\frac{0.2}{1.5} = \frac{m}{N_0}$, $N_0 = 15$, $m = 2$ (2-39. ábra).

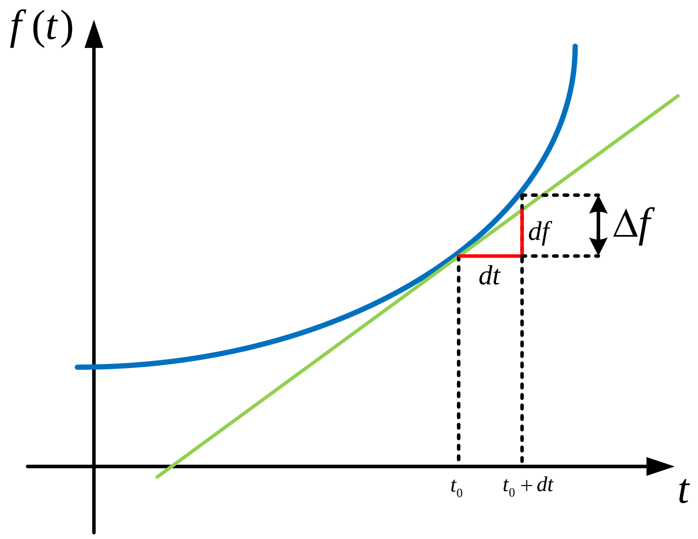


2-39. ábra. - Az FI jel diszkretizálása után kapott DI jel $f_s = 1.5[Hz]$ *esetében*

Fontos megemlíteni, hogy ha megfelelő mintavételi frekvenciát választunk, akkor két különböző FI jelnek lehet azonos DI alakja. Ez a tény az alapja annak a megállapításnak, hogy előzetes (apriori) ismeretek nélkül, a diszkretizálás után hamis információk alapján hamis következtetések vonhatók le a folytonos jelet kibocsátó rendszerről.

2.4.4. A jelek deriváltja

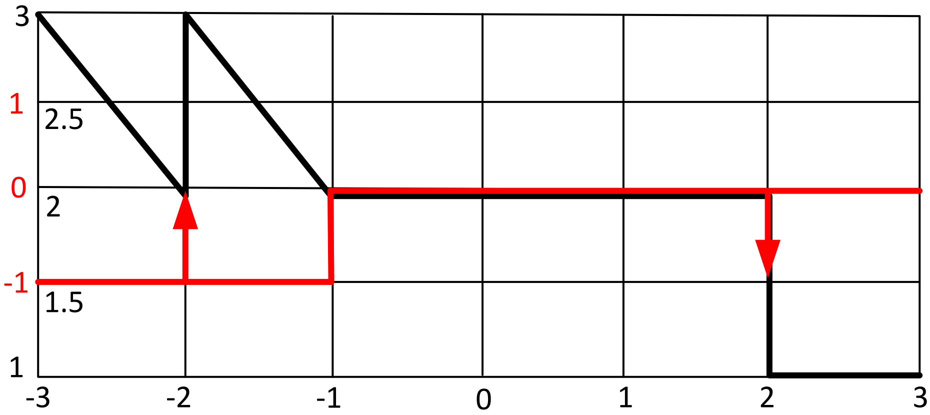
A függvényekhez hasonlóan, jelek esetében is meghatározható a derivált fogalma. Ismeretes, hogy ha $k \in \mathbb{N}$ és egy $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallum felett $f(\cdot)$ függvény folytonos és az intervallum felett létezik annak k-adik deriváltja $f^{(k)}(\cdot)$ akkor a függvény C^k osztályba tartozik. Így például egy C^1 osztályba tartozó függvény az adott intervallum felett egyszer differenciálható, míg a C^0 egyszer sem. Amennyiben $y(t)$ jel differenciálható függvénnyel leírható, akkor a jel deriváltja a definíció szerint $y(t) = f(t), \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \dot{y}(t) = y^{(1)}(t)$ határozható meg. A derivált megadja a jel érintőjének meredekségét a szemlélt időpontban és ezzel a jel időbeni változásának a mértékét (2-40. ábra).



2-40. ábra- A jel deriváltja grafikusan ábrázolva

Amennyiben a jel folytonos, akkor deriválható, de ha ugrások vannak benne, akkor az egyes ugrások közötti folytonos szakaszok szakaszonként deriválhatók, az ugrás helyén pedig Dirac delta impulzusok jelentkeznek. A deriválás eggyel csökkenti a jel osztályát, egy C^k osztályba tartozó jel egy deriválás után C^{k-1} osztályba fog tartozni. Ezt a tényt figyelembe véve a Heaviside jelet leíró függvény a C^0 osztályba tartozik a deriváltja a Dirac impulzus pedig a C^{-1} be. A deriválás rontja a jel minőségét, kiemeli a jelben levő zajokat. Képfeldolgozás esetén a deriválás például élkiemelésre alkalmas eljárás.

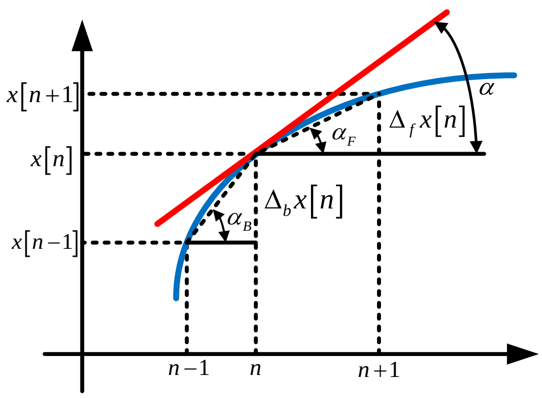
Példaként tekintsük az $x(t)=\begin{cases} -t; & t\le -2 \\ -t+1; & -2<t\le -1 \\ 2; & -1<t\le 2 \\ 1; & t>2 \end{cases}$ jelet, amely több ugrást is tartalmaz.



2-41. ábra. – A példában szereplő jel és a deriváltja

A 2-41. ábra a fekete grafikon jelzi a jelet, piros pedig annak deriváltját. A jelben tapasztalható ugrások helyén a deriváltban Dirac delta impulzusok jelennek meg.

Szigorúan nézve a diszkrét jelek esetében nem beszélhetünk deriváltról, hiszen esetükben a differenciálhatóság feltétele a folytonosság nem kielégített. Mégis, diszkrét esetben kétféle deriváltat határozhatunk meg: az előretekintőt és a visszatekintőt. A 2-42. ábra szemlélteti mindkét lehetőséget.



2-42. ábra. – Az előre és a visszatekintő derivált

Az előretekintő derivált definíció szerint számítható a:

$$\Delta x_f=\frac{x[n+1]-x[n]}{(n+1)-n}=x[n+1]-x[n] \qquad (2\text{-}31)$$

kifejezéssel, tehát ebben az esetben a derivált első rendű különbséggé fajul.

Hasonlóképen a visszatekintő első derivált alakulása:

$$\Delta x_b=\frac{x[n]-x[n-1]}{n-(n-1)}=x[n]-x[n-1]. \qquad (2\text{-}32)$$

Ha figyelembe vesszük az első derivált jelentését, miszerint az a deriválandó függvény meredekségét tükrözi, akkor könnyen belátható, hogy a diszkrétidejű jel esetében a meredekség közelíthető az elsőrendű különbségekkel.

Amennyiben a jel valós idejű mérési folyamat eredménye, akkor egy adott pillanatban a jel következő értéke még ismeretlen számunkra, így annak deriváltja csak a jel előző pillanatban vett értékéből számítható. Ezért a gyakorlatban a diszkrétidejű jelek deriválására legtöbbször a visszatekintő különbséget használjuk.

2.4.5. Jelek integrálja

Függvényeknél a határozott integrál értelme az integrálandó függvény alatti terület meghatározása. Ez a jelek integrálja esetében is így van. Az integrálra vonatkozó általános meghatározás folytonosidejű jelek esetén, ha $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, akkor $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$. Az integrálás javítja egy jel hovatartozási osztályát eggyel, ha egy jel C^k osztályba tartozik, akkor integrálás után C^{k+1} osztályba fog tartozni. Az integrálásnak simító hatása van. A belépő jelek esetében az integrál határai változnak, ugyanis

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} f(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} f(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)\, d\tau. \quad (2\text{-}33)$$

Diszkrét jelet leíró függvény alatti területről nem beszélhetünk. Mégis létezik az integrálnak megfelelő operátor a diszkrét jelek esetében is. Az integrál, a folytonosidejű integrálhoz hasonlóan diszkrét időben is a differenciál inverzeként tekinthető. Így mivel kétféle differenciál ismeretes $\Delta x_f = x[n+1] - x[n]$ és $\Delta x_b = x[n] - x[n-1]$, így kétféle integrál felel meg nekik.

Ezek: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \Delta x_b$ és az $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Delta x_f$, belépő jel esetében: $x[n] = x[0] + \sum_{k=0}^{n} \Delta x_b$ és $x[n] = \sum_{k=-1}^{n-1} \Delta x_f$. Tehát diszkrét esetben az integrál megfelelője a gyűjtő összeg.

2.4.6. A jel energiája és teljesítménye

A jel által képviselt energia és teljesítmény értelmezése érdekében vizsgáljuk meg egy valós elektromos ellenállást és a rajta disszipálandó teljesítményt. Legyen $i(t)$ az R ellenálláson átfolyó elektromos áram pillanatnyi értéke, $u(t)$ pedig a rajta eső feszültség pillanatértéke. Az ellenálláson ekkor $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ teljesítmény disszipál és egy $[t_1, t_2]$ intervallumban $E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt$ energia alakul át hőenergiává. Az ellenálláson tapasztalhatók analógiájára felírhatjuk a fenti összefüggéseket egy adott jelre is. Mivel $u(t) = R \cdot i(t)$, ekkor $p(t) = R \cdot i^2(t)$, vagy $p(t) = \frac{u^2(t)}{R}$. Esetünkben $u(t)$ és $i(t)$ is jel. Az ellenállás csak egy arányossági állandó. Az ellenállás értéke $R = 1$ –nek vehető. A pillanatnyi teljesítmény így a jel négyzete. $p(t) = i^2(t) = u^2(t)$.

A jelet nem minden esetben modellezük valósértékű függvényként. Általános esetben $x(t)$ komplex értékű, ekkor a jelre felírható, hogy teljesítményének pillanatértéke

$$p(t) = |x(t)|^2 \quad (2\text{-}34)$$

, ahol $|x(t)| = x(t)x^*(t)$, itt $*$ a konjugáltat jelöli.

A jelekre vonatkozóan a következőkben határozzunk meg néhány fontosabb jellemzőt. Az FI és DI jelben képviselt energia egy adott intervallumra tekintve:

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt, \qquad E_{[n_1,n_2]} = \sum_{k=n_1}^{n_1} |x[k]|^2 \quad (2\text{-}35)$$

Az egy időintervallum alatt vett átlagosan teljesítmény:

$$P_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt, \qquad P_{[n_1,n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{n_1} |x[k]|^2 \quad (2\text{-}36)$$

A periodikus jel esetében fontos jellemző annak egy periodusra eső teljesítménye:

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\, dt, \qquad P_N = \frac{1}{N} \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} |x[k]|^2 \quad (2\text{-}37)$$

Az aperiodikus jel esetében fontos jellemző annak teljes energiája:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt, \quad \text{(2-38)}$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 \quad \text{(2-39)}$$

Az aperiodikus FI és DI jel teljes teljesítménye:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt, \quad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 \quad \text{(2-40)}$$

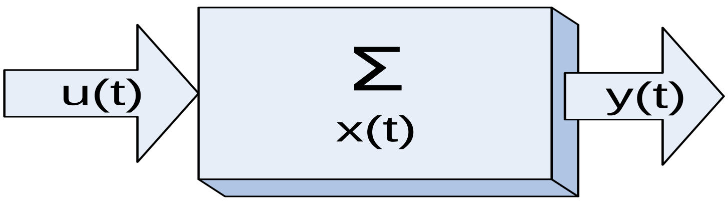
Azon jeleket, melyeknek véges az energiája véges energiájú jeleknek nevezzük. A folytonos és a diszkrét jelekre is érvényes, hogy az véges energiájú, amennyiben $E_\infty < \infty$. Azon jeleket, melyeknek véges a teljesítménye véges teljesítményű jeleknek nevezzük, akkor $P_\infty < \infty$.

Fontos megjegyezni, hogy a valós jelek sohasem tartanak végtelen ideig, ezért azoknak soha nincs végtelen energiája és végtelen teljesítménye. Más szóval minden valós jel valamikor, nem végtelen távol keletkezik és véges idő múlva megszűnik. A vizsgáló jelek (pl. sin) némelyike csak a matematikai közelítésnek köszönheti végtelen energiáját ideális jelek. Modellezés, elemzés és rendszerszintézis céljából alkalmazhatunk ilyen ideális jeleket, melyek feloszthatók véges értékeik szerint: véges energiájúakra, véges teljesítményűekre, abszolút integrálhatóakra, korlátos abszolút értékűekre, de ezeket az osztályozásokat minden esetben a helyén kell kezelni.

2.5. Rendszerek felosztása

Amikor valamilyen felosztásról beszélünk, akkor meg kell adnunk, hogy milyen szempontok figyelembevételével tesszük azt. A rendszerek több oldalról is szemlélhetők, feloszthatók például működésük szerint vagy fizikai megvalósításuk szerint, méretük szerint, kiterjedésük szerint és még egyéb arra alkalmas megvilágítás szerint, mégis a rendszerelemzés és rendszerszintézis szempontjából legalkalmasabb felosztás a rendszert leíró matematikai modell szerinti. Szakmai szempontból a jelek és rendszerek témakörhöz elvárt kompetencia a jeleknek és rendszereknek az egységes tárgyalását igényli. Az egységes tárgyalásmód és a bennük zajló folyamatok könnyebb megértése érdekében a rendszereket a viselkedésük és az őket leíró matematikai modell alapján osztályozzuk. Ezek az osztályok gyakran különböző szempontok szerinti ellentétpárokból állnak. Fontos kiemelni, hogy egy rendszer egyszerre több osztályba is tartozhat.

Az alábbiakban röviden bemutatásra kerülnek a legfontosabb osztályok. Az elvonatkoztatás érdekében és a matematikai modell szerinti tárgyalásmód miatt a rendszer szimbolikus jelölését alkalmazzuk, melyet a 2-43. ábra szemléltet. A jelölésben a rendszerre valójában úgy tekintünk mint egy folyamatra, amely információt szolgáltat a környezete felé, oly módon, hogy valamilyen törvényszerűség szerint módosítja a hozzá érkező bemenő információt. Az információáramlás a bemeneteken csak a rendszer felé irányul, a kimeneten pedig csak és kizárólag a környezet felé. Általános esetben a rendszernek több bemenete és több kimenete lehet.



2-43. ábra. – A rendszer jelölése kimenettel - bemenettel és állapotvektorral rendelkező tag ként.

A Σ-val jelölt rendszer bemenő és kimenő jeleinek értékét a t pillanatban értelemszerűen $u(t)$ és $y(t)$ vektorok jelölik, míg $u(\cdot)$ és $y(\cdot)$ jelöli a teljes megfigyelhető jelet. És érvényes: $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$.

Általánosan a 2-43. ábra szerint megadott dinamikus rendszer felírható egy többkomponensű struktúrával az alábbiak szerint:

$$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Omega, \mathcal{Y}, \Gamma, \varphi, g)$$

A struktúra egyes elemei a következők:

- $\mathcal{T}$ az időpontok halmaza,
- $\mathcal{X}$ az állapotok halmaza,
- $\mathcal{U}$ a bemenet értékeinek halmaza,
- Ω a megengedett bemenő jelek halmaza, $\Omega \subset \{u: \mathcal{T} \to \mathcal{U}\}$,
- $\mathcal{Y}$ a kimenet értékeinek halmaza,
- Γ a lehetséges kimenő jelek halmaza, $\Gamma \subset \{y: \mathcal{T} \to \mathcal{Y}\}$,
- φ az állapotátmenet függvény, $\varphi: \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \Omega \to \mathcal{X}$,
- g a kimenet leképezés függvény, $g: \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$.

Ha a rendszer a τ pillanatban az x állapotban van és a bemenő jel $u(\cdot)$, akkor az állapot és a kimenet a t pillanatban $x(t) = \varphi\big(t, \tau, x, u(\cdot)\big)$ és $y(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big)$ módon adható meg.

Speciális esetben, ha a rendszer **lineáris** akkor állapota egy t pillanatban megadható a:

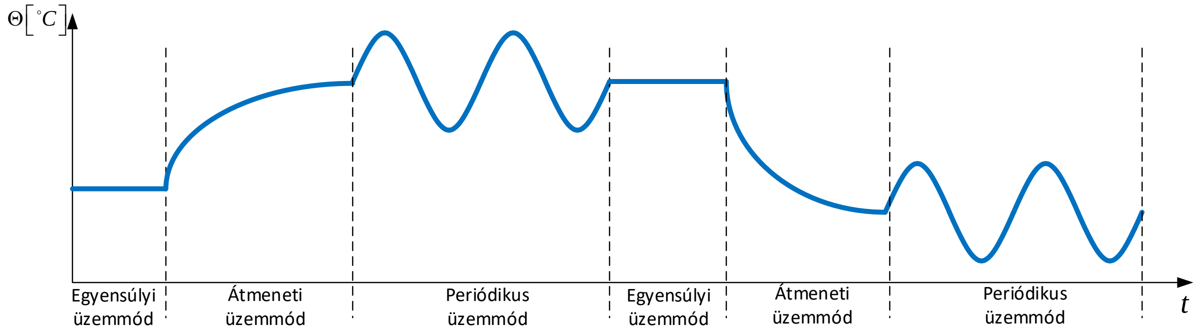
$$x(t) = \varphi\big(t, \tau, x, u(\cdot)\big) = \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)u(\cdot) \qquad \text{(2-41)}$$

, ahol az állapot megadható a kezdeti feltétel hatásából és a bemenő jel hatásából. Az állapot átmenet függvény felbontható a két hatás egyenkénti hatásainak összegére.

Egy másik speciális eset a **sima** rendszer. Sima rendszer esetében az állapotokat leképező leképezés $x(\cdot) = \varphi\big(\cdot, \tau, x, u(\cdot)\big)$ folytonos, $x(\cdot) \in C^1$, tehát legalább egyszer differenciálható és így felírható a $\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$ állapotváltozás függvény.

2.5.1. A rendszer üzemmódjai

Egy rendszerben zajló folyamatok energiamozgásokat eredményeznek. Egy dinamikus rendszer működésének három alapvető üzemmódja ismeretes: egyensúlyi vagy állandósult üzemmód, átmeneti üzemmód és periodikus üzemmód (2-44. ábra).



2-44. ábra. – A rendszer jellemző üzemmódjai.

Azt mondjuk, hogy a rendszer egyensúlyi vagy állandósult üzemmódban van, ha állapota nem változik az időben. Ebben az üzemmódban a rendszer nyugalomban van, az energiaszintek nem változnak. Erre az üzemmódra jellemző, hogy a rendszer által generált jelekből viszonylag kevés információ vonható ki. Átmeneti üzemmódnak nevezzük a dinamikus rendszer mozgásának azt az üzemmódját, amikor egy bizonyos kiinduló helyzetből, egy állandósult egyensúlyi vagy periodikus üzemmódba törekszik. Az ebben az üzemmódban szolgáltatott jelekből viszonylag sok információ kapható. Például: megállapítható az egyes energiatárolókhoz köthető időállandó, csillapítás és saját frekvencia, információ kapható a külső gerjesztésről, becsülhetők a rendszer paraméterei és jelei. Átmeneti üzemmód jelenhet meg a rendszerben a külső hatások változásának vagy a rendszer belső tulajdonságainak megváltozása következtében. A harmadik üzemmód a periodikus, erre az üzemmódra jellemző, hogy esetében a rendszer egyenlő időközönként, ugyanabba az állapotba kerül. Ebben az üzemmódban a rendszer a stabilitás határára kerül, a benne felgyülemlett energiák vándorolnak az egyik tárolóból a másikba.

2.5.2. A rendszer osztályok

2.5.2.1. A bemenetek és kimenetek száma szerinti osztályozás

Egy rendszer a bemenetei és kimenetei révén tartja a kapcsolatot a külvilággal. Ezen kapcsolatok számát tekintve megkülönböztetünk egy bemenetű és egy kimenetű rendszereket (SISO, single-input and single-output) több bemenetű és több kimenetű rendszereket (MIMO, multiple-input and multiple-output) valamint egy bemenetű és több kimenetű (SIMO) és több bemenetű és egy kimenetű (MISO) rendszereket.

2.5.2.2. Folytonos vagy diszkrét rendszerek

Amennyiben a rendszer bemenetén vagy kimenetén található jel időben folytonos akkor folytonos rendszerről beszélünk, de ha időben csak diszkrét értékekben van értéke, akkor diszkrét rendszerről beszélünk. Tehát a folytonos és diszkrét meghatározás az időre vonatkozik. Folytonos idejű rendszer esetében az idő intervalluma $[a, b]$ vagy $\Re^1$, diszkrétidejű rendszernél pedig egy valós számsorozat, tipikusan $\{0, T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots\}$, ahol T a mintavételi periódusidő. A diszkrét rendszerek ábrázolására jellemző, hogy a mintavételi periódusidő elhagyható, így az időpillanatok sorszámokká fajulnak $\{0,1,2,3, \dots, n, \dots\}$. Tehát folytonos idejű rendszer esetében: $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$, diszkrétidejűnél pedig :$u[n] \xrightarrow{\Sigma} y[n]$ valósul meg.

2.5.2.3. Kauzális vagy nem kauzális rendszerek

A kauzális rendszernél (ok-okozati rendszernél) ok-okozati kapcsolat áll fenn annak bemenő és kimenő jelei között. Rájuk jellemző, hogy rendszer válasza egy t_0 időpontban csak az időpontot megelőző gerjesztésektől függ $t \leq t_0$. Más szóval a kauzális rendszereknek nincs előrelátó képességük. A rendszernek, annak ébredése előtt nincs válasza. A valós időben működő, valós fizikai rendszerek mind kauzálisak. A nem kauzális rendszerek fizikailag nem reálisak nem lehetnek valósidőjűek. Ilyenek a jóslások és más prognosztikai, gondolati rendszerek. A mérnöki gyakorlat azonban alkalmazza a nem kauzális rendszereket is. A folytonos idejű rendszerek vizsgálatánál gyakran egyszerűbb matematikai tárgyalást biztosítanak. A diszkrétidejű rendszerek esetében a jelek memorizálhatók és valósidőn kívül feldolgozhatók. Itt megemlíthető a képfeldolgozás, a hangfeldolgozás, a meteorológia vagy más hasonló terület is.

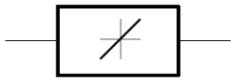
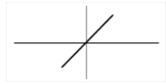
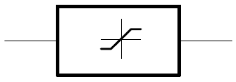
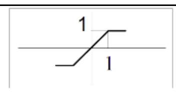
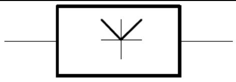
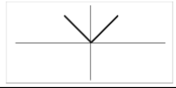
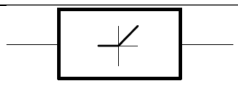
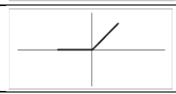
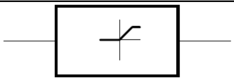
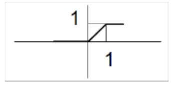
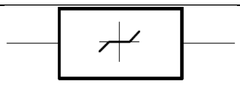
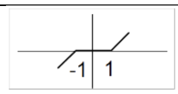
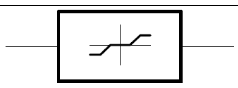
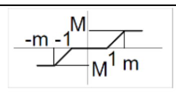
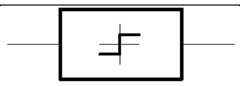
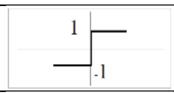
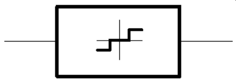
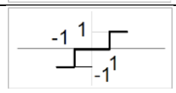
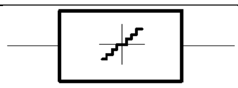
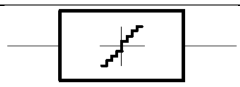
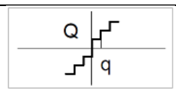
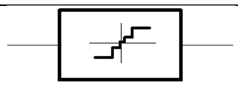
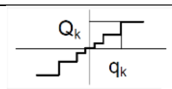
A kauzalitás fogalma kiterjeszthető a jelekre is. A kauzális jelek értéke $t < 0$ esetén nullával egyenlő. Ezek a belépő jelek.

2.5.2.4. Statikus vagy dinamikus rendszerek

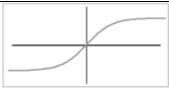
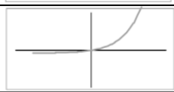
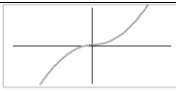
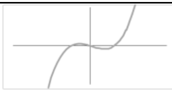
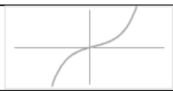
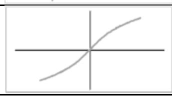
A statikus rendszer kimenete egy t_0 időpontban csak is kizárólag az abban a pillanatban jelentkező gerjesztéstől (bemenettől) függ. A statikus rendszereknek nincs memóriájuk. A statikus rendszerek viselkedése nem függ az időtől, bármikor is szemléljük a rendszert, ugyan arra a bemenetre mindig ugyan az lesz a válasza. Egy m bemenetű rendszernek $y(t) = f\big(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots, u_m(t)\big)$ alakban írható le a viselkedése. A statikus rendszernek nincs állapota, így a 2-43. ábra szerint megadott rendszerleírásnál az $x(t)$ állapotvektor mérete null (0).

A továbbiakban külön egy fejezetben sem térünk ki a statikus nemlinearitások részletezésére, ezért ezen a helyen, táblázatos alakban bemutatásra kerül néhány tipikus statikus karakterisztikát megvalósító rendszer, mindegyik szimbólumával, grafikus ábrájával és matematikai modelljével megadva (2-1. Táblázat-2-3. Táblázat).

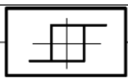
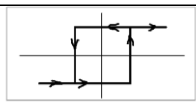
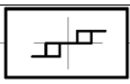
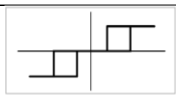
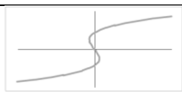
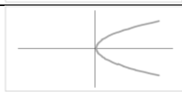
2-1. Táblázat. – Töréspontokat tartalmazó statikus karakterisztikák

Elnevezés	Szimbólum	Függvény	Grafikon
Erősítés, lineáris tag		$y(t) = A \cdot u(t)$ lineáris és differenciálható	
Telítés, nemlineáris tag		$y(t) = \begin{cases} -1; \ u(t) < -1 \\ u(t); \ -1 < u(t) < 1 \\ 1; \ u(t) > 1 \end{cases}$	
Abszolút érték		$y(t) = \lvert u(t) \rvert$	
Küszöb		$y(t) = \begin{cases} u(t), u(t) > 0 \\ 0, u(t) < 0 \end{cases}$	
Küszöb telítéssel		$y(t) = \begin{cases} 0; \ u(t) < 0 \\ u(t); \ 0 < u(t) < 1 \\ 1; \ u(t) > 1 \end{cases}$	
Kotyogás, holtjáték		$y(t) = \begin{cases} u(t) + 1; \ u(t) < -1 \\ 0; \ -1 < u(t) < 1 \\ u(t) - 1; \ u(t) > 1 \end{cases}$	
Holtjáték telítéssel		$y(t) = \begin{cases} -M; \ u(t) < -m \\ u(t) + 1; \ -m < u(t) < -1 \\ 0; \ -1 < u(t) < 1 \\ u(t) - 1; \ 1 < u(t) > m \\ M; \ u(t) > m \end{cases}$	
Null komparátor		$y(t) = sgn\big(u(t)\big) = \begin{cases} 1, u(t) > 0 \\ -1, u(t) < 0 \end{cases}$	
Kétszintű komparátor		$y(t) = \begin{cases} -1; \ u(t) < -1 \\ 0; \ -1 < u(t) < 1 \\ 1; \ u(t) > 1 \end{cases}$	
Nulltartó lineáris kvantálás		$y(t) = m \cdot Q, m = int\left(\frac{u(t)}{q} + \frac{1}{2}\right)$	
Nullkitérő lineáris kvantálás		$y(t) = m \cdot Q, m = int\left(int\left(\frac{u(t)}{q}\right) + \frac{1}{2}\right)$	
Lépcsős nemlineáris kvantálás		$y(t) = Q_i, q_{i-1} < u(t) < q_i$	

2-2. Táblázat. – Sima (deriválható) nemlinearitások:

Elnevezés	Szimbólum	Függvény	Grafikon
Szigmoid ofszettel	$y=\text{th}(x)$	$y(t) = tansig(u(t))$	
exponenciális ofszettel	$y=e^x-1$	$y(t) = e^{u(t)} - 1$	
Páros kitevőjű parabola	$y=x^{2n}$	$y(t) = u(t)^{2n}$	
Páratlan kitevőjű parabola	$y=x^{2n+1}$	$y(t) = u(t)^{2n+1}$	
Függvények lineáris kombinációja	$y=x^3-x$	$y(t) = u(t)^3 - u(t)$	
Kétoldali zsugorítás	$y=\text{sh}(x)$	$y(t) = \text{sh}(u(t))$	
Kétoldali széthúzás	$y=\text{Arsh}(x)$	$y(t) = arsh(u(t))$	

2-3. Táblázat. – Többértékű függvényekkel megadható nemlinearitások:

Elnevezés	Szimbólum	Függvény	Grafikon
Hiszterézis görbe, fázist nem fordító pozitív visszacsatolású komparátor			
Hiszterézises két szintű komparátor			
Inverz függvény	$x=f(y)$	$y(t) = f^{-1}(u(t))$	
Elfekvő parabola	$x=y^2$	$y(t) = \pm\sqrt[2]{u(t)}$	

A dinamikus rendszerek esetében egy adott időben gerjesztett kimenet értéke függ a múltbeli gerjesztésektől is. A dinamikus rendszerek energiatárolót(kat) tartalmazó rendszerek, vagyis memóriával rendelkező rendszerek. A dinamikus rendszernek van állapota, így a 1.46. ábra szerint megadott rendszerleírásnál az $x(t)$ állapotvektor mérete különbözik nullától. Matematikai modelljük olyan közönséges vagy parciális differenciálegyenletekkel adható meg, amelyekben szerepel idő szerinti derivált. A továbbiakban több fejezeten keresztül foglalkozunk a folytonos és a diszkrét dinamikus rendszerekkel, így itt nem részletezzük mélyebben őket.

2.5.2.5. Koncentrált paraméterű vagy elosztott paraméterű rendszerek

Koncentrált paraméterű rendszer esetében az elemeket paramétereik tekintetében idealizáltnak, térbeni kiterjedés nélkülinek tekintjük. Ilyen idealizált elem lehet a tömegpont, amely modellezéskor, bizonyos esetekben alkalmas egy bolygó, vagy egy atommag tömegének figyelembevételére. Elektromos vezetőképesség, kapacitás vagy induktivitás koncentrált hatásként való tárgyalása bizonyos esetekben ugyancsak kielégítő eredményhez vezet. Koncentrált paraméterek alkalmazásával, a rendszeren belül jelentkező hatások egyszerűbb és áttekinthetőbb matematikai modellt eredményeznek. Az ilyen modellek gyakran hatékonyak és kielégítik a rendszerelemzés és rendszerszintézis által elvártakat. Vannak olyan rendszerek, melyek paramétereiket tekintve eleve elosztottak, ilyenkor nem elegendő a koncentrált paraméter szerinti tárgyalás. Az elosztott paraméterű rendszerben a független változóként az idő mellett még a térbeli koordináták is jelentkeznek. Az elosztott paraméterű rendszerek matematikai modellje parciális differenciálegyenletekkel adható meg. Ilyen rendszerek is sokfélék lehetnek, például függőhíd esetében a tömegek hatása, elektromos távvezeték esetében a vezetékek egymás közötti és a föld felé vett kapacitása, a vezetékek induktivitása. Egy város hőszolgáltatójának hőelosztó infrastruktúrája.

2.5.2.6. Homogén vagy nem homogén rendszerek

A homogén rendszerek matematikai modelljére jellemző, hogy nullát nullába képeznek le. Egy homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása, mert esetében a szabad tagok nullák, és így a nulla vektor mindig triviális megoldást jelent. Tegyük fel, hogy a 2-43. ábra szerint megadott rendszer homogén, bemenete $u(t)$, kimenete pedig $y(t)$, ami röviden felírható a következővel: $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$, ekkor a bemenetet A szorosára növelve a kimenet is A szorosra nő:

$$A \cdot u(t) \xrightarrow{\Sigma} A \cdot y(t). \qquad (2\text{-}42)$$

Tekintsük a következő példát: $y(t) = 2 \cdot u(t)$, mely egy rendszer homogén modellje, és ha ez a modell bizonyos körülmények között hűen tükrözi a rendszer viselkedését, akkor elmondható, hogy a rendszer az adott körülmények között homogén. Egy másik példa legyen egy nemhomogén rendszer modelljének példája, az $y(t) = 2 \cdot u(t) + 1$, mely a nullát nem nullába képezi le és így nem homogén. Megfelelő koordinátarendszer választásával gyakran homogénné tehető a rendszert leíró matematikai modell.

2.5.2.7. Additív vagy nem additív rendszerek

A rendszer akkor elégíti ki az additivitás feltételeit, amikor érvényes, hogy ha a bemenet felírható két jel összegeként $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, akkor a kimenet is felbontható $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, ahol $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$, $u_1(t) \xrightarrow{\Sigma} y_1(t)$ és $u_2(t) \xrightarrow{\Sigma} y_2(t)$. Az additív rendszerek jelentősége abban rejlik, hogy egyszerű jelekre adott válaszukból következtethetünk összetett jelek hatására tett viselkedésükre.

2.5.2.8. Lineáris vagy nemlineáris rendszerek

A lineáris rendszer egyszerre homogén és additív is. A lineáris rendszert leíró matematikai modell homogén és érvényes benne az additivitás feltétele is. A lineáris modellel leírható rendszerekben érvényes a szuperpozíció elve. Vagyis ha: $u_1(t) \xrightarrow{\Sigma} y_1(t)$ és $u_2(t) \xrightarrow{\Sigma} y_2(t)$ akkor $\left(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\right) \xrightarrow{\Sigma} \left(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\right)$

A rendszer leíró matematikai modellek, egyenletek akkor lineárisak, ha a független változók (vagy annak deriváltjai) csak első hatványon és transzcendens függvények által történő leképezések nélkül fordulnak elő benne, egyébként nemlineárisak. Ha a linearitás valóban fennáll, akkor jelentősen leegyszerűsíti a rendszer viselkedésének elemzését. A valós világ számos rendszere igen széles tartományban, legalábbis első közelítésben, lineáris.

Példa a lineáris viselkedést leíró matematikai modellre: $a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$, ahol a_i és b paraméterek állandók, $y(t)$ és $u(t)$ a 2-43. ábra szerint megadott bemenetek és kimenetek. Egy másik példa legyen egy nemlineáris rendszert leíró matematikai modell: $a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} +$

$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y^2(t) + 1 = bu(t)$. A második példa két okból is nemlineáris, az egyik a nem nulla szabadtag a másik pedig az $y^2(t)$ hatvány.

A folytonos rendszerekhez hasonlóan, amennyiben a diszkrét rendszert leíró matematikai modell egyszerre homogén és additív akkor az is lineáris és ezért lineáris diszkrétidejű rendszernek nevezhető. Fontos megjegyezni azt a tényt is, hogy a DI lineáris rendszerek esetélben is érvényes a szuperpozíció elve.

2.5.2.9. Időinvariáns vagy idővariáns rendszerek

A jelek és rendszerek vizsgálatánál mindig fontos dimenzió az idő. A jelek általában időfüggőek, és mint olyanok független változóként az időt tartalmazzák. Amennyiben a rendszer viselkedése függ az időtől akkor időfüggő rendszerről beszélünk, amennyiben a rendszerben zajló folyamatok, események lefolyása nem függ a vizsgálat időpontjától, akkor időfüggetlen rendszerről beszélünk. Másszóval egy bizonyos állapotban levő időfüggetlen rendszer ugyan olyan gerjesztés hatására ugyan úgy viselkedett tegnap, mint ma viselkedik és mint holnap fog viselkedni. Az időfüggő rendszerre ez nem igaz. Az időfüggő rendszer kapcsolatai és/vagy paraméterei időfüggőek, a rendszer idővariáns (nem autonóm). Az időfüggő rendszer viselkedése függ a megfigyelés idejétől. A valóságban található valós rendszerek valamilyen szinten mindig időfüggőek, ha már csak a rendszert alkotó elemek öregedését és az ebből adódó paraméterváltozást vesszük is figyelembe. Amennyiben ez az időfüggőség elég lassú folyamatot modellez, akkor elhanyagolható és a rendszer modelljét ebből a szempontból egyszerűbbnek, időfüggetlennek tekinthetjük. Az időfüggetlen, időinvariáns vagy autonóm rendszermodell tárgyalása, vizsgálata az időfüggőhöz képest egyszerűbb matematikai eszközöket igényel. Autonóm rendszernél a valós rendszeren folyó kisérletek megismétlésével reprodukálható az előző kísérlet eredménye. Az időfüggetlen sztochasztikus rendszerek stacionáriusok, statisztikai jellemzőik nem változnak az időben, míg az időfüggő sztochasztikus rendszerek nem stacionáriusok, statisztikáik változnak az időben. Tehát, időinvariáns rendszerek esetén egy adott gerjesztésre ugyanaz a válasz függetlenül attól, hogy az a gerjesztés mikor lett alkalmazva. Vagyis $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t) \Rightarrow u(t-t_0) \xrightarrow{\Sigma} y(t-t_0)$.

Diszkrét rendszerek esetén pedig ha $u[n]$ bemenetre a válasz $y[n]$, akkor az időinvariáns rendszer válasza $u[n-n_0]$ bemenetre $y[n-n_0]$. Fontos megjegyezni, hogy beágyazott rendszerként megvalósított rendszer esetében könnyen biztosítható az időfüggetlenség, a valós rendszerek esetében az öregedési folyamat mindig jelen van.

2.5.2.10. Invertálható rendszer rendszerek

A rendszer invertálható, ha különböző bemenetek különböző kimeneteket eredményeznek. Elméletileg a rendszer invertálható, ha a kimeneti jelének ismeretében egyértelműen meghatározható a bemeneti jele. A gyakorlatban ez azonban nem olyan egyszerű, az inverz rendszer nem valósítható meg minden esetben. A rendszerek szabályozási, irányítási céljainak elérése érdekében gyakran jelentkezik az inverz rendszer kialakításának igénye, ez a feladat leginkább csak alkalmas digitális struktúrán, beágyazott rendszeren valósítható meg. Rendszertechnikai megközelítésben a rendszer egy $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$ struktúra. Amennyiben létezik az az inverz struktúra, ahol $y(t) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} u(t)$, akkor a rendszer invertálható.

Ez igaz diszkrét rendszerek esetében is. Például az $y[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} x[i]$ akkumulátorként is ismert rendszer inverze az $x[n] = y[n] - y[n-1]$ rendszer. A diszkrét rendszer invertálható, ha annak kimenetéből egyértelműen meghatározható a bemenete.

Az inverz rendszer az a rendszer, amit a rendszer után kaszkádba kell kötni, úgy, hogy a rendszer kimenete az inverz rendszer bemenete legyen, ekkor a két sorbakötött rendszer által eredményezett eredő átviteli függvény egységnyi lesz.

2.5.2.11. Determinisztikus vagy sztochasztikus rendszerek

A determinisztikus rendszer determinisztikus gerjesztésre determinisztikus válasszal reagál. A determinisztikus rendszer paraméterei is determinisztikusak. A determinisztikus rendszer független változói, függvényekkel adhatók meg térben és időben. A sztochasztikus rendszer bármilyen gerjesztésre sztochasztikus választ ad. A sztochasztikus rendszer egyes független változói csak valószínűségszámítási összefüggésekkel írhatók le. A sztochasztikus rendszer paraméterei nem kötelezően véletlen változók. Szigorúan tekintve a valóságban minden fizikai rendszer sztochasztikus, a rendszerben zajló nem modellezett folyamatok, hatások, zajok, a paraméterek értékének véletlenszerű változása a kimenet enyhe sztochasztikus viselkedését eredményezi. A rendszermodell egyszerűsítése érdekében gyakran elhanyagolható ez a kétségtelenül jelenlevő enyhe sztochasztikus hatás. Amennyiben a sztochasztikus hatás markánsan jelentkezik, akkor elkerülhetetlen annak megfelelő modellezése. Ilyenkor a matematikai modell véletlen-változókat tartalmazó sztochasztikus modell.

2.5.3. Lineáris időinvariáns rendszerek

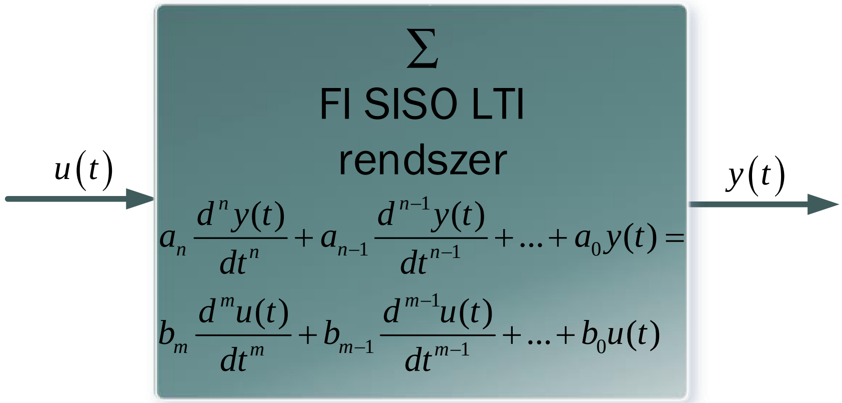
Ez előzőkben tárgyalt rendszerosztályok mindegyike a maga módján fontos és jelentős, a gyakorlatban mégis van néhány tulajdonság, amely különös figyelmet érdemel. A nemlineáris rendszerek munkapontokban való linearizálása még inkább bővíti az azonos matematikai eszközökkel, technikákkal tárgyalható rendszerek körét. Úgy folytonos, mint diszkrét esetben, a jel és rendszertechnikában, több okból kifolyólag is kitüntetett szerep jut az időinvariáns, stacionárius lineáris rendszereknek, vagyis az LTI (Linear Time Invariant) rendszereknek. Elsősorban azért mert a lineáris rendszerek esetében érvényesül a szuperpozíció elve, miszerint a rendszerben jelen levő gerjesztő hatásokat külön-külön vizsgálva eljuthatunk a rendszer teljes válaszának meghatározásáig. Másrészt, amint már ez előzőkben is láttuk egy rendszer idővariánciájának vagy invarianciájának az időtől való függését nevezzük. Az időtől való függetlensége az explicit függést jelenti, a rendszerben jelentkező jelek természetesen függhetnek az időtől. Az időinvariáns rendszer esetében a vizsgálat elvégzésének időpontja lényegtelen, a kezdőidőpontot tetszőlegesen megválaszthatjuk. A kimenőjel meghatározásánál csak a vizsgálat vagy mérés időintervallumának hossza a lényeges. Másképpen úgyis megfogalmazhatjuk egy rendszer időinvarianciáját, hogy ugyanakkora értékkel eltolva a vizsgálat kezdő- és végpontját, viszont megegyező kezdőállapotokban ugyanazt a bemenő jelet használva, ugyanabba a végállapotba hozzuk a rendszert. Az idővariancia illetve invariancia matematikailag az állapotátmeneti- és kimeneti leképezések megadásánál valósul meg. Idővariáns rendszereknél explicit módon jelenik meg az időváltozó a függvényargumentumban, viszont nem így van ez az időinvariáns rendszereknél. Ez a különbség a fizikai rendszerek esetében a következőképen mutatható be. Amikor idővariáns rendszereket vizsgálunk, akkor nemcsak az állapotváltozók, a bemenő és a kimenő jelek függnek az időtől, hanem a rendszert jellemző paraméterek időváltozókként vannak jelen. Egy rendszer idővariánssága a paraméterek általában vagy a hosszútávon bekövetkező változásából (például alkatrészkopás), vagy valamely zavaró tényező (például a külső hőmérsékletváltozás) figyelmen kívül hagyása miatt jelenik meg.

2.5.3.1. SISO LTI rendszer matematikai modellje

Az LTI rendszerek általános esetben lehetnek több bemenetűek és több kimenetűek, azonban külön érdemes részletesen foglalkozni az egy bemenettel és egy kimenettel rendelkező rendszerekkel. Lehet a vizsgált rendszer elektromos, mechanikus, pneumatikus, hidraulikus, gazdasági folyamat, biológiai rendszer vagy más egyéb, a fizikai rendszertől függetlenül, valós rendszerek matematikai modellezésének nagyon gyakran eredménye az FI SISO LTI rendszerekre jellemző matematikai modell. Ezért a következőkben röviden bemutatásra kerül ez a jellegzetes matematikai modell. Legyen $y(t)$ egy rendszer bemenete, $u(t)$ pedig a kimenete, ekkor ennek az egy bemenetű és egy kimenetű folytonosidejű, autonóm, állandó és koncentrált paraméterű rendszernek a kimenet-bemenet viszonya a következő n-ed rendű általános differenciálegyenlettel írható le:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t) \text{............ 2-43}$$

A rendszer a 2-45. ábra látható taggal jellemezhető.



2-45. ábra. – Az FI SISO LTI rendszer matematikai modellje.

A modellben szereplő a_i és b_i együtthatók rendszerállandók, értékük és számuk függ a modellezendő rendszertől. Valós fizikai rendszerek esetében érvényes az $m \leq n$ reláció, mely összefüggés egyben a modell által leírt fizikai rendszer megvalósíthatóságának feltétele is.

A fent említett modellt gyakran írjuk a $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$ alakban is.

A rendszerre jellemző differenciálegyenlet rendjét alapvetően a rendszer energiatárolóinak száma szabja meg. Mivel a rendszer lineáris és időinvariáns, így a belső energiák által gerjesztett kimeneti jelösszetevő és a bemenet hatására jelentkező kimeneti jelösszetevő egyszerűen összeadható.

Matematikából tudjuk, hogy az n–edrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet teljes $y(t)$ megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának $y_H(t)$ és az inhomogén egyenlet egy partikuláris $y_P(t)$ megoldásának szuperpozíciójaként állítható elő a következő képen:

$$y(t) = y_P(t) + y_H(t) \text{ .... (2-44)}$$

Ez az összefüggés is csak azért írható fel ilyen módon, mert a rendszer lineáris, így külön tárgyalható a kezdeti feltételektől függő belső energiák viselkedésének hatása (angolszász irodalomban: transient behaviour) és a külső gerjesztésnek a hatása (angolszász irodalomban: steady state motion).

A modellre jellemző homogén egyenlet jobb oldala nulla:

$$a_n \frac{d^n y_H(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_H(t)}{dt} + \cdots + a_0 y_H(t) = 0,\ a_n \neq 0 \text{ .... (2-45)}$$

,esetében a gerjesztést nem vesszük figyelembe. A rendszer csak a belső energiáinak felhasználásával mozog és eredményezi $y_H(t)$ jelet. Általános esetben a homogén megoldáshoz a rendszerben levő minden egyes energiatároló a maga jellegzetes viselkedésével hozzájárul. Ezen energiatárolók viselkedése is figyelhető egyenként, így a teljes homogén megoldás is felbontható a következő szuperpozíciós egyenlettel: $y_H(t) = y_{H_1}(t) + y_{H_2}(t) + \cdots + y_{H_n}(t)$.

A matematikából ismert az n-ed rendű állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet megoldásának algoritmusa, miszerint: a homogén egyenletbe $y_H(t) = e^{\lambda t}$ helyettesítéssel kapjuk a: $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ karakterisztikus polinomot. Mert: $\frac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$ és akkor: $a_n \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_0 e^{\lambda t} = 0$, rendezve $e^{\lambda t}(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$, $e^{\lambda t} P_n(\lambda) = 0$ miszerint a megoldás a karakterisztikus polinom gyökeinek megkeresése útján kereshető meg.

A $P_n(\lambda)$ felírható gyöktényezős alakban a gyökeivel is:

$$P_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_\nu)^{k_\nu}\cdot\big(\lambda-(\sigma_1\pm\omega_1)\big)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\Big(\lambda-\big(\sigma_\mu\pm\omega_\mu\big)\Big)^{l_\mu}$$

ahol $\sum_{i=1}^{\nu} k_i + 2\sum_{i=1}^{\mu} l_i = n$.

Itt a λ_i értékek különböző, k_i multiplicitású valós gyökök, $(\sigma_i \pm \omega_i)$ pedig különböző, l_i multiplicitású komplex gyökpárok.

Az egyes gyökök megadják a hozzájuk tartozó energiatároló viselkedését. Amennyiben a karakterisztikus polinom gyökei többszörös multiplicitású valós gyökök $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, akkor a hozzájuk tartozó homogén megoldást az $\alpha_i(t) = \big(A_{i,1} + A_{i,2}t + A_{i,3}t^2 + \cdots + A_{i,k_i}t^{k_i-1}\big)e^{\lambda_i t}$ alakban kell keresni, ahol $A_{i,j}$ állandók a peremfeltételekből, általában kezdeti feltételekből határozhatók meg. Amennyiben a karakterisztikus polinom gyökei többszörös multiplicitású komplex gyökpárok $\big(\lambda-(\sigma_i\pm\omega_i)\big)^{l_i}$, akkor a hozzájuk tartozó homogén megoldást a $\beta_i(t) = e^{\sigma_i t}\Big(\big(B_{i,1} + B_{i,2}t + B_{i,3}t^2 + \cdots + B_{i,l_i}t^{l_i-1}\big)cos(\omega_i t) + \big(C_{i,1} + C_{i,2}t + C_{i,3}t^2 + \cdots + C_{i,l_i}t^{l_i-1}\big)sin(\omega_i t)\Big)$ alakban kell keresni, ahol $B_{i,j}$ és $C_{i,j}$ állandók a peremfeltételekből, általában kezdeti feltételekből határozhatók meg. Az ismeretlen állandók száma pontosan n. Így az egyes energiatárolókhoz tartozó ismert peremfeltételek segítségével meghatározhatók a szabad együtthatók. A rendszer homogén részének általános megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{\mu}\beta_i(t) \qquad \text{(2-46)}$$

A rendszer partikuláris részének megoldása a gerjesztéstől, vagyis a bemenettől függ. A bemeneti függvény alakja meghatározza milyen formában keressük azt. A partikuláris megoldás egy speciális esetével állunk szemben ha a gerjesztés olyan harmonikus, minek körfrekvenciája megegyezik a rendszer karakterisztikus polinomja valamelyik komplex gyökének képzetes részével.

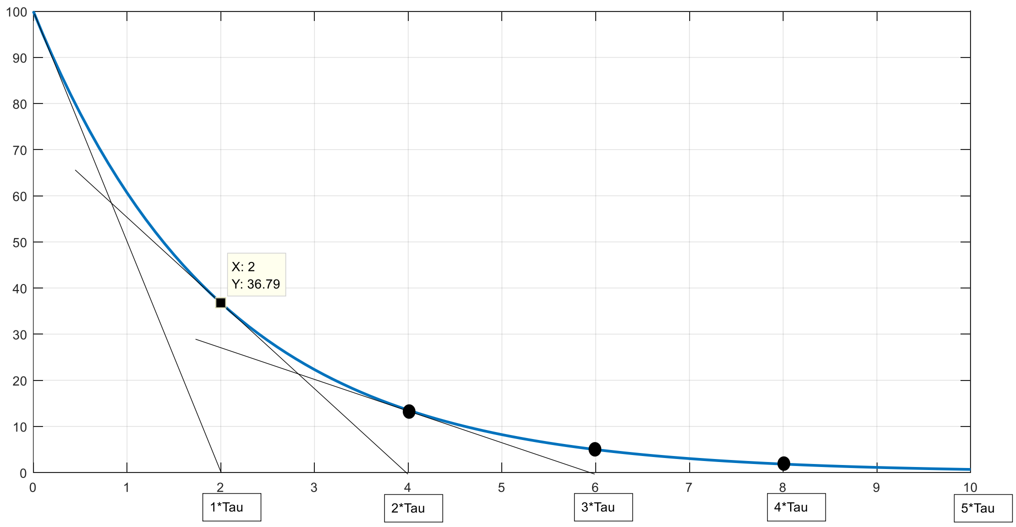
Az előzőekben tárgyalt állandó együtthatós n-ed rendű differenciálegyenlet homogén megoldását az $y_H(t) = e^{\lambda t}$ alakban kerestük. Ismeretes, hogy a λt kitevőnek dimenzió nélküli számnak kell lennie, ezért elmondható, hogy ha t idő dimenziójú, akkor λ frekvencia [Hz] vagy [rad/sec]. A λ_i sajátértékek/gyökök vagy valósak, vagy konjugált komplex párokat alkotnak. Érdemes külön tárgyalni ezt a két esetet.

2.5.3.2. Időállandó

Az időállandó vagy időállandók a rendszert jellemzik. Információt szolgáltatnak a rendszerben zajló átmeneti folyamatok lefolyási sebességéről. A rendszer időállandói meghatározhatók karakterisztikus polinomjának gyökeiből.

Egy példán keresztül vezetjük be az időállandó fogalmát. Tételezzük fel, hogy egy egytárolós rendszer matematikai modellje a következő homogén egyenlet: $a_1\frac{dy_H(t)}{dt} + a_0 y_H(t) = 0$. Mivel a gerjesztési hatások helyén nulla szerepel, ezért ez a magára hagyott rendszer modellje, a rendszerben tapasztalható jelek csak a belső energiák változásából erednek. Az egyenlet megoldható a már említett karakterisztikus polinomot alkalmazó módszerrel, éspedig $a_1\lambda + a_0 = 0$, $\lambda = -\frac{a_0}{a_1}$, ekkor a $\tau = \frac{1}{|\lambda|}[sec]$ értéket a rendszer időállandójának nevezzük. A matematikai modellben szereplő a_0 és a_1 állandók a modellezett rendszertől függő értékek. Az $y_H(t) = Ae^{\lambda t}$ homogén megoldás szabad paramétere meghatározható a jel kezdeti értékéből. Mivel a példában megadott differenciálegyenlet szétválasztható, ezért egy másik módszerrel is megkeressük a megoldást. A rendszer matematikai modellje: $a_1\frac{dy_H(t)}{dt} = -a_0 y_H(t)$, a differenciálegyenlet szétválasztva: $\frac{1}{y_H(t)}dy_H(t) = -\frac{a_0}{a_1}dt$, integrálva: $\int\left(\frac{1}{y_H(t)}dy_H(t)\right) = -\frac{a_0}{a_1}\int dt$, a határozatlan integrál megoldása $ln\big(y_H(t)\big) + ln(C) = -\frac{a_0}{a_1}t$, az egyenlet rendezve $ln\big(Cy_H(t)\big) = -\frac{a_0}{a_1}t$, $Cy_H(t) =$

$e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$, végül $y_H(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$, $y_H(t) = Ae^{\lambda t}$, mely megoldás megegyezik a karakterisztikus polinomot használó módszer eredményével. Tételezzük fel, hogy nullában a jel értéke 100 egységnyi, ekkor az $A = 100$ az $\frac{a_0}{a_1}$ konkrét értéke legyen 2, vagyis $\tau = 2[sec]$, ekkor a 2-46. ábra látható 100-ból 0-ba való átmeneti alakot kapjuk.

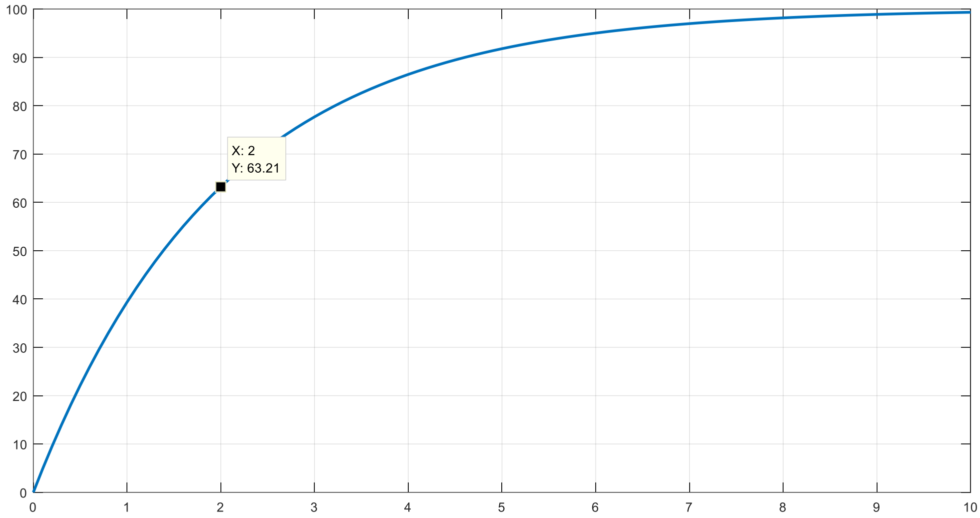


2-46. ábra. – A magára hagyott egyrátolós rendszer viselkedése $A = 100$ *esetén*

Az eredményül kapott görbe (2-46. ábra) tipikus az egytárolós FI SISO LTI rendszerek világában, legyenek azok elektromos rendszerek, hőtani folyamatok, mechanikus rendszerek, gazdasági folyamatok vagy más folyamatok. Az időbeni lefolyásra jellemző, hogy a rendszer kimenete az 1 τ idő alatt veszíti értékének $\sim 63\%$, 3 τ idő alatt veszíti értékének $\sim 95\%$ és 5 τ idő alatt gzakorlatilag elveszíti teljes értékét, marad $\sim 0.5\%$.

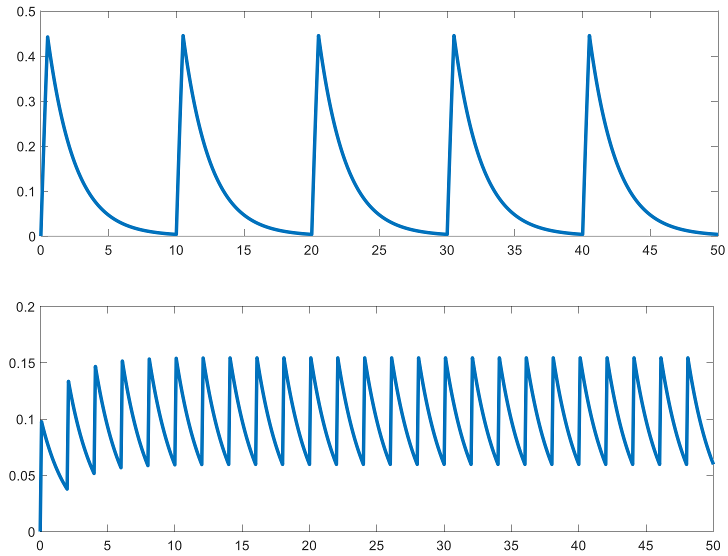
Egy adott grafikonról mértani eljárásokkal identifikálható, azonosítható az időállandó. Az eljárás szerint érintőt kell felvenni a $t = 0$ -ban és megszerkeszteni annak metszetét az $y = 0$ egyenessel, a kapott időpont az 1τ , a folyamat tovább folytatható, érintőt kell felvenni 1τ -ban és megszerkeszteni annak metszetét az $y = 0$ egyenessel, a kapott időpont az 2τ lesz és ez így folytatható tovább.

Egytárolós rendszer vizsgálójele gyakran a Heaviside függvény, ami azt jelenti, hogy a nulla kezdeti értékekkel rendelkező rendszer bemenetére egységugrást vezetünk. A kapott kimeneti jelalak ekkor az $y(t) = A\left(1 - e^{\lambda t}\right)$ egyenlettel írható le. A jelalak grafikusan ábrázolva a 2-47. ábra látható.



2-47. ábra. – A Heaviside függvénnyel gerjesztett rendszer válasza

A 2-47. ábra látható görbe az úgynevezett fűtési görbe, míg az előzőt hűlési görbének szokás nevezni. Ezen elnevezések az egytárolós hőtani rendszerek időbeni viselkedésére, hőmérsékleti alakulására utalnak fűtési és hűtési fázisokban. Például egy villanymotor állórészének a hőmérséklete bekapcsolt állapotban növekszik egy bizonyos határig (fűtés), míg kikapcsolt állapotban csökken (hűlés).



2-48. ábra. – Fűtési-hűtési görgbék

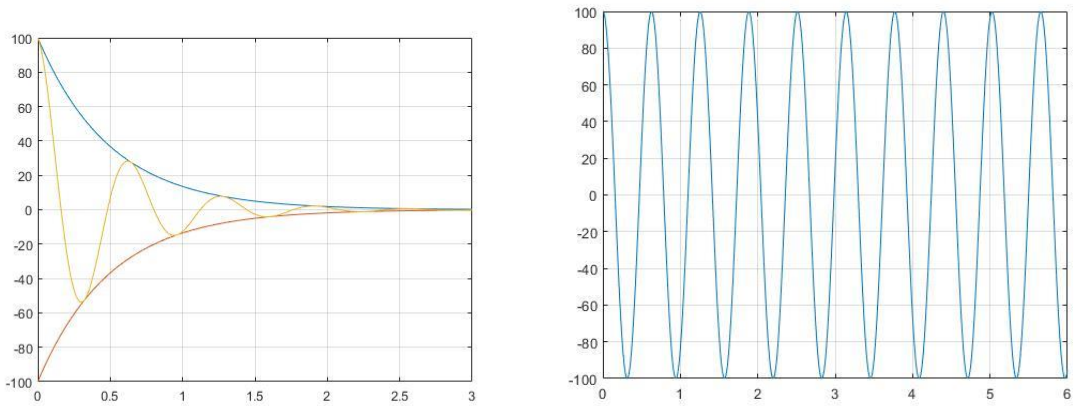
A 2-48. ábra látható görbék olyan fűtési hűtési folyamat eredményei, ahol ugyan annak a rendszernek pont annyi ideje van melegedni, mint hűlni csak a ki/be kapcsolás frekvenciája más.

Amennyiben egy rendszer többtárolós, akkor elvileg minden valós és konjugált komplex gyökhöz tartozik egy időállandó. Az eredő viselkedést az $y_H(t) = y_{H_1}(t) + y_{H_2}(t) + \cdots + y_{H_n}(t)$ összefüggés adja meg. Az eredő időállandó pedig számítható, mint az egyes időűllandók összege $\tau_e = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$.

2.5.3.3. Sajátfrekvencia

Egy rendszer sajátfrekvenciája/sajátfrekvenciái jellemzik magát a rendszert. Információt szolgáltatnak a rendszerben zajló átmeneti folyamatok lefolyásáról a rendszerben jelentkező lengésekről. Amennyiben ismert a rendszer matematikai modellje, akkor annak sajátfrekvenciái meghatározhatók karakterisztikus polinomjának gyökeiből.

Egy példán keresztül vezetjük be a sajátfrekvencia fogalmát. Amíg a legegyszerűbb rendszer, ahol időállandó jelentkezik az egytárolós, addig a sajátfrekvencia tárgyalásához legalább kéttárolós rendszerre van szükség. Tételezzük fel, hogy egy kéttárolós rendszer matematikai modellje a következő homogén egyenlet: $a_2 \frac{d^2 y_H(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy_H(t)}{dt} + a_0 y_H(t) = 0$, Mivel a gerjesztési hatások helyén nulla szerepel, ezért ez a magára hagyott rendszer modellje, a rendszerben tapasztalható jelek csak a belső energiák változásából eredhetnek. Az egyenlet megoldható a már említett karakterisztikus polinomot alkalmazó módszerrel, éspedig $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Először is osszuk le az egyenletet a_2 -vel, ekkor kapjuk a $\frac{d^2 y_H(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_0 \frac{dy_H(t)}{dt} + \omega_0^2 y_H(t) = 0$ differenciálegyenlet (a2-vel a leosztás nem egyértelmű), amely karakterisztikus polinomja a $\lambda^2 + 2\delta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$, ahol δ jelöli a csillapítási tényezőt ω_0 pedig a csillapítatlan sajátfrekvenciát. A másodfokú megoldóképlet alapján $\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta\omega_0 \pm \sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2}$, rendezve: $\lambda_{1,2} = -\delta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\delta^2 - 1}$. A megoldás, $\delta > 1$ esetében két valós gyök, melyekhez két időállandó párosul. Ilyenkor a rendszer viselkedése aperiodikus, a tranziensekben nincs lengés. Amennyiben $\delta < 1$, akkor a megoldás konjugált komplex gyökpár, amely már lengő tranziens viselkedést ír le, a rendszer viselkedése periodikus. Ekkor a másodfokú polinom gyökei $\lambda_{1,2} = -\delta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \delta^2}$ lesznek. Vezessük be a valós rész esetében a $\sigma = -\delta\omega_0$ jelölést a csillapításnak és a képzetes rész számára az $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \delta^2}$ jelölést a lengési körfrekvenciának vagyis a csillapított sajátkörfrekvenciának, ekkor $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$. Konjugált komplex gyök esetében, a rendszerben levő két energiatároló között az energia oda-vissza áramlik $\omega[rad/sec]$ körfrekvenciával, a lengés amplitúdója $\tau = \frac{1}{|\sigma|}[sec]$ időállandóval csökken. Az amplitúdó csökkenését a rendszerben levő disszipáció, energiaelnyelő elemek okozzák. A magára hagyott rendszer viselkedését az $y_H(t) = e^{\sigma t}\big(B \cdot cos(\omega t) + C \cdot sin(\omega t)\big)$ egyenlet modellezi, ahol B és C állandók a két energiatárolóban jelentkező kezdeti feltételekből határozhatók meg.



2-49. ábra. – Magára hagyott kéttáerolós rendszer csillapított és csillapítatlan lengése

A 2-49. ábra szemlélteti a magára hagyott kéttárolós lengő rendszer csillapított és csillapítatlan lengését, ahol mindkét esetben $\omega_0 = 10$, a baloldali ábránál $\delta = 0.2$, míg a jobboldalinál: $\delta = 0$. Kéttárolós rendszer esetében szokás meghatározni egy, a rezgőkörökre jellemző állandót, a jósági tényezőt. A jósági tényező energetikai szempontból, arányként kerül bevezetésre, megmondja, hogy a rendszerben tárolt átlagos energia és a disszipált energia hogyan aránylik egymáshoz $Q = \frac{1}{2\delta}$. A jósági tényező értéke csak a csillapítási tényezőtől függ. A 2-49. ábra bal oldali grafikonja azt az esetet mutatja be, amikor a rendszerben levő energia idővel csökken, míg a jobb oldali grafikon egy olyan idealizált esetet tükröz, ahol nincs disszipáció, a rendszerben levő energia állandó marad. Ilyen rendszert a valóságban nem lehet előállítani.

Külső gerjesztés hatására a rendszer kényszermozgást végez és kimenete gerjesztéstől függő választ eredményez. Tegyük fel, hogy az $u(t)$ gerjesztés egy D amplitúdójú harmonikus Ω körfrekvenciával, a következők szerint: $u(t) = D \cdot cos(\Omega t)$, ekkor a partikuláris megoldás is harmonikus lesz $y_P(t) = E \cdot cos(\Omega t + \phi)$ ugyan azzal a körfrekvenciával, mert az LTI rendszer nem módosítja a gerjesztés frekvenciáját csak amplitúdóját és fázisát. A példában vizsgált kéttárolós rendszer kényszerrezgése a harmonikus gerjesztés esetén a következő modellel írható le:

$$\frac{d^2y_P(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_0\frac{dy_P(t)}{dt} + \omega_0^2 y_P(t) = D \cdot cos(\Omega t), \qquad (2\text{-}47)$$

feltételezzük, hogy $y_P(t) = E \cdot cos(\Omega t + \phi)$ alakú. A megoldás kereséséhez deriváljuk kétszer az $y_P(t)$-t és helyettesítsük be a differenciálegyenletbe:

$$\frac{dy_P(t)}{dt} = -E\Omega sin(\Omega t + \phi), \frac{d^2y_P(t)}{dt^2} = -E\Omega^2 cos(\Omega t + \phi), \qquad (2\text{-}48)$$

behelyettesítve:

$$-E\Omega^2 cos(\Omega t + \phi) - 2\delta\omega_0 E\Omega sin(\Omega t + \phi) + \omega_0^2 E cos(\Omega t + \phi) = D cos(\Omega t), \qquad (2\text{-}49)$$

rendezve:

$$E(\omega_0^2 - \Omega^2)cos(\Omega t + \phi) + 2\delta\omega_0 E\Omega sin(\Omega t + \phi) = D cos(\Omega t). \qquad (2\text{-}50)$$

A szögek összegének szinuszára és koszinuszára vonatkozó addíciós azonosságok felhasználásával jutunk az:

$$E(\omega_0^2 - \Omega^2)\big(cos(\Omega t)cos(\phi) - sin(\Omega t)sin(\phi)\big) + 2\delta\omega_0 E\Omega\big(cos(\Omega t)sin(\phi) + sin(\Omega t)cos(\phi)\big) = D cos(\Omega t) \qquad (2\text{-}51)$$

összefüggéshez.

Ahhoz, hogy az egyenlőség fennálljon, a $cos(\Omega t)$ és a $sin(\Omega t)$ együtthatóinak a (2-52) egyenlet jobb és bal oldalán egyenlőknek kell lennie. Ezért a két szögfüggvény szerint rendezve:

$$E(\omega_0^2 - \Omega^2)cos(\phi) + 2\delta\omega_0 E\Omega sin(\phi) = D \qquad (2\text{-}52)$$

és

$$E(\omega_0^2 - \Omega^2)sin(\phi) + 2\delta\omega_0 E\Omega cos(\phi) = 0 \qquad (2\text{-}53)$$

A (2-53) egyenletből kifejezve a fázisszöget:

$$tan(\phi) = -\frac{2\delta\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \qquad (2\text{-}54)$$

, az első és a második egyenletet ((2-52) és (2-53)) négyzetre emelve, majd összeadva jutunk az amplitúdó változás törvényéhez:

$$E^2\big((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\omega_0\Omega)^2\big) = D^2, \qquad (2\text{-}55)$$

és végül:

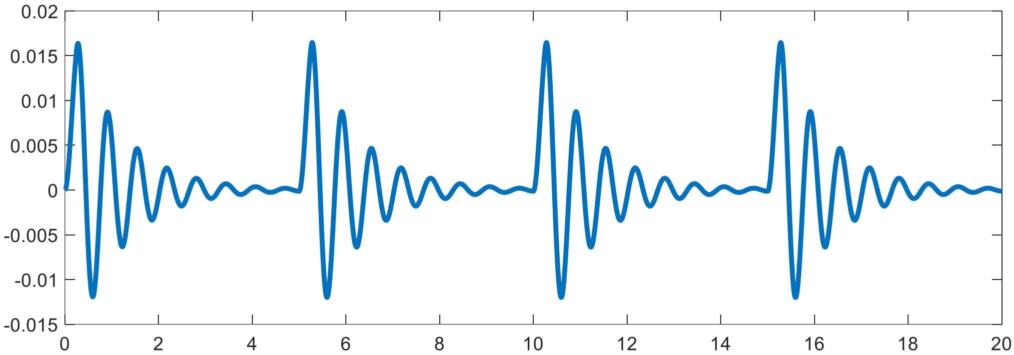
$$E = \frac{D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2\Omega^2}} \qquad (2\text{-}56)$$

Összefoglalva, a harmonikus gerjesztés hatására a rendszer a következő kimenettel válaszol:

$$y_P(t) = \frac{D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2\Omega^2}} cos\left(\Omega t + atan\left(-\frac{2\delta\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right). \qquad (2\text{-}57)$$

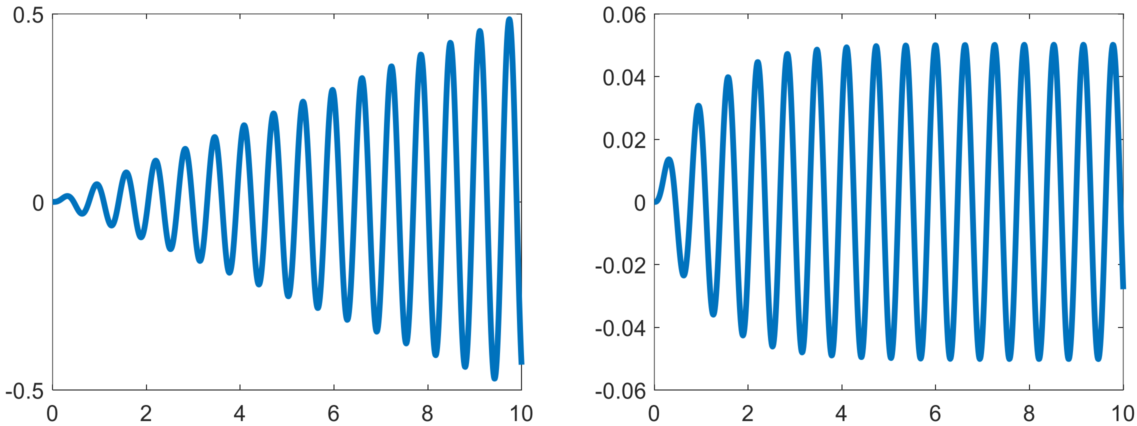
A válasz amplitúdója és fázisa függ a csillapítatlan sajátfrekvencia és a gerjesztési frekvencia viszonyától és a csillapításai tényező értékétől.

Egy speciális eset a rezonancia jelenség, amikor is a gerjesztés harmonikus és annak körfrekvenciája megegyezik a rendszer lengési frekvenciájával $\Omega = \omega = \omega_0\sqrt{1 - \delta^2}$. Amennyiben a gerjesztés körfrekvenciája $\Omega = \omega_0$ és a csillapítási tényező nulla $\delta = 0$, akkor a partikuláris megoldás felírható a $y_P(t) = t \cdot cos(\Omega t + \phi)$ alakban. Ez a megoldás azt jelent, hogy a két energiatároló közötti oda-vissza mozgás mellett a rendszer gyűjti az energiát a gerjesztésből, belső lengésének amplitúdója lineárisan növekszik, míg a fizikai rendszerben katasztrofális események be nem következnek. Ilyen esetek előfordulhatnak a gyakorlatban, például kiegyensúlyozatlan futómű esete gépkocsinál. A következőkben néhány példa kerül bemutatásra a különböző jellegű gerjesztések kéttárolós rendszerekre gyakorolt lehetséges tipikus hatásainak szemléltetésére.



2-50. ábra. – A rendszer átmeneti üzemmódja

A 2-50. ábra egy átmeneti üzemmódot figyelhetünk meg, melynél a rendszerben zajló átmeneti folyamatok, tranziensek a rendszerben levő csillapítás hatására lengési frekvenciával lengve, τ időállandóval exponenciálisan csillapodnak. Ebben az esetben a bemenetre vezetett vizsgálójel a négyszögfüggvény.



2-51. ábra. – A rezonancia jelensége

A 2-51. ábra bal oldalán a rezonancia jelensége figyelhető meg csillapítatlan rendszer esetében $\delta = 0$, ahol is a harmonikus gerjesztés frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával. Itt tapasztalható az amplitúdó lineáris növekedése. A 2-51. ábra jobb oldalán látható grafikon a nem nulla csillapítási tényezővel $\delta = 0.1$ rendelkező rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciával azonos körfrekvenciájú harmonikussal történő gerjesztését szemlélteti. Ebben az esetben a kényszerrezgés amplitúdója a fent tárgyalt törvény szerint állandó.

A partikuláris megoldásnak egy másik speciális esete, amikor a rendszerben levő csillapítás nulla $\delta = 0$ és a harmonikus gerjesztés körfrekvenciája csak egy picit tér el a csillapítatlan sajátfrekvenciától. Megállapítható, hogy ebben az esetben is érvényes az $y(t) = y_P(t) + y_H(t)$, vagyis a szuperpozíció elve. Amennyiben a gerjesztés frekvenciája közel van a rezonanciafrekvenciához, akkor a partikuláris és a homogén megoldás is harmonikus, a következők szerint: $y_H(t) = A \cdot cos(\omega_0 t)$, $y_P(t) = A \cdot cos\big((\omega_0 + \Delta\omega)t\big)$. A fázisszögek mindkét esetben nullák, mert a két harmonikus frekvenciájának kis különbségé enyhe csúszást eredményez a jelekben, és egyszer csak eljön az a pillant, amikor a fáziskülönbségük nulla, mi szemlélhetjük a rendszert pont attól a pillanattól. Ekkor összegük két koszinusz összege:

$$y(t) = A \cdot cos(\omega_0 t) + A \cdot cos\big((\omega_0 + \Delta\omega)t\big) \qquad (2\text{-}58)$$

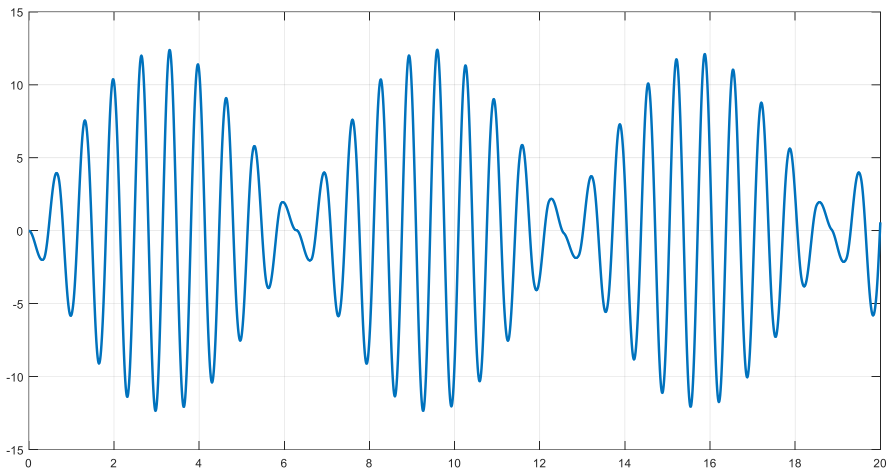
,amely összeg átalakítható szorzattá:

$$y(t) = 2A \cdot cos\left(\frac{\omega_0-(\omega_0+\Delta\omega)}{2}t\right)cos\left(\frac{\omega_0+(\omega_0+\Delta\omega)}{2}t\right) \quad (2\text{-}59)$$

,egyszerűsítve eljutunk a lebegést leíró alábbi törvényhez:

$$y(t) = 2A \cdot cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)cos\left(\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right). \quad (2\text{-}60)$$

Ilyen esetben a rendszer válasza lebegő, $\left|2A \cdot cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|$ amplitudóval pulzáló harmonikus. A koszinusz abszolútértékével pulzáló amplitúdó változásának periódusa $T_p = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, és mivel a körfrekvencia eltérése csekély, ezért a kimeneti jel periódusideje $T_0 \sim \frac{2\pi}{\omega_0}$ lesz.



2-52. ábra. – Nulla csillapítási tényezőjű rendszer rezonancia frekvenciájához közeli frekvenciájú harmónikussal gerjesztve (lebegés)

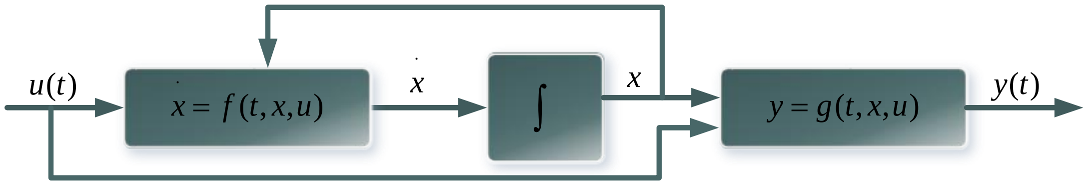
A 2-52. ábra szemlélteti egy nulla csillapítási tényezőjű rendszer rezonanciafrekvenciához közeli frekvenciájú harmonikussal való gerjesztését, amikor is $\omega_0 = 10[rad/sec]$ és $\Delta\omega = 1[rad/sec]$. A $T_p = 2\pi[sec]$ és a $T_0 \sim \frac{2\pi}{10}[sec]$.

Többtárolós FI SISO LTI rendszerek több egy és kéttárolós alrendszerre bonthatók, melyek tipikus viselkedését a fentiekben tárgyaltuk. A teljesség érdekében fontos megemlíteni azokat az eseteket, amikor is a rendszer több, egymással összekapcsolt egyforma alrendszert is tartalmaz. Ekkor a rendszer modelljéhez tartozó karakterisztikus polinomnak többszörös gyökei is vannak. A hozzájuk tartozó megoldások jellege eltérő a fent tárgyalt esetekétől. Többszörös gyök esetében a rezonancia jelenség is exponenciálisan növekvő kimenetet eredményezhet.

2.5.3.4. A lineáris MIMO rendszerek matematikai modellje

A rendszerek egy részére jellemző, hogy csak egy bemenettel és egy kimenettel rendelkeznek. A több bemenetű és több kimenetű rendszerek általános esetben nem tárgyalhatók az FI SISO LTI rendszerekre jellemző matematikai technikákkal. A több bemenetű és több kimenetű rendszerek, vagyis a MIMO (Multiple-Input and Multiple-Output) rendszerek leggyakoribb modellezési alakja az állapotteres modell. Mivel a SISO rendszerek a MIMO rendszerek részhalmazát képezik, ezért a MIMO rendszerekre kifejlesztett, alkalmas matematikai módszerek és technikák használhatók SISO rendszerek esetében is. Tegyük fel, hogy egy villamos rezgőkör bemenő jele a kapocsfeszültség, kimenő jele az áram, tehát két energia felhalmozó elemet, a kondenzátort és az induktivitást tartalmazza. Ezért két független állapotváltozója lehet, például a kondenzátor feszültsége és az induktivitás feszültsége, vagy a kondenzátor töltése és a rezgőkör árama. Hasonlóképpen egy mechanikai rezgőkör bemenő jele lehet az erő, kimenő jele lehet az elmozdulás, két állapotváltozója lehet, például a rugóerő és a csillapítóerő, vagy az elmozdulás és a sebesség. Az eddigiekből világosan kitűnik, hogy egy vizsgált rendszernek többféle állapotváltozója és így többféle matematikai modellje képzelhető el, még akkor is, ha a bemenőjelek és a kimenőjelek adottak. Az állapotteres modell alkotása során állapotváltozók vektora alatt a rendszer azon jeleinek legkisebb elemszámú halmazát értjük, amely segítségével a rendszer teljes és pontos matematikai modellje megadható.

FI MIMO koncentrált paraméterű fizikai rendszert állapotteres matematikai modelljének alkotásához az állapotváltozókból, alkalmas módon egy vektort képezünk; az állapotvektort. Az átmeneti folyamatot egy elsőrendű vektor-differenciálegyenlet segítségével írjuk le. A bemenőjelből ugyancsak vektort képzünk; a bemenőjelek vektorát. Hasonlóképpen alkotható meg a kimenő jelek vektora is. Jelölje $\underline{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ az állapotváltozók vektorát, $\underline{u}(t) \in \mathcal{R}^r$ a bemenő jelek vektorát, $\underline{y}(t) \in \mathcal{R}^m$ pedig a kimenő jelek vektorát. Ekkor a sima, FI MIMO, nemlineáris, idővariáns rendszert leíró matematikai modell megható a következő alakban: az állapotváltozás: $\frac{\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t))$, a kimeneti leképezés $\underline{y}(t) = \underline{g}(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t))$. Az állapotváltozás és a kimeneti függvények vektorok, melyek idővariáns esetben explicit tartalmazzák az időt.

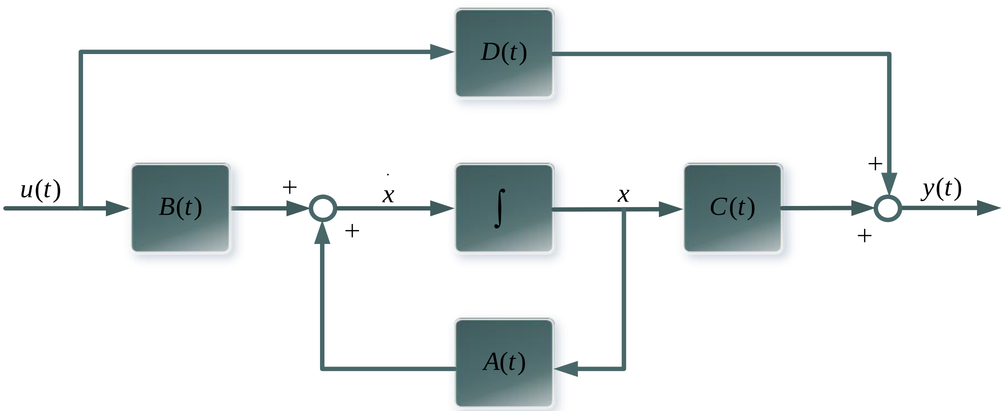


2-53. ábra. – Sima FI, MIMO rendszer.

A sima, FI, MIMO, nemlineáris, idővariáns rendszerben jelentkező információáramlásokat és feldolgozási egységeket szemlélteti a 2-53. ábra. A vonalak a jelek sínvezetékeit hivatottak jelképezni, azt, hogy vektormennyiségekről van szó. A sima MIMO rendszerek egy jelentős halmaza a lineáris idővariáns és lineáris időinvariáns alak. Ekkor, úgy az állapotváltozás és mint a kimeneti leképezés esetében érvényesíthető a szuperpozíció elve. Az állapotváltozásvektor és a kimenetivektor elemei meghatározható a bemeneti jelek és az állapotok lineáris kombinációjával. A sima, FI, MIMO, lineáris, idővariáns rendszer alakja így:

$$\frac{\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\underline{u}(t), \text{ és } \underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\underline{u}(t) \qquad \text{(2-61)}$$

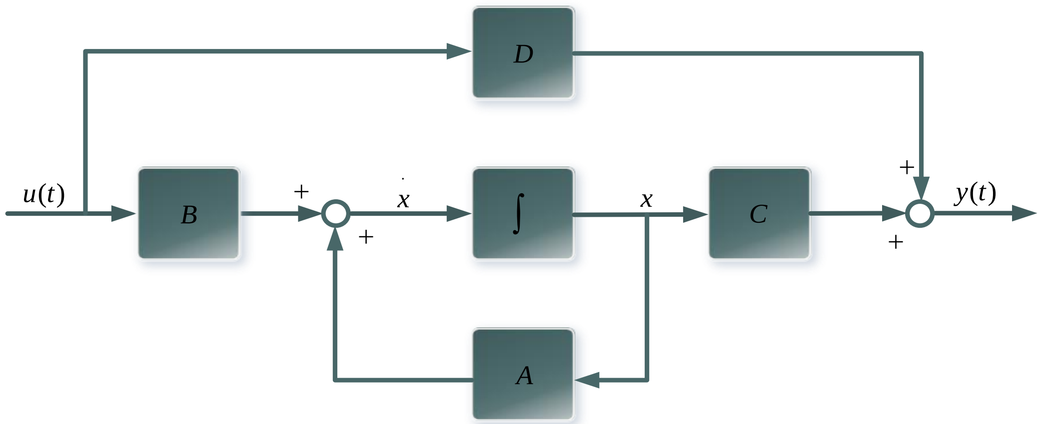
,ahol $\underline{\underline{A}}(t) \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $\underline{\underline{B}}(t) \in \mathcal{R}^{n\times r}$, $\underline{\underline{C}}(t) \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $\underline{\underline{D}}(t) \in \mathcal{R}^{m\times r}$, időben változó elemeket tartalmazó mátrixok. A rendszer modellje grafikusan ábrázolva a 2-54. ábra látható



2-54. ábra. – Sima FI, MIMO lineáris rendszer.

Tovább szigoríthatók a modellezni kívánt rendszer iránti elvárások. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan alakulna egy stacionárius, időfüggetlen sima, FI, MIMO, lineáris, rendszer matematikai modellje. Ebben az esetben a modellben szereplő mátrixok elemei állandók:

$$\frac{\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t), \text{ és } \underline{y}(t) = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t) \quad \text{(2-62)}$$



2-55. ábra. – Sima FI, MIMO időinvariáns lineáris rendszer.

A 2-55. ábra egy integráló elem szimbolizál egy integrálókból álló vektor, mely az állapotváltozókat hivatott azok idő szerinti deriváltjából előállítani. Az állapotváltozók száma, és egyben az integrátorok száma valójában a rendszerben levő energiatárolók számával egyenlő. Az integrátorok kezdőértéke a rendszer egy változójának a kezdeti értékét modellezi. Az integrátor egy memóriaelem, egy állapotváltozó esetében integrálja annak változását. Ennél a típusú rendszernél, az állapotváltozók időbeni változása (sebessége) előállítható az állapotvektor és a bemeneti vektor elemeinek lineáris kombinációjából. A FI MIMO LTI modell szemléltetésére vegyünk egy példát a következő méretek feltételezésével: $n = 4, m = 3$ és $r = 2$.

Ekkor, az állapotváltozók vektora:

$$\underline{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T \quad \text{(2-63)}$$

, az állapotváltozók sebességének vektora:

$$\underline{\dot{x}}(t) = [\dot{x}_1(t) \quad \dot{x}_2(t) \quad \dot{x}_3(t) \quad \dot{x}_4(t)]^T \quad \text{(2-64)}$$

,a kimenetek vektora:

$$\underline{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_3(t)]^T \quad \text{(2-65)}$$

,a bemenetek vektora:

$$\underline{u(t)} = [u_1(t) \quad u_2(t)]^T. \quad \text{(2-66)}$$

Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix}$.

Kifejtve az $\frac{\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t)$ mátrixegyenlet kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + a_{14}x_4(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) + a_{24}x_4(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t), \\
\dot{x}_3(t) &= a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) + a_{34}x_4(t) + b_{31}u_1(t) + b_{32}u_2(t), \\
\dot{x}_4(t) &= a_{41}x_1(t) + a_{42}x_2(t) + a_{43}x_3(t) + a_{44}x_4(t) + b_{41}u_1(t) + b_{42}u_2(t). \quad \text{(2-67)}
\end{aligned}$$

És a kimeneti leképezés: $\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t)$, melyet kifejtve kapjuk:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + c_{13}x_3(t) + c_{14}x_4(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t), \\
y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + c_{23}x_3(t) + c_{24}x_4(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t), \\
y_3(t) &= c_{31}x_1(t) + c_{32}x_2(t) + c_{33}x_3(t) + c_{34}x_4(t) + d_{31}u_1(t) + d_{32}u_2(t), \quad \text{(2-68)}
\end{aligned}$$

A példából látszik, hogy úgy az állapotok változása, mint a kimeneti leképezés, jelek lineáris kombinációjával modellezhetők. Ez az ábrázolási mód lehetővé teszi mindazon elméletek és technikák alkalmazását, amit a lineáris algebra tárháza biztosít.

3. A súlyfüggvény fogalma

Nyugalomban levő FI SISO LTI rendszerek esetében, amennyiben a bemenet értéke nulla és a rendszer állapotváltozói is nulla értékűek, akkor a rendszer kimenete is nulla. Nyugalomban levő rendszerről nem lehet információt szerezni, nem árul el semmit magáról. A rendszerben uralkodó viszonyokról, kapcsolatokról, csak akkor tudunk információt szerezni, ha megmozgatjuk azt, mondjuk jelet kapcsolunk a bemenetére. Ez a módszer működik mindenfajta rendszer esetében. Például az emberi kapcsolatok terén egy elejtett pletyka végigfut néhány csomóponton, processzáló egységen, emberen mely folyamatot nyomon követve egy bizonyos szempontból feltérképezhető a kapcsolati háló és a feldolgozó egységek információtorzítási hajlama. Ez a módszer működik fizikai és szoftver rendszereken is. A gyakorlatban sokszor gerjesztünk rendszereket impulzusszerű gerjesztéssel. Dobverővel a dobot, pengetővel a gitárt, teniszütővel a teniszlabdát és még sorolhatnánk. Impulzus alakú gerjesztést alkalmazunk rendszeridentifikációnál. SISO LTI rendszerek esetében a Dirac impulzussal való gerjesztés teljesen feltárja rendszerben uralkodó viszonyokat.

3-1. ábra. – A rendszer gerjesztése Dirac impulzussal és súlyfüggvény.

Egy SIOSO LTI rendszernek, a Dirac impulzusra adott válaszát súlyfüggvénynek nevezzük. Egy rendszer súlyfüggvénye teljes mértékben jellemzi a rendszert. Jelölje $g(t)$ egy lineáris időinvariáns rendszer súlyfüggvényét, akkor ezt a $\delta(t) \xrightarrow{\Sigma} g(t)$ leképezés eredményezi (3-1. ábra).

A FI SISO LTI rendszerekhez hasonlóan létezik a DI SISO LTI rendszert teljes mértékben jellemző jel, az impulzusválasz. Tehát az impulzusválasz a súlyfüggvény diszkrétidejű változata, $\delta[n] \xrightarrow{\Sigma} g[n]$.

Nemlineáris rendszerekre és idővariáns rendszerekre nem alkalmazható a súlyfüggvénnyel történő jellemzés. Esetükben a súlyfüggvénnyel analóg módon meghatározott függvény nem állandó, hanem idő vagy munkapont függő.

4. A folytonos és diszkrét konvolúció és alkalmazása

Ebben a fejezetben kerül sor a folytonos és diszkrét idejű jelek közötti konvolúciós művelet bevezetésére, annak fizikai és matematikai értelemben vett magyarázatára. A fejezet foglalkozik a konvolúciónak, mint műveltnek a tulajdonságaival és felhasználási lehetőségeivel (SISO LTI rendszerek válaszának meghatározása tetszőleges bemenet esetében).

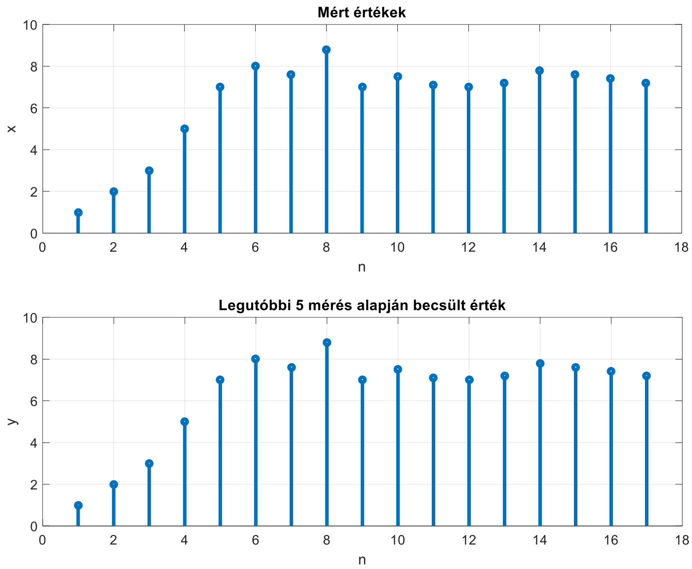
Rendszerek esetében azok stabilitása kulcsfontosságú tulajdonság, ez a fejezet tárgyalja a rendszerek egy osztályának stabilitással kapcsolatos kérdéseit.

Ez a fejezet tartalmazza továbbá a lineáris időinvariáns rendszerek ekvivalens, helyettesítő hálózattal történő számításának módszereit.

4.1. Bevezetés

Két jel között több művelet definiálható. Az egyik ezek közül a konvolúció, amely meghatározható úgy, hogy: ”A konvolúció egy olyan művelet két jel között, melynek eredménye egy harmadik jel.” A konvolúció művelete, igen fontos a jel és rendszerelmélet területén. A jelek és rendszerek tantárgy hallgatói sokszor csak nehézségek árán értik meg a konvolúció műveletének lényegét. Ezért a konvolúciós művelet könnyebb megértése érdekében vegyünk egy egyszerűsített példát. Tételezzük fel, hogy óránkénti felbontásban nyilvántartjuk egy boltban az eladott burgonya tömegét kilogrammban. Erre azért lehet szükség, hogy az eladók megbecsülhessék, milyen mértékben kell feltölteni a polcokat az elkövetkező órában. Jelölje n az órákat, x a mért értékeket, y pedig a szükséges mennyiség becsült értékét. A mért és becsült értékeket egy idősorban tároljuk és azok a következők:

```
x=[1.0,2.0,3.0,5.0,7.0,8.0,7.6,8.8,7.0,7.5,7.1,7.0,7.2,7.8,7.6,7.4,7.2];
y=[0.2,0.6,1.2,2.2,3.6,5.0,6.1,7.3,7.7,7.8,7.6,7.5,7.2,7.3,7.3,7.4,7.4]
```



4-1. ábra. – Mért érték és a legutóbbi öt mérés alapján becsült érték óránkénti alakulása.

A becsült értékeket úgy számítottunk, hogy az adott időponthoz képest a legutóbbi öt mérés átlagát számoltuk becslésnek. Lényegében az $n = 18$ órára a szükséges burgonya mennyiségét mozgóátlaggal számolva kapjuk az:

$$y[17] = \frac{x[13]+x[14]+x[15]+x[16]+x[17]}{5} = \frac{7.2+7.8+7.6+7.4+7.2}{5} = 7.4, \quad (4\text{-}1)$$

eredményt. Tehát az $y[17]$ a becsült érték a következő órára vonatkoztatva. A 4-1. ábra alsó grafikonján levő értékek és a táblázatban szereplő becsült y értékek a következő mozgóátlagot meghatározó képlettel lettek számolva:

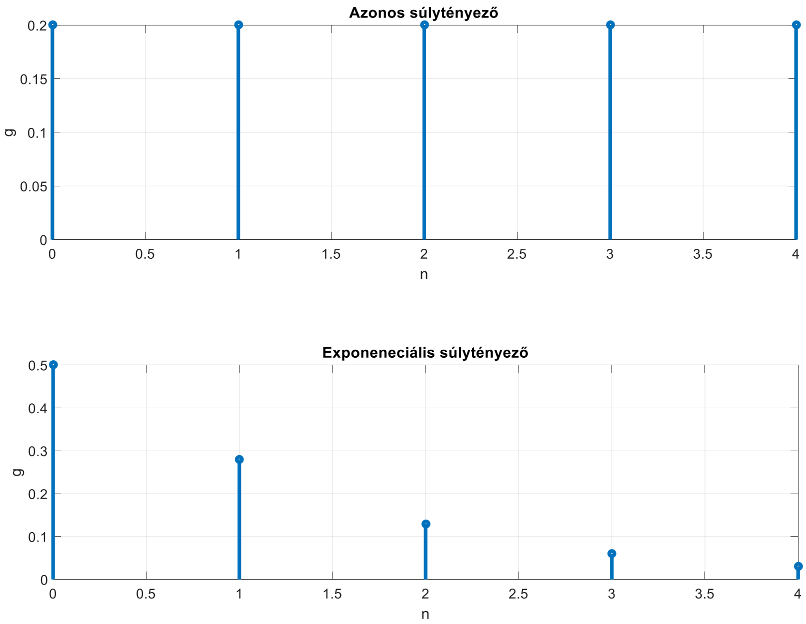
$$y[n] = \frac{\sum_{i=0}^{4} x[n-i]}{5}. \quad (4\text{-}2)$$

A számítást elvégezhetjük úgy is, hogy az osztást bevisszük az összegzésbe, a következő módon:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{5} x[n-i] =$$
$$= \frac{1}{5}x[n] + \frac{1}{5}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2] + \frac{1}{5}x[n-3] + \frac{1}{5}x[n-4] \quad (4\text{-}3)$$

Ezek után határozzunk meg egy újabb jelet g-t, amely az átlagban szereplő súlytényezőket tartalmazza.

```
g=[1/5,1/5,1/5,1/5,1/5,];
```



4-2. ábra. – Azonos és exponenciális súlytényező

Grafikusan a 4-2. ábra felső grafikonja szemlélteti a g jelet, amikor annak azonos súlytényezői vannak. Ekkor a mozgó átlag felírható:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{4} (g[i] \cdot x[n-i]) =$$
$$= g[0]x[n] + g[1]x[n-1] + g[2]x[n-2] +$$
$$+ g[3]x[n-3] + g[4]x[n-4] \quad (4\text{-}4)$$

Kijelenthető, hogy az időpontok vektora n, a mért értékek vektora x, a mozgó átlagban szereplő súlyok vektora g, és a becsült értékeket tartalmazó vektor y, egytől-egyig indexükkel meghatározott értékeket tartalmaznak. Nagy valószínűséggel a burgonya fogyásának becslése jobban kell, hogy támaszkodjon a legutóbbi mérés eredményére, mint az 5 órával előttire. Joggal merül fel a gondolat, hogy a g értékeinek nem feltétlen kell azonosaknak lenniük. Amennyiben exponenciális súlyeloszlással szeretnénk figyelembe venni a mért értékeket, úgy, hogy a legutóbbi mérést, a legfrissebbet, a legnagyobb súllyal, akkor g elemei a következők szerint alakulhatnak:

```
g=[0.5,0.28,0.13,0.06,0.03];
```

A súlyozott mozgó átlag kifejtve:

$$y[17] = \sum_{i=0}^{4} (g[i] \cdot x[17-i]) =$$
$$= g[0]x[17] + g[1]x[16] + g[2]x[15] + g[3]x[14] + g[4]x[13] =$$
$$= 0.5 \cdot 7.2 + 0.28 \cdot 7.4 + 0.13 \cdot 7.6 +$$
$$+0.06 \cdot 7.8 + 0.03 \cdot 7.2 = 7.3440 \qquad (4\text{-}5)$$

Az új súlytényezőkkel számított becslés ekkor:

```
y=[0.5,1.3,2.2,3.7,5.4,6.8,7.3,8.1,7.6,7.6,7.3,7.1,7.1,7.5,7.6,7.5,7.3]
```

Az eredményül kapott érték eltér az azonos súllyal számítottól. A súlyok értékeinek a meghatározása befolyásolja a becslést. Az, hogy milyen súlytényezőket válaszunk, szakértői kérdés, az adott feladattól függ. Természetesen a szóban forgó becslés több tényezőtől is függhet, például a napszaktól az aktuális nap helyétől a hét napjai között vagy például még az időjárástól is. Tehát, azzal a céllal, hogy a becslés minél pontosabb legyen a feladat több dimenzióssá is alakítható.

A továbbiakban vonatkoztassunk el a fenti bevezető példánktól, feltételezzük, hogy x egy belépő jel, amely diszkrét időpontokban adott és végtelen hosszú sorozat, ugyancsak legyen ez a feltételezes igaz a g idősorra is. Akkor: $y[n] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i] \cdot x[n-i]$ összefüggés egy új, belépő, diszkrétidejű jelet ad meg, amely egyes értékeinek számításánál a teljes g jel súlyozóként szerepel. Csak emlékeztetőül, az előbbiek során már említésre került, hogy belépő jel az a jel, amely a független változó negatív értékeire azonosan nulla. Lépjünk még egyet az általánosítás felé azzal, hogy a jelek nem belépő jelek, tehát a teljes értelmezési tartomány felett bármilyen értékeket felvehetnek. Ekkor az $y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (g[i] \cdot x[n-i])$ határozza meg az új jelet, mint két jel konvolúcióját.

$$y[n] = g[n] * x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (g[i] \cdot x[n-i]) \qquad (4\text{-}6)$$

Amennyiben a jelek folytonos idejűek, akkor a végtelen vektorelemek összege integrállá fajul, és a folytonosidejű konvolúció folytonosidejű jelek közötti az alábbiak szerinti definícióját kapjuk:

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau \qquad (4\text{-}7)$$

Kétoldali konvolúcióról beszélünk, hogyha az integrálási határok $-\infty$ és $+\infty$ között vannak. Egyoldali a konvolúció, amennyiben 0 és $+\infty$ közötti az integrálás határa. Diszkrét esetben az eljárást szokás konvolúciós összegnek, míg folytonos esetben konvolúciós integrálnak hívni. A konvolúció egy másik gyakori elnevezése a konvolúciós szorzás, amit a jelölése is sugall, ugyanis a konvolválás jele a két jel között elhelyezkedő $*$ jel.

4.2. A konvolúció megvalósításának algoritmusa FI és DI esetben

A konvolúció megvalósításának algoritmusa annak definícióját veszi alapul, azaz

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau \qquad (4\text{-}8)$$

Az algoritmus a következő lépésekből áll:

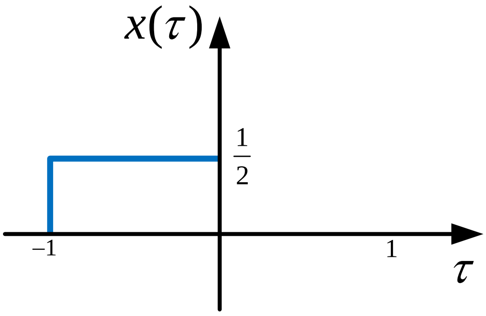
1. reflexió, $g(-\tau)$ képzése,
2. $g(-\tau)$ eltolása t –vel,
3. az eltolt függvény szorzatának $x(\tau)$-val való kiértékelése
4. meghatározzuk a szorzatfüggvény alatt levő területet, mert az a konvolúció eredményfüggvény értéke t időben.

A fent leírt algoritmushoz használjuk bemenetként a 4-3. ábra látható jeleket, melyek grafikusan és analitikusan is megadásra kerültek.

$$x(\tau)=\begin{cases} 0 & ha \quad \tau<0 \\ 1 & ha \quad 1\le\tau\le 1 \\ 0 & ha \quad \tau>1 \end{cases}
\qquad
x(\tau)=\begin{cases} 0 & ha \quad \tau<0 \\ \frac{1}{2} & ha \quad 1\le\tau\le 1 \\ 0 & ha \quad \tau>1 \end{cases}$$

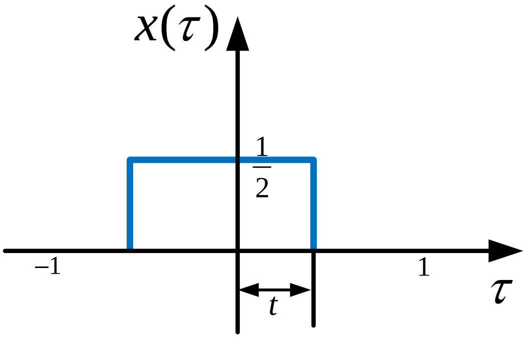
4-3. ábra. – A konvoúciós algoritmus bemutatásához használt jelek.

Az egyik jelen, mondjuk a g –n végezzük el az algoritmus első lépését, azaz a reflexiót. Ennek eredménye a 4-4. ábra látható.



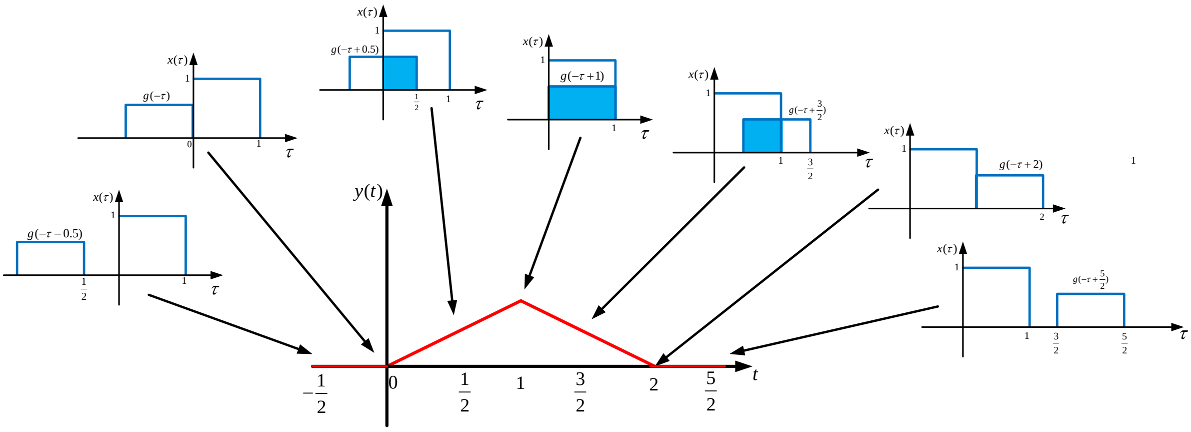
4-4. ábra. – A reflexió műveletének elvégzése a g jelen.

A reflexió elvégzése után az algoritmus második lépéseként toljuk el a $g(-\tau)$ jelet t –vel. Az eltolás eredménye a 4-5. ábra látható.



4-5. ábra. – A $g(-\tau)$ jel eltolása t –vel

Az algoritmus utolsó két lépésében változtassuk a t értékét $-\infty$-től $+\infty$ –ig és számítsuk ki a két jel szorzata által képzett területet, mely maga a konvolúció eredménye lesz (4-6. ábra).



4-6. ábra. – Az FI konvolúciós algoritmus szemléltetése ($y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$ *(4-7) alapján)*

Az analitikus megoldás a következő formában írható fel, ha $x(\tau) = h(\tau) - h(\tau-1)$, $g(\tau) = \frac{1}{2}\big(h(\tau) - h(\tau-1)\big)$ és $g(-\tau) = \frac{1}{2}\big(h(-\tau) - h(-\tau-1)\big)$ akkor $\forall t$-re:

- ha $t < 0$

$$x(\tau)g(t-\tau) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0 \quad (4\text{-}9)$$

- ha $0 \le t \le 1$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0.5\int_{0}^{t} d\tau = 0.5t \ldots\ldots (4\text{-}10)$$

- ha $1 \le t \le 2$

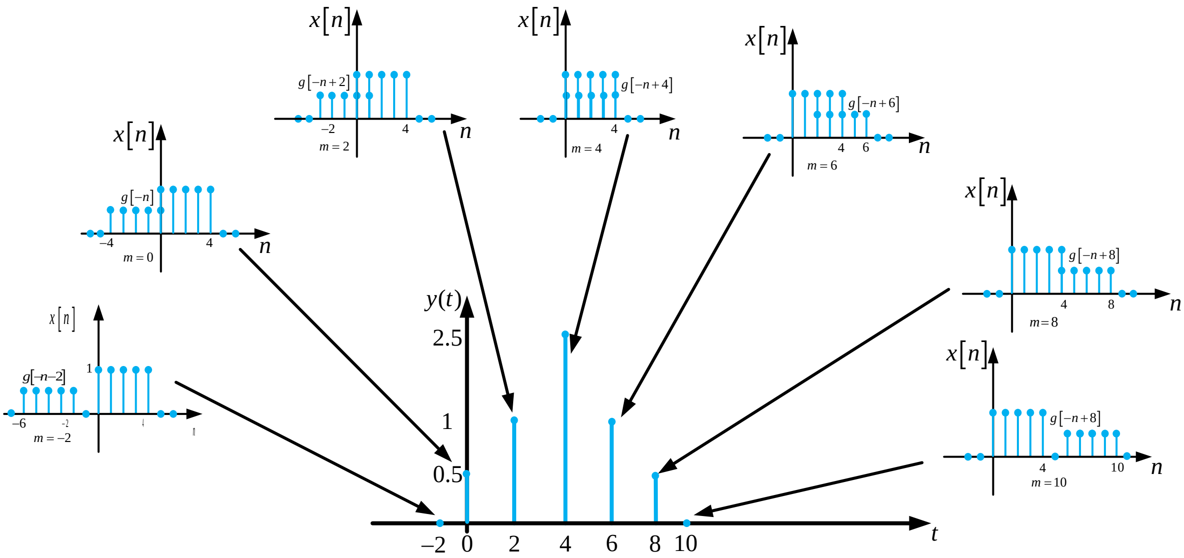
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{t-1}^{t} x(\tau)g(t-\tau)d\tau =$$

$$= 0.5\int_{t-1}^{t} d\tau = 0.5(2-t) \ldots\ldots (4\text{-}11)$$

-ha $t > 2$

$$x(\tau)g(t-\tau) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{t}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0\,. \quad (4\text{-}12)$$

A FI –ben megadott algoritmus lépései a megegyeznek a diszkrétidejű jelek esetében is. A 4-7. ábra szemlélteti a diszkrétidejű megoldást.



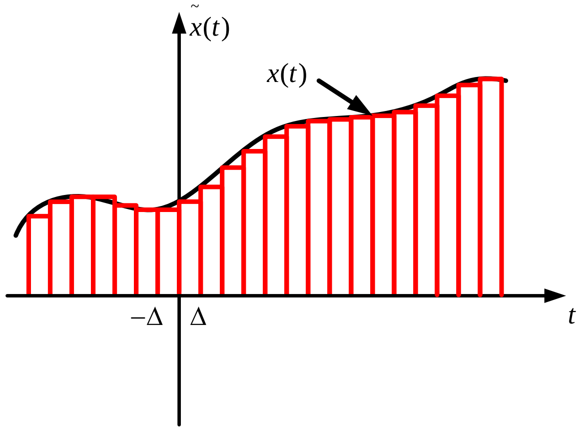
S
T
Y
L
EREF 1 \s 4-7. ábra. – A DI konvolúciós algoritmus szemléltetése ($y[n] = g[n] * x[n] =\ i =$ *i·xn−i (4-6) alapján)*

4.3. A konvolúció tulajdonságai

A konvolúció több tulajdonsággal rendelkezik, melyek érvényesek FI és DI esetben egyaránt. Ezen tulajdonságok felsorolása következik, némelyik bizonyítás nélkül.

4.3.1. Konvolúció Dirack impulzussal

A konvolúció egyik fontos tulajdonsága bevezethető úgy, hogy egy folytonosidejű jelet approximáljuk, kicserepezünk végtelen kis szélességű téglalapokkal, amely eljárást a 4-8. ábra szemlélteti.



4-8. ábra. – Folytonos idejű jel approximációja.

Legyen $h(t)$ az egységugrás, ekkor egy Δ szélességű Dirac delta impulzus közelíthető a $\tilde{\delta}(t) = \frac{1}{\Delta}[h(t) - h(t-\Delta)]$ összefüggéssel. A 4-8. ábra szereplő $x(t)$ jel kicserepezéssel a $k\Delta$ intervallumban helyettesíthető az $\tilde{x}(t) = x(k\Delta)$ közelítéssel, ahol érvényes, hogy $k\Delta < t < (k+1)\Delta$. Tehát: $\tilde{x}(k\Delta) = x(k\Delta)\tilde{\delta}(t - k\Delta)\Delta$. A teljes jel pedig: $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{\delta}(t - k\Delta)\Delta$. Amennyiben $\Delta \to 0$ akkor a kicserepezés infinitemizálissan kicsi lesz és az összeg integrállá fajul a jel közelítése a tényleges jellé, a Dirac impulzus közelítése pedig a tényleges Dirac deltává. Az eredményül kapott integrál megegyezik a két folytonosidejű jel konvolúciójának meghatározásával.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (4\text{-}13)$$

A fentiek alapján a megállapítás az, hogy egy FI jel konvolúciója a Dirac delta impulzussal eredményül magát az FI jelet eredményezi, azaz FI esetben $x(t) = x(t) * \delta(t)$, míg DI esetben $x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(x[i] \cdot \delta[n-i])$.

4.3.2. Periodikusság

Amennyiben $y(t) = x(t) * g(t)$ és $x(t) = x(t + T_0)$ akkor $y(t) = y(t + T_0)$, vagyis amikor egy jel periodikus, akkor annak konvolúciója egy aperiodikus jellel periodikus jelet eredményez ugyan azzal a periodussal.

Ugyanis folytonos esetben ha

$$y(t + T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)g(t + T_0 - \lambda)d\lambda \quad (4\text{-}14)$$

akkor a $T_0 - \lambda = -\tau$ és $d\lambda = d\tau$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$y(t + T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + T_0)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = y(t) \quad (4\text{-}15)$$

Diszkrét esetben pedig:

$$x[n] = x[n + N_0] \Rightarrow y[n] = x[n] * g[n] = y[n + N_0] \quad (4\text{-}16)$$

hiszen ha

$$y[n + N_0] = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(x[i] \cdot g[n + N_0 - i])\ ;\ N_0 - i = -k \quad (4\text{-}17)$$

akkor $y[n+N_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x[k+N_0]\cdot g[n-k])=$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x[k]\cdot g[n-k])=y[n]$ .... (4-18)

4.3.3. Reflexió

Folytonos és diszkrét esetben is rendelkezik a konvolúció a reflexió tulajdonságával, azaz folytonos idejű esetben $y(-t)=x(-t)*g(-t)$, míg diszkrét esetben $y[-n]=x[-n]*g[-n]$.

Az FI eset bizonyítása:

$y(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)g(-t-\lambda)d\lambda$ .... (4-19)

$\lambda=-\tau\Rightarrow d\lambda=-d\tau;$ .... (4-20)

$y(-t)=-\int_{-\infty}^{\infty}x(-\tau)g(-t+\tau)d\tau\,;$ .... (4-21)

$y(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(-\tau)g\big(-t-(-\tau)\big)d\tau=x(-t)*g(-t)$ .... (4-22)

A DI eset bizonyítása:

$y[-n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(x[i]\cdot g[-n-i])$ .... (4-23)

$i=-k$ .... (4-24)

$y[-n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x[-k]\cdot g[-n+k])$ .... (4-25)

$y[-n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x[-k]\cdot g[-n-(-k)])=x[-n]*g[-n]$ .... (4-26)

4.3.4. Eltolás az időben

A konvolúció mind folytonos, mind pedig diszkrét esetben rendelkezik az eltolás tulajdonságával, azaz $y(t-t_1-t_2)=x(t-t_1)*g(t-t_2)$ illetve $y[n-n_1-n_2]=x[n-n_1]*g[n-n_2]$.

A folytonos eset bizonyítása:

$y(t-t_1-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)g(t-t_1-t_2-\lambda)d\lambda$ .... (4-27)

$t_1+\lambda=\tau\Rightarrow;\,d\lambda=d\tau;$ .... (4-28)

$y(t-t_1-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-t_1)g(t-\tau-t_2)d\tau=x(t-t_1)*g(t-t_2)$.. (4-29)

A diszkrét eset bizonyítása:

$y[n-n_1-n_2]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(x[i]\cdot g[n-n_1-n_2-i])$ .... (4-30)

$n_1-i=$k .... (4-31)

$y[n-n_1-n_2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x[k-n_1]\cdot g[n-k-n_2])=$
$x[n-n_1]*g[n-n_2]$ .... (4-32)

4.3.5. Kommutativitás, asszociativitás és disztributivitás

A konvolúciós szorzat egyfajta szorzatot jelent függvények között. Analóg a valós számok aritmetikájával a konvolúcióra is érvényesek a kommutativitás, asszociativitás és disztributivitás tulajdonságai.

Folytonos esetben:

- Kommutativitás:

  $y(t)=x(t)*g(t)=g(t)*x(t)$ .... (4-33)
- Asszociativitás:

  $\big(x(t)*z(t)\big)*g(t)=x(t)*\big(z(t)*g(t)\big)$ .... (4-34)
- Disztributivitás:

  $\big(x(t)+z(t)\big)*g(t)=x(t)*g(t)+z(t)*g(t)$ .... (4-35)

Diszkrét esetben:

- Kommutativitás:

  $y[n]=x[n]*g[n]=g[n]*x[n]$ .... (4-36)
- Asszociativitás:

$x([n] * z[n]) * g[n] = x[n] * (z[n] * g[n])$ .... (4-37)

- Disztributivitás:

$x([n] + z[n]) * g[n] = x[n] * g[n] + z[n] * g[n]$ .... (4-38)

4.4. A konvolúció felhasználhatósága

A konvolúciós szorzás a gyakorlati életben több helyen is alkalmazható. Ilyen például a polinomok szorzása, vagy a SISO LTI rendszerek esetében a kimenet (tetszőleges bemenet esetén), a soros és párhuzamos eredő vagy a BIBO stabilitás meghatározása

4.4.1. Polinomok szorzása

Vizsgáljuk meg két polinom szorzásának algoritmusát. Legyenek a polinomok az alábbiak

$P_m(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_mx^m = \sum_{k=0}^{m} p_kx^k$ .... (4-39)

$Q_n(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n = \sum_{k=0}^{n} q_kx^k$ .... (4-40)

A két polinomot összeszorozva a következő eredményt kapjuk:

$$R_{n+m}(x) = P_m(x) * Q_n(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_iq_jx^ix^j =$$

$$= p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)x + (p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0)x^2 + \cdots$$

$$+(p_0q_{m+n} + p_1q_{m+n-1} + \ldots + p_{n+m}q_0)x^{n+m} \quad \text{(4-41)}$$

Átrendezve a $+(p_0q_{m+n} + p_1q_{m+n-1} + \ldots + p_{n+m}q_0)x^{n+m}$ (4-41) egyenletet kapjuk, hogy

$R_{n+m}(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_{n+m}x^{n+m}$ .... (4-42)

, ahol

$r_i = p_0q_i + p_1q_{i-1} + p_2q_{i-2} + \ldots + p_iq_0 = \sum_{k=0}^{i} p_kq_{i-k}$. .... (4-43)

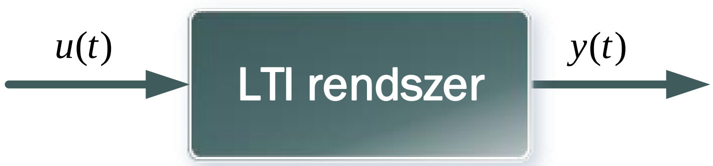
A $P_m(x)$ és a $Q_n(x)$ polinom szorzásának eredménye tehát:

$R_{n+m}(x) = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} p_kq_{i-k}\right)x^i$ .... (4-44)

A (4-44) egyenlet alapján kimondható, hogy az eredmény polinom együtthatói számíthatók, mint a két operandus polinom együtthatóiból alkotott diszkrét jel konvolúciója.

4.4.2. SISO LTI rendszer kimenete tetszőleges bemenetre

Egy másik gyakori felhasználása a konvolúciós szorzásnak a jel és rendszertechnika területén a SISO LTI rendszer válaszának számítása tetszőleges bemenet esetén. Tételezzük fel, hogy ismert egy rendszer $g(t)$ súlyfüggvénye, tehát $\delta(t) \overset{\Sigma}{\rightarrow} g(t)$. A rendszer linearitásából ered, hogy időben eltolt bemeneti jelre a válasza megmarad, csak az is el lesz tolva az időben ugyan annyival $\delta(t-\tau) \overset{\Sigma}{\rightarrow} g(t-\tau)$. Ugyancsak a linearitásból ered, hogy súlyozott bemenetre súlyozott lesz a válasz, ugyan azzal a súllyal, tehát $\alpha \cdot \delta(t) \overset{\Sigma}{\rightarrow} \alpha \cdot g(t)$. Belátható, hogy minden egyes $u(\tau)\delta(t-\tau)$ -ra a rendszer válasza $g(t-\tau)$ lesz.



4-9. ábra. – A rendszer gerjesztése tetszőleges jellel.

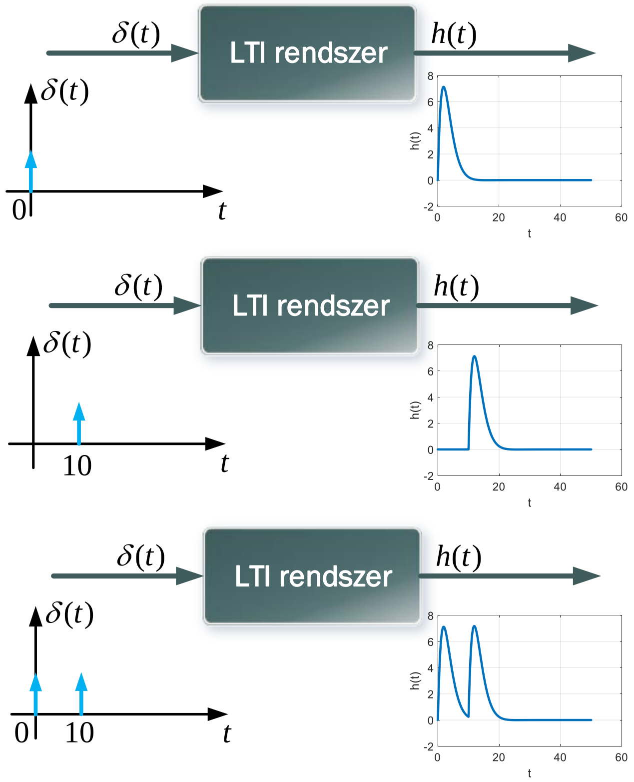
A szuperpozíció elvét alkalmazva összeadhatjuk ezeket az elemi válaszokat és ekkor kapjuk az

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (4\text{-}45)$$

és

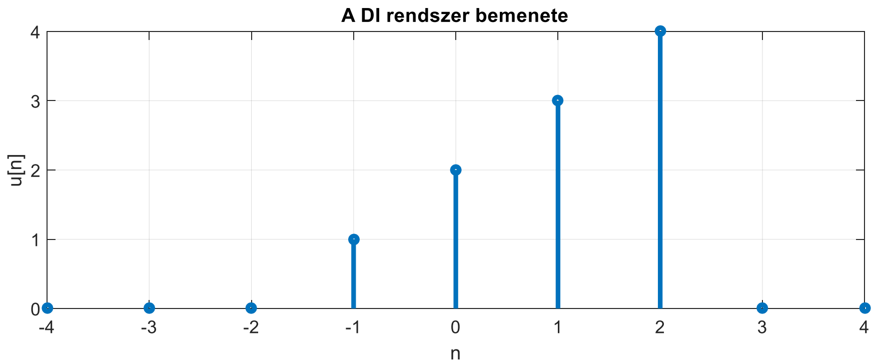
$$y[n] = u[n] * g[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (u[i] \cdot g[n-i]) \qquad (4\text{-}46)$$

összefüggéseket, ami úgy határozza meg a rendszer kimenetét, mint a bemenet és a súlyfüggvény(impulzusátviteli függvény) konvolúcióját FI és DI esetben egyaránt (4-10. ábra).



4-10. ábra. – SISO LTI rendszer választa tetszőleges bemenetre

A folyamatot egy DI példán keresztül demonstráljuk. Egy DI rendszer bemenete legyen a 4-11. ábra látható jel



4-11. ábra. – A DI rendszer bemenete

A 4-11. ábra látható példa bemenet analitikusan az alábbi egyenlettel írható fel:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & ; n < -1 \\ \sum_{k=-1}^{2} (k+2)\delta[n-k] & ; -1 \leq n \leq 2 \\ 0 & ; n > 2 \end{cases} \qquad (4\text{-}47)$$

Bármilyen DI jel felírható eltolt egységugrások súlyozott összegeként, így a szemlélt (4-11. ábra) $u[n]$ jel is azaz

$$u[n] = \cdots + u[-2]\delta[n+2] + u[-1]\delta[n+1] + u[0]\delta[n]$$
$$+u[1]\delta[n+1] + u[2]\delta[n-2] + \cdots \qquad (4\text{-}48)$$

Összevonva:

$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$ .... (4-49)

A rendszer impulzusválasza a definíció szerint: $\delta[n] \xrightarrow{\Sigma} g[n]$, eltolt bemenetre pedig eltolt kimenet lesz a válasz a következő szerint: $\delta[n-k] \xrightarrow{\Sigma} g[n-k]$.

Általános esetben $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta[n-k]$, ekkor szuperpozíció elvének felhasználásával jutunk a $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]g[n-k] = u[n] * g[n]$.

A gyakorlati hasznosítás szempontjából nehézséget okoz a konvolúció számításánál az összegben szereplő végtelen elemek száma. A gyakorlatban fontos szerep jut a kauzális rendszereknek és ezeknél a súlyfüggvény baloldalról korlátos, ami aszt jelenti, hogy ha $n < 0$ akkor $g[n] = 0$. A konvolúció ekkor $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]g[n-k]$. Amennyiben a rendszert gerjesztő jel belépő jel, vagyis ha $n < 0$ akkor $u[n] = 0$, akkor eljutunk a gyakorlatban is alkalmazható konvolúciós összeghez:

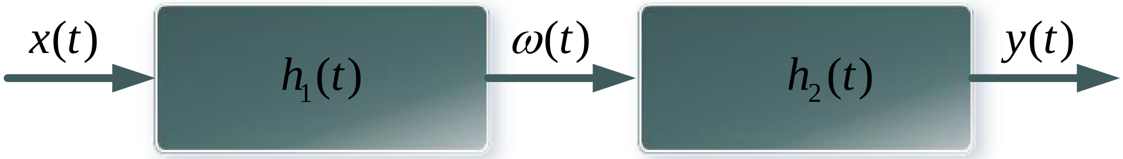
$y[n] = \sum_{k=0}^{n} u[k]g[n-k]$ .... (4-50)

A konvolúció eredményeként létrejött idősor (DI jel) hossza mindig nagyobb, mint az $u[n]$ és $g[n]$ jelek hossza. Amennyiben $u[n]$ idősorának hossza N_u, $g[n]$ hossza pedig N_g, akkor az eredmény idősor hossza $N_y = N_u + N_g - 1$.

Tehát, a konvolúciós szorzás egy hasznos művelet az LTI rendszerek kimenetének meghatározására. A fejezet elején vett példában, ahol óránkénti felbontásban nyilvántartottuk egy boltban az eladott burgonya tömegét és megpróbáltuk megbecsülni az elkövetkező forgalmat, valójában a súlyozott átlagot meghatározó függvény a rendszerre vonatkozó súlyfüggvény volt.

4.4.3. SISO LTI rendszerek soros és párhuzamos kapcsolása

. Két rendszer egymás utáni kapcsolásával jutunk a soros vagy kaszkád kötéshez. Eredő rendszernek azt a rendszert értjük, amely kívülről tekintve ugyan azt a feladatot látja el, mint a több részrendszerből álló kötés. A kaszkád kötés lényege, hogy az első rendszer kimenet lesz a második rendszer bemenete (4-12. ábra). Az eredő rendszer súlyfüggvényét úgy határozzuk meg, hogy a sorba kötött teljes rendszer bemeneti és kimeneti összefüggései ne változzanak.



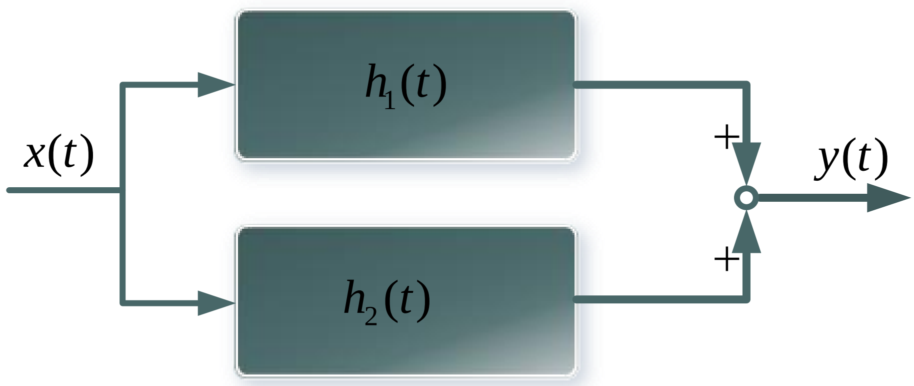
4-12. ábra. – Két rendszer sorba kapcsolása

Mivel $y_1(t) = u(t) * g_1(t)$ és $y(t) = y_1(t) * g_2(t)$, behelyettesítve: $y(t) = \big(u(t) * g_1(t)\big) * g_2(t)$, a konvolúció tulajdonságát felhasználva: $y(t) = u(t) * \big(g_1(t) * g_2(t)\big)$, $y(t) = u(t) * g_e(t)$. Így az eredő rendszer súlyfüggvénye a $g_e(t) = g_1(t) * g_2(t)$ összefüggéssel adott. Ugyanezt a logikát kiterjesztve jutunk el több SISO LTI elem sorba kötése esetén az eredő rendszer számításához, miszerint:

$g_e(t) = g_1(t) * g_2(t) * \ldots * g_m(t)$ .... (4-51)

A gyakorlatban számos esetben találkozhatunk kaszkád kapcsolással. Ilyen a hangfrekvenciás erősítőrendszerek esetében az előerősítő és a végfok kapcsolása, az elektromechanikai rendszerek esetében a hajtási lánc, frekvenciaváltó- villanymotor- hajtómű- ás a meghajtott gép kapcsolása, és még sorolhatnánk a számtalan példát.

A tagok másik egyszerű kapcsolási módja a párhozamos kapcsolás (4-13. ábra). Párhuzamos kötésnél a rendszerek bemenete azonos, míg a kimeneteiket összegezve határozható meg a parhuzamos kapcsolás közös kimenete.



4-13. ábra. – Két rendszer párhuzamos kapcsolása

Mivel $y_1(t) = u(t) * g_1(t)$ és $y(t) = y_1(t) * g_2(t)$, így behelyettesítve ezeket az $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ egyenletbe az $y(t) = u(t) * g_1(t) + u(t) * g_2(t)$ összefüggést kapjuk. Kihasználva a konvolúció tulajdonságait kapjuk, hogy $y(t) = u(t) * \left(g_1(t) + g_2(t)\right)$ azaz $y(t) = u(t) * g_e(t)$. Így az eredő rendszer súlyfüggvénye a $g_e(t) = g_1(t) + g_2(t)$ összefüggéssel adott.

Több rendszer párhuzamos kapcsolásának eredője a

$$g_e(t) = g_1(t) + g_2(t) + \cdots + g_m(t) \qquad (4\text{-}52)$$

kifejezés kiértékelésével számítható.

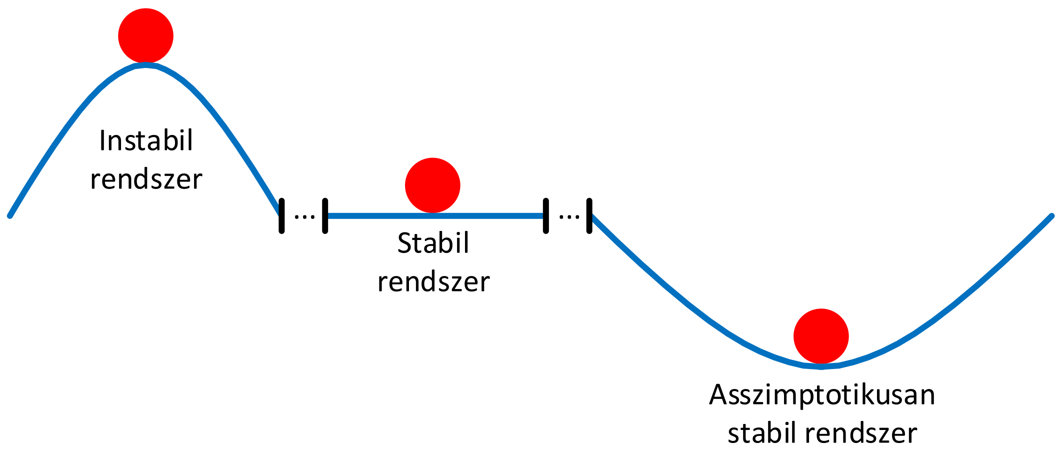
Az egyszerűbb tárgyalásmód és a tagok funkciójának egyesítése céljából, rendszer-technikailag gyakran indokolt az eredő rendszer súlyfüggvényének meghatározása. A rendszerek szintézise, tervezése és megvalósítása során előfordul, hogy az eredményül kapott rendszert fizikailag nem lehet egyben megvalósítani, ezért szükséges a szorzatot, és összeget tartalmazó összetett rendszer egyszerűbb alrendszerek keretében való fizikai megvalósítása.

Diszkrét idejű SISO LTI rendszerek esetében a soros és párhuzamos kötések eredője ugyan úgy számítható, mint folytonos esetben, értelemszerűen ekkor a konvolúció operátora diszkrét idejű konvolúciót takar.

4.5. BIBO stabilitás

Egy rendszer stabilitása vagy instabilitása az egyik legfontosabb tulajdonsága, markánsan befolyásolja a rendszer viselkedését (4-14. ábra).

A rendszer osztályától függően változik a stabilitásra vonatkozó kritérium megfogalmazása is. Másképpen fogalmazható meg egy idővariáns nemlineáris rendszer stabilitási feltétele, mint egy LTI rendszeré. Általánosan elmondható, hogy a stabilis rendszernek az a tulajdonsága, hogy egyensúlyi állapotból kimozdítva újra egyensúlyba képes kerülni. A lineáris rendszer stabilitása csak a rendszertől függ, vagyis a struktúrától és a paraméterektől. Nemlineáris rendszer stabilitása a struktúrán és a paramétereken túl, függ a munkaponttól és a bemenőjeltől is.



4-14. ábra. – Rendszer stabilitásának osztályai

Általában azt a rendszert tekintjük stabilnak, amely esetében a rendszerben uralkodó energiaviszonyok végesek. LTI rendszer esetében az egyik leggyakoribb stabilitási kritérium a gerjesztés-válasz (GV) (az angolszász használatban BIBO Bounded Input Bounded Output) stabilitás. A fogalom mögött meghúzódó lényeg, hogy korlátos bemenő jel gerjesztése az adott rendszeren korlátos kimenetet eredményez. Legyen adott egy LTI SISO rendszer súlyfüggvénye $g(t)$. A rendszer bemenete legyen $u(t)$ és korlátos $|u(t)| < B$, ekkor a rendszer kimenete meghatározható az $y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau$ konvolúciós integrál felhasználásával. A bemenet korlátosságát figyelembe véve a kimenet korlátosságának feltételét keressük a következőképpen: $|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau\right|$, $|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)g(t-\tau)|d\tau$, $|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)||g(t-\tau)|d\tau$, felhasználva a bemenet korlátosságának feltételét jutunk a $|y(t)| \leq \mathrm{B} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|d\tau$ feltételhez, amiből következik, hogy ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|d\tau = \mathrm{G} < \infty$, akkor $|y(t)| \leq \mathrm{B} \cdot \mathrm{G}$. Ez a levezetés igaz DI rendszer esetében is.

Tehát az LTI SISO rendszerek GV vagyis a BIBO stabilitásának feltétele FI és DI esetben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau < \infty, \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |g[i]| < \infty \qquad (4\text{-}53)$$

, ami annyit jelent, hogy a súlyfüggvény abszolút értelemben integrálható legyen.

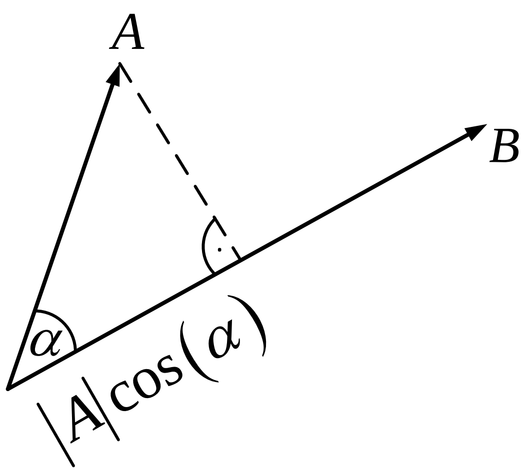
5. Jelek vizsgálata frekvenciatartományban

A folytonos és diszkrét idejű jelek, előnyszerzési okokból transzformálhatók más tartományokba. Ezen transzformációk segítségével könnyebben elemezhetők a jelek, elvégezhetők a lényegkiemelések, az általuk hordozott információ más alakot öltve hozzáférhetőbbé válhat. A transzformáláshoz szükséges kiválasztani egy megfelelő bázist, megtalálni a jelek vetületét az új bázisok irányára és nem mellesleg a transzformációnak és annak inverzének léteznie kell.

Ezen fejezet a frekvenciatartomány és az időtartomány közötti átjárással és a frekvenciatartományban kinyerhető információk értelmezésével foglalkozik.

5.1. Vektorok vetülete egy adott irányra

Ismeretes, hogy a három dimenziós térben két vektornak létezik skaláris és vektoriális szorzata. Példaként tekintsünk két vektort, melyek egy kétdimenziós térben vannak, ezek legyenek az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor, $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$, $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath}$. Ahol $\vec{\imath}$ és $\vec{\jmath}$ egymásra merőleges (ortogonális) egységvektorok, a_x , a_y, b_x, b_y skalár értékek pedig a megfelelő irányba vett vetületek. A két vektor skaláris szorzata $s = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$ a vektor intenzitással skálázva megadja az egyik vetületét a másikra. Például $s = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cdot cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$ megadja az $\vec{a}$ vektor vetületét a $\vec{b}$ vektor irányára (5-1. ábra).



5-1. ábra. – Két vektor skaláris szorzata.

A skaláris szorzat nulla, ha a két operandus között bezárt szög derékszög, a vetület nulla. A skaláris szorzatot analitikusan is számíthatjuk, a következő képlettel: $s = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$, tehát az azonos irányba vett komponensek szorzatát összeadjuk. Amennyiben az egyik vektor abszolút értéke 1, akkor a skaláris szorzat megadja a másik vektornak az első irányába vett vetületét. Így lehet, hogy $a_x = \vec{a} \cdot \vec{\imath}$.

Többdimenziós vektorok esetében is hasonlóképpen értelmezett a skaláris szorzat, legyen $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ és $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n]$ akkor skaláris szorzatuk $s = \bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$. Természetesen itt is érvényes, hogy ha az egyik operandus egységvektor, akkor a skaláris szorzat megadja a másik operandus vetületét az első irányára. Amennyiben a skaláris szorzat mindkét operandusa ugyan az a vektor, akkor $s = \bar{a} \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\bar{a}|^2$.

Valós skalár számok esetén is működik az algoritmus. Legyen az operandus vektor csak egy dimenziós és értéke 2, ekkor $s = 2 \cdot 2 = 4$, ami a vektor hosszának (abszolútértékének) a négyzete. Vizsgáljuk meg ugyan ezt a feladatot komplex operandusokkal. $s = (1+j) \cdot (1+j) = 2j$, ami nem a megfelelő eredmény, ugyanis nem a komplex szám abszolútértéke. Vizsgáljuk meg talán az $s = (1+j) \cdot (1-j) = 2$, szorzatot. Látható, hogy a komplex szám abszolútértékének négyzete csak úgy kapható meg, ha a komplex számot skalárisan megszorozzuk annak konjugáltjával. Komplexelemű vektorok esetében, többdimenziós térben a skaláris szorzat tehát:

$$s = \bar{a} \cdot \bar{b}^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i^* \quad \text{(5-1)}$$

A vetülettel kapcsolatos megállapítás felhasználható idősorok esetében is. Amennyiben találunk egy megfelelő bázist, mely a lényegkiemelés legtömörebb elvégzése érdekében ortonormált irányokból tevődik össze, a bázist képző vektorok egymással vett skaláris szorzata nulla, akkor a jelben található információt vizsgálhatjuk az adott irányok szemszögéből.

5.2. A trigonometrikus függvények ortogonalitása

A következőkben felelevenítésre kerül néhány összefüggés a matematika területéről. Tekintsük az e^x MacLaurin-sorfejtését: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, ismeretes, hogy a sor konvergens, az egyes tagjai tartalmazzák a független változó minden hatványát. Most vizsgáljuk meg a szinusz és a koszinusz szögfüggvények sorait.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}, \quad \text{(5-2)}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{(5-3)}$$

A sorfejtésekben a koszinusz a független változónak csak páros, míg a szinusz csak páratlan hatványait tartalmazza. Ezenkívül megfigyelhető még a sorba-fejtésekben szereplő alternatív előjelváltás is. Ezen három sor között összefüggés fedezhető fel, amennyiben a független változók halmazát kiterjesszük a komplex számok halmazára, akkor belátható, hogy egyértelműen következik az Euler formula, miszerint:

$$e^{jx} = cos(x) + jsin(x), \quad e^{-jx} = cos(x) - jsin(x) \quad \text{(5-4)}$$

E két egyenletből pedig $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ és $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

A következőkben bizonyítjuk, hogy a $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $k \in Z$ trigonometrikus függvények sorozata minden $k \in Z$ értékre periodikus.

$$\varphi_k(t+T_0) = e^{jk\omega_0(t+T_0)} = e^{jk\omega_0 t} e^{jk\omega_0 T_0} = e^{jk\omega_0 t} e^{j2\pi k} = e^{jk\omega_0 t} = \varphi_k(t), \quad \text{(5-5)}$$

mivel

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \text{ és } e^{j2\pi k} = \cos(2\pi k) + j\sin(2\pi k) = 1. \quad \text{(5-6)}$$

A sorozat minden φ_k függvénye periodikus $T_k = T_0 / k$ periódussal, és periódus idejének egész számú többszöröse T_0.

5.3. A merőlegesség feltétele folytonos esetben

Véges dimenziójú diszkrétidejű jelek esetében fentebb tárgyaltuk a merőlegesség feltételét, miszerint amennyiben az $s = \bar{a} \cdot \bar{b}^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i^* = 0$ feltétel fennál akkor a skaláris szorzatban szereplő operandusok ortogonálisak. Folytonosidejű komplex értékű jelek esetében az összeg integrállá változik, a skaláris szorzat az egyes időpillanatokban vett függvényértékek szorzatának integráljává vállik, a skaláris szorzat egy adott intervallumra tekintve:

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_n^*(t)dt\,, k \in Z\,, n \in Z \qquad \text{(5-7)}$$

Ebben az esetben is igaz, hogy az integrállal felírt skaláris szorzat megadja az egyik komplexértékű függvény jelenlétének mértékét a másikban.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_n^*(t)dt = \begin{cases} S_k & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \qquad \text{(5-8)}$$

Legyen $b - a = T_0$, akkor:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt & k = n \\ \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt & k \neq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_0 & k = n \\ \dfrac{1}{j(k-n)\omega_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T} & k \neq n \end{cases} = \qquad \text{(5-9)}$$

$$= \begin{cases} T_0 & k = n \\ \dfrac{1}{j(k-n)\omega_0}\left(e^{j(k-n)\omega_0 t_0} - e^{j(k-n)\omega_0(t_0+T_0)}\right) & k \neq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

A fentiekből látszik, hogy a trigonometrikus függvényekből választott sor elemei $k \neq n$ értékekre merőlegesek. A merőlegességi együttható S_k értéke pedig T_0, minden vetítés egyszer T_0 -al való skálázást visz be a transzformációba. A merőlegességi feltétel $k \neq n$ értékekre való teljesülése miatt kijelenthető, hogy a $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ által meghatározott harmonikus függvények bázist alkotnak. A bázist alkotó függvények irányaiba vetíthetünk más függvényeket, mely vetítés eredményei komplex együtthatók. A függvények visszaállítása során a vetületekből kapott komplex együtthatókkal súlyozva a bázisfüggvényeket, visszaállítható az eredeti függvény.

5.4. A Fourier-sor

A jelek harmonikus komponensekre való bontása kutatásának kezdete a 18. század végére tehető, amikor is Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) francia matematikus, rezgéseket tanulmányozva állt elő a gondolattal. Eredményeinek publikálását 1807-ben, az akkori tudományos elit megakadályozta, így azok csak 1822. -ben kerülhettek közlésre. Fourier elméletét csak később, 1829.-ben Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (1805-1859) igazolta. Miután Fourier elmélete széleskörben nyert elismerést és alkalmazást a tudomány számos területén.

Az előzők során bebizonyosodott, hogy $e^{jk\omega_0 t}$ függvénycsalád bázist alkot. Minden szakaszonként folytonos és differenciálható, korlátolt, periodikus $x(t,T_0)$ függvény előállítható Fourier-sor alakjában, harmonikus szinuszok és koszinuszok súlyozott összegeként. A Fourier sorfejtés lényege hogy megkeressük, egy adott periodikus függvény milyen mértékben tartalmazza az egyes bázisfüggvényeket. Az ortonormált bázist ebben az esetben az alapharmonikus frekvenciáján és annak egész számú többszörösén jelentkező, végtelen számú szinusz és koszinusz függvények alkotják. A körfrekvencia ω_0 és a periódus T_0 közötti összefüggés: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, így feltételezhető, hogy a keresett sorfejtés:

$$\boxed{x(t,T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{jk\omega_0 t}} \tag{5-10}$$

alakú , ahol $k \in Z$ és az $\underline{a}_k$ komplex együtthatók a függvényeknek a bázisokra való vetítéséből határozhatók meg a következők szerint:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t,T_0)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt,\ n \in Z, \tag{5-11}$$

az összeg kiemelhető az integrálból, és:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t,T_0)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt, \tag{5-12}$$

az előzőek során bebizonyítottuk, hogy az $\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$ integrál értéke csak $k = n$ esetében különbözik nullától és akkor az értéke T_0, másrészt a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k$ összeg esetében is csak az $k = n$ esetében szorzunk nullánál különböző számmal, így végül

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t,T_0)e^{-jn\omega_0 t}dt = T_0 \underline{a}_n . \tag{5-13}$$

Könnyen belátható, hogy az egyes komponensek súlytényezői számíthatók az alábbi integrállal:

$$\boxed{\underline{a}_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t,T_0)e^{-jn\omega_0 t}dt} \tag{5-14}$$

Az ily módon számított, végtelen számú együttható tartalmazza azt az információmennyiséget, ami segítségével a bázisfüggvényekből visszaállítható a periodikus függvény. A $k = 0$ értéket egyenáramú komponensnek, a $k = \pm 1$ komponenseket alapharmonikusnak, míg a többit felharmonikusnak nevezzük.

A Fourier-sor nem konvergál minden esetben. Az $x(t,T_0)$ függvény Fourier sorbafejthetőségének feltételeit Dirihle, német matematikus adta meg az alábbi három pontban:

- A függvénynek abszolút értelemben integrálhatónak kell lennie, $\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t,T_0)|dt < \infty$,
- Egy periodus alatt, $t_0 < t < t_0 + T_0$, bármilyen nyílt intervallumban, véges számú minimummal és maximummal kell rendelkeznie,
- Egy periodus alatt, $t_0 < t < t_0 + T_0$, bármilyen nyílt intervallumban, csak véges számú szakadással rendelkezhet.

A komplex együtthatók Euler alakjában megtalálható az amplitúdó és a fázis: $\underline{a}_k = \left|\underline{a}_k\right| \cdot e^{-j\phi_k}$. A $\left(k\omega_0, \left|\underline{a}_k\right|, \phi_k\right)$ rendezett hármast nevezzük **a jel spektrumának**. Egy periodikus jel spektruma diszkrét $k\omega_0$ értékekben értelmezett. Ha az $\underline{a}_k$ együtthatók $\left|\underline{a}_k\right|$ abszolút értékét a $k\omega_0$ függvényében ábrázoljuk, megkapjuk az $x\left(t,T_0\right)$ függvény amplitúdóspektrumát, amennyiben a fázist ábrázoljuk a frekvencia függvényében a fázisspektrumhoz jutunk. A spektrum egyértelműen jellemzi az eredeti időfüggvényt. Matematikai spektrumról beszélünk az $\left(k\omega_0, \left|\underline{a}_k\right|, \phi_k\right)$ hármas esetében ha k egész szám $\left(-\infty, \infty\right)$ között vesz fel értékeket.

Vegyük észre, hogy a sorfejtésben az $e^{jk\omega_0 t} = \cos\left(k\omega_0 t\right) + j\sin\left(k\omega_0 t\right)$ összefüggésben $k < 0$ esetében negatív frekvencia is szerepel, ezért ezt a spektrumot matematikai spektrumként ismerjük. A negatív frekvenciát csak matematikai szempontból kell érteni, a gyakorlatban mit jelent, az az alábbiak során kerül kifejtésre.

Az előzőekben tárgyaltak érvényesek komplex és valós értékű függvényekre egyaránt. A gyakorlatban azonban gyakrabban találkozunk való értékű jelekkel. Speciálisan ha $x(t,T_0)$ valós függvény, akkor érvényes, hogy az egyenlő a saját konjugáltjával, $x\left(t,T_0\right) = x^*\left(t,T_0\right)$ és ekkor:

$$
\begin{aligned}
x^*(t,T_0) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{a}_{-m}^* e^{jm\omega_0 t} = x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{a}_m^* e^{jm\omega_0 t}
\end{aligned}
\quad , \qquad \text{(5-15)}
$$

ekkor érvényes az $\underline{a}_k = \underline{a}_{-k}^* \Rightarrow \underline{a}_{-k} = \underline{a}_k^*$ és a sor átalakítható csak valós együtthatók szerepeltetésével a következők szerint:

$$
x(t,T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underline{a}_k e^{jk\omega_0 t} + \underline{a}_k^* e^{-jk\omega_0 t}\right) \qquad \text{(5-16)}
$$

Mivel $\left|\underline{a}_k\right| = \left|\underline{a}_k^*\right|$ és $\angle\underline{a}_k = -\angle\underline{a}_k^*$, ezért kijelenthető, hogy a valós jelek amplitúdóspektruma páros, míg a fázisspektruma páratlan függvény. Ezért ha $\underline{a}_k = \left|\underline{a}_k\right| \cos\left(\angle\underline{a}_k\right) + j\sin\left(\angle\underline{a}_k\right)$,akkor a valós rész tartalmazza a sorbafejtés páros, míg a képzetes a páratlan együtthatóit és érvényes, hogy $a_{ck} = Re\left\{\underline{a}_k\right\} = \left|\underline{a}_k\right| \cos\left(\angle\underline{a}_k\right)$, valamint $a_{sk} = \mathrm{Im}\left\{\underline{a}_k\right\} = \left|\underline{a}_k\right| \sin\left(\angle\underline{a}_k\right)$.

Így valós jelek esetében eljutottunk a fizikai spektrumhoz, ami már csak pozitív értékű frekvenciákat tartalmaz:

$$
x(t,T_0) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{ck}\cos(k\omega_0 t) - a_{sk}\sin(k\omega_0 t)\right) \qquad \text{(5-17)}
$$

Vezessük be a következő jelölést: $A_0 = a_0$, $A_k = 2\,\mathrm{Re}\left\{\underline{a}_k\right\}$, $B_k = -2\,\mathrm{Im}\left\{\underline{a}_k\right\}$. A sorfejtés ekkor felírható a koszinuszok lineáris kombinációját tartalmazó páros, a szinuszok lineáris kombinációját tartalmazó páratlan és az egyenáramú komponens összegeként.

$$
x\left(t,T_0\right) = \underbrace{A_0}_{\text{egyenáramú komponens}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k\omega_0 t\right)}_{\text{páros komponensek}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} B_k \cdot \sin\left(k\omega_0 t\right)}_{\text{páratlan komponensek}} \qquad \text{(5-18)}
$$

Az együtthatók ekkor már az egyes harmonikusra számított vetületek alapján, csak valósértékű jelek használatával számíthatók a következő összefüggések alapján:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t,T_0)\,dt \qquad \text{(5-19)}$$

az egyenáramú komponens a jel egy periodusra vett átlaga,

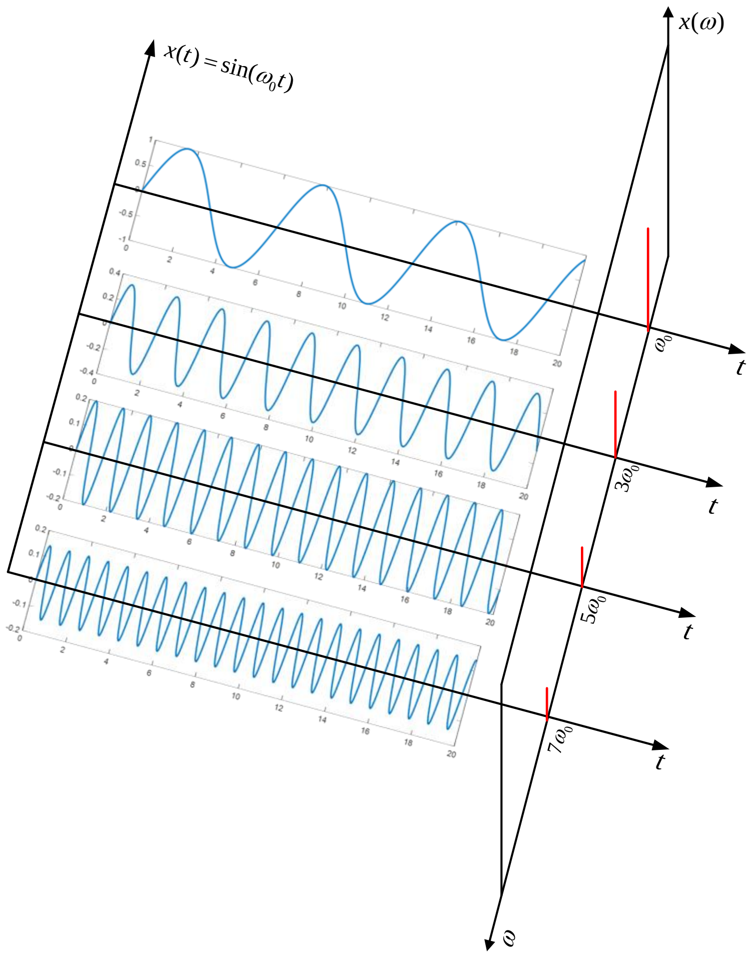
$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t,T_0)\cos(k\omega_0 t)\,dt \qquad \text{(5-20)}$$

a páros rész komponensei míg,

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t,T_0)\sin(k\omega_0 t)\,dt \qquad \text{(5-21)}$$

a páratlan rész komponensei.

Ha k $[0,\infty)$ között vesz fel értékeket, akkor a $(k\omega_0, F_k, \phi_k)$ hármas a jel fizikai spektrumát jelöli, ahol $F_k = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{A_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{B_k}{2}\right)^2} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ az amplitúdó és $\phi_k = -arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$ a fázis.

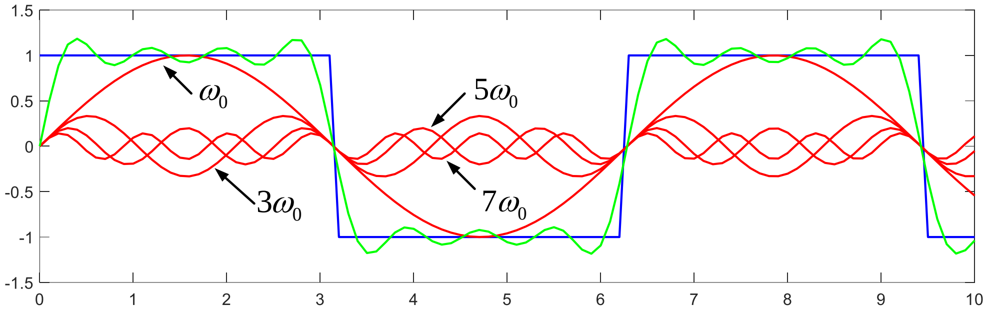


5-2. ábra. – A Fourier transzformáció szemléltetése

Az 5-2. ábra három dimenzióban szemlélteti egy jel harmonikus összetevőit időtartományban és frekvenciatartományban. Az 5-2. ábra jobbról balra szemlélve kétdimenzióban látjuk az idő szerinti változást, míg elölről hátrafelé szemlélve kétdimenzióban látható a frekvenciatérben levő összefüggés.

Az alábbi példán (5-3. ábra) egy páratlan, periodikus négyszögjel Fouriersorba fejtésének szemléltetése létható. Az 5-3. ábraából szépen kivehető, hogy az alapharmonikus periódusa megegyezik a négyszögjel periódusával, a sorban csak a páratlan indexű harmonikusok szerepelnek. A sorfejtés csak szinuszos összetevőket tartalmaz, nem tartalmaz koszinuszt, mert az páros komponens jelenlétét képviselné, melynek ebben a jelben helye nincs.

$$u(t)=\frac{4}{\pi}u_0\left(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\frac{1}{7}\sin 7\omega_0 t\right)$$



5-3. ábra. – Egy négyszög alakú periodikus függvény Fourier sorának első öt összetevője.

Amint már az előzőek során tárgyaltuk a jel pillanatnyi teljesítménye adott a $p(t)=x(t)\,x^*(t)=|x(t)|^2$ kifejezéssel. Az átlagteljesítmény egy T intervallum felett, pedig: $P_T=\int_T p(t)dt\ =\int_T |x(t)|^2 dt$. A periodikus jelek végtelen energiájú jelek, de átlagteljesítményük lehet véges. A periodikus jelekben levő teljes információ:

$$P_{T_0}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t,T_0)x^*(t,T_0)dt \quad \text{(5-22)}$$

a teljesítmény definíciójából,

$$P_{T_0}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t,T_0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{a}_k^* e^{-jk\omega_0 t}dt \quad \text{(5-23)}$$

a konjugáltra behelyettesítve a sorfejtést és

$$P_{T_0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{a}_k^*\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t,T_0)e^{-jk\omega_0 t}dt\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{a}_k^*\underline{a}_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\underline{a}_k\right|^2 \quad \text{(5-24)}$$

felcserélve az összeget és az integrált.

Eljutottunk a Parseval tételhez, amely az alábbiak szerint adja meg a kapcsolatot az időtartományban és a frekvenciatartományban, egy periodusra számított átlagteljesítmény között:

$$P_{T_0}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left|x(t,T_0)\right|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\underline{a}_k\right|^2 \quad \text{(5-25)}$$

A periodikus jel, egy periodusra számított átlagteljesítménye meghatározható a Fourier sor együtthatói amplitúdó négyzeteinek összegével. Ez is azt bizonyítja, hogy a komplex együtthatók hordozzák magukban a jelben levő teljes információt. A Parseval tétel, bizonyíték arra, hogy a Fourier sorbafejtés során a jel átlagteljesítménye nem változik.

$$P_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|\underline{a}_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|\underline{a}_k\right|^2 dt=\left|\underline{a}_k\right|^2 \quad \text{(5-26)}$$

Mivel $k\in Z$ és $P_k=P_{-k}$, ezért a jel $k\omega_0$ -ra vonatkozó komponensének átlagteljesítménye $2P_k$. A $(k\omega_0,P_k)$ párok pedig a jel teljesítményspektrumát képezik. A Parseval tétel alapján ugyancsak elmondható, hogy egy összetett periodikus jel átlagteljesítménye egyenlő a harmonikus komponensei átlagteljesítményének összegével.

A jel teljesítményspektrumából meghatározható az az intervallum, amit a jel spektrális szélességének nevezünk, vagyis az ahol a jel jellemző összetevői elhelyezkednek.

A jelspektrum alakjától és a feladat jellegétől függően többféleképpen meghatározhatjuk a jel spektrális szélességét:

- az a tartomány, ahol a jel teljesítményének 90% található,
- az az összefüggő tartomány ahol a teljesítményspektrum nem nulla,
- az a maximális teljesítmény körüli terület, amit a maximum körüli első nulla értékek határolnak (first lobe),
- az a maximális teljesítmény körüli terület, melyet a maximális teljesítményérték feléhez tartozó frekvenciák határolnak,
- az a szélesség, amit a maximális teljesítményérték körül elhelyezhető ekvivalens négyzet meghatároz,
- az átlagteljesítménnyel meghatározott szélesség,
- az a terület ami egy adott érték felüli teljesítményeket tartalmazza.
- és még meg lehet határozni egyéb kritériumokat is.

A gyakorlatban nehéz számolni a végtelen összeggel, nem áll rendelkezésünkre végtelen hosszú időnk és nincs végtelen nagy memóriánk, ezért a Fourier sorbafejtést csak egy bizonyos harmonikus számig végezzük, tudatosan dobjuk el az információ azon részét, ami például kevés teljesítményt tartalmaz. Így az $x(t,T_0)_N = \sum_{k=-N}^{N} \underline{a}_k e^{jk\omega_0 t}$ sorbafejtés csak bizonyos hibával közelíti az eredeti periodikus jelet. A sorbafejtés N értéknél való megszakítása jellemzi a veszteséggel járó tömörítéséket, mint például az MP3, a JPEG és MPEG hang és képtömörítő eljárásokat.

5.5. A Fourier transzformáció

A Fourier-sor által meghatározott kifejtés csak a periodikus $x(t,T_0)$ jelekre, függvényekre alkalmazható. Periodikus jelek esetében, amennyiben a T_0 periódusidőt növeljük eljutunk a $T_0 \to \infty$ határesethez, amely egy nem periodikus függvényt eredményez. Ennek mintájára állíthatjuk, hogy minden aperiodikus függvény, olyan periodikus függvénynek fogható fel, melynek periódusideje a végtelen felé tart. A Fourier sorbafejtéshez képest mivel $T_0 \to \infty$ a következők változnak:

$$x(t) = \lim_{T_0\to\infty} x(t,T_0) \quad , \text{......} \quad (5\text{-}27)$$

$$x(t,T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{jk2\pi F_0 t} \quad , \text{......} \quad (5\text{-}28)$$

$$\underline{a}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t,T_0) e^{-jn2\pi F_0 t} dt \,, \; F_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{......} \quad (5\text{-}29)$$

$$\underline{a}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t,T_0) e^{-jn2\pi F_0 t} dt \,, \text{......} \quad (5\text{-}30)$$

az integrál határai változnak. Definiáljuk a transzformáltat a következő szerint:

$$X(jF) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt \,, \text{......} \quad (5\text{-}31)$$

ahol az $\underline{a}_n$ értékek a transzformáltból vett minták az n pontokban azaz

$$\underline{a}_n = \frac{1}{T_0} X(kjF_0) \Leftrightarrow T_0 \underline{a}_n = X(kjF_0) \quad ,\text{.......} \quad (5\text{-}32)$$

a sorbafejtés alakulása a transzformáció mintáival

$$x(t,T_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kjF_0) e^{jk2\pi F_0 t} \quad ,\text{.......} \quad (5\text{-}33)$$

$$x(t,T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_0 X(kjF_0) e^{jk2\pi F_0 t} \quad .\text{.......} \quad (5\text{-}34)$$

Alkalmazva a $T_0 \to \infty$, $x(t,T_0) \to x(t)$, $F_0 \to dF$, $k \to \infty$, $kF_0 \to F$ helyettesítést kapjuk hogy

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jF) e^{j2\pi Ft} dF \text{ ....} \quad (5\text{-}35)$$

, és a párja:

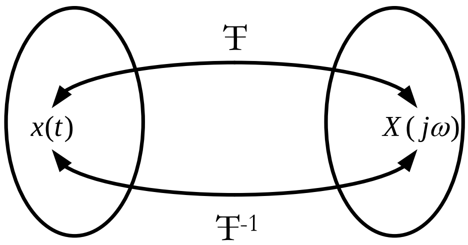
$$X(jF) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \text{ ....} \quad (5\text{-}36)$$

Hagyományosan a Fourier transzformációt körfrekvenciában szokás megadni. Ha $\omega = 2\pi F$, és $dF = \frac{d\omega}{2\pi}$ akkor

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ ....} \quad (5\text{-}37)$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ ....} \quad (5\text{-}38)$$

Az $X(j\omega)$ komplex spektrumot az $x(t)$ függvény Fourier-transzformáltjának (FT Fourier Transform) nevezzük és magát a transzformáció operátorát $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ alakban jelöljük. Az $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ kifejezés pedig az inverz Fourier-transzformáció és a jelölése $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$.



5-4. ábra. – Átmenet az időtartomány és a frekvencia tartomány között

A Fourier-transzformáció létezésének feltétele a Dirihle feltételek teljesülése, miszerint a transzformálandó jelnek abszolút értelemben integrálhatónak kell legyen $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| < \infty$, véges számú minimummal és maximummal kell rendelkeznie és csak véges számú szakadással rendelkezhet.

Amennyiben létezik egy jel Fourier transzformáltja, akkor a jel idő tartományban számított energiája és a frekvenciatartományban számított energia között kapcsolat van. Egy jel pillanatnyi teljesítménye: $p(t) = x(t)\, x^*(t) = |x(t)|^2$. A teljesítmény mindenkor az energiaváltozás sebességét jelenti a következő képen: $p(t) = \frac{dE}{dt} = |x(t)|^2$, így a jel teljes energiája számítható a $dE = p(t)dt$ infinitezimális energiaváltozások összegeként:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(jF) e^{-j2\pi Ft}\, dF \right] dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(jF) dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft}\, dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(jF) X^*(jF) dF =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(jF)|^2 dF. \text{ ....} \quad (5\text{-}39)$$

A Parseval egyenlet megadja a jel energiaspektruma és a jel energiája közötti kapcsolatot:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(jF)|^2 dF \qquad (5\text{-}40)$$

Ugyanez ne frekvencia, hanem körfrekvencia esetében:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \qquad (5\text{-}41)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega \qquad (5\text{-}42)$$

Az aperiodikus $x(t)$ függvények $|X(j\omega)|$ amplitúdósűrűség-spektruma folytonos. Az $|X(j\omega)|^2 \Delta\omega$ sorozat értéke a $\Delta\omega$ sávba tartozó jelösszetevők energiájával arányos.

A Fourier transzformáció lehetővé teszi a jelek és rendszerek vizsgálatát a frekvenciatérben. A transzformáció rendelkezik néhány hasznos tulajdonsággal, melyek rávilágítanak, hogy a jelek és rendszerek területen az időtartományban összetettnek tűnő feladatok leegyszerűsödnek a frekvenciatartományban. Az alábbiak során felsorolásra kerül néhány tipikus tulajdonság.

5.5.1. A Fourier transzformáció tulajdonságai

5.5.1.1. A szimmetria tulajdonság

Amennyiben érvényes, hogy $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ és $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$, vagyis $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$, akkor érvényes, hogy $X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-j\omega)$.

A tulajdonság azt jelenti, hogy például egy időtartományban levő négyszögjelnek a frekvenciatartománybeli képe a $sinc(\cdot)$ jel és a dualitás törvényéből következően ez fordítva is igaz. Az időtartományban levő a $sinc(\cdot)$ jelnek a frekvenciatartománybani képe négyszögjel.

Bizonyítás:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \qquad (5\text{-}43)$$

vezessük be a $t' = -t$, ekkor

$$x(-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t'} d\omega, \qquad (5\text{-}44)$$

cseréljük fel t' és ω, ekkor :

$$2\pi x(-j\omega) = \int_{\infty}^{\infty} X(t')e^{-j\omega t'} dt' = \mathcal{F}\{X(t)\} \qquad (5\text{-}45)$$

5.5.1.2. A konjugált transzformáltja

Amennyiben ismert egy komplex jel Fourier transzformáltja $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ akkor abból számítható a jel konjugáltjának transzformáltja is.

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega) \qquad (5\text{-}46)$$

Ahol $x^*(t)$ konjugált komplex megfelelője $x(t)$ -nek.

Bizonyítás:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt\right]^* = X^*(-j\omega) \qquad (5\text{-}47)$$

Ha $x(t)$ valós, akkor $x(t) = x^*(t)$ és Fourier transzformáltja konjugált komplex szimmetrikus függvénye a frekvenciának.

$$X^*(j\omega)=X(-j\omega)\Rightarrow\left[\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}\right]^*=$$
$$=\left[\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}\right]\Rightarrow\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}-j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=$$
$$=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\} \quad \text{.......... (5-48)}$$
$$\Rightarrow\begin{matrix}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}\\ \mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}\end{matrix}$$

Más szóval a Fourier transzformált valós része páros függvénye az ω nak, képzetes része pedig páratlan. Ugyanez poláris koordinátákban:

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$
$$X^*(j\omega)=X(-j\omega)\Rightarrow\left[|X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}\right]^*=$$
$$=\left[|X(-j\omega)|e^{j\theta(-\omega)}\right]\Rightarrow|X(j\omega)|e^{-j\theta(\omega)}=|X(-j\omega)|e^{j\theta(-\omega)} \quad \text{.............................. (5-49)}$$
$$\Rightarrow\begin{matrix}|X(j\omega)|=|X(-j\omega)|\\ \theta(\omega)=-\theta(-\omega)\end{matrix}$$

Legyen $x(t)=x_p(t)+x_n(t)\quad;x_p(-t)=x_p(t)\quad;\quad x_n(-t)=-x_n(t)$. Akkor

$$\mathcal{F}\{x_p(t)\}=X_p(j\omega);\quad \mathcal{F}\{x_n(t)\}=X_n(j\omega) \quad \text{.. (5-50)}$$

$$\mathcal{F}\{x_p(-t)\}=\mathcal{F}\{x_p(t)\}\Rightarrow X_p(-j\omega)=X_p^*(j\omega)=$$
$$=X_p(j\omega)\Rightarrow\begin{matrix}\mathrm{Re}\{X_p(j\omega)\}=X_p(j\omega)\\ \mathrm{Im}\{X_p(j\omega)\}=0\end{matrix} \quad \text{... (5-51)}$$
$$\mathcal{F}\{x_n(-t)\}=-\mathcal{F}\{x_n(t)\}\Rightarrow X_n(-j\omega)=X_n^*(j\omega)=$$
$$=-X_n(j\omega)\Rightarrow\begin{matrix}\mathrm{Re}\{X_n(j\omega)\}=0\\ \mathrm{Im}\{X_n(j\omega)\}=X_n(j\omega)\end{matrix} \quad \text{.. (5-52)}$$
$$X(j\omega)=X_p(j\omega)+X_n(j\omega) \quad \text{.. (5-53)}$$

A fenti összefüggés szerint a páros jelnek csak valós képe van a páratlannak csak képzetes.

5.5.1.3. Linearitás

A tulajdonság arra vonatkozik, hogy a Fourier transzformáció lineáris operátor. Jelek lineáris kombinációjának Fourier transzformáltja az egyes Fourier transzformáltak lineáris kombinációja.

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k(t)e^{-j\omega t}dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\int_{-\infty}^{\infty}x_k(t)e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k X_k(j\omega) \quad \text{... (5-54)}$$

5.5.1.4. Eltolás az időtartományban

Amennyiben ismert egy jel Fourier transzformáltja $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$ akkor abból számítható a jel időtartományban eltolt változatának a transzformáltja is. Egyedüli feladat, hogy az eredeti jel frekvenciatartományban levő képét megszorozzuk az $e^{-j\omega t_0}$ komplex exponenciálissal.

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\}=e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}\{x(t\}=e^{-j\omega t_0}\mathrm{X}(j\omega) \quad \text{... (5-55)}$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega(\lambda+t_0)}d\lambda =$$
$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda = e^{-j\omega t_0}X(j\omega) \quad \text{.......................................} (5\text{-}56)$$

Ebből következik, hogy az időfüggvényben levő eltolás nem más, mint fáziseltolás a frekvencia tartományban.

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0\} = e^{-j\omega t_0}\left|X(j\omega)\right|e^{j\theta(\omega)} = \left|X(j\omega)\right|e^{j(\theta(\omega)-\omega t_0)} \quad \text{..} (5\text{-}57)$$

A fáziseltolás lineáris.

5.5.1.5. Eltolás a frekvenciatartományban

Amennyiben ismert egy Fourier transzformált pár $X(j\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t)$ akkor abból számítható a jel frekvenciatartományban eltolt változatának a transzformáltja is időtartományban a következő szerint:

$$X\big(j(\omega-\omega_0)\big) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{j\omega t_0}x(t). \quad \text{..} (5\text{-}58)$$

Vegyük észre, hogy az eltolások időtartományban és frekvenciatartományban duális műveletek.

5.5.1.6. Skálázás időben és frekvenciában

Amennyiben ismert egy jel Fourier transzformáltja $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ akkor abból számítható a jel idő tartományban levő széthúzott és összenyomott változatának a transzformáltja azaz

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad \text{..} (5\text{-}59)$$

,ahol a valós állandó.

Speciálisan ha $a=-1$, akkor:

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = \frac{1}{|-1|}X\left(\frac{j\omega}{-1}\right) = X(-j\omega) \quad \text{..} (5\text{-}60)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a}d\lambda & a>0 \\ -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a}d\lambda & a<0 \end{cases} = \quad \text{..........................} (5\text{-}61)$$
$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a}d\lambda = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

A fentiekben bemutatottak a duális alakra is igazak:

$$X(ja\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{|a|}x\left(\frac{t}{a}\right)\right\} \quad \text{..} (5\text{-}62)$$

5.5.1.7. Differenciálás

A jel deriváltjával kapcsolatos tulajdonság hatékonyan alkalmazható differenciálegyenlet megoldásának elemzésére. Amennyiben ismert egy jel Fourier transzformáltja $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ akkor ismert deriváltjának transzformáltja is, a következő szerint:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$$;.. (5-63)

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$$

Bizonyítás:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\left(X(j\omega)e^{j\omega t}\right)\right)d\omega =$$

$$j\omega\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right) = j\omega X(j\omega)$$ .... (5-64)

Itt is érvényes a dualitás. miszerint:

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}\{-jtx(t)\}$$ .... (5-65)

5.5.1.8. Konvolúció az idő tartományban

Ebben az esetben is legyen értelmezett két jel Fourier transzformáltja $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ és $y(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$ akkor ismert konvolúciójuk $z(t) = x(t) * y(t)$ transzformáltja:

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(j\omega)Y(j\omega)$$ .... (5-66)

$$Z(j\omega) = \mathcal{F}\{z(t)\}, Z(j\omega) = X(j\omega)Y(j\omega).$$ .... (5-67)

Az időtartományban megadott konvolúció egyszerű szorzássá fajul a frekvenciatartományban.

Bizonyítás:

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda\right)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\lambda)e^{-j\omega t}dt\right]d\lambda$$ .... (5-68)

A zárójelben levő eltolás: $e^{-j\omega\lambda}Y(j\omega)$

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda}Y(j\omega)d\lambda =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda\right)Y(j\omega) = X(j\omega)Y(j\omega)$$ .... (5-69)

5.5.1.9. Jelek szorzása az idő tartományban

A dualitást tudjuk ebben az esetben is kihangsúlyozni. Legyen értelmezett két jel Fourier transzformáltja $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ és $y(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$ akkor ismert időtartományban vett szorzatuk transzformáltja is.

$$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$$ .... (5-70)

Ezt a tulajdonságot szokás modulációs tulajdonságnak is nevezni.

Bizonyítás:

A konvolúciós egyenlőségből

$$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\phi)Y(j\omega-j\phi)d\phi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\phi t}dt\right]Y(j\omega-j\phi)d\phi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\phi t}Y(j\omega-j\phi)d\phi\right]dt= \qquad \text{(5-71)}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(\omega-\phi)t}Y(j\omega-j\phi)d(\omega-\phi)\right]dt$$

$$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}2\pi y(t)dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} \qquad \text{(5-72)}$$

5.5.1.10. A felületi integrál

Amennyiben ismert egy idő tartományban megadott jel Fourier transzformáltja $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$ akkor ismert, akkor $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=X(0)$.

Bizonyítás:

$$X(0)=\left[\mathcal{F}\{x(t)\}\right]_{\omega=0}=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt \qquad \text{(5-73)}$$

Felhasználva a dualitás tulajdonságát:

$$x(0)=\left[\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}\right]_{t=0}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega \qquad \text{(5-74)}$$

5.5.1.11. Integrálás

Amennyiben ismert egy idő tartományban megadott jel Fourier transzformáltja $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$ akkor az idő tartományban levő integrálás $j\omega$ val való osztást jelent frekvencia tartományban, a következők szerint:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right\}=\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \qquad \text{(5-75)}$$

Bizonyítás:

Mivel az $x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda$ összefüggés értelmében a Heaviside függvénnyel való konvolúció integrálást jelent így:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right\}=\mathcal{F}\{x(t)*h(t)\}=X(j\omega)H(j\omega)=$$
$$=\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \qquad \text{(5-76)}$$

Felhasználva a dualitás tulajdonságát:

$$\int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t)\right\} \quad (5\text{-}77)$$

A fent felsorolt tulajdonságok felhasználásával néhány esetben egyszerűsödik a jelek frekvenciatartománybeli képének előállítása. A tulajdonságok ismeret megkönnyíti a jelek és rendszerek elemzését és szintézisét egyaránt. Ezek a tulajdonságok összefoglalva a 5-1. táblázatban láthatók.

5-1. táblázat. – A Fourier transzformáció tulajdonságai

Művelet	**Tulajdonság** Amennyiben $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$
Linearitás	$af(t)+bg(t) \Leftrightarrow aF(\omega)+bG(\omega)$
Eltolás idő tartományban	$g(t-t_0) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-j\omega t_0}G(\omega)$
Skálázás	$g(at) \Leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}G\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Moduláció (1)	$g(t)\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[G(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)\right]$
Moduláció (2)	$g(t)\mathrm{e}^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow G(\omega-\omega_0)$
Deriválás	Ha $f(t)=\frac{dg(t)}{dt}$, akkor $F(\omega)=j\omega\cdot G(\omega)$
Integrálás	Ha $f(t)=\int_{-\infty}^{t} g(\alpha)d\alpha$, akkor $F(\omega)=\frac{1}{j\omega}G(\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)$
Konvolúció	$g(t)*f(t) \Leftrightarrow G(\omega)\cdot F(\omega)$, ahol $g(t)*f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)f(t-\alpha)d\alpha$
Szorzás	$f(t)\cdot g(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$
Dualitás	Ha $g(t) \Leftrightarrow z(\omega)$, akkor $z(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$
Hermit szimmetria	Ha g(t) valós értékű akkor $\mathrm{G}(-\omega)=G^*(\omega)$ ($\lvert\mathrm{G}(-\omega)\rvert=\lvert G(\omega)\rvert$ és $\angle\mathrm{G}(-\omega)=-\angle G(\omega)$)
Konjugáció	$g^*(t) \Leftrightarrow G^*(-\omega)$
Parseval tétel	$P_{avg}=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert g(t)\rvert^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert G(\omega)\rvert^2 d\omega$

5.5.2. Néhány tipikus jel Fourier transzformáltja

A 5-2. táblázatban bemutatásra kerülnek a leggyakrabban előforduló jelek Fourier transzformáltjai.

5-2. táblázat. – Tipikus jelek Fourier transzformáltja

	Függvény neve	Időtartomány	Frekvenciatartomány
1.	Dirac	$\delta(t)$	1
2.	DC	1	$2\pi\delta(\omega)$
3.	Koszinusz	$\cos(\omega_0 t+\theta)$	$\pi\left[e^{j\theta}\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta}\delta(\omega+\omega_0)\right]$
4.	Szinusz	$\sin(\omega_0 t+\theta)$	$-j\pi\left[e^{j\theta}\delta(\omega-\omega_0)-e^{-j\theta}\delta(\omega+\omega_0)\right]$
5.	Komplex exponenciális	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
6.	Egység-ugrás	$u(t)\equiv\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
7.	Előjel	$\mathrm{sgn}(t)\equiv\begin{cases}1 & t\geq 0\\ -1 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{2}{j\omega}$
8.	Lineáris csökkenés	$1/t$	$-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$
9.	Impulzus-sorozat	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$	$\dfrac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\dfrac{2\pi}{T_s}\right)$
10.	A Fourier sorozat	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$, ahol $a_k=\dfrac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$

Figyeljük meg, hogy az 5-2. táblázat egyes számú sorában a Dirac delta impulzus képe frekvenciatartományban egyes, állandó, ami azt jelenti, hogy az impulzusban minden frekvencia azonos mértékben van jelen. A második sor az elsőnek a duális párja, ami időtartományban állandó, az frekvenciatartományban egy impulzus a nullában. A harmadik és negyedik sor mutatja a harmonikus jelek képét, azaz a negatív és pozitív frekvenciákban eltolt Dirac impulzusokat. Az ötödik sor a komplex exponenciálisról szól, melynek képe egy Dirac impulzus. A 5-2. táblázat további sorai az egységugrás, előjel, sebességugrás valamint az impulzus és a Fourier sorozat frekvenciatartománybeli képét mutatja be.

6. Folytonos idejű lineáris időinvariáns SISO rendszer válasza frekvenciatartományban

A jel és rendszerelmélet területén kitüntetett helye és szerepe van az LTI osztályba tartozó rendszereknek. A velük foglalkozó matematikai módszerek kiforrottak és széles körben használhatók. Az ilyen rendszerek időtartományban történő vizsgálata mellett hasznos információk nyerhetők ki azok frekvencia tartományban történő elemzésével. Gyakran felmerülő probléma egy adott feladat megoldásához megfelelő rendszert alkotni, tervezni (szintetizálni). Frekvencia tartományban úgy tervezhetünk LTI rendszert, hogy az azok irányában támasztott egyes követelményeket azonnal beépíthetjük a tervezés során.

Ez a fejezet foglalkozik a frekvenciaátviteli függvény fogalmával, előállításának technikájával. Ebben a fejezetben kerül tárgyalásra a frekvenciaátviteli függvénynek, mint komplex leképezésnek az analízisére, mely eredményeképp ismertetésre kerülnek a Bode-diagrammok. AZ LTI rendszerek egyik lényeges tulajdonsága a jelek szűrése. Az LTI rendszerek mint szűrők elemzése és tervezése is része ennek a fejezetnek.

6.1. A frekvenciaátviteli függvény

Az előzőkben már tárgyaltuk az SISO LTI rendszer válaszát időtartományban miszerint, ha $u(t)$ a rendszer bemenete $g(t)$ a súlyfüggvénye, $y(t)$ pedig a kimenete, akkor érvényes az $y(t) = u(t) * g(t)$ összefüggés. A frekvenciaátviteli függvény, egy SISO LTI rendszerre vonatkozóan frekvenciatartományban írja le a ki- bemeneti kapcsolatot. Időtartományban az LTI rendszer matematikai modellje minden esetben állandó együtthatós n-ed rendű differenciálegyenlettel írható le a következők szerint:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \qquad (6\text{-}1)$$

vagyis:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t) \qquad (6\text{-}2)$$

Végezzük el a fenti egyenlet Fourier transzformációját.

$$\mathcal{F}\left\{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t)\right\} \qquad (6\text{-}3)$$

A transzformáció elvégzéséhez jelöljük a kimeneti és bemeneti jel transzformáltját az alábbiak szerint:

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} \qquad (6\text{-}4)$$

és

$$U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}. \qquad (6\text{-}5)$$

A Fourier transzformációnak több tulajdonsága hasznosan alkalmazható ebben az esetben. A transzformáció lineáris, az időtartományban levő derivált megfelelője a $j\omega$-val való szorzás a frekvencia tartományban, az n-ediké pdig $(j\omega)^n$. Így a transzformáció elvégzése után eljutunk a derivált nélküli alakhoz.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i Y(j\omega) = \sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i U(j\omega) \qquad (6\text{-}6)$$

a továbbiakban $Y(j\omega)$ és $U(j\omega)$ kiemelése a következőt eredményezi:

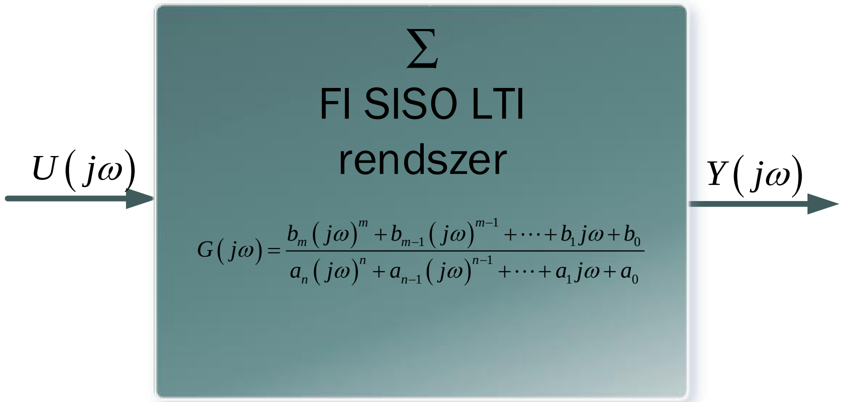
$$Y(j\omega)\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i = U(j\omega)\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i \qquad (6\text{-}7)$$

$Y(j\omega)$ és $U(j\omega)$ hányadosát keresve:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = G(j\omega) = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)} \qquad (6\text{-}8)$$

jutunk a $G(j\omega)$ frekvenciaátviteli függvényhez.

Frekvenciatartományban tehát érvényes, hogy $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$, ami annyit jelent, hogy a kimeneti jel Fourier transzformáltja számítható a frekvenciaátviteli függvény és a bemeneti jel Fourier transzformáltjának szorzatával (6-1. ábra).



6-1. ábra. – A frekvenciaátviteli függvénnyel jellemzett rendszer

Szintén a Fourier transzformáció tulajdonsága, hogy az időtartományban való konvolúció a frekvenciatartományban szorzássá fajul. Ezért van az, hogy ha $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ és $y(t) = g(t) * u(t)$, akkor $G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, tehát a frekvenciaátviteli függvény a súlyfüggvény Fourier transzformáltja.

Vizsgáljuk meg a $G(j\omega) = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}$ összefüggést, a hányados valójában két komplex értékű polinom hányadosa. A polinomok együtthatói a modellezett LTI rendszert jellemzik. A frekvenciaátviteli függvény is komplex, $G(j\omega) = Re\{G(j\omega)\} + jIm\{G(j\omega)\}$ és felírható exponenciális alakban $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$. $|G(j\omega)| = \sqrt[2]{(Re\{G(j\omega)\})^2 + (Im\{G(j\omega)\})^2}$ az átviteli függvény modulusa, $\angle G(j\omega) = atan\left(\frac{Im\{G(j\omega)\}}{Re\{G(j\omega)\}}\right)$ pedig a szöge.

A bemenőjel és a kimenőjel frekvenciatartománybeli képe is komplex. $U(j\omega) = |U(j\omega)|e^{j\angle U(j\omega)}$, és $Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\angle Y(j\omega)}$. A kimeneti jel számításának törvénye $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$. Behelyettesítve kapjuk, hogy az $Y(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}|U(j\omega)|e^{j\angle U(j\omega)}$, és $Y(j\omega) = |G(j\omega)||U(j\omega)|e^{j(\angle G(j\omega)+\angle U(j\omega))}$, ami azt jelent, hogy $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)|$ és $\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega)$.

Kijelenthető, hogy a frekvenciaátviteli függvény a frekvencia függvényében módosítja az LTI rendszer bemenetén jelentkező jel amplitúdóját $|G(j\omega)|$ mértékben és fázisát $\angle G(j\omega)$ –tól függően.

6.1.1. A jelek szűrését végző rendszerek

Általában a szűrők feladata, hogy összetevőket válasszanak szét. A jelfeldolgozás esetében a szétválasztás egyik módozata a frekvencia alapú. Ami valójában azt jelenti, hogy a szűrő bemenetére vezetjük a szűrni kívánt jelet, a kimeneten pedig megjelenik a nem kívánt összetevők nélküli, módosított bemenet.

6.1.1.1. Bode diagram

Az amplitúdó és a fázis frekvenciafüggésének ábrázolására alkalmazható a Bode diagram. Az amplitudó: $|G(j\omega)| = \sqrt[2]{(Re\{G(j\omega)\})^2 + (Im\{G(j\omega)\})^2}$ alkalmas számítása a logaritmust felhasználó változat, ami a következőképen számítható: $\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|$. Az erősítés $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ grafikus ábrázolása $\omega > 0$ esetében a Bode diagram amplitúdó görbéje.

A komplex számban hordozott másik információ a fázis. A szűrő fázis módosítását ábrázoló görbe a fáziskarakterisztika. Számítása a $\angle G(j\omega) = atan\left(\frac{Im\{G(j\omega)\}}{Re\{G(j\omega)\}}\right)$ összefüggés alapján történik. Az $\arg\{G(j\omega)\}$ ábrázolása a frekvencia függvényében a Bode diagram fázis diagramja. Az ábrázolások során a független változót is logaritmikus skálában vesszük fel.

A frekvenciaátvitelifüggvény $G(j\omega) = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i(j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i(j\omega)^i}$ $P_m(j\omega)$ és $Q_n(j\omega)$ polinomjai felírhatók gyöktényezős alakban a következők szerint. A nevező:

$$Q_N(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = $$
$$= a_N (j\omega)^\nu \prod_{k=1}^{N_R} (\alpha_k + j\omega)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} \left(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2 + 2\sigma_k (j\omega) + (j\omega)^2\right)^{\xi_k} \qquad \text{(6-9)}$$

, ahol ν - az $\omega = 0$ gyök multiplicitása, N_R -a különböző valós nullák száma, $-(\alpha_k)$- a valós nulla, λ_k - pedig annak multiplicitása, N_C -a különböző komplex nullák száma, $-(\sigma_k + j\varsigma_k)$- a komplex nulla, ξ_k - pedig annak multiplicitása.

A polinom valós, így érvényes, hogy a zérushelyek száma $\nu + \sum_{k=1}^{N_R} \lambda_k + \sum_{k=1}^{N_C} \xi_k = N$. A számláló:

$$P_M(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k = b_m \prod_{k=1}^{M_R} (\beta_k + j\omega)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} \left(\gamma_k^2 + \rho_k^2 + 2\gamma_k (j\omega) + (j\omega)^2\right)^{\eta_k} \qquad \text{(6-10)}$$

, ahol M_R -a különböző valós nullák száma, $-(\beta_k)$- valós nulla μ_k - pedig annak multiplicitása, M_C -a különböző komplex nullák száma, $-(\gamma_k + j\rho_k)$ - a komplex nulla, η_k - pedig annak multiplicitása. Itt is érvényes, hogy a polinom valós, így érvényes, hogy a zérushelyek száma $\sum_{k=1}^{M_R} \mu_k + \sum_{k=1}^{M_C} \eta_k = M$.

A fentiekkel összhangban a frekvenciafüggvény a következők szerint alakul:

$$G(j\omega) = \frac{P_M(j\omega)}{Q_N(j\omega)} = \frac{b_m \prod_{k=1}^{M_R} (\beta_k + j\omega)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} \left(\gamma_k^2 + \rho_k^2 + 2\gamma_k (j\omega) + (j\omega)^2\right)^{\nu_k}}{a_N (j\omega)^\nu \prod_{k=1}^{N_R} (\alpha_k + j\omega)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} \left(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2 + 2\sigma_k (j\omega) + (j\omega)^2\right)^{\xi_k}} =$$
$$= K \frac{\prod_{k=1}^{M_R} \left(1 + j\omega/\beta_k\right)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} \left(1 + 2\gamma_k (j\omega)/(\gamma_k^2 + \rho_k^2) + (j\omega)^2/(\gamma_k^2 + \rho_k^2)\right)^{\eta_k}}{(j\omega)^\nu \prod_{k=1}^{N_R} \left(1 + j\omega/\alpha_k\right)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} \left(1 + 2\sigma_k (j\omega)/(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2) + (j\omega)^2/(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2)\right)^{\xi_k}} \qquad \text{(6-11)}$$

, ahol

$$K = \frac{b_m \prod_{k=1}^{M_R} \beta_k^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} \left(\gamma_k^2 + \rho_k^2\right)^{\eta_k}}{a_N (j\omega)^\nu \prod_{k=1}^{N_R} \alpha_k^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} \left(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2\right)^{\xi_k}} \qquad \text{(6-12)}$$

Vegyük a függvény modulusát és annak decibeles változatát:

$$20\log|G(j\omega)| = |G(j\omega)|_{dB} =$$

$$= 20\log\left(\left| K \frac{\prod_{k=1}^{M_R}\left(1+j\omega/\beta_k\right)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{M_c}\left(1+2\gamma_k(j\omega)/(\gamma_k^2+\rho_k^2)+(j\omega)^2/(\gamma_k^2+\rho_k^2)\right)^{\eta_k}}{(j\omega)^{\nu}\prod_{k=1}^{N_R}\left(1+j\omega/\alpha_k\right)^{\lambda_k}\prod_{k=1}^{N_c}\left(1+2\sigma_k(j\omega)/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)+(j\omega)^2/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)\right)^{\xi_k}}\right|\right) \quad (6\text{-}13)$$

A szorzat és a hányados logaritmusára vonatkozó törvény alkalmazásával az

$$20\log|G(j\omega)| = |G(j\omega)|_{dB} =$$

$$= 20\log\left(\left| K \frac{\prod_{k=1}^{M_R}\left(1+j\omega/\beta_k\right)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{M_c}\left(1+2\gamma_k(j\omega)/(\gamma_k^2+\rho_k^2)+(j\omega)^2/(\gamma_k^2+\rho_k^2)\right)^{\eta_k}}{(j\omega)^{\nu}\prod_{k=1}^{N_R}\left(1+j\omega/\alpha_k\right)^{\lambda_k}\prod_{k=1}^{N_c}\left(1+2\sigma_k(j\omega)/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)+(j\omega)^2/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)\right)^{\xi_k}}\right|\right) \quad (6\text{-}13)$$

egyenlet átalakítható az alábbi formába:

$$\begin{aligned}
&20\log K + \sum_{k=1}^{M_R}\mu_k 20\log|1+j\omega/\beta_k| + \\
&+\sum_{k=1}^{M_C}\eta_k 20\log|1+2\gamma_k(j\omega)/(\gamma_k^2+\rho_k^2)+(j\omega)^2/(\gamma_k^2+\rho_k^2)| - \\
&-\nu 20\log\omega - \sum_{k=1}^{N_R}\lambda_k 20\log|1+j\omega/\alpha_k| - \\
&-\sum_{k=1}^{N_C}\xi_k 20\log|1+2\sigma_k(j\omega)/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)+(j\omega)^2/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)|
\end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}14)$$

A függvény argumentuma:

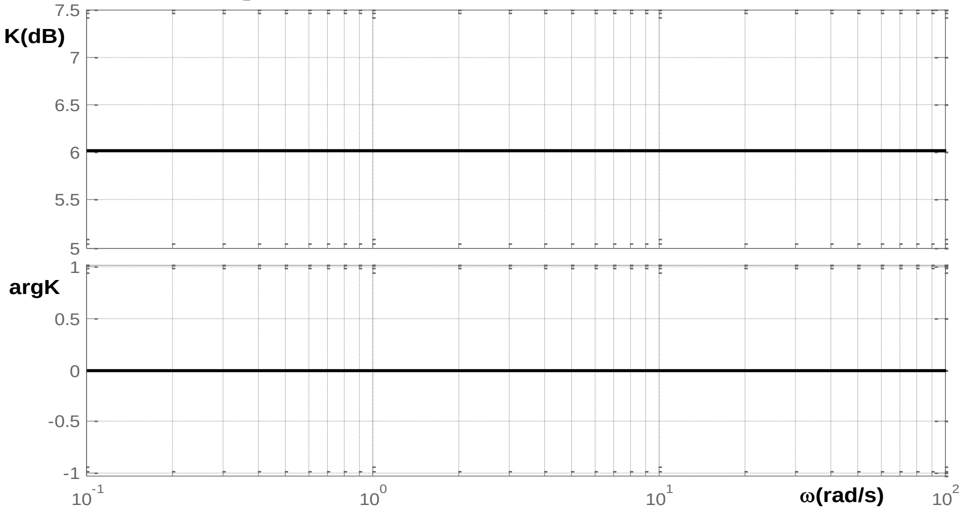
$$\begin{aligned}
&\arg|G(j\omega)| = \\
&\sum_{k=1}^{M_R}\mu_k \arg(1+j\omega/\beta_k) + \\
&+\sum_{k=1}^{M_C}\eta_k \arg\left(1+2\gamma_k(j\omega)/(\gamma_k^2+\rho_k^2)+(j\omega)^2/(\gamma_k^2+\rho_k^2)\right) - \\
&-\nu\arg(j\omega) - \sum_{k=1}^{N_R}\lambda_k(1+j\omega/\alpha_k) - \\
&-\sum_{k=1}^{N_C}\xi_k\left(1+2\sigma_k(j\omega)/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)+(j\omega)^2/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)\right) = \\
&\sum_{k=1}^{M_R}\mu_k arctg\left(\frac{\omega}{\beta_k}\right) + \sum_{k=1}^{M_C}\eta_k arctg\left(\frac{2\gamma_k(j\omega)/(\gamma_k^2+\rho_k^2)}{1-\omega^2/(\gamma_k^2+\rho_k^2)}\right) - \\
&-\nu\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega) - \sum_{k=1}^{N_R}\lambda_k arctg\left(\frac{\omega}{\alpha_k}\right) - \sum_{k=1}^{N_C}\xi_k arctg\left(\frac{2\sigma_k(j\omega)/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)}{1-\omega^2/(\varsigma_k^2+\sigma_k^2)}\right)
\end{aligned} \quad \ldots\ldots (6\text{-}15)$$

A fenti egyenletekből látható, hogy az amplitúdó és a fázis karakterisztika előállítható 4 elemi grafikon összegéből és különbségéből.

1.1.1.1.1. Az első elemi Bode diagramm

Az első elemi frekvenciaátviteli függvény a $G_1(j\omega) = 20\log K$. Ennek nagysága $\left|G_1(j\omega)\right| = 20\log K = (K)dB$ a szöge pedig $\arg G_1(j\omega) = 0$.

Az első alakhoz tartozó amplitúdó és fázis karakterisztika a 6-2. ábra látható.

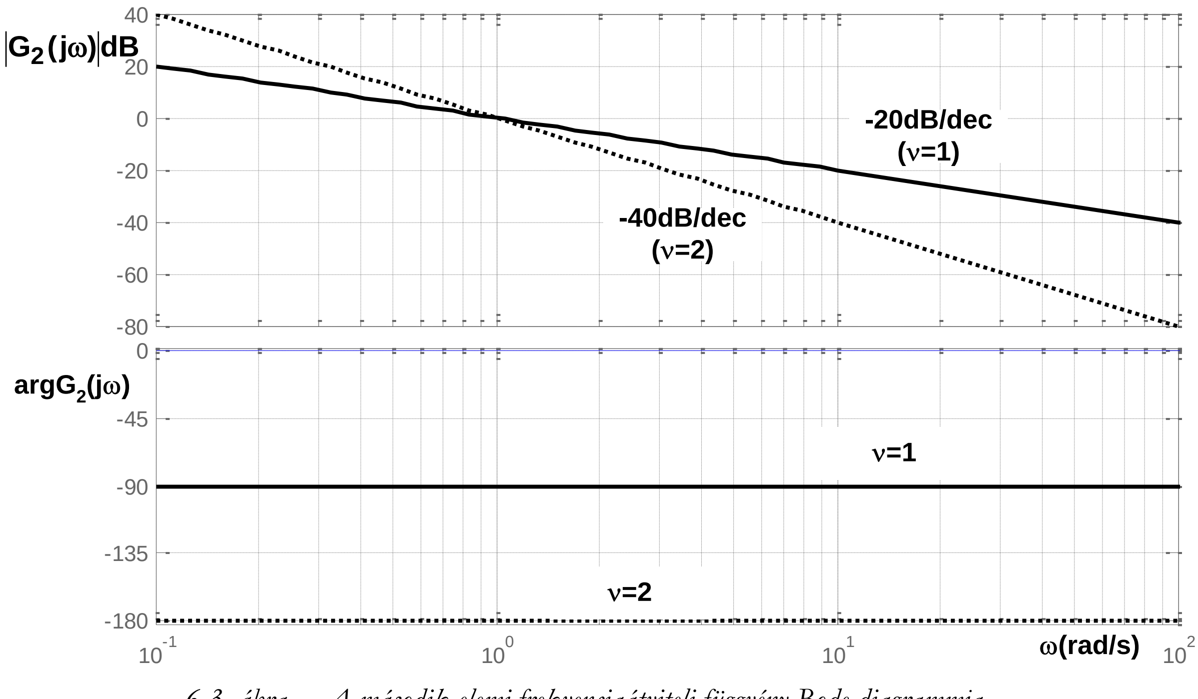


6-2. ábra. – Az első elemi frekvenciaátviteli függvény Bode diagrammja.

A grafikon egyszerű. Az amplitúdó karakterisztika állandó, a fázis karakterisztika pedig nulla, a frekvenciától függetlenül.

1.1.1.1.2. A második elemi Bode diagramm

A második elemi frekvenciaátviteli függvény a $G_2(j\omega) = -\nu 20\log(j\omega)$. Ennek nagysága $\left|G_2(j\omega)\right| = -\nu 20\log\left|j\omega\right| = -\upsilon 20\log\left|\omega\right|$ a szöge pedig $\arg G(j\omega) = -\nu \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega)$. A második alakhoz tartozó amplitúdó és fázis karakterisztika a 6-3. ábra látható.



6-3. ábra. – A második elemi frekvenciaátviteli függvény Bode diagrammja

Az amplitúdó karakterisztika ebben az esetben egy egyenes, mely annyiszor 20dB/dekád meredekséggel esik amekkora az adott gyök multiplicitása. A fázis karakterisztika pedig állandó. Egy egyszeres multiplicitású ilyen típusú gyök $90°$-ot fordít a fázison.

1.1.1.1.3. A harmadik elemi Bode diagramm

A harmadik elemi frekvenciaátviteli függvény a $G_3(j\omega) = p20\log(1+j\omega/a)$. Ennek nagysága és szöge az alábbi egyenlet alapján határozható meg:

$$|G_3(j\omega)| = p20\log(|1+j\omega/a|) \Rightarrow$$

$$|G_3(j\omega)| = p20\log\sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^2}}$$

$$\arg G_3(j\omega) = p\cdot arctg\frac{\omega}{a} \qquad \text{(6-16)}$$

A $|G_3(j\omega)|$ és az $argG_3(j\omega)$ lehetséges értékeit az alábbi közelítés segítségével határozhatjuk meg:

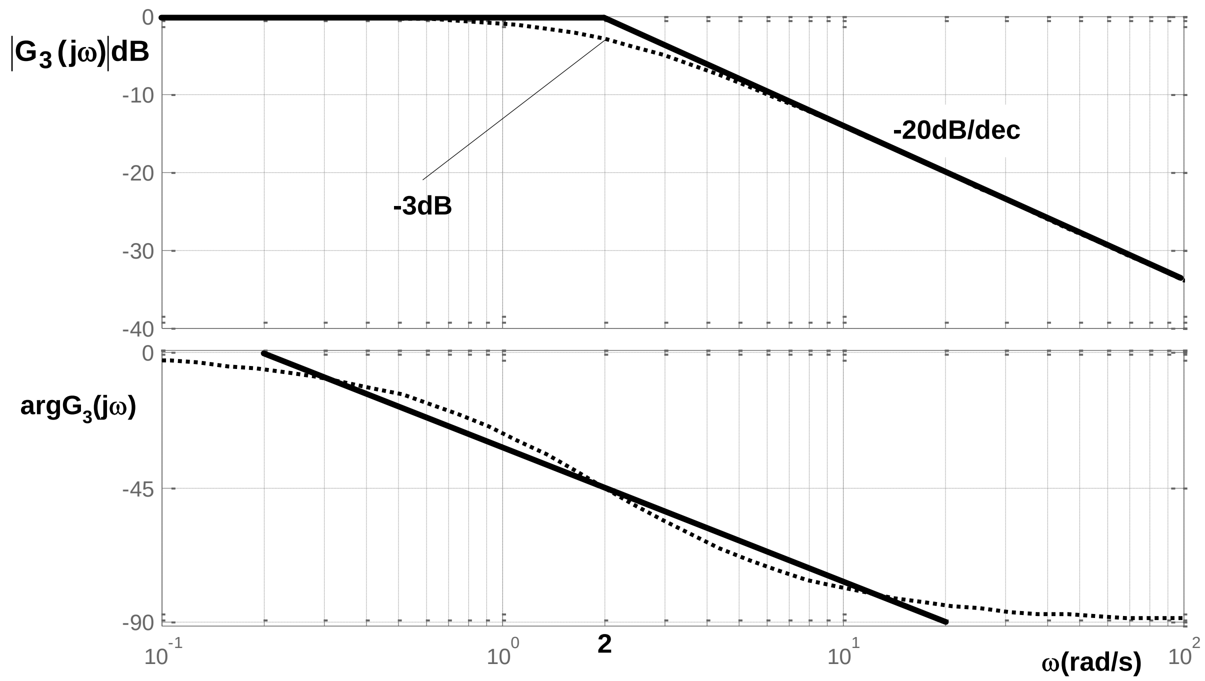
$$|G_3(j\omega)| = p20\log\sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^2}} \approx \begin{cases} p20\log\sqrt{1} & \omega << a \\ p20\log\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}} & \omega >> a \end{cases} \approx \begin{cases} 0 & \omega << a \\ p20\log\frac{\omega}{a} & \omega >> a \end{cases}$$

$$\arg G_3(j\omega) = p\cdot arctg\frac{\omega}{a} \approx \begin{cases} 0 & \omega << a \\ p\frac{\pi}{2} & \omega >> a \end{cases} \qquad \text{(6-17)}$$

Bode javaslatára a grafikon egyszerűbb ábrázolása érdekében fogadjuk el a következő approximációt:

$$|G_3(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 & \omega < a \\ p20\log\frac{\omega}{a} & \omega > a \end{cases} \qquad \text{(6-18)}$$

A harmadik alak ábrázolásának megértésére elemezzük a következő példát. Legyen a $G_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/2}$. A példához tartozó Bode diagram, két grafikont tartalmaz (6-4. ábra). A szaggatott vonallal ábrázolt amplitúdó diagramm a valós, míg a folytonos vonallal ábrázolt az aszimptotikus amplitúdó diagram. A 6-4. ábra látható, hogy az aszimptotikus és valós amplitúdó diagram közötti legnagyobb eltérés éppen $\omega = a$ esetben mérhető, az eltérés értéke pedig 3dB. A görbe lefelé törik, mert az átviteli függvény pólusáról van szó $G_3(j\omega) = -20\log(1+j\omega/2)$.



6-4. ábra. – A haramdik elemi frekvenciaátviteli függvény Bode diagrammja.

A fáziskarakterisztika ábrázolására Bode azt javasolta, hogy a fázisváltozást egy egyenessel közelítsük, mely 0^o -ból indul az $\omega = 0.1 \cdot a$ frekvenciánál és $\frac{\pi}{2}$ -nél fejeződik be $\omega = 10a$ értéknél. Értéke $\omega = a$ -nál pontosan $\frac{\pi}{4}$. A 6-4. ábra látható fáziskarakteriszika esetében is szaggatott vonallal látható a valós karakterisztika míg folytonos vonallal annak közelítése.

1.1.1.1.4. A negyedik elemi Bode diagramm

A negyedik elemi frekvenciaátviteli függvény a $G_4(j\omega) = q20\log\left(1 + j2bc\omega + \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\right)$. Ennek nagysága és szöge az alábbi két egyenlettel határozható meg:

$$\left|G_4(j\omega)\right| = q20\log\left(\left|1 + j2bc\omega + \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\right|\right) \quad (6\text{-}19)$$

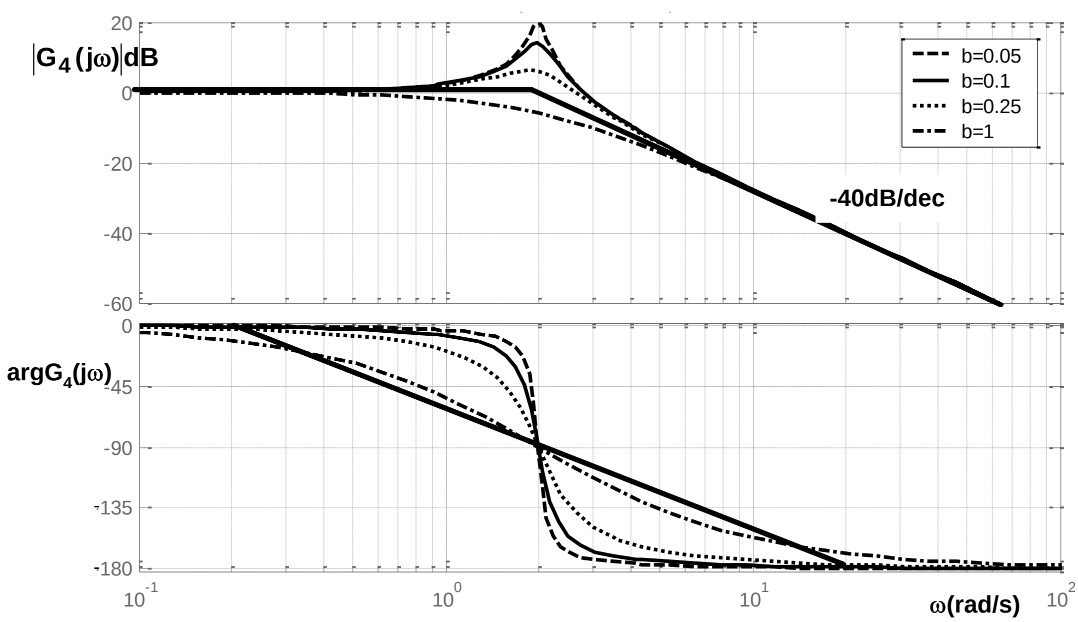
$$\arg G_4(j\omega) = q\arg\left[1 + \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\right]^2 \quad (6\text{-}20)$$

Közelítsük a (6-19) és (6-20) egyenletben megadott függvényeket a következők szerint:

$$\left|G_4(j\omega)\right| \approx q20\log\left\|\left[1 + \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\right]\right\| \approx \begin{cases} 0 & \omega < c \\ q40\log\frac{\omega}{c} & \omega > c \end{cases} \quad (6\text{-}21)$$

$$\arg G_4(j\omega) \approx q2arctg\,\frac{\omega}{c} \quad (6\text{-}22)$$

A negyedik alak ábrázolásának megértésére elemezzük a következő példát. Legyen a $G_4(j\omega) = \frac{1}{1 + j4b\omega + (j\omega/2)^2}$. A példához tartozó grafikon a 6-5. ábra látható.

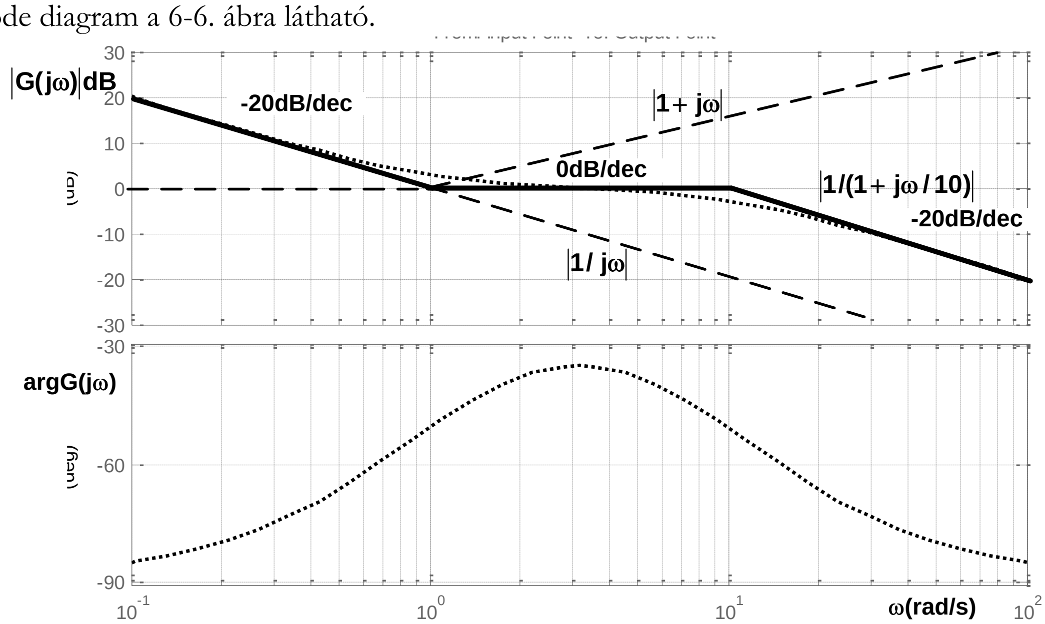


6-5. ábra. – A negyedik elemi frekvenciaátviteli függvény Bode diagrammja.

A 6-5. ábra elemzéséből kiderül, hogy jelen esetben az approximáció nem minden esetben helytálló. A csillapítás függvényében (amplitúdó karakterisztika) jelentős eltérés tapasztalható a valós és a közelítő görbe között.

1.1.1.1.5. Példa egy tetszőleges összetett függvény Bode diagrammjára

Vizsgáljuk meg egy összetett szűrő amplitúdó és fázis karakterisztikájának szerkesztését. A frekvenciaátviteli függvény legyen a $G(j\omega) = \dfrac{1 + j\omega}{j\omega(1 + j\omega/10)}$ formában adott. A példára jellemző Bode diagram a 6-6. ábra látható.



6-6. ábra. – A példában megadott frekvenciaátviteli függvény Bode diagrammja.

A diagram rajzolása előtt szükséges meghatározni a törésfrekvenciákat. A példában az első törési frekvencia az $\omega = 0$, ezért az első típusú alakhoz tartozó elem hatására az erősítés 20dB/dekád meredekséggel csökken. A második törési frekvencia a $\omega = 1\left[\frac{rad}{\sec}\right]$. Ez a törésfrekvencia felfelé töri a görbét, mivel az adott gyök a számláló gyöke. A harmadik törési frekvencia az $\omega = 10\left[\frac{rad}{\sec}\right]$ amely újból lefelé töri a görbét, mert a nevező gyöke. Az eredő amplitúdó karakterisztika az egyes aszimptotikus karakterisztikák összegéből áll össze és vastag teli vonallal került ábrázolásra a 6-6. ábra.

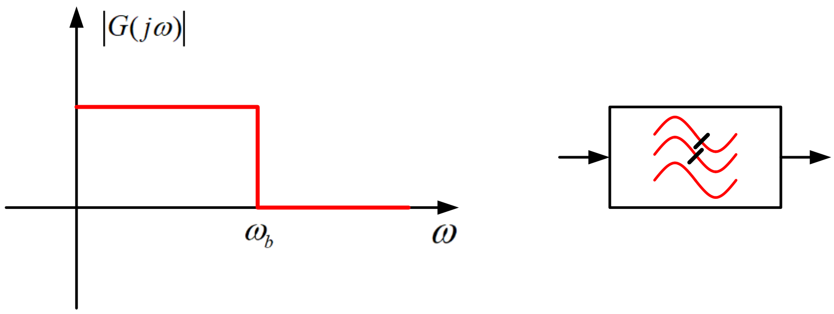
6.1.1.2. Ideális szűrők

A gyakorlatban előforduló szűrési feladatok sokszor nagy hatékonyságot igényelnek a szűrést végző egységektől. A szűrők tervezése során a tervezők ideális mintákat követnek. Az ideális szűrő ismérve, hogy a bemenő jel egy részét a frekvenciától függően hatékonyan szűri, a másik részét viszont változtatás nélkül tovább engedi. A gyakorlatban ideális szűrőt nem tudunk megvalósítani, karakterisztikáját csak közelíteni tudjuk.

Az ideális szűrők közül négy alapváltozatot különböztetünk meg:

- alul-áteresztő szűrő;
- felül-áteresztő szűrő;
- sáv-áteresztő szűrő;
- sávszűrő.

Az alul-áteresztő szűrő az alacsony frekvenciákat változtatás nélkül átengedi. Az szűrő erősítésének grafikonja és jelölése a 6-7. ábra látható.

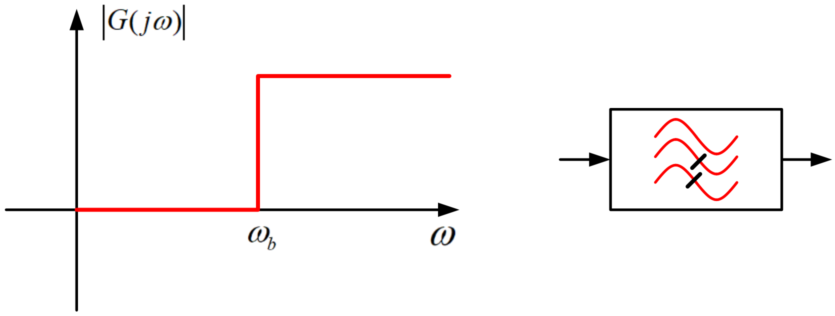


6-7. ábra. – Az alul-áterseszttő szűrő erősítési grafikonja és jelölése.

A szűrő erősítése analitikusan:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| > \omega_b \end{cases} \qquad (6\text{-}23)$$

Az felül-áteresztő, az alacsony frekvenciákat elnyomja és a magas frekvenciákat változtatás nélkül átengedi. A szűrő erősítésének grafikonja és jelölése a 6-8. ábra látható.

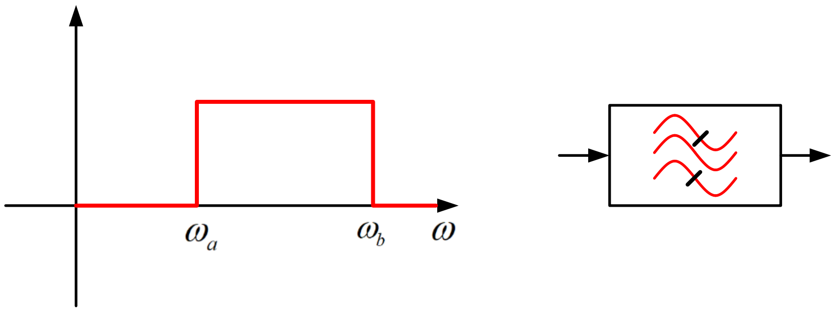


6-8. ábra. - A felül-áterseszttő szűrő erősítési grafikonja és jelölése.

A szűrő erősítése analitikusan:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_b \\ 1 & |\omega| > \omega_b \end{cases} \qquad (6\text{-}24)$$

A sáv-áteresztő szűrő változtatás nélkül átenged egy frekvenciasávot és a magas frekvenciákat elnyomja. A szűrő erősítésének grafikonja és jelölése a 6-9. ábra látható.

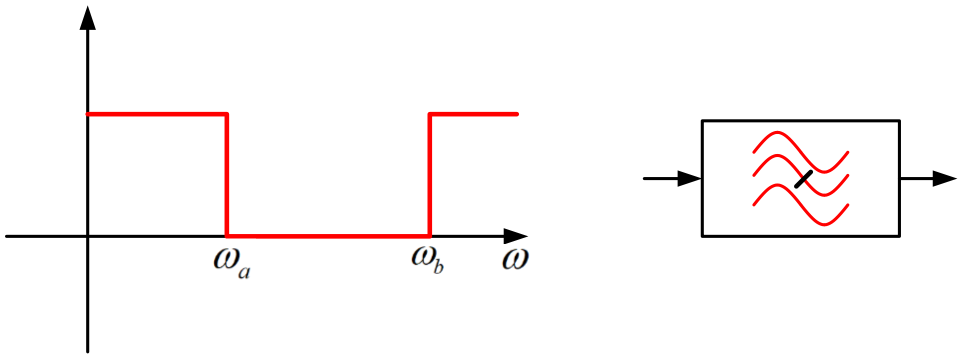


6-9. ábra. – A sáv-áterseszţő szűrő erősítési grafikonja és jelölése.

A szűrő erősítése analitikusan:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_a < |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| < \omega_a \text{ és } |\omega| > \omega_b \end{cases} \qquad (6\text{-}25)$$

A sávszűrő, egy frekvenciasávon elnyomja az információt és a magas frekvenciákat újra átengedi. A szűrő erősítésének grafikonja és jelölése a 6-10. ábra látható:



6-10. ábra. – A sávszűrő erősítési grafikonja és jelölése.

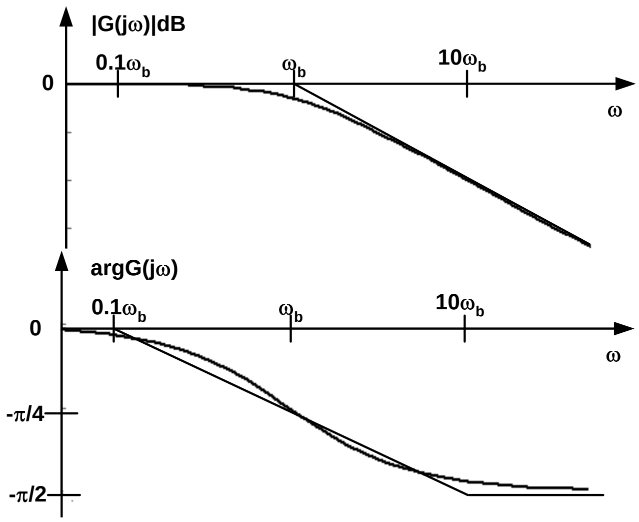
A szűrő analitikus leírása:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_a < |\omega| < \omega_b \\ 1 & |\omega| < \omega_a \ i \ |\omega| > \omega_b \end{cases} \qquad (6\text{-}26)$$

6.1.1.3. Szűrők gyakorlati megvalósításának néhány példája

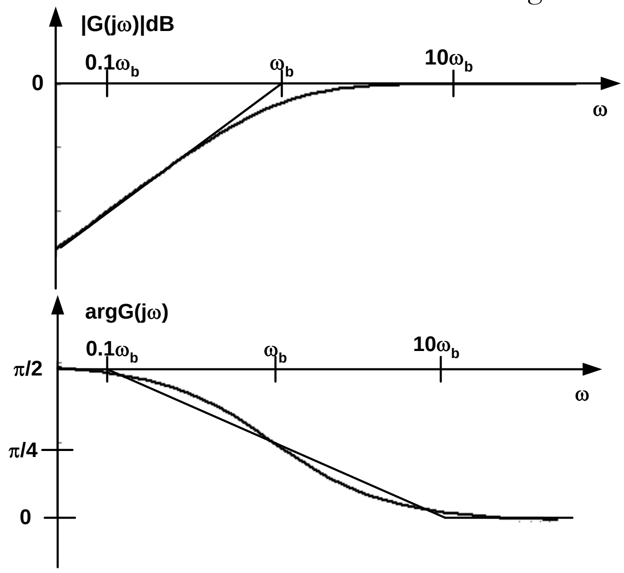
A gyakorlati megvalósítás során nehézséget jelent, hogy az ideális szűrők karakterisztikái a valóságban nem kivitelezhetők. Csak közelíteni tudjuk őket. Napjainkig számos elmélet és tervezési módszer látott napvilágot, melyekkel jelen jegyzet nem foglalkozik. Bemutatásra kerül néhány frekvenciaátviteli függvény, elemi példa a szűrők egytárolós és kéttárolós megvalósítására.

Az alul-áteresztő szűrő megvalósítható frekvenciaátviteli függvénye csak nagyvonalakban követi a megfelelő ideális $G(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega / \omega_b}$ karakterisztikát. A karakterisztikának egy törési frekvenciája van a nevezőben, ami azt jelenti, hogy az amplitúdókarakterisztika lefelé törik. A szűrőhöz tartozó Bode diagramm a 6-11. ábra látható.



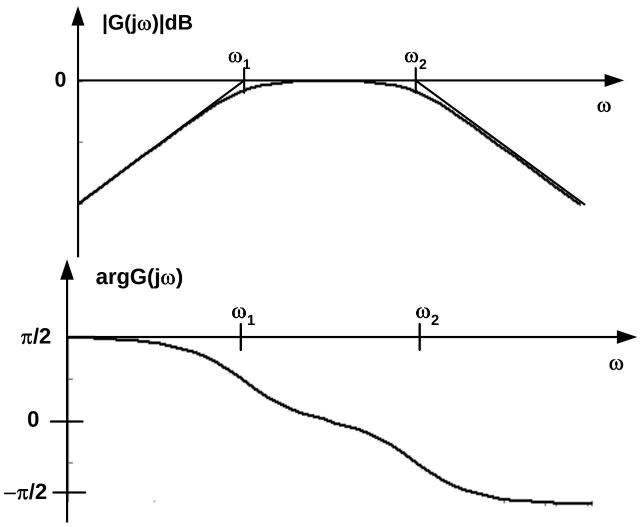
6-11. ábra. – Alul-áteresztő szűrő Bode diagrammja.

Egy valós felül-áteresztő szűrő frekvenciaátviteli függvénye $G(j\omega) = \dfrac{j\omega}{\omega_b + j\omega}$. A karakterisztikának egy törési frekvenciája van a számlálóban, ami azt jelenti, hogy az amplitúdókarakterisztika felfelé törik. A szűrőhöz tartozó Bode diagramm a 6-12. ábra látható.



6-12. ábra. – A felül-áteresztő szűrő Bode diagrammja.

És végül egy valós sáv-áteresztő szűrő frekvenciaátviteli függvénye $G(j\omega) = \dfrac{j\omega/\omega_1}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)}$. A karakterisztikának három törési frekvenciája van. Egy nulla zérusa a számlálóban, ami miatt az amplitúdókarakterisztika felfelé indul, egy pólusa a nevezőben ami miatt egyszer lefelé törik és még egy pólusa, ami miatt még egyszer lefelé töri a karakterisztikát. A szűrőhöz tartozó Bode diagramm a 6-13. ábra látható.



6-13. ábra. – A sáv-áteresztő szűrő Bode diagrammja

7. Diszkrét idejű LTI rendszerek és jeleik elemzése frekvenciatartományban

Az eddig tárgylat Fourier transzformációk, az FI periodikus és aperiodikus jelek és LTI rendszerek esetére vonatkoztak. Szimbolikus számításokon kívül, számítógépes feldolgozásra, véges hosszúságú idősorok elemzésére és szintézisére nem használhatók. A digitális számítógépek és a beágyazott rendszerek csak véges hosszúságú adatsort tudnak tárolni és feldolgozni. Ezért olyan transzformációk kidolgozására van szükség, melyek a már ismert transzformációk tulajdonságait megtartva alkalmasak véges adatsorok digitális eszközön való kezelésére. Ez a fejezet igyekszik egyszerűen tárgyalni a feladat megoldását.

Ez a fejezet foglalkozik a DI jelek frekvenciatartományba történő átalakításával és vizsgálatával, továbbá a frekvenciatartományban való diszkretizálás kérdéseivel. A véges idősorok kitüntetett szereppel rendelkeznek a digitális jelek és feldolgozásuk területén. Ez a fejezet részletesen tárgyalja a diszkrét idejű Fourier transzformációt és annak párhuzamosított algoritmussal való implementálását.

7.1. DI jelek Fourier transzformáltja

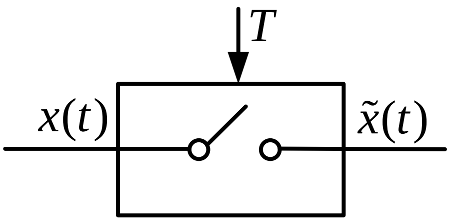
Az előző fejezetekben láttuk, hogy a jelek és rendszerek egyes tulajdonságai, más-más tartományban vizsgálva könnyebben vagy nehézkesebben nyerhetők ki matematikai modelljükből. A Fourier transzformáció jelentősége lineáris időinvariáns rendszerek esetében több okból is jelentős, melyekből itt kiemelésre kerül kettő. Az első, hogy az ilyen rendszerek esetében egy szinuszos gerjesztésre szinuszos a válasz, mely kimenetnek a frekvenciája megegyezik a bemenet frekvenciájával, fázisa és amplitúdója azonban megváltozik. A második, hogy minden periodikus és aperiodikus FI jel felbontható, periodikus jel esetében véges számú harmonikus összetevőkre vagy aperiodikus jel esetén végtelen sokra.

A DI jel Fourier transzformáltjának (DTFT Discrete-Time Fourier Transform) meghatározásához tekintsünk egy $x(t), t \in \mathbb{R}$ függvénnyel leírt FI jelet. Ideális mintavételezővel mintavételezve a jelet T mintavételi periodussal jutunk a jel DI matematikai modelljéhez a következőképen:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot comb(t), \qquad \text{(7-1)}$$

azaz

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \cdots + x(-2T)\delta(-2T) + x(-T)\delta(t+T) + \\ &+ x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \cdots = \\ &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(x(kT)\delta(t-kT)\big) \qquad \text{(7-2)}\end{aligned}$$



7-1. ábra. – Ideális mintavételező.

Az ideális mintavételező egy ideális kapcsolóból áll, amely állandó periodusonként, végtelen rövid ideig van zárt állapotban minek hatására periodusonként megjeleníti a bemeneti jel pillanatnyi értékét. Ebben a DI jelben az eredeti jel mintavételi pillanatokban vett értékeivel szorozzuk az ugyancsak mintavételi pillanatokban eltolt Dirac impulzusokat. Már tárgyaltuk, hogy a Fourier transzformáció adott az: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ kifejezéssel, valamint, hogy az eltolt Dirac delta transzformáltnak a képe $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0}$ és, hogy a Fourier transzformáció lineáris $\mathcal{F}\{a \cdot x(t)\} = a \cdot X(j\omega)$, felhasználva a fentieket kapjuk az:

$$\tilde{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(x(kT)\delta(t-kT)\right)\right]e^{-j\omega t}dt \quad \text{(7-3)}$$

összefüggést. Felcserélve az összeget és az integrált, valamint figyelembe véve azt, hogy az integrál csak a mintavételi pontokban létezik, és értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(kT)\delta(t-kT)\right)e^{-j\omega t}dt = x[kT]e^{-j\omega kT} \quad \text{(7-4)}$$

akkor:

$$\tilde{X}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(x[kT]e^{-j\omega kT}\right). \quad \text{(7-5)}$$

Elhagyjuk a T mintavételi periodusidőt, akkor kapjuk DI jel Fourier transzformáltját:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[k]e^{-j\omega k}\right] \quad \text{(7-6)}$$

Vegyük észre, hogy a DI jel Fourier transzformáltja folytonos függvénye a frekvenciának! Most gerjesszünk egy $h[n]$ impulzusválasszal rendelkező DI LTI rendszert $x[n] = e^{j\omega n}$ komplex exponenciális jellel.

A rendszer kimenetét határozzuk meg a(4-6) kifejezés szerint, diszkrétidejű konvolúcióval:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[k]h[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[n-k]h[n]\right]. \quad \text{(7-7)}$$

Ekkor a rendszer válasza adott a következők szerint:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[h[k]\right]e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[h[k]\right]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, \quad \text{(7-8)}$$

jelölje $H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[h[k]e^{-j\omega k}\right]$ DI rendszer impulzusválaszának Fourier transzformáltját , akkor

$$y[n] = x[n] * h[n] = H\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{j\omega n}. \quad \text{(7-9)}$$

A $H\left(e^{j\omega}\right)$ a DI rendszer frekvenciaátviteli függvénye szerepét tölti be, mely immár folytonos, komplex függvénye a frekvenciának, melyet a komplex exponenciálisnak a súlyfüggvény megfelelő együtthatóival vett súlyozott összege eredményez. A kimeneti jel számítása során a bemeneti jelet egy frekvenciafüggő, komplex értékű jellel szorozzuk. Kijelenthető, hogy az FI LTI rendszerekhez hasonlóan, a DI LTI rendszereknél is érvényes, hogy a rendszer válasza egy komplex exponenciális gerjesztésre komplex exponenciális, amely frekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával.

A rendszer frekvenciakarakterisztikája általános esetben komplex, így:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right), H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)} \quad \text{(7-10)}$$

, amint már folytonos esetben is megszoktuk, külön lehet vizsgálni az amplitúdó és fáziskarakterisztikákat.

Az FI és a DI rendszerek frekvenciaátvitelifüggvénye esetében van egy jelentős különbség, éspedig a DI rendszer frekvenciafüggvénye periodikus 2π periódusidővel, ugyanis

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[h[k]e^{-j(\omega+2\pi)k}\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[h[k]e^{-j\omega k}e^{-j2\pi k}\right] = H\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{(7-11)}$$

, így elmondható, hogy a DI rendszereket elég csak $0 \leq \omega \leq 2\pi$ frekvenciákra vizsgálni.

Vegyük észre, hogy $x[n]$ DI az időben, míg $X\left(e^{j\omega}\right)$ transzformált folytonos és periodikus függvénye a frekvenciának 2π periódussal. Mivel $X\left(e^{j\omega}\right)$ folytonos és periodikus függvény, akkor Fourier sorba fejthető. Ennek a Fourier sornak az együtthatói éppen $x[n]$ sor elemei. Ugyanis ha

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[k]e^{-j\omega k}\right] \quad \text{(7-12)}$$

akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[k]e^{-j\omega k}\right]e^{j\omega m}\right)d\omega \quad \text{(7-13)}$$

, a baloldalon szereplő integrál kiértékeléséhez felcserélhető az összeg és az integrál:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(x[k]\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{j\omega(m-k)}\right)d\omega\right)=\begin{cases}2\pi x[m], & m=k\\ 0, & m\neq k\end{cases},\quad (7\text{-}14)$$

akkor

$$\boxed{x[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega m}d\omega}\quad (7\text{-}15)$$

A fenti kifejezés hasonlít a periodikus FI jel Fourier együtthatóinak meghatározásához, amennyiben annak periódusa 2π. Egyetlen különbség az exponens előjelében van, ami végül is a definícióból ered. Tehát a (7-15) meghatározásával eljutottunk az inverz Fourier transzformációhoz DI jelek esetén.

A (7-12) és (7-15) egyenletek Fourier transzformációs párt alkotnak.

A Fourier sor konvergál, ha az idősor abszolút összegezhető, vagyis: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|\leq\infty$. Amennyiben az idősor stabil, akkor abszolút összegezhető és a Fourier sora véges. Másrészt minden véges hosszúságú sor abszolút értelemben összegezhető, amiből következik, hogy a FIR rendszerek mindig stabilak és Fourier sorba fejthetők. Egy másik lehetőség, hogy a sor kielégíti a négyzetes összegezhetőséget: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2\leq\infty$. Az ilyen sorok Fourier transzformáltjának konvergenciája is bizonyítható.

A DI jelek Fourier (7-12) szerinti transzformáltjának matematikai jelentősége van, ugyanis végtelen összegekről van benne szó. A gyakorlatban ez az eredmény direkt nem használható.

7.1.1. A diszkrétidejű jelek Fourier transzformáltjának tulajdonságai

A diszkrétidejű jelek Fourier transzformációjának tulajdonságai egyeznek a Fourier transzformáció esetében már tárgyalt tulajdonságokkal, éspedig:

1. ω-ban 2π szerint periodikus, azaz $X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$;
2. linearitás: $ax_1[n]+bx_2[n]\Leftrightarrow aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$;
3. eltolási tulajdonság $x[n-n_0]\Leftrightarrow e^{j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$;
4. szimmetria tulajdonság:

ha: $x[n]$	akkor: $X(e^{j\omega})$
valós és páros	valós és páros
valós és páratlan	valós és páratlan
képzetes és páros	képzetes és páros
képzetes és páratlan	valós és páratlan

5. idő megfordítása: $x[-n]\Leftrightarrow X\left(e^{-j\omega}\right)$;
6. moduláció: komplex exponenciálissal való szorzást frekvencia eltolásba visz át: $e^{jn\omega_0}x[n]\Leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$;
7. konvolúció tétel: $x[n]*y[n]\Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)\cdot Y\left(e^{j\omega}\right)$;
8. periodikus konvolúció tétel: $x[n]\cdot y[n]\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)d\omega$;
9. Parseval tétel: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega$.

7.2. Diszkretizálás frekvenciatartományban

Egy diszkrétidejű jel képe frekvenciatartományban folytonos és a fentiek tanulsága szerint igényli a jel mintáinak ismeretét a teljes értelmezési tartományon, ezért a DI jel ilyen (DTFT) Fourier transzformáltja nem alkalmazható a gyakorlatban. A DFT (diszkrét Fourier transzformáció) azonban igen. A DFT algoritmusának meghatározásához végezzük el a diszkretizálást frekvenciatartományban. A (7-16) -ben bizonyítottuk, hogy a (7-12) egyenlettel megadott függvény is periodikus 2π periódussal. Ugyanis:

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}\right]=$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n}\right] = X\left(e^{j\omega}\right) \quad (7\text{-}17)$$

Vegyünk az $X\left(e^{j\omega}\right)$ spektrumból $(0,2\pi)$ intervallumban N ekvidisztáns helyen mintákat. Ekkor a minták $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ frekvenciákon jelentkeznek. Legyenek $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ frekvenciákon mintáink, akkor $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]$, $k = 0,1,2,\dots,N-1$. A végtelen számú elemek összege felírható végtelen számú összegzésre, ahol minden összegzésnek N eleme van, a következők szerint:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \cdots + \sum_{n=-\mathrm{N}}^{-1}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right] + \sum_{n=\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}-1}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right] + \cdots$$

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=\mathrm{lN}}^{\mathrm{lN}+\mathrm{N}-1}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right] \quad (7\text{-}18)$$

Amennyiben a belső összegnél helyettesítünk n helyett $n-lN$-t írunk és felcseréljük az összegzéseket, akkor:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\left[\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x[n-lN]\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right], k = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (7\text{-}19)$$

Az $x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}x[n-lN]$ kifejezés valójában az $x[n]$ DI jel periodikus ismétlése N periódussal. A periodikus jelek Fourier sorba fejthetők, így

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}x[n-lN] = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (7\text{-}20)$$

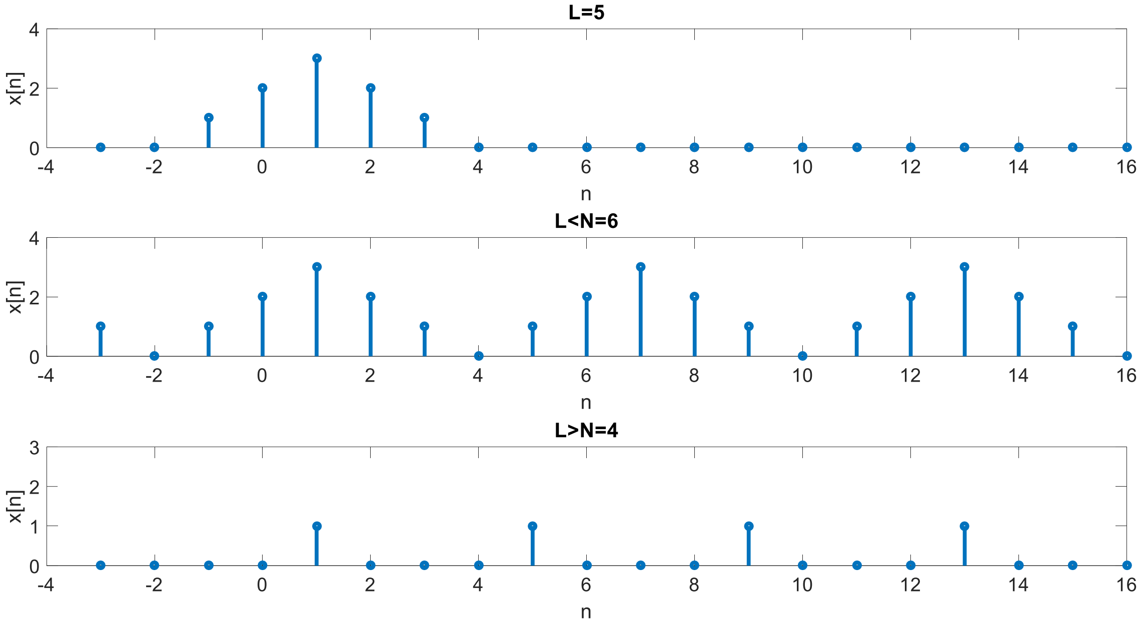
Az együtthatók:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}x_p[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (7\text{-}21)$$

Vagyis $c_k = \frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$. Ekkor belátjuk, hogy az $x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\left[X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right], n = 0,1,2,\dots,N-1$ periodikus jel visszaállítható a spektrumból vett mintavételezéssel.

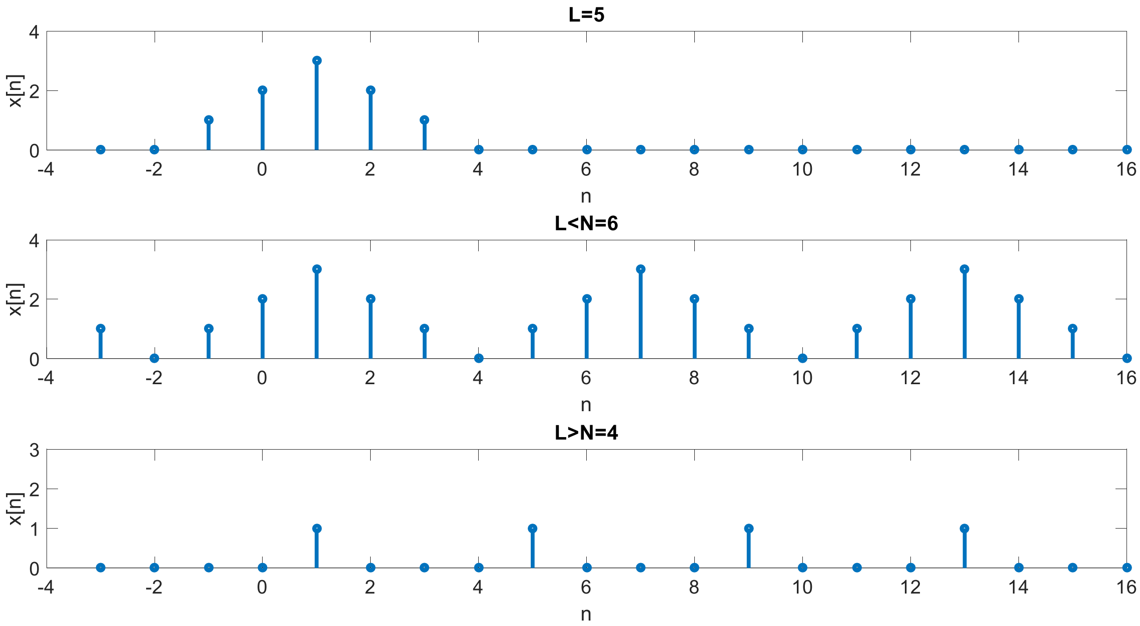
7.2.1. Véges sor Diszkrét Fourier Transzformáltja

Mivel $x_p[n]$ az $x[n]$ sor periodikus kiterjesztése, így belátható, hogy nem szabad átfedésnek lennie az idő tartomány mintái között. Átfedés nem jelentkezik, amennyiben az $x[n]$ idősor L hossza kisebb, mint a frekvenciatartományban vett minták száma N.



7-2. ábra. – Egy véges, L hosszúságú $x[n]$ idősor, és annak kétféle periodikus $x_p[n]$ kibővítése

A 7-2. ábra bemutatásra került egy véges, L hosszúságú $x[n]$ idősor, és annak kétféle periodikus $x_p[n]$ kibővítése. Az első esetben átfedés nélküli $N \geq L$ a kibővítés, a másodikban átfedéses $N < L$. Az első esetben az $x[n]$ jel kivehető az $x_p[n]$ jelből, míg a második esetben ez nem lehetséges.



7-2. ábra. – Véges sor kibővítése. (a) eredeti sor L=5, (b) átfedés nélküli kibővítés L<N=6, (c) átfedéses kibővítés L>N=4.

Mivel $x[n] = x_p[n]$ ha $0 \leq n \leq N-1$, így

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right], n = 0,1,2,\ldots,N-1 \qquad (7\text{-}22)$$

és ezt behelyettesítve a $X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1}[x[n]e^{-j\omega n}]$ be az alábbi összefüggést kapjuk:

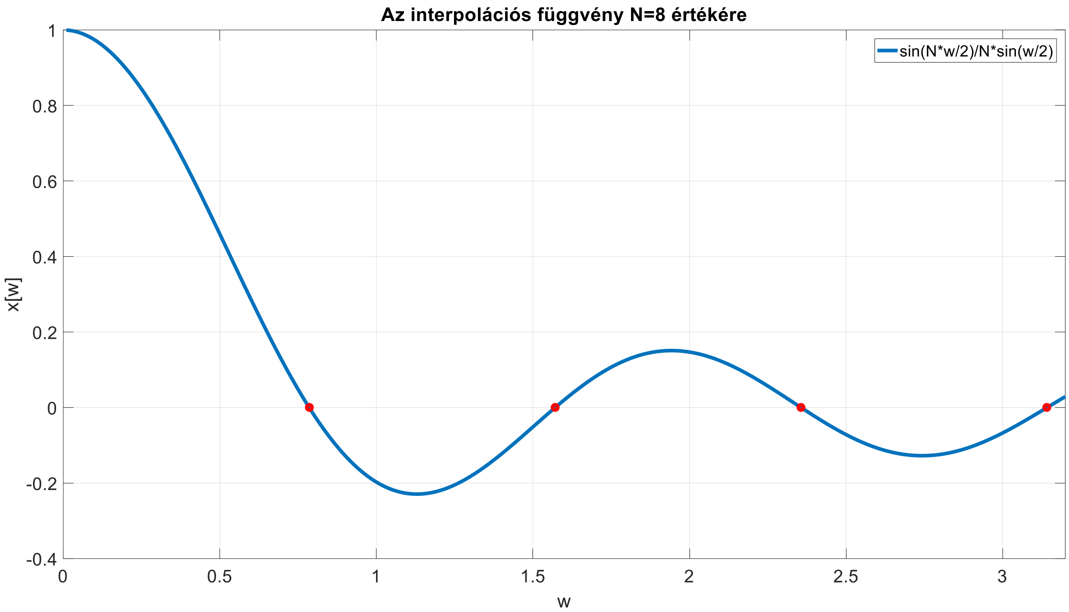
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]e^{-j\omega n}\right] \qquad (7\text{-}23)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\left[X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)n}\right]\right] \qquad (7\text{-}24)$$

A fenti sorfejtés megoldásához vezessük be a $P(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{-j\omega n}\right]$ Dirichlet interpolációs függvényt. $P(\omega)$ kifejtve $P(\omega) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{N}\frac{sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$. A függvény a 7-3. ábra látható. A függvény értéke periodikusan nulla kivéve nullában, ahol 1, a függvényben szereplő $e^{-j\omega(N-1)/2}$ tag csak a fázisra hat, nem módosítja az amplitúdót. A függvény egy-egy k mintával eltolva, alkalmas mintavételi értékek visszaállítására, mert csak a mintavételi pillanatban szorozza az őt súlyozót egyel, különben nullával szoroz. A jelölés bevezetése után jutunk az

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\left[X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)P\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)\right], \qquad (7\text{-}25)$$

Dirichlet interpolációhoz.



7-3. ábra. – Az interpolációs függvény N=8 értékre.

Mivel $P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$ így belátható, hogy a visszaállítás folyamán a mintavételi pontokban a minták értékét kapjuk. A $P(\omega)$ függvénynek itt olyan a szerepe mint a $\frac{sin(x)}{x}$ -nek idő tartományban.

A fentiekből láttuk, hogy $x_p[n]$ periodikus sor és annak spektruma $X\left(e^{j\omega}\right)$ visszaállítható spektrumának N ekvidisztáns mintavételezésével $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$, $k = 0,1,2,\ldots,N-1$. Általános esetben a frekvenciatartományban vett mintákból nem állítható vissza az aperiodikus idősor, azonban, amennyiben $x[n]$ sor hossza L és $L \leq N$, akkor $x[n]$ egyértelműen kiválasztható $x_p[n]$ -ből a következők szerint:

$$x_p[n] = \begin{cases}x[n], & 0 \leq n \leq L-1\\ 0, & L \leq n \leq N-1\end{cases} \qquad (7\text{-}26)$$

Ebben az esetben tehát a frekvenciatartományban vett minták egyértelműen meghatározzák az aperiodikus jelet, amennyiben $L < N$, akkor a sort kiegészítjük $N-L$ számú nullával.

Az elmondottakat figyelembe véve jutunk az

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right],\ k = 0,1,2,\ldots,N-1 \qquad (7\text{-}27)$$

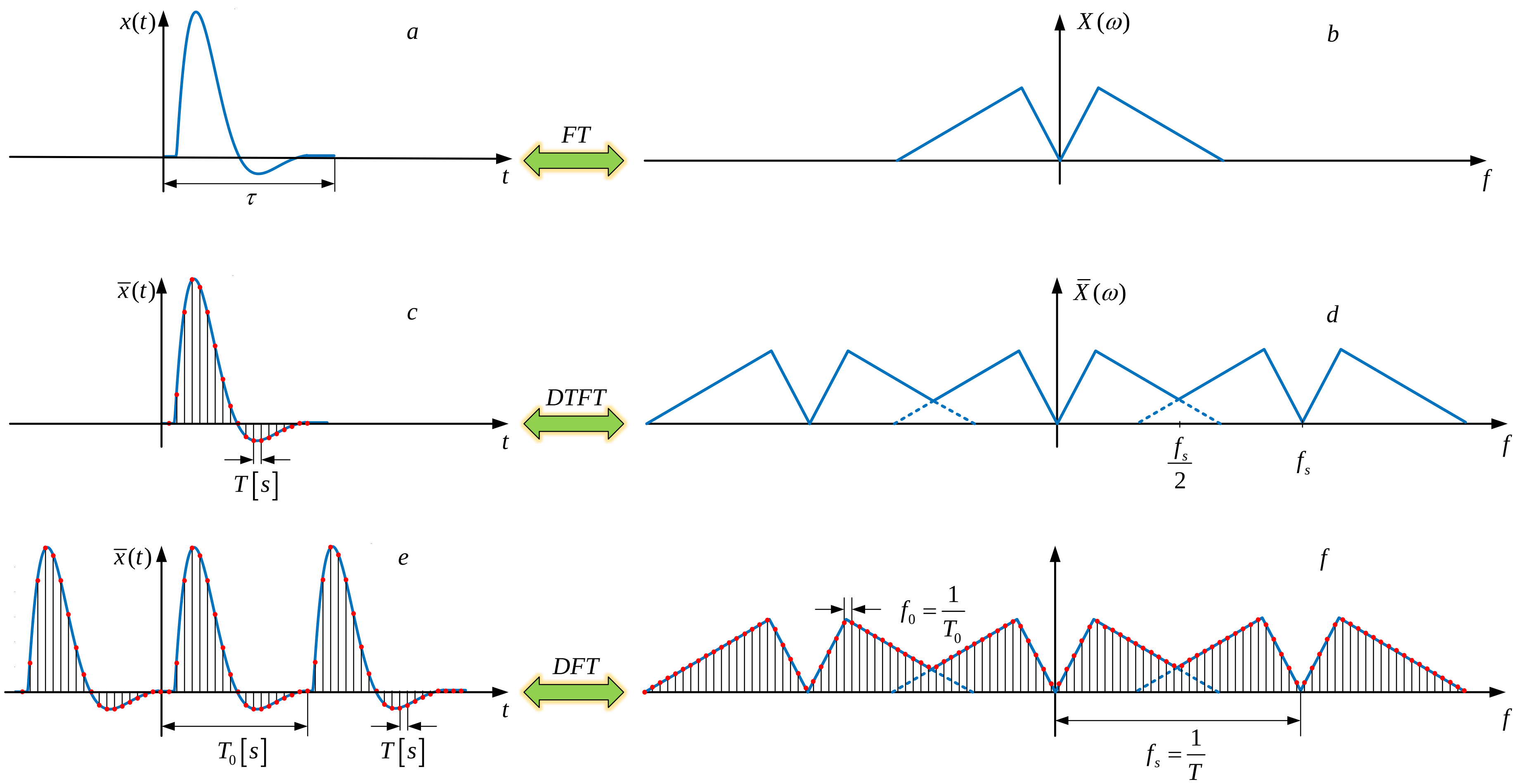
DFT transzformációs algoritmushoz, ami $L \leq N$ esetében transzformálja az L hosszúságú egydimenziós $x[n]$ sort annak spektrumának N hosszúságú $X(k)$ sorába. A DFT itt a Diszkrét Fourier Transzformációt jelenti.

Az idősor visszaállítása (7-19) és (7-25) alapján

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right], n = 0,1,2,\ldots,N-1 \quad \text{(7-28)}$$

szerint lehetséges, amit IDFT –nek , vagyis Inverz Diszkrét Fourier Transzformációnak nevezünk.

Szemléltetésül grafikusan ábrázoljuk az idő és a frekvenciatartománybeli mintavételezés hatását nem sávkorlátos jel esetén az idő és a frekvencia térben. A 7-4. ábra (a) grafikonja mutatja az $x(t)$ folytonos idejű jelet. A jel véges τ ideig tart, tehát időben korlátos. Az $x(t)$ jel spektruma $X(\omega)$ is folytonos értékkészletét tekintve és folyamatos a frekvencia függvényében ((b) grafikon), a spektrum nem sávkorlátos. A jel időben történő mintavételezését a (c) grafikon mutatja. A $T[s]$ mintavételi periódussal mintavételezett $\bar{x}(t)$ jel spektrumát jelöljük $\bar{X}(\omega)$ -val. A (d) grafikon illusztrálja, hogy az $X(\omega)$ spektrum a mintavételezés hatására periodikusan ismétlődik $f_s[Hz]$ frekvenciánként, ahol $f_s = \frac{1}{T}$. A következő lépésben végezzünk mintavételezést a frekvencia tartományban $f_0[Hz]$ lépéssel, mint ahogy az (f) grafikon mutatja. Ekkor az időtérben az $\bar{x}(t)$ függvény periodikusan ismétlődve jelenik meg, $T_0[s]$ periodusidővel. Az egyes szinteken levő grafikonokra érvényes a kétirányú transzformálhatóság. Vegyük észre, hogy a (d) és (f) esetben átfedés, „aliasing" tapasztalható az amplitúdó spektrumokban.

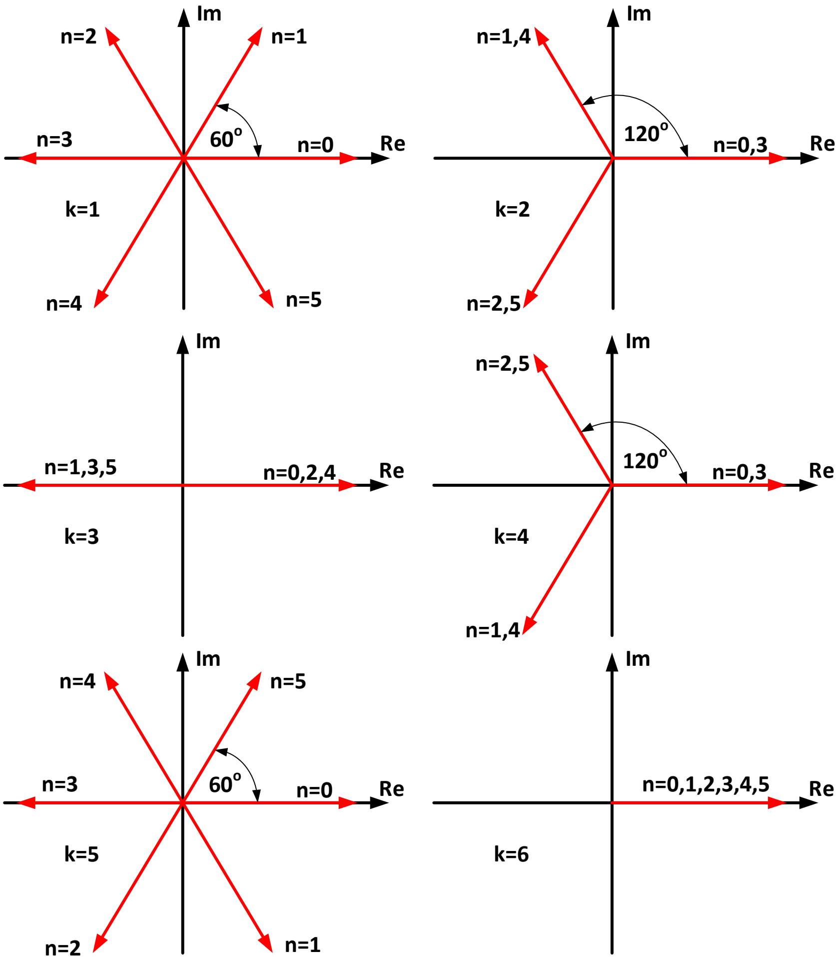


7-4. ábra. – A mintavételezés hatásának illusztrációja idő és frekvencia tartományban.

A DFT esetében a spekrumból $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ lépésenként N mintát vizsgálunk, amihez $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ frekvencialépés tartozik. Itt Δf a frekvencia felbontást jelenti, f_s pedig az időtartománybeli mintavételi frekvenciát melyhez $T_s = \frac{1}{f_s}$ periódusidejű mintavételezés tartozik. Az idősor így $T = L \cdot T_s$ időtartományt fed le.

A DFT és az IDFT esetében kiemelt szerep jut a $W_N^{n,k} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ komplex vektoroknak, melyek hossza minden esetben egységnyi, fázisa pedig $\frac{2\pi}{N}kn$. Az $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]\overline{W}_N^{n,k}\right]$ valójában az $x[n]$ vektor vetületét adja a $\overline{W}_N^{n,k}$ irányokra, valójában ebben az esetben két vektor skaláris szorzatáról van szó. A $k = 0$ érték minden esetben az egyenáramú komponenst jelenti, ugyanis ekkor $\overline{W}_N^{n,0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = 1$ és $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]\right]$.

Például $N = 6$ értékre $W_6^{n,k} = e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$ csak néhány irányt határoz meg. A 7-6. ábra szemlélteti, hogy ebben az esetben csak a fázis változik a modulus minden esetben 1. Az eredményül kapott grafikonok mutatják az irányvektorok állását különböző n és k értékekre.



7-5. ábra. – A fázorok állása $N = 6$ *értékre és különböző* k *értékekre.*

Tekintsük $x[n]$ és $X[k]$ sorokat vektorként, ahol a vektorokat x_N és X_N jelöli, $x_N = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ és $X_N = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]^T$.Akkor a transzformációs együtthatók $N \times N$-es mátrixba rendezhetők a következők szerint: $X_N = W_N \cdot x_N$ ahol

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \qquad \text{(7-29)}$$

és az egyes elemek által meghatározott $W_N^{n,k} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ komplex értékek ortogonális bázist képeznek. A mátrixban szereplő függvényeket rotációs függvényeknek nevezzük, ugyanis csak a komplex számok argumentuma változik, a modulusuk mindig 1 marad.

A mátrix elemei között felfedezhető egyfajta periódusosság és mindegyik elem egy – egy pontot határoz meg a komplex sík egységköre mentén.

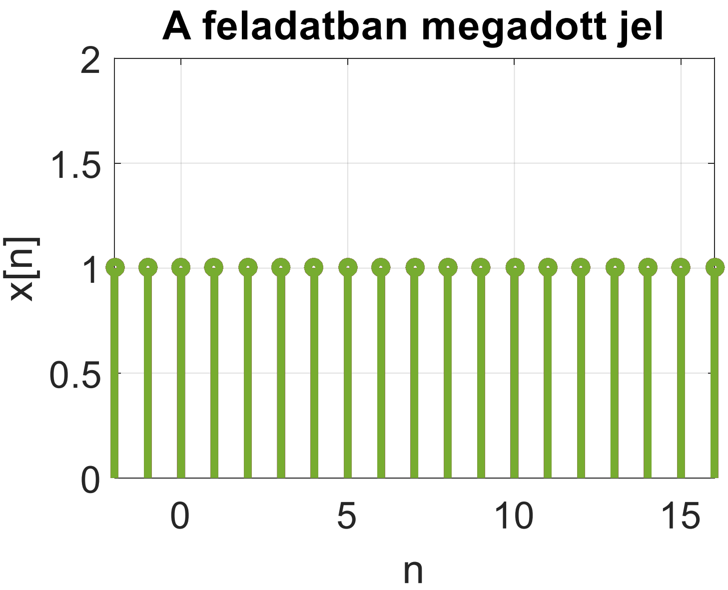
Továbbá érvényes, hogy a létezik a transzformáció inverze

$$x_N = W_N^{-1} \cdot X_N = \frac{1}{N} W_N^* \cdot X_N \,, \qquad \text{(7-30)}$$

$$W_N W_N^* = NI_N \,, \qquad \text{(7-31)}$$

tehát diagonális egységmátrix. Ebből következtethetünk, hogy W_N ortogonális mátrix és, hogy a DFT és az IDFT ortogonális transzformációk.

Példaként elemezzük az $x[n] = 1; \forall n$ állandó értékű jelet és határozzuk meg annak DFT transzformáltját! A jelet ábrázoló grafikon a következő:



7-6. ábra. – A feladatban megadott jel.

A 7-6. ábra leolvasható, hogy a DI jel periodikus és periódusa N=1. Erre a jelre nem érvényes a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ konvergencia feltétel, így a Fourier transzformációját sem lehet a hagyományos módon az $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega k}$ segítségével meghatározni. Mégis némi furfanggal eljuthatunk a keresett transzformációhoz. Szemléljük a feladatban megadott jelet mint Dirack impulzusok végtelen sorát $x[n] = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$. Ekkor $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \cdot e^{-j\omega n}$. Az összegzés sorrendjét felcserélve jutunk a $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]\cdot e^{-j\omega n}$, akkor $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k}$. Az eredmény pontosításához írjuk fel, hogy: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k2\pi)$. Mivel a DI jel Fourier transzformáltja periodikus 2π periódussal, így $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$. Az eredmény az elvárt szerint alakult, ugyanis a jelnek csak egyenáramú komponense van, nem lehet más frekvencián összetevője csak az $\omega = 0$ frekvencián. Az összetevő értéke pedig megegyezik a jel átlagértékével.

Egy másik példa legyen, hogy DFT felhasználásával határozzuk meg az $x(t) = e^{-2t}\mathrm{u(t)}$ FI jel spektrumát, ahol $\mathrm{u(t)}$ az egységugrás függvény. Tudjuk, hogy a feladatban szereplő FI jelre vonatkozóan a Fourier transzformált: $e^{-2t}\mathrm{u(t)} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$. Amplitúdó spektruma: $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}$. Látható, hogy a jel nem sávkorlátos. A jel amplitúdó spektruma monoton csökkenő. A továbbiakban a jel spektrumának azon részét tárgyaljuk, ahol az amplitúdó spektrum a maximális érték 1%-a felett van. Mivel $|X(0)| = 0.5$, így a sávkorlátot meghatározó érték $0.01 * 0.5 = 0.005$, és a hozzá tartozó határfrekvencia: $0.005 = \frac{1}{\sqrt{\omega_B^2+4}} \to \omega_B \approx 200\left[\frac{rad}{sec}\right]$, $\omega_B = 2\pi f_B$, $f_B = \frac{100}{\pi}[Hz]$. Figyelembe véve a kiszámított sávkorlátot és a mintavételi törvényt, meghatározhatjuk az időtartománybeli mintavétel periódusidejét: $T \leq \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{200} = 0.015708[sec]$.

A feladat megoldásának folytatásában meghatározzuk a jel lefutási idejét. Elméletileg a vizsgált $\mathrm{x(t)}$ függvény monoton csökken és csak a végtelenben lesz nullaértékű. A gyakorlatban azonban elegendőnek bizonyul az $x(4) = e^{-8} = 0.000335 \ll 1$ választás. Tehát válasszuk a lefutási időt $T_0 = 4[sec]$ értéknek.

Az időtartományban vett minták száma ekkor $\frac{4}{0.015708} = 254.6473$, ami nem egész szám és nem kettő hatványa. Ezen feltételek teljesülése érdekében vegyük a minták számát $N_0 = 256$-nak. Ekkor a mintavételi idő $T = \frac{4}{256} = 0.0156$.

A DFT számításához szükség van a frekvenciatartománybeli mintavételezésre. A minták lépésének értéke $f_0 = \frac{1}{T_0} = 0.25[Hz]$ frekvenciákként, vagyis $\omega_0 = \frac{\pi}{2}[rad/sec]$ körfrekvenciákként található.

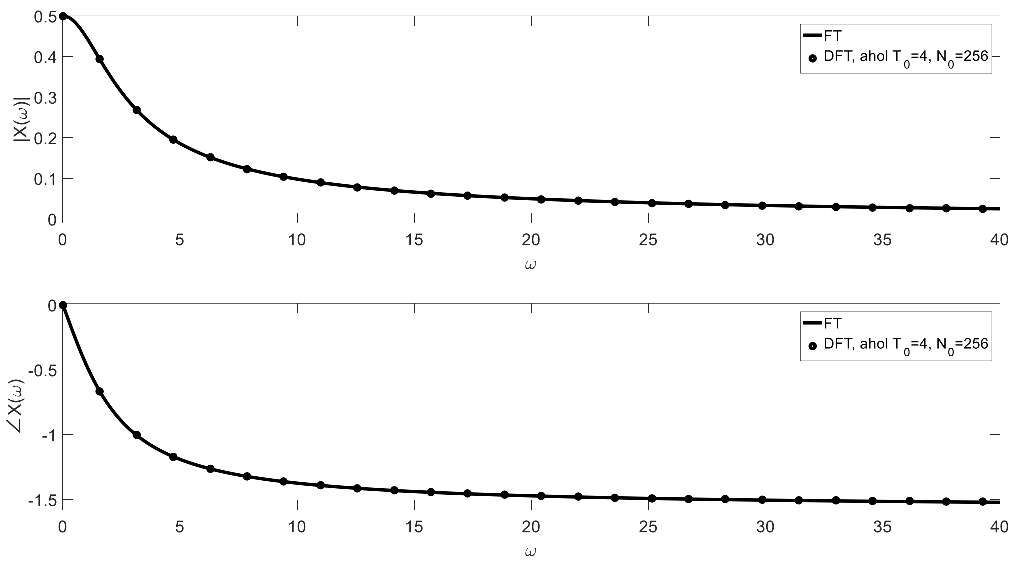
Amint már ismert a jel spektruma periodikus N_0 periódussal, így $X[k] = X[k+256]$, tehát $X[0] = X[256]$. Ezért elegendő a spektrumot $k = [0{,}255]$ intervallumban megfigyelni. A konjugált spektrum szimmetriájának tulajdonságából ered, hogy $X[-k] = X^*[k]$, alkalmazva még a periodikusságot, vagyis $X[-k] = X[-k+256]$ belátható, hogy a spektrum értékei $k = [-127, -1]$ és $k = [129{,}255]$ intervallumok felett megegyeznek a következők szerint: $X[-127] = X[129]$, $X[-126] = X[130]$, … , $X[-1] = X[255]$. Mindent figyelembe véve belátható, hogy a spektrumot elegendő $k = \left[0, \frac{N_0}{2}\right]$ intervallum felett megfigyelni. A példa esetében: $k = [0{,}128]$.

A feladat megoldására alkalmas MATLAB kód:

```
clear all;
close all;
T_0=4; N_0=256;
T=T_0/N_0; t=(0:T:T*(N_0-1))';
x=T*exp(-2*t); x(1)=T*(exp(-2*T_0)+1)/2;
X_k=fft(x);k=[-N_0/2:N_0/2-1]'; omega_k=k*2*pi/T_0;

omega=linspace(-pi/T,pi/T,4097); X=1./(j*omega+2);

figure('DefaultAxesFontSize',20);
subplot(211);
plot(omega,abs(X),'k',omega_k,fftshift(abs(X_k)),'ko','LineWidth',4);
xlabel('\omega');ylabel('|X(\omega)|')
axis([-0.01 40 -0.01 0.5]);
legend('FT',['DFT, ahol T_0=',num2str(T_0),', N_0=',num2str(N_0)],0);
subplot(212);
plot(omega,angle(X),'k',omega_k,fftshift(angle(X_k)),'ko','LineWidth',4);
xlabel('\omega');ylabel('\angle X(\omega)')
axis([-0.01 40 -pi/2-0.01 0.01]);
legend('FT',['DFT, ahol T_0=',num2str(T_0),', N_0=',num2str(N_0)],0);
```

Az eredmények jobb kiértékelhetősége érdekében a grafikonok ábrázolását célszerű nem 128 pontra, hanem 28 pontra megtenni. A független változó ekkor: $\omega = [0{,}28 * \omega_0] = [0{,}44][rad/sec]$ értékeket veszi fel.

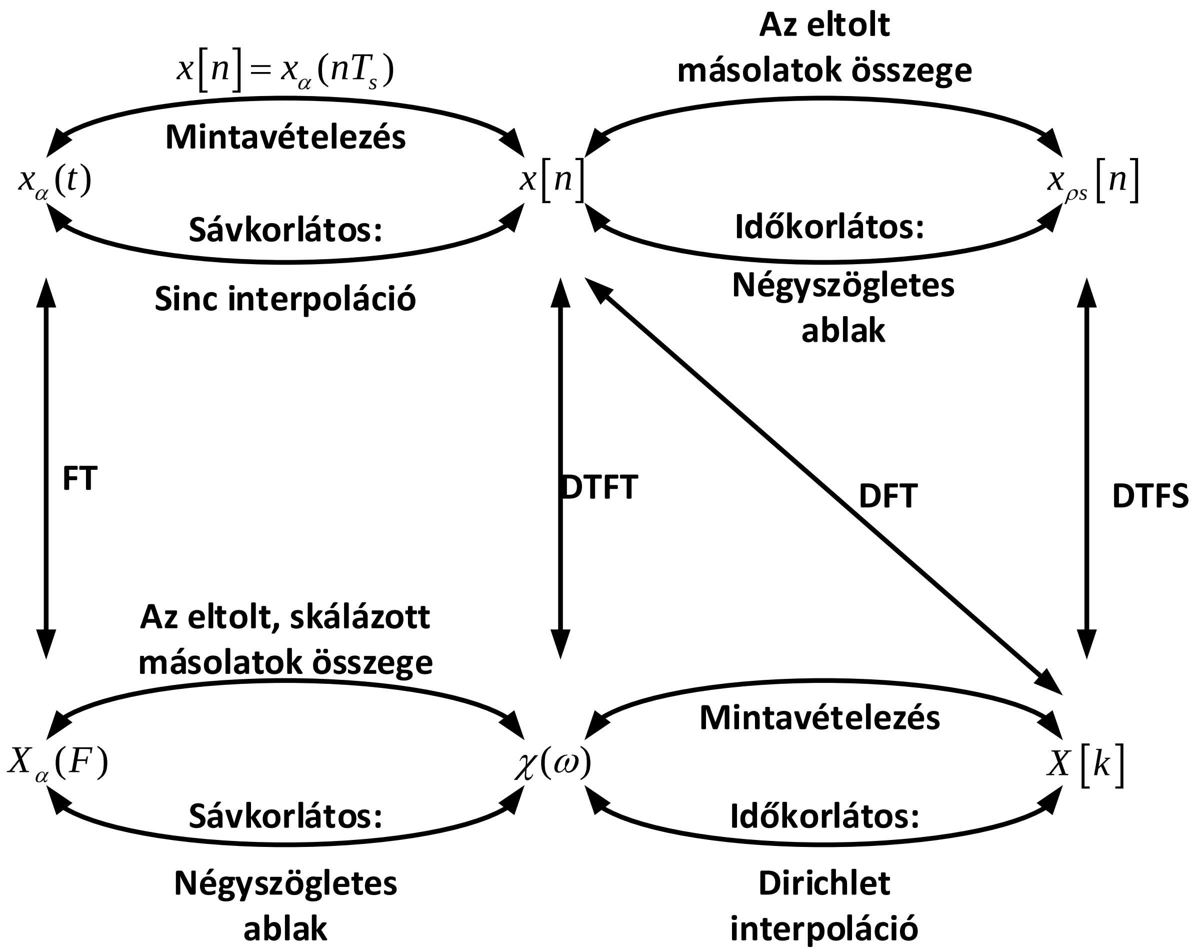
A MATLAB kód futásának eredménye:



7-7. ábra. – Az $x(t) = e^{-2t}u(t)$ függvény amplitúdó és fázis spektrum.

Az eredmény alapján kijelenthető, hogy az $\omega_B \approx 200 \left[\frac{rad}{sec}\right]$ határfrekvencia választás megfelelő, ugyanis a jel energiájának jelentős része ezen frekvencián belül helyezkedik el.

A 7-8 ábra hivatott szemléltetni az egyes osztályba tartozó jelek és a közöttük végzendő transzformációk kapcsolatát. A 7-8 ábra tartalmaz vertikális és horizontális kapcsolatokat. A vertikális kapcsolatok tartományok közötti átalakítást jelentenek. A horizontálisak egy adott tartományon belüli transzformációt jelentenek folytonos, diszkrét, periodikus, véges vagy végtelen ábrázolásmódok között.



7-8. ábra. – Kapcsolatok az egyes Fourier transzformációk között.

A transzformáció mindegyikének létezik inverze. Az FT (Fourier Transform) két folytonos jel között definiált, a (5-37) és (5-38) szerint. A DTFT egy diszkrét és egy folytonos jel között értelmezett, a (7-12) és (7-15) szerint. A DFT két diszkrét jel között adott, a (7-27) és (7-28) szerint. A DTFS (Discrete Time Fourier Series) egy periodikus jel és egy diszkrét jel közötti transzformációt jelenti (7-19) szerint.

7.3. A gyors Fourier-transzformáció (Fast Fourier Transform FFT)

Könnyen belátható, hogy az N pontos DFT műveletigénye N^2 komplex szorzás és $\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)$ komplex összeadás, ami egy 1000 pontos DFT esetén ez kb. egymillió komplex szorzást és egymillió komplex összeadást jelent.

Tekintsünk egy speciális esetet, amikor $\mathrm{N}=2^{\mathrm{p}}$. Ez a feltétel könnyen teljesíthető, ugyanis mindig elvégezhetjük a sor nullákkal való kiegészítését a kívánt elemszámig.

A DFT számítható a következőkből (7-26):

$$\mathrm{X}[\mathrm{k}]=\mathrm{X}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{x}[\mathrm{n}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{kn}}=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{x}[\mathrm{n}]\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{nk}},\mathrm{k}=0,1,2,\ldots,\mathrm{N}-1 \qquad (7\text{-}32)$$

Belátható, hogy a fenti kifejezés jelentős szimmetriát tartalmaz. Például azon elemek, melyeknek indexére érvényes, hogy k és $\mathrm{k}+(\mathrm{N}/2)$, ahol $0\le\mathrm{k}\le(\mathrm{N}/2)-1$ azonos súllyal vannak szorozva. Páratlan k értékekre az együtthatók csak előjelükben különböznek. Az egyszerűbb kiszámítás érdekében a szimmetriák felhasználásával a (7-26) átrendezhető időben vagy frekvenciában.

A W_N^m tulajdonságai:

$$W_N{}^0 = (e^{-j2\pi/N})^0 = e^0 = 1, \qquad W_N{}^N = e^{-j2\pi} = 1 \qquad (7\text{-}33)$$

$$W_N{}^{N+m} = W_N{}^m \qquad \begin{aligned} W_N{}^{N+m} &= (e^{-j2\pi/N})^{N+m} \\ &= (e^{-j2\pi/N})^N (e^{-j2\pi/N})^m \\ &= 1\cdot(e^{-j2\pi/N})^m = W_N{}^m \end{aligned} \qquad (7\text{-}34)$$

$$W_N{}^{N/2} = e^{-j2\pi/(N/2)/N} = e^{-j\pi} = -1 \qquad (7\text{-}35)$$

$$W_N{}^{N/4} = e^{-j2\pi/(N/4)/N} = e^{-j\pi/2} = -j \qquad (7\text{-}36)$$

4.31)

$$W_N{}^{3N/4} = e^{-j2\pi/(3N/4)/N} = e^{-j3\pi/2} = j \qquad (7\text{-}37)$$

A (7-26) felbontható két összegre, a páros és a páratlan indexeket tartalmazó összegekre:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=2i} x[n]W_N^{nk} + \sum_{n=2i+1} x[n]W_N^{nk} \qquad (7\text{-}38)$$

A már említett szimmetriát figyelembe véve, azaz hogy $W_N^2 = e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}} = W_{N/2}$ vagyis $W_N^{2ik} = W_{N/2}^{ik}$ és $W_N^{(2i+1)k} = W_N^k W_{N/2}^{2ik}$ és bevezetve az $x_{10}[i] = x[2i]$ és $x_{11}[i] = x[2i+1]$ akkor:

$$X[k] = \sum_{i=0}^{N/2-1} x_{10}[i]W_{N/2}^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} x_{11}[i]W_{N/2}^{ki}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N/2-1 \qquad (7\text{-}39)$$

A (7-38) két $N/2$ hosszúságú DFT sort reprezentálnak, az egyik $x_{10}[n]$ a másik $x_{11}[n]$. Így felírható:

$$X[k] = X_{10}[k] + W_N^k X_{11}[k], \quad k = 0,1,2,\ldots,N/2-1 \qquad (7\text{-}40)$$

Az $N/2$ -nél nagyobb indexekre érvényes, hogy:

$$X[k+N/2] = X_{10}[k+N/2] + W_N^{k+N/2} X_{11}[k+N/2], \quad k = 0,1,2,\ldots,N/2-1 \qquad (7\text{-}41)$$

A periódusoságból ered, hogy : $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ vagyis:

$$X[k+N/2] = X_{10}[k] - W_N^k X_{11}[k], \quad k = 0,1,2,\ldots,N/2-1 \qquad (7\text{-}42)$$

Az algoritmus működésének bemutatásaként a továbbiakban példákon keresztül kerül elemzése egy nyolcpontos FFT. A feladat megértése érdekében először egy kétpontos FFT kerül megoldásra, majd négypontos és végül a célul kitűzött nyolcpontos FFT. Példa kétpontos FFT-re:

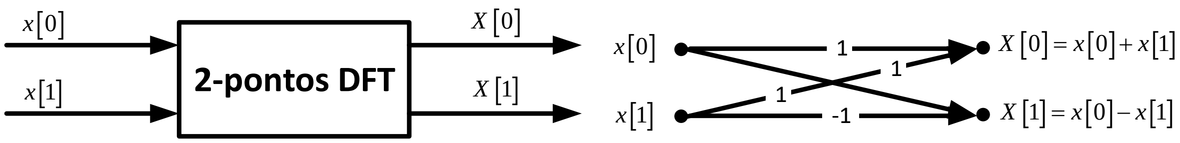
Az idősor elemei: $x[0], x[1]$

A megoldás menete: $X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n]W_2^{nk} \qquad k = 0,1$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{1} x[n]W_2{}^{n0} = \sum_{n=0}^{1} x[n] = x[0] + x[1]$$

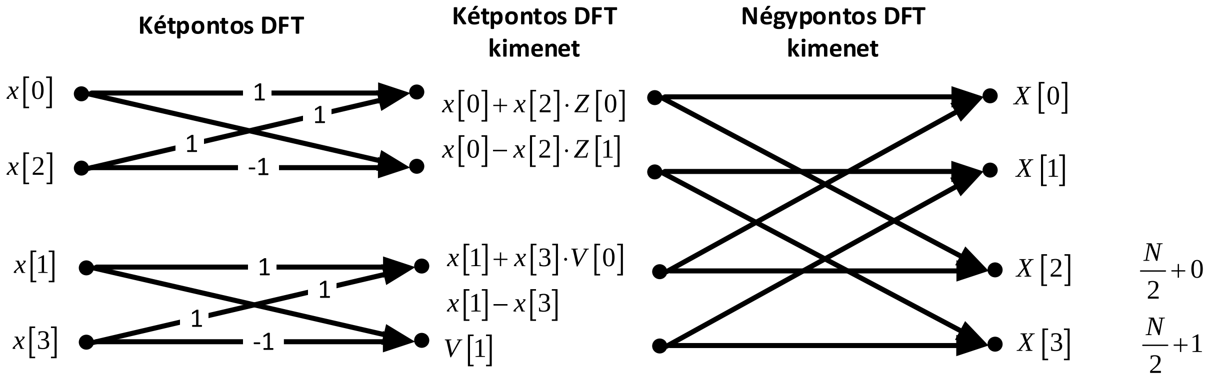
$$\begin{aligned} X[1] &= \sum_{n=0}^{1} x[n]W_2{}^{n1} = \sum_{n=0}^{1} x[n]W_2{}^{n} \\ &= x[0]W_2{}^0 + x[1]W_2{}^1 \\ &= x[0] + x[1]W_2{}^{(1/2)2} \\ &= x[0] + x[1](-1) \\ &= x[0] - x[1] \end{aligned}$$

Grafikusan ábrázolva a 7-9. ábra látható a kétpontos FFT.



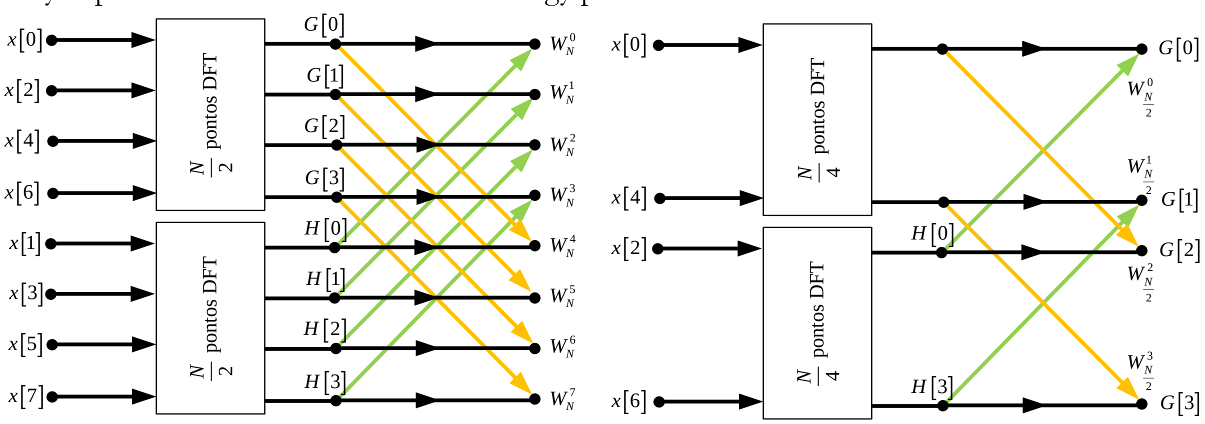
7-9. ábra. – Kétpontos FFT.

A négypontos FFT-re a 7-10. ábra látható egy példa.



7-10. ábra. – Négypontos FFT.

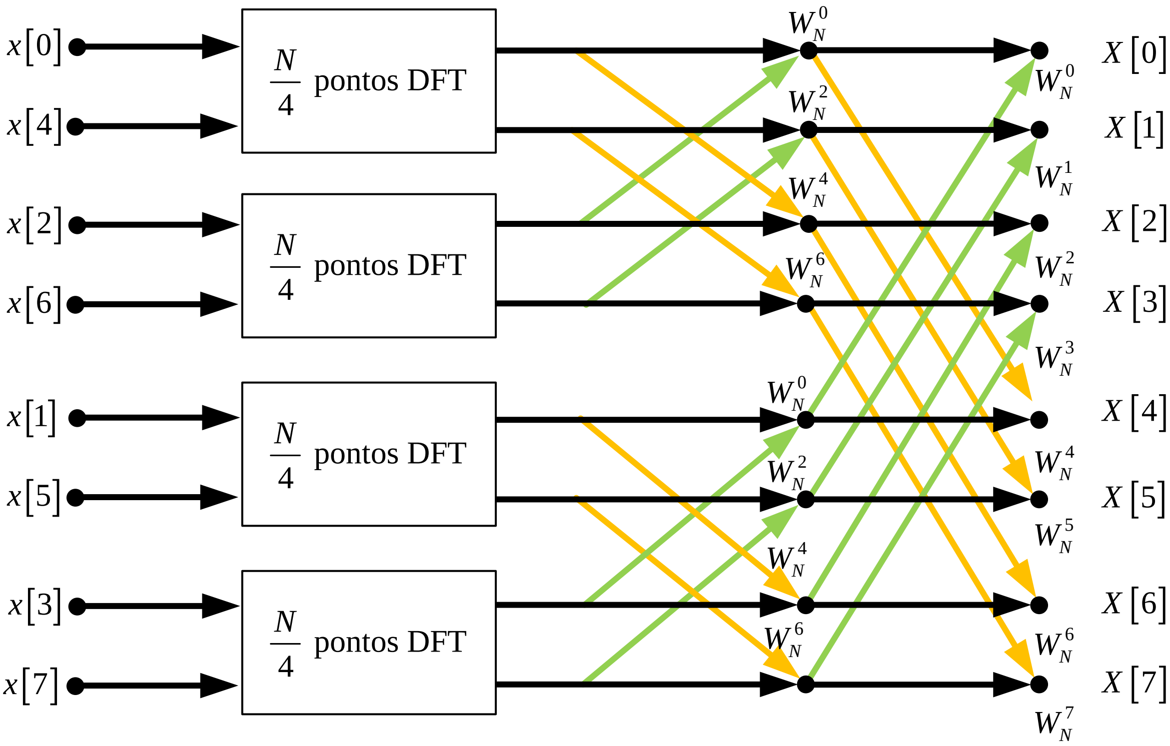
A nyolcpontos FFT-re a 7-11. ábra látható egy példa.



7-11. ábra. Nyolcpontos FFT információáramlás.

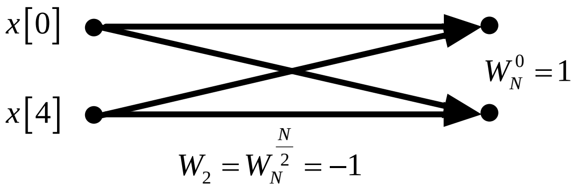
A 7-11. ábra illusztrálja az információ áramlást egy $\frac{N}{2}$ pontos DFT esetén két darab $\frac{N}{4}$ DFT felhasználásával a feladatban továbbra is érvényes, hogy $N = 8$.

A 7-12. ábra bemutatásra kerül az előző modulok eredményeit részeredményként felhasználó $N = 8$ pontos DFT megoldását végző struktúra.



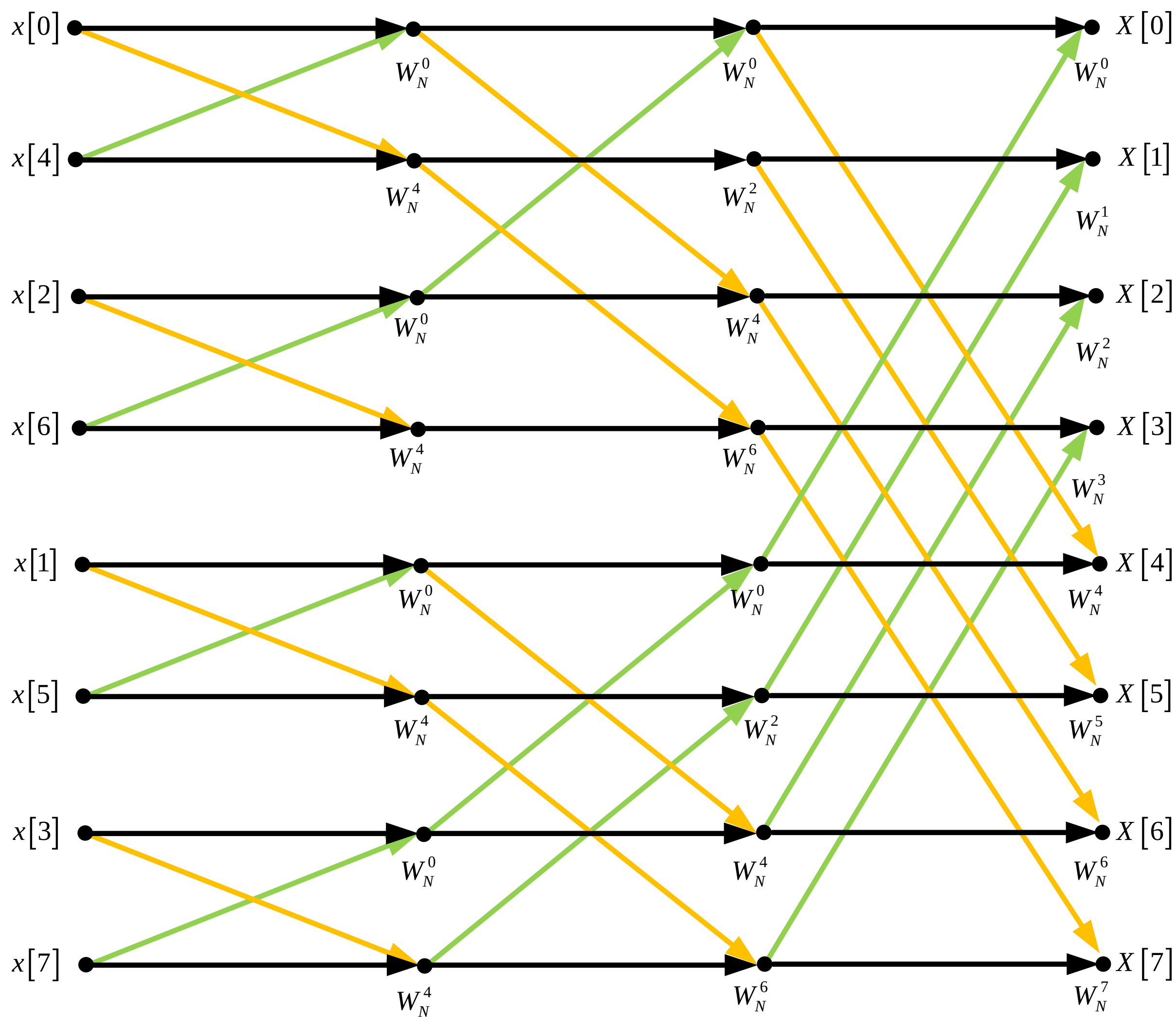
7-12. ábra. – Nyolcpontos FFT.

Egy kétpontos lepkeművelet struktúrája látható a 7-13. ábra.



7-13. ábra. – Kétpontos lepkeművelet.

Egy 8 pontos DFT megoldásának műveleti sorrendjét ábrázoló teljes folyam látható a 7-14. ábra.



7-14. ábra. – A 8 pontos FFT megoldásának műveleti sorrendje.

Az irodalomban több megoldás is található a DFT hatékony kiszámítására. Ezek csoportosíthatók:

- $N = 2^p$ algoritmusokra, melyek gyűjtőneve radiks-2
- $N = 4^p$ algoritmusokra, melyek gyűjtőneve radiks-4
- $N = 8^p$ algoritmusokra, melyek gyűjtőneve radiks-8
- $N = R^p$ algoritmusokra, melyek gyűjtőneve radiks-R, ahol a követelmény $N = N_1 N_2$.

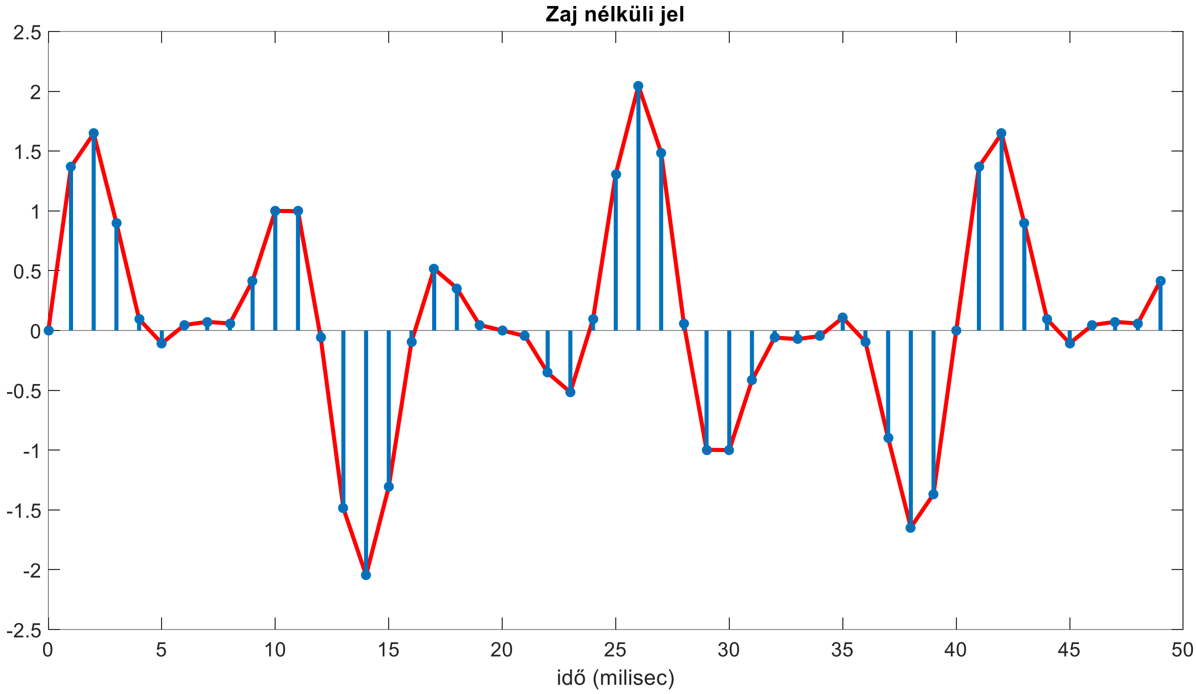
Mindenütt a cél a komplex összeadások és szorzások számának csökkentése, valamint az számítási erőforrások hatékony kihasználása.

MATLAB programcsomag felhasználásával határozzuk meg az $x(t) = 0.6\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + 0.5\sin(2\pi f_3 t)$ időfüggvény fizikai amplitúdó spektrumát, valamint a nulla középértékű zajjal terhelt jel fizikai spektrumát.

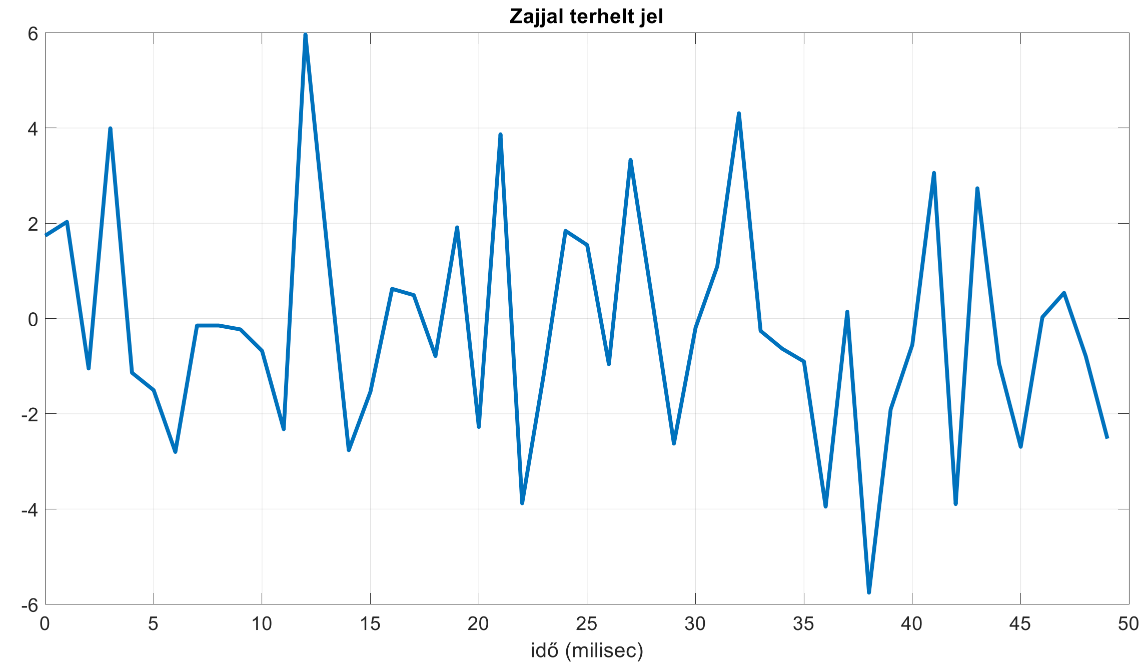
A megoldás MATLAB kódja:

```
Fs = 1000;                    % a mintavételezési frekvencia
T = 1/Fs;                     % a mintavétel periodusideje
L = 1000;                     % az időbeni minták száma
t = (0:L-1)*T;                % az idővektor
f1=50;f2=125;f3=200;          % a jelben jelenlevő frekvenciák
% az időfüggvény három harmonikus összege
x = 0.6*sin(2*pi*f1*t) + sin(2*pi*f2*t)+ 0.5*sin(2*pi*f3*t);
s = 2*randn(size(t)); y=x+s;  % nulla kozeperteku zaj számítása
Fs = 1000;                    % a mintavételezési frekvencia
T = 1/Fs;                     % a mintavétel periodusideje
L = 1000;                     % az időbeni minták száma
t = (0:L-1)*T;                % az idővektor
close all;
figure(1);
plot(Fs*t(1:50),x(1:50),'r');hold on;stem(Fs*t(1:50),x(1:50));
title('Zaj nélküli jel');xlabel('idő (milisec)');hold off
figure(2);
plot(Fs*t(1:50),y(1:50));grid;
title('Zajjal terhelt jel');xlabel('idő (milisec)');

NFFT = 2^nextpow2(L); % a legközelebbi pow(2), minták száma
X = fft(x,NFFT)/L;    % a hasznos jel spektrumának meghatároása
Y = fft(y,NFFT)/L;    % a zajos hasznos jel spektrumának meghatároása
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2);

% A fizikai amplitúdó spektrumok megjelenítése
figure(3);
plot(f,2*abs(X(1:NFFT/2)));
title('A zaj nélküli jel fizikai amplitudó spektruma x(t)');
xlabel('Frekvencia (Hz)');
ylabel('|X(f)|');
figure(4);
plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2)));
title('A zajjal terhelt jel fizikai amplitudó spektruma y(t)');
xlabel('Frekvencia (Hz)');
ylabel('|Y(f)|');
```

A program futása során a 7-15. ábra és a 7-16. ábraán látható grafikonokat kapjuk.

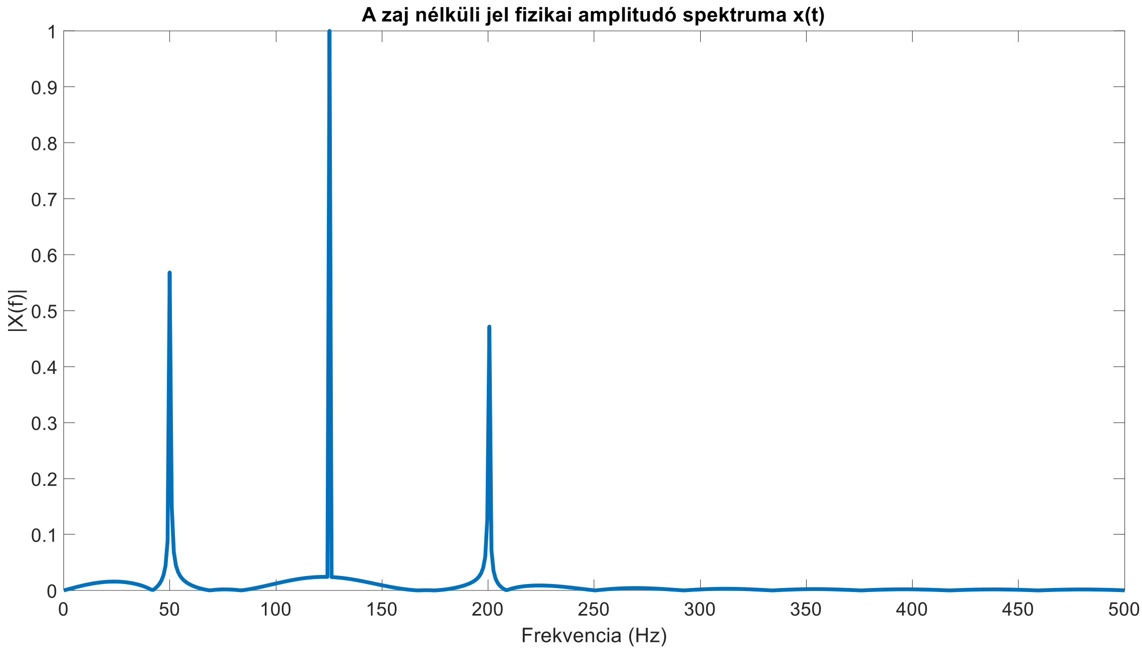


7-15. ábra. – A zaj nélküli jel.

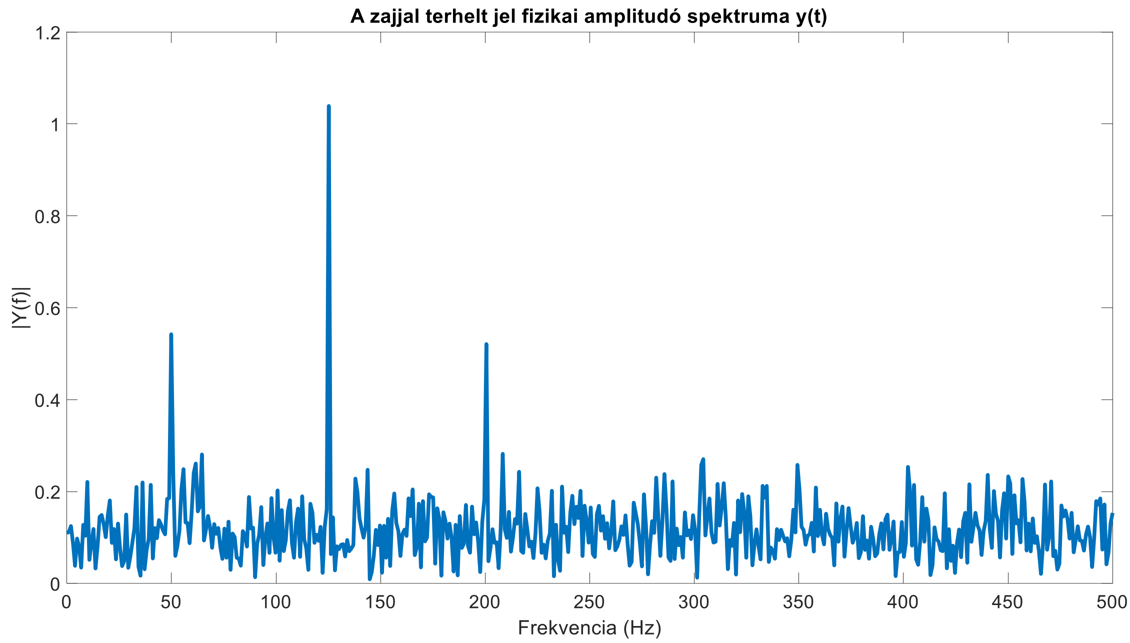


7-16. ábra. – A zajjal terhelt jel.

A zaj nélküli és a zajjal terhelt jel idő tartományban igen jelentősen különböznek egymástól.



7-17. ábra. – A zajjal terhelt jel fizikai spektruma



7-18. ábra. – A zaj nélküli jel fizikai spektruma

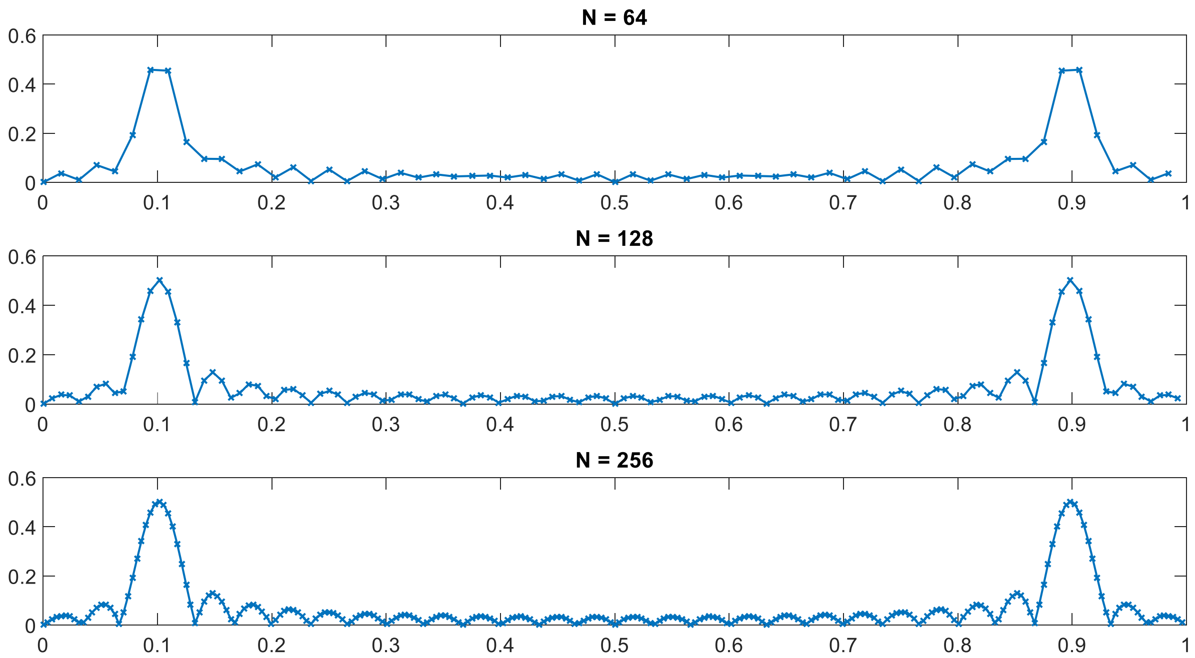
A frekvencia tartományban, mindkét esetben impulzusok csúcsosodnak ki a jelet képező frekvenciákon, ahogy ez a 7-17. ábra és a 7-18. ábraán is látható.

MATLAB alkalmazásával demonstráljuk a frekvenciatartománybeli mintavételezés hatását a spektrumra. A példában használjuk fel a $x[n] = cos\left(2\pi\frac{n}{10}\right)$ diszkrét harmonikus függvényt.

A feladat megoldását végző kód:

```
n = [0:29]; % Harminc minta az időben
x = cos(2*pi*n/10); % 10 mintát veszünk periodusonként
N1 = 64; % Három módon számoljuk az FFT-t
N2 = 128;N3 = 256;
X1 = abs(fft(x,N1)/size(x,2));
X2 = abs(fft(x,N2)/size(x,2));X3 = abs(fft(x,N3)/size(x,2));
F1 = [0 : N1 - 1]/N1; % A frekvencia normalizálása 0 tól 1 – 1/N ig.
F2 = [0 : N2 - 1]/N2;F3 = [0 : N3 - 1]/N3;
subplot(3,1,1);plot(F1,X1,'-x'),title('N = 64'),axis([0 1 0 0.6])
subplot(3,1,2);plot(F2,X2,'-x'),title('N = 128'),axis([0 1 0 0.6])
subplot(3,1,3);plot(F3,X3,'-x'),title('N = 256'),axis([0 1 0 0.6])
```

Az eredményként kapott spektrumok a 7-19. ábra láthatók.

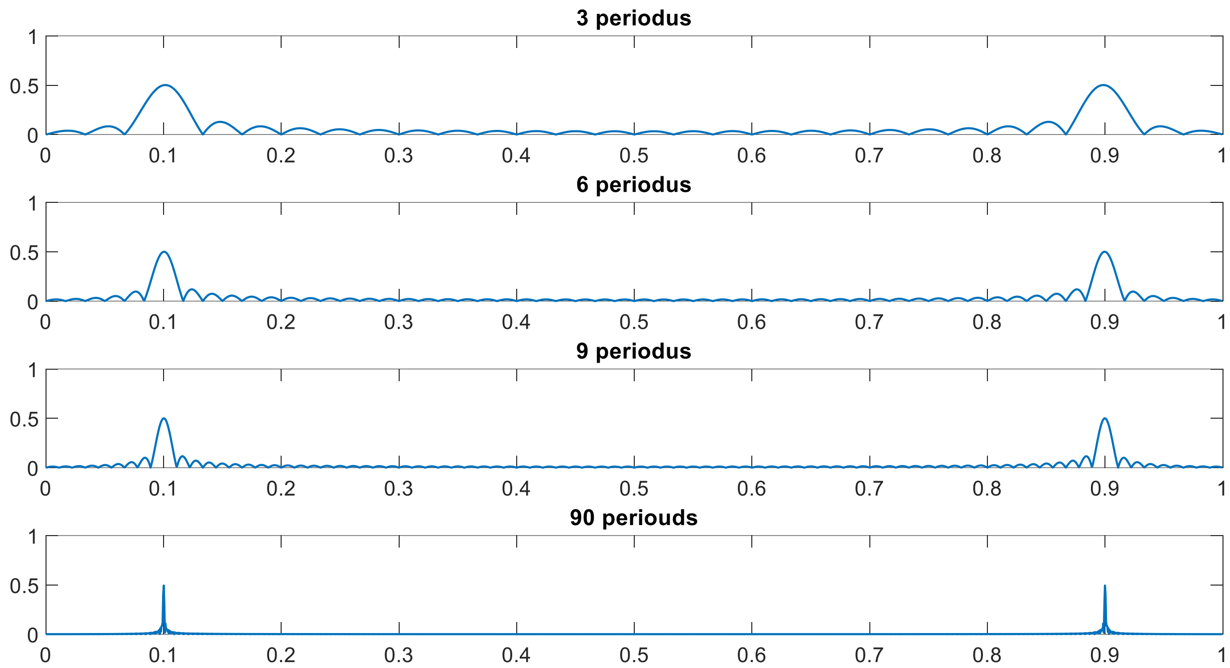


7-19. ábra. – FFT eredménye különböző frekvenciatartománybeli mintavételezés esetén.

Látható, hogy a frekvenciákat normalizáltuk 0 és 1 közé. A spektrumon két csúcs jelent meg a 0.1-nél és a 0.9-nél. Ez a példában megadott koszinusz frekvenciájának felel meg (1/10). Az ábrázolt jel csak alap harmonikust tartalmaz. Azt is látjuk, hogy függetlenül attól, hogy 64, 128, 256 mintát veszünk, frekvenciatartományban a spektrum ábrázolása nem módosul jelentsen.

MATLAB alkalmazásával vizsgáljunk meg különböző hosszúságú idősorok hatását a spektrumra. A példában használjuk fel a $x[n] = cos\left(2\pi \frac{n}{10}\right)$ diszkrét harmonikus függvényt.

```
n = [0:29];
x1 = cos(2*pi*n/10); % 3 periódus
x2 = [x1 x1];        % 6 periódus
x3 = [x1 x1 x1];     % 9 periódus
x4 = [x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3]; % 90 periódus
N = 2048;F = [0:N-1]/N;
X1 = abs(fft(x1,N)/size(x1,2));X2 = abs(fft(x2,N)/size(x2,2));
X3 = abs(fft(x3,N)/size(x3,2));X4 = abs(fft(x4,N)/size(x4,2));
subplot(4,1,1);plot(F,X1),title('3 periodus'),axis([0 1 0 1])
subplot(4,1,2);plot(F,X2),title('6 periodus'),axis([0 1 0 1])
subplot(4,1,3);plot(F,X3),title('9 periodus'),axis([0 1 0 1])
subplot(4,1,4);plot(F,X4),title('90 perioudus'),axis([0 1 0 1])
```



7-20. ábra. – Különböző hosszúságú idősorok hatása a spektrumra.

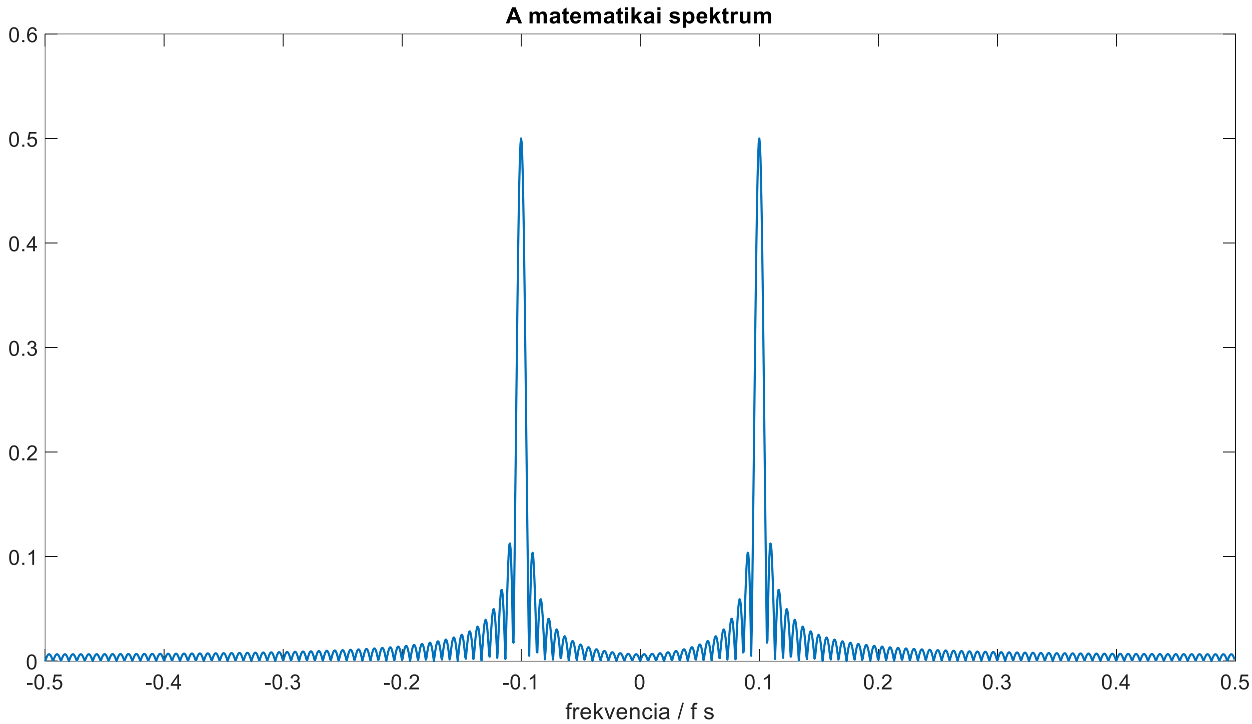
A példában lényegében különböző hosszúságú idősorokat elemzünk. Az első spektrum a jel 3 periódusú hosszára vonatkozik, a második 6 periódusra, a harmadik 9 periódusra és végül a negyedik 90 periódus hosszúságú jel elemzésének eredményét mutatja (7-20. ábra). A koszinusz jelet változó méretű ablakon keresztül figyeljük. Jelen ablakozás lényegében egy négyszögjellel való szorzást jelent. A négyszögjel Fourier transzformáltja a sinc() függvény. A folytonos idejű koszinusz Fourier transzformáltja a jel frekvenciájánál lévő Dirac-impulzus. Tehát minél nagyobb az ablak, annál jobban érvényesül a koszinusz Fourier transzformáltja, és annál kevésbé a négyszögjelé. Az idősor méretének növelésével egyre jobban egy Dirac-impulzusra fog hasonlítani a DFT és nem pedig a sinc() jelre, mely a jel frekvenciájára van eltolva.

Ha tehát időben meghosszabbítom a sort, akkor jobb minőségű Fourier transzformációt tudok végezni. A frekvenciatartományban vett minták száma viszont nem változtatja meg a Fourier transzformáció eredményét jelentősen.

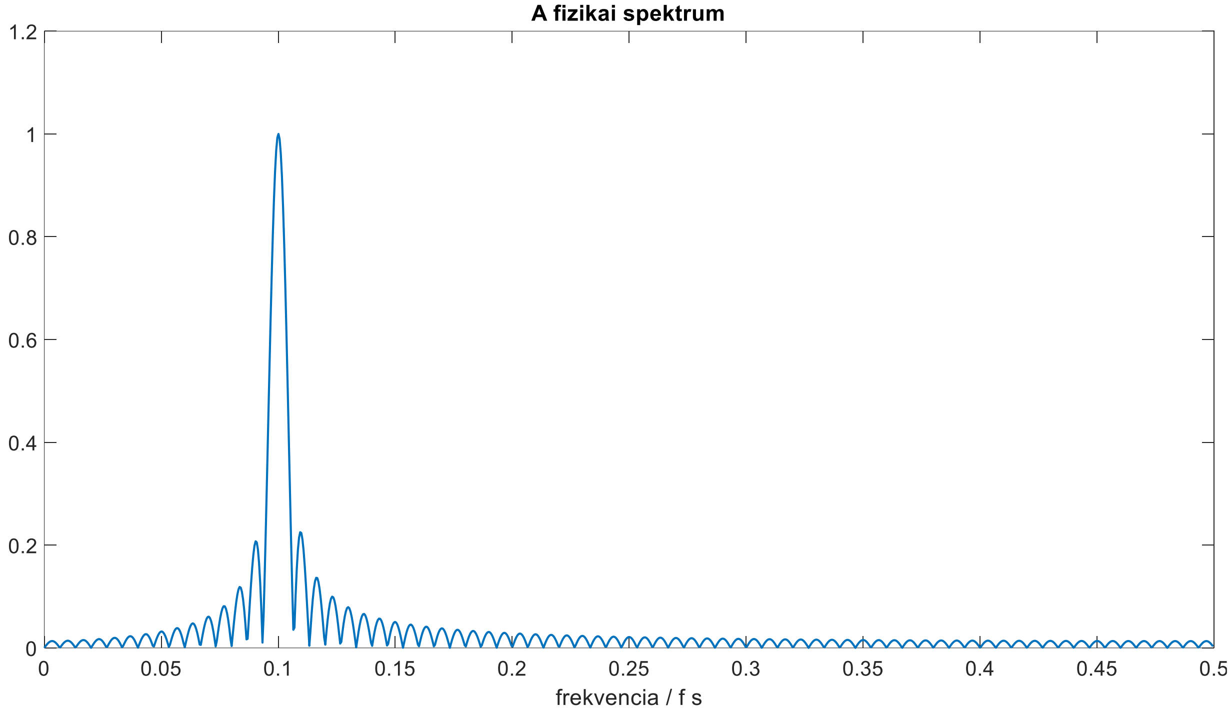
MATLAB alkalmazásával hozzuk létre egy harmonikus jel matematikai és fizikai spektrumát relatív egységekben.

A példában használjuk fel a $x[n] = cos\left(2\pi\frac{n}{10}\right)$ diszkrét harmonikus függvényt.

```
n = [0:149];x1 = cos(2*pi*n/10);N = 2048;
X = abs(fft(x1,N)/size(x1,2));X = fftshift(X);
figure(1);
F = [-N/2:N/2-1]/N;plot(F,X),
title('A matematikai spektrum');xlabel('frekvencia / f s')
figure(2);
F = [0:N/2-1]/N;plot(F,2*abs(X(N/2+1:N)));
title('A fizikai spektrum');xlabel('frekvencia / f s');
```



7-21. ábra. – A harmónikus jel matematikai spektruma



7-22. ábra. – A harmónikus jel fizikai spektruma

A matematikai spektrum esetében a jel energiája megoszlik a pozitív és a negatív frekvenciákon ahogy ez a 7-21. ábra is látható. A fizikai spektrum csak pozitív frekvenciákat tartalmaz, melyet a 7-22. ábra figyelhetünk meg.

8. A Laplace-transzformáció

Az előzőekben tárgyaltuk a Fourier sorfejtést és a jelek teljesítményspektrumát periodikus jelek esetére, a Fourier transzformációt és az energiaspektrumot nem periodikus (aperiodikus) jelek esetére, frekvenciaátviteli szempontból elemeztük az LTI rendszereket. Tettük mindezt, mert a tárgyalt ortogonális transzformációk lehetővé tették a frekvenciatartományban való vizsgálatot.

Ebben a fejezetben kerül tárgyalásra a kétoldalas Laplace-transzformáció és annak tulajdonságai, melynek matematikai szerepe kétségkívül jelentősebb, mint a gyakorlati felhasználhatósága. A belépő jelekre alkalmazható jobboldali Laplace-transzformáció és annak tulajdonságai is ebben a fejezetben kerülnek tárgyalásra. Ez a fejezet foglalkozik továbbá az egyoldalas Laplace-transzformációnak az LTI rendszerek és jeleik elemzése és szintézise területén betöltött szerepével. Az egyes tagok tulajdonságait teljes mértékben hordozza az átviteli függvényük, a gyakorlatban tagok hálózaba kötésével összetett feladatok oldhatók meg. Ekkor az egyes tagok fizikai megvalósításától (elektromos, hidraulikus, mechanikus, stb…) függetlenül, egységesen tárgyalhatók a hálózatba kötött elemek. A fejezet kitér a hálózatba kötés kérdéskörére, az eredő átviteli függvény számításának módozataira is.

8.1. A kétoldalas Laplace-transzformáció

A Fourier transzformáció konvergenciafeltétele, a Dirichle feltételek nem teljesülnek minden függvény esetében, ez a tény csökkenti a transzformálható jelek halmazának számosságát. A transzformáció általánosabbá tétele érdekében, érdemes megvizsgálni, egy másik komplex operátornak a Fourier transzformációhoz hasonló módon való alkalmazását.

Ismeretes, hogy az $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ Fourier transzformáció adatott az $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ integrállal, mely létezésének feltétele az $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)| < \infty$ Dirichle feltétel. Keressünk módot arra, hogy kiterjesszük azon függvények körét, melyekre létezik a transzformált. Például, alkalmas $\sigma \in \mathbb{R}$ választással biztosítható a módosított $x(t)$ jelre felírt $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)e^{-\sigma t}| < \infty$ feltétel kielégítése. Vegyük észre, hogy az $x(t)$ jelnek az $e^{-\sigma t}$-vel való szorzása ad egy megfelelő burkológörbét az $x(t)$ jel köré, ami biztosítja az így módosított jel konvergenciáját. Ekkor a transzformáció a következőképpen alakul: $X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\sigma+\omega)t}dt$. Vezessünk be egy új komplex változót $s = \sigma + j\omega$ alakban és eljutunk az:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad \text{(8-1)}$$

Laplace transzformációhoz (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827). A Laplace transzformáció egy olyan komplex függvényeket eredményező integráltranszformáció, ami a Fourier transzformációhoz képest kibővíti a transzformálható jelek halmazát.

A módosított jelre vonatkozó inverz Fourier transzformáció adott az $x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{j\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ összefüggéssel. Rendezzük át az egyenletet a következőképen: az exponenciális taggal beszorzunk: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{j\infty} X(\sigma + j\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{j\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$, elvégezzük a helyettesítést: $s = \sigma + j\omega$, deriválva $d\omega = \frac{ds}{j}$, és a határokat is behelyettesítve: $s = \sigma \pm j\infty$, jutunk az:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \qquad \text{(8-2)}$$

inverz Laplace transzformációhoz. Fontos megjegyezni, hogy a Laplace transzformáció konvergenciája σ-tól függ, minden esetben meg kell adni azt a tartományt, amire érvényes a konvergencia. A konvergenciatartományt az irodalomban általában ROC (region of convergence) jelöléssel illetjük és a transzformált integrált egészét képezi.

8.2. Laplace-transzformáció és tulajdonságai

A transzformáció rendelkezik néhány hasznos tulajdonsággal, melyek rávilágítanak, hogy a jelek és rendszerek területen az időtartományban összetettnek tűnő feladatok egyszerűsödnek az operátortartományban. Az alábbiak során felsorolásra kerül néhány tipikus tulajdonság, melyek ismeretében hatékonyabbá válhat a jelek és rendszerek elemzése és szintézise.

8.2.1. Linearitás

Ha $x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), s \in ROC_1$ és $x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), s \in ROC_2$ akkor

$$\big(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \big(\alpha X_1(s) + \beta X_2(s)\big) \qquad \text{(8-3)}$$

, ahol $s \in ROC \supseteq ROC_1 \cap ROC_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

A linearitás tulajdonsága magában foglalja a homogenitás és az additivitás tulajdonságokat.

8.2.2. Differenciálás idő tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), s \in ROC_1$ akkor

$$\frac{x(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s) \qquad \text{(8-4)}$$

, ahol $s \in ROC \supseteq ROC_1$ a zérus/pólus kiejtés miatt esetleg lehet ROC nagyobb.

8.2.3. Differenciálás komplex tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), s \in ROC$ akkor

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds} \qquad \text{(8-5)}$$

, ahol $s \in ROC$.

8.2.4. Konvolúció

Ha $x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), s \in ROC_1$ és $x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), s \in ROC_2$ akkor

$$\big(x_1(t) * x_2(t)\big) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \big(X_1(s) X_2(s)\big) \qquad \text{(8-6)}$$

, ahol $s \in ROC \supseteq ROC_1 \cap ROC_2$

8.2.5. Integrálás idő tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), s \in ROC$ akkor

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} X(s) \qquad \text{(8-7)}$$

, ahol $s \in ROC_1 \supseteq ROC \cap \{s: Re\{s\} > 0\}$.

8.2.6. Időbeni eltolás

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), s \in ROC$ akkor

$$x(t - t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-st_0} X(s) \qquad \text{(8-8)}$$

, ahol $s \in ROC$.

8.2.7. Eltolás a komplex tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $s \in ROC$ akkor

$$e^{st_0}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s - s_0) \quad \text{(8-9)}$$

, ahol $s \in ROC + Re\{s_0\}$. Vegyük észre a dualitást, az időben való eltolással!

8.2.8. A független változó skálázása

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $s \in ROC$ akkor

$$x(at) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{(8-10)}$$

, ahol $s \in \frac{1}{a}ROC$. Következmény hogyha $a = -1$, és $x(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(-s)$, ahol $s \in -ROC$, a régió átfordul, tükröződik a képzetes tengelyen.

8.2.9. Konjugálás

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $s \in ROC$ akkor

$$x^*(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X^*(s^*) \quad \text{(8-11)}$$

, ahol $s \in ROC$. Következmény hogyha $x(t)$ valós, akkor $X(s) = X^*(s^*)$ és ha s_0 pólusa $X(s)$ -nek akkor s_0^* is az. Időtartományban valós jelek esetén a Laplace transzformáció pólusai és zérusai minden esetben konjugált párban jelentkeznek.

8.2.10. Kezdőérték és végérték tételek

Ebben az esetben feltételezzük, hogy $x(t)$ jel belépő jel. A kezdő és végértételek az időtartományban levő $x(t)$ jel kezdeti értékére $(t = 0^+)$ és $(t = \infty)$ végértékére vonatkoznak. Az $x(0^+)$ és $x(\infty)$ értékek meghatározhatók, amennyiben ismert $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$ a következők alapján:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \quad \text{(8-12)}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \quad \text{(8-13)}$$

Az időfüggvény ismerete nélkül meghatározható egy rendszer állandósult állapotbéli érték és kezdőértéke.

8.3. A jobboldali Laplace transzformáció

Egy jel vizsgálatának kezdete egy kitüntetett pillanat. A jelről általában nincs elég információnk a vizsgálat kezdetét megelőző időpontokról, ezért vehetjük és vesszük a vizsgálat kezdetét a $t = 0$ értéknek. A jel $x(0)$ kezdeti értéke pedig tartalmazza a kauzális jel előéletét. Az ilyen jeleket hívtuk belépő jeleknek. Bármilyen jel belépővé tehető, ha megszorozzuk azt az egységugrással, $x_+(t) = x(t)h(t)$. A jobboldali vagy egyoldalas Laplace transzformáció ilyenkor felírható a

$$X_+(s) = \mathcal{L}_+\{x(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad \text{(8-14)}$$

alakban. Általában az $X_+(s)$ és $\mathcal{L}_+$ jelöléseknél a $_+$ elhagyható, ugyanis a kontextusból majdnem mindig egyértelmű, hogy kétoldalas vagy egyoldalas transzformációról van e szó. A 0_- szerepeltetése az integrál határánál azért hasznos, mert így a kezdeti feltételek egyértelműen számításba kerülnek, még akkor is ha nullában egy impulzus szerepel.

A jobboldali Laplace transzformáció inverze valójában a kétoldali inverz Laplace transzformációnak az az esete, amikor csak a jel $t \geq 0$ részét tartjuk meg.

$$x_+(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_+(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_+(s)e^{st}ds, \ \ t \geq 0 \quad (8\text{-}15)$$

A jelek időtartomány való leírását csak nagyon ritkán keressük a fenti integrál megoldásával, ugyanis vannak egyszerűbb módszerek az inverz Laplace transzformációra. Általános esetben használható a vonalintegrál számítására vonatkozó Cauchy féle reziduum tétel. A gyakorlatban előforduló feladatok többsége táblázatos alakra hozható részfeladatokra bontható és a Laplace transzformáció tulajdonságainak felhasználásával oldható meg.

8.3.1. A jobboldali Laplace-transzformáció tulajdonságai

A jobboldali Laplace transzformáció tulajdonságai a kétoldali tulajdonságainak egy speciális esetei, ugyanis itt a komplex síkban meghatározott ROC mindig egy valós számtól jobbra helyezkedik el. Az továbbiakban, a jobboldali Laplace transzformáció esetében csak néhány fontosabb tulajdonság kerül felsorolásra. A kétoldali Laplace transzformáció tulajdonságai, az alábbi speciális eseteken kívüli esetekben az egyoldalinál is érvényesek.

8.3.1.1. Linearitás

Jelek lineáris kombinációjának Laplace transzformáltja egyenlő a transzformáltak lineáris kombinációjával. Ha $x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), Re\{s\} > \alpha_1$ és $x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), Re\{s\} > \alpha_2$ akkor

$$\big(ax_1(t) + bx_2(t)\big) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \big(aX_1(s) + bX_2(s)\big) \quad (8\text{-}16)$$

, ahol $Re\{s\} > max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \forall a, b \in \mathbb{C}$

A linearitás tulajdonsága magában foglalja a homogenitás és az additivitás tulajdonságokat. Ennek bizonyítása:

$$\int_{0_-}^{\infty}\big(ax_1(t) + bx_2(t)\big)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{\infty} ax_1(t)e^{-st}dt =$$
$$= \int_{0_-}^{\infty} bx_2(t)e^{-st}dt = aX_1(s) + bX_2(s) \quad (8\text{-}17)$$

8.3.1.2. Differenciálás idő tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s), Re\{s\} > \alpha$ akkor

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s) - x(0_-) \quad (8\text{-}18)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^n X(s) - s^{n-1}x(0_-) - s^{n-2}\frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=0_-} - \cdots$$
$$\ldots - s\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}}\bigg|_{t=0_-} - \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\bigg|_{t=0_-} \quad (8\text{-}19)$$

Deriváláskor, az egyoldalas Laplace transzformációnál megjelennek az alacsonyabb derivált kezdeti (nullában levő) értékei. A gyakorlatban sokszor ezeket az értékeket nullának vesszük.

8.3.1.3. Konvolúció

Ha $x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s), Re\{s\} > \alpha_1$ és $x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_2(s), Re\{s\} > \alpha_2$ akkor

$$\big(x_1(t) * x_2(t)\big) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \big(X_1(s)X_2(s)\big), Re\{s\} > max\{\alpha_1, \alpha_2\} \quad (8\text{-}20)$$

Amint ebből a tulajdonságból is kitűnik, az idő tartományban alkalmazott konvolúció művelet a frekvenciatartományban szorzássá fajul. Ez a tulajdonság alkalmas az LTI rendszerek kimenetének meghatározására tetszőleges bemenet hatására.

8.3.1.4. Integrálás idő tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \alpha$ akkor

$$\int_0^t x(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}X(s). \quad (8\text{-}21)$$

Vegyük észre, hogy az integrálás és a deriválás idő tartományban inverz műveletek, igaz ez Laplace tartományban is, ugyanis a deriválásnak az s való szorzás, míg az integrálásnak az s való osztás a megfelelője operátor-tartományban.

8.3.1.5. Eltolás idő tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \alpha$ akkor

$$x(t - t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-st_0}X(s) \quad (8\text{-}22)$$

, ahol $Re\{s\} > max\{0, \alpha\}$.

8.3.1.6. Eltolás a komplex tartományban

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $Re\{s\} > \alpha$ akkor

$$e^{st_0}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s - s_0) \quad (8\text{-}23)$$

, ahol $Re\{s\} > \alpha + Re\{s_0\}$. Vegyük észre a dualitást, az időben való eltolással!

8.3.1.7. A független változó skálázása

Ha $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$ és $a > 0$, $Re\{s\} > \alpha$ akkor

$$x(at) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (8\text{-}24)$$

, ahol $Re\{s\} > a \cdot \alpha$. Az $a < 0$ ebben az esetben nem megengedett, mert a jel belépő és nem ismert a másik része.

8.3.1.8. Kezdőérték és végérték tételek

Ebben az esetben feltételezzük, hogy $x(t)$ jel belépő jel. A kezdő és végértétételek az időtartományban levő $x(t)$ jel kezdeti értékére $(t = 0_+)$ és $(t = \infty)$ végértékére vonatkoznak. Az $x(0_+)$ és $x(\infty)$ értékek meghatározhatók, amennyiben ismert $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$ a következők alapján:

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \quad (8\text{-}25)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s). \quad (8\text{-}26)$$

Az időfüggvény ismerete nélkül meghatározható egy rendszer állandósult állapotban vett érték és kezdőértéke, feltéve ha $X(s)$ szingularitásai a komplex sík második és harmadik negyedében helyezkednek el.

8.4. Egyes függvények egyoldalas Laplace transzformáltja

A jobboldali Laplace transzformáltra és az inverz transzformáltra vonatkozó törvény bármikor alkalmazható, de a gyakorlatban gyakran előforduló eseteket táblázatból szokás megoldani. Az alábbi táblázat tartalmaz néhány tipikus transzformáltat és szabályt, melyek ily módon való egybegyűjtése segít a gyakorlati problémák hatékonyabb megoldásában.

8-1. táblázat. – Függvények egyoldalas Laplace transzformáltja

	$x(t), t \geq 0$ $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$	$X(s)$ $X_+(s) = \mathcal{L}_+\{x(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	ROC
1	$ax(t)$	$aX(s)$	ROC
2	$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \cdots$	$X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + \cdots$	ROC
3	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0)$	ROC
4	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \frac{d^{k-1}x(0^+)}{dt^{k-1}}$	ROC
5	$\int x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$	ROC
6	$x(t) \cdot e^{-at}$	$X(s+a)$	ROC
7	$x(t-a)$	$e^{-as}X(s)$	ROC
8	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$	ROC
9	$\int_0^t \big(x_1(t) \cdot x_2(t-\tau)\big)d\,\tau = \int_0^t \big(x_1(t-\tau) \cdot x_2(t)\big)d\,\tau$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	ROC
10	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0} sX(s)$	ROC
11	$\lim_{t\to 0} x(t)$	$\lim_{s\to\infty} sX(s)$	ROC
12	$\delta(t)$ egységimpulzus	1	$\forall s$
13	$h(t)$ egységugrás függvény	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
14	$r(t)$ sorompó függvény	$\frac{1}{s^2}$	$Re\{s\} > 0$
15	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$
16	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
17	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$Re\{s\} > -a$
18	$t^{n-1} \cdot e^{-at} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
19	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > 0$

20	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > 0$
21	$e^{-at}\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > -a$
22	$e^{-at}\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > -a$
23	$\delta(t-a)$ eltolt Dirac	e^{-as}	ROC
24	$h(t-a)$ eltolt Heaviside	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	ROC
25	$t\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	ROC
26	$t\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	ROC
27	$\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)$	$\dfrac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$	ROC
28	$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	ROC
29	$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	ROC
30	$\cos^2(t)$	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4}\right)$	ROC
31	$\sin^2(t)$	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+4}\right)$	ROC
32	$\sin(at)\cdot\sin(bt)$	$\dfrac{2abs}{[s^2+(a+b)^2]\cdot[s^2+(a-b)^2]}$	ROC

A 8-1. táblázat alkalmas az inverz transzformáció gyorsabb meghatározására, melynek folyamata során az operátortartományban levő kifejezést igyekszünk táblázatos formák lineáris kombinációja formájában felírni. Az így meghatározott idő tartománybéli alak minden esetben $t \geq 0$ esetre érvényes.

8.5. A Laplace transzformáció alkalmazása a jelek és rendszerek területén

A Laplace transzformáció lineáris, ezért elvárható, hogy hatékonyan alkalmazható lineáris rendszerek matematikai modelljének elemzésére és rendszerek szintézisére. Az előzőek során már tárgyaltuk, hogy az LTI SISO rendszerek matematikai modellje időtartományban minden esetben állandó együtthatós n-ed rendű differenciálegyenlettel írható le a következők szerint:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \qquad (8\text{-}27)$$

vagyis:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t) \qquad (8\text{-}28)$$

Ugyancsak már szó volt arról, hogy az SISO LTI rendszer válasza időtartományban számítható a rendszerre jellemző súlyfüggvény és az aktuális bemeneti jel konvolúciójával $y(t) = u(t) * g(t)$.

A frekvenciaátviteli függvényhez a súlyfüggvény Fourier transzformációjával jutottunk és a segítségével amplitúdóváltoztatás és fázismódosítás szempontjából elemeztük az LTI rendszereket.

Most a differenciálásra és a linearitásra vonatkozó szabályok figyelembevételével végezzük el a fenti egyenlet Laplace transzformációját.

$$\mathcal{L}\left\{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)\right\} \quad \text{.... (8-29)}$$

A transzformáció elvégzéséhez jelöljük a kimeneti és bemeneti jel transzformáltját az alábbiak szerint: $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ és $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. A transzformáció lineáris, az időtartományban levő derivált megfelelője a s-el való szorzás a frekvencia tartományban, az n-ediké pdig $(s)^n$. Így a transzformáció elvégzése után eljutunk a differenciálegyenlet operátortartományban levő képéhez.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,(s)^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i\,(s)^i U(s) + E(s) \quad \text{.... (8-30)}$$

Ahol az $E(s)$ arányosan tartalmazza az egyoldalas Laplace transzformáció során jelentkező kezdeti feltételeket. A továbbiakban feltételezzük, hogy a kezdeti feltételek nullák, ekkor $E(s) = 0$. Rendezzük a transzformált egyenletet $Y(s)$ és $U(s)$ kiemelésével, ami következőt eredményezi:

$$Y(s)\sum_{i=0}^{n} a_i\,(s)^i = U(s)\sum_{i=0}^{m} b_i\,(s)^i \quad \text{.... (8-31)}$$

$Y(s)$ és $U(s)$ hányadosát keresve:

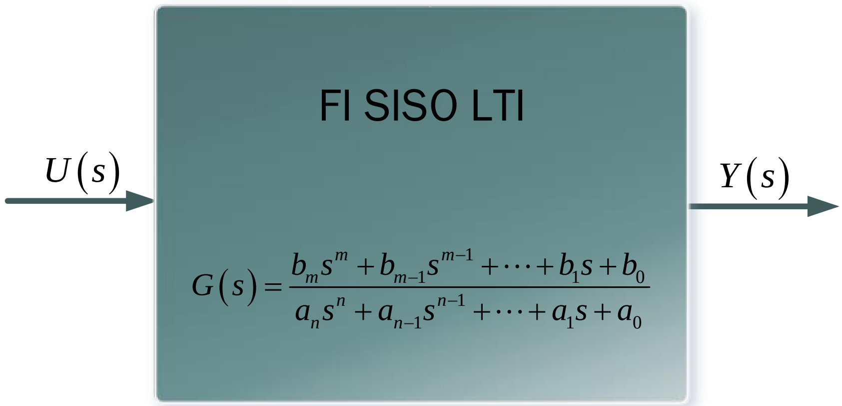
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (s)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (s)^i} = G(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad \text{.... (8-32)}$$

jutunk a $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ átviteli függvényhez. Figyelembe véve, hogy idő tartományban $y(t) = u(t) * g(t)$, operátortartományban pedig $Y(s) = U(s) \cdot G(s)$ valamint, hogy az időtartományban vett konvolúció operátortartományban egyszerű szorzás, belátható hogy az átviteli függvény a súlyfüggvény Laplace transzformáltja $g(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)$.

Az LTI rendszerek frekvenciaátviteli függvénye és átviteli függvénye közötti átváltás egyszerű helyettesítéssel lehetséges. $G(s)$ -ből úgy kapható $G(j\omega)$, hogy $s = \sigma + j\omega$ esetében $\sigma = 0$ –át veszünk, tehát egyszerűen alkalmazzuk az $s = j\omega$ helyettesítést. Az kapott frekvenciaátviteli függvény teljes értékűen vizsgálható, pont úgy mintha a dinamikus rendszermodellt Fourier transzformációval állítottuk volna elő. Az átváltás s tartományba hasonlóképen működik. Egyszerűen csak $j\omega$ helyett s –t írunk.

Kijelenthető, hogy az átviteli függvény információt szolgáltat az általa modellezett rendszer szűrési képességéről és az időtartományban tapasztalható viselkedéséről egyaránt. Ezért egy átviteli függvénynek egyaránt nagy jelentősége van a jelfeldolgozás a rendszer elemzés és rendszer szintézis területén.

A 8-1. ábra szemléltet egy olyan dinamikus rendszert mely az átviteli függvényével meghatározott. A rendszernek, mint tagnak van bemenő jele, mely működésre készteti a tagot és kimenő jele, amely a tag jelformálása után kialakuló hatásként jelentkezik.



8-1. ábra. – Az átviteli függvénnyel meghatározott SISO LTI tag.

Az átviteli függvényt az LTI rendszer differenciálegyenletéből Laplace transzformáció módszere segítségével származtatjuk, úgymint a jelátviteli tag nulla kezdeti feltételű kimenő és bemenő jelei Laplace transzformáltjának hányadosát.

8.5.1. Az átviteli függvény alakjai

Az átviteli függvény valóságban két polinom hányadosa és magában hordozza az általa leírt rendszer dinamikus és statikus viselkedésére vonatkozó minden fontos információt. Az átviteli függvény polinomjai a $Q_n(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i\,(s)^i$ és a $P_m(s)=\sum_{i=0}^{m} b_i\,(s)^i$. A valóságban létrehozható rendszerek esetére igaz, hogy $n \geq m$ ellenkező esetben a rendszer nem kauzális és nem valósítható meg a gyakorlatban.

Matematikai szempontból a polinomok különböző formában írhatók fel. Az egyes formák mindegyike alkalmas, az átviteli függvénnyel meghatározott rendszerre vonatkozó valamilyen információ direkt kinyerésére. Az átviteli függvény felírására használatos négy alak a következő:

- A polinomok felírása hatványok lineáris kombinációjának alakjában:

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad \text{(8-33)}$$

Ez az alak nyerhető ki a lineáris állandó együtthatós n-ed rendű differenciálegyenlettel, időtartományban megadott rendszermodell Laplas transzformálásával. Az ebben az alakban szereplő nevező polinomja megegyezik a differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjával.

- A zérus-pólus alak:

$$G(s)=k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},\; k=\frac{b_m}{a_n} \qquad \text{(8-34)}$$

A zérus-pólus alak az egyes polinomok nullahelyeinek ismeretében írható fel. Az átviteli függvény zérusainak a számláló polinom gyökeit, míg pólusainak a nevező polinom gyökeit értjük. Az átviteli függvény értéke a zérusok helyén nulla, míg a pólusokén végtelen. A zérusok és pólusok ismeretében direkt információt kapunk a rendszer dinamikus viselkedéséről, stabilitásáról. Ebből az alakból egyértelműen látszik a többtárolós rendszer kaszkádba kötött (sorba kötött) alrendszerek segítségével történő megvalósíthatósága. A pólusok száma és értéke egyértelműen leírja a rendszerben található n darab energiatároló viselkedését.

- A részlettörtes alak:

$$G(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s-p_i} \qquad \text{(8-35)}$$

, ahol r_i a reziduumok értékeit jelöli.

Ebből az alakból egyértelműen látszik a rendszernek párhuzamosan kötött alrendszerekből való megvalósíthatósága. Ebből az alakból lehet könnyedén, táblázatból elvégezni az inverz Laplace transzformációt.

- Az időállandós alak:

$$G(s)=A\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots(1+sT_n)}, \qquad \text{(8-36)}$$

a számlálóban jelentkező időállandók $\tau_i=-\frac{1}{z_i}$, és anevezőben jelentkező időállandók $T_i=-\frac{1}{p_i}$, melyek mindkét esetben valós, vagy komplex számok.

Átviteli tényező:

$$A = \frac{b_0}{a_0} = k\frac{(-z_1)\cdots(-z_m)}{(-p_1)\cdots(-p_n)} \qquad \text{(8-37)}$$

Az időállandós alak egyértelműen mutatja, hogy milyen sebességgel zajlanak az egyes energiatárolókhoz köthető átmeneti jelenségek. Kiszűrhető a domináns időállandó, esetleg a rendszer szétbontható gyors és lassú alrendszerre.

8.5.2. Az LTI rendszer jellege

Elvonatkoztatva attól, hogy az átviteli függvény milyen valós fizikai megvalósítású rendszer matematikai modellje, mindenképp megadj az általa reprezentált rendszer jellegét. Mivel az átviteli függvényben szereplő számláló és nevező polinomok együtthatói valós számok, így gyökeik háromfélék lehetnek: a nulla, valós szám és konjugált komplex gyökpár. Ezek az értékek egyértelműen információt szolgáltatnak a modellezett rendszer viselkedéséről és jellegéről. Például legyenek $p_1 = -(\sigma_1 + j\varsigma_1)$ és $p_2 = -(\sigma_1 - j\varsigma_1)$ $p_1 = \overline{p}_2$ konjugált komplex pólusok. Ekkor ezek a pólusok a rendszerben szereplő olyan energiatároló párról árulkodnak, melyek lengő viselkedést eredményeznek. Ugyanis:

$$(s-p_1)(s-p_2) = (s+(\sigma_1 + j\varsigma_1))(s+(\sigma_1 - j\varsigma_1)) \qquad \text{(8-38)}$$

és

$$(s-p_1)(s-p_2) = s^2 + 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \varsigma_1^2 = s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 \qquad \text{(8-39)}$$

, ahol $\omega_0^2 = \sigma_1^2 + \varsigma_1^2$ a csillapítatlan sajátfrekvencia melynek periódusideje: $T_0 = \frac{1}{\omega_0}$ és $\delta = -\frac{\sigma_1}{\omega_0}$ pedig csillapítási tényező. A kéttárolós alrendszer időállandós formában pedig

$$s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{2\delta}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2\right), s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = \omega_0^2\left(1 + 2\delta T_0 s + T_0^2 s^2\right). \qquad \text{(8-40)}$$

Vegyük észre, hogy az ezzel a modellel leírható rendszert az előzőkben már tárgyaltuk. A valós gyök mindenkor egy időállandót határoz meg és egy adott energiatárolót jellemez.

A nulla gyök pedig integrálást vagy differenciálást jelent, attól függően, hogy a nevező vagy a számláló gyöke.

Elmondható, hogy az átviteli függvény gyöktényezős alakja általános felírásban, úgy a számlálóban, mint a nevezőben tartalmazhat többszörös valós és konjugált komplex gyököket. Ezek multiplicitása rendre $\mu_k, \eta_k, \lambda_k, \xi_k$, a különböző gyökök száma pedig M_R, M_c, N_R, N_c.

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{b_m \prod_{k=1}^{M_R}(\beta_k + s)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c}\left(\gamma_k^2 + \rho_k^2 + 2\gamma_k s + s^2\right)^{\eta_k}}{a_n s^{\nu} \prod_{k=1}^{N_R}(\alpha_k + s)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c}\left(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2 + 2\sigma_k s + s^2\right)^{\xi_k}}, \qquad \text{(8-41)}$$

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_R}(1 + s/\beta_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c}\left(1 + 2\gamma_k s/(\gamma_k^2 + \rho_k^2) + s^2/(\gamma_k^2 + \rho_k^2)\right)^{\eta_k}}{s^{\nu} \prod_{k=1}^{N_R}(1 + s/\alpha_k)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c}\left(1 + 2\sigma_k s/(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2) + s^2/(\varsigma_k^2 + \sigma_k^2)\right)^{\xi_k}}, \qquad \text{(8-42)}$$

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_R}(1 + s\tau_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c}\left(1 + 2\varepsilon_k \tau_{0k} s + s^2\tau_{0k}^2\right)^{\eta_k}}{s^{\nu} \prod_{k=1}^{N_R}(1 + sT_k)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c}\left(1 + 2\delta_k \tau_{0k} s + s^2 T_{0k}^2\right)^{\xi_k}}, \qquad \text{(8-43)}$$

A többszörös nulla gyököt, ha van, minden esetben a nevezőbe helyezzük. A nulla mint gyök multiplicitása legyen ν . Az így felvett átviteli függvény meghatározza az általa leírt rendszer jellegét. A rendszer jellegének vizsgálatakor a rendszer bemenetére egységugrást vezetünk és szemléljük a kimeneti jelet. Három jellegzetes esetet különböztethetünk meg:

- $\nu < 0$ - esetén differenciáló jelleget, a rendszer gyorsan reagál az egységugrásra miután a kimenet állandósult értéke nulla lesz, mert valójában a nulla a számlálónak gyöke és az s el való szorzás differenciálást jelent az idő tartományban, jele a „D";
- $\nu = 0$ - arányos jelleg, mely esetben a rendszer állandósult állapota A értéke szerint arányos lesz a bemeneti jel értékével, az átmenet dinamikáját a többi zérus és pólus adja meg, jele a „P";
- $\nu > 0$ - integráló jelleg, a kimenet állandósult értéke állandóan növekvő lesz, mert valójában a nulla a nevező gyöke és az s el való osztás integrálást jelent az idő tartományban, jele az „I".

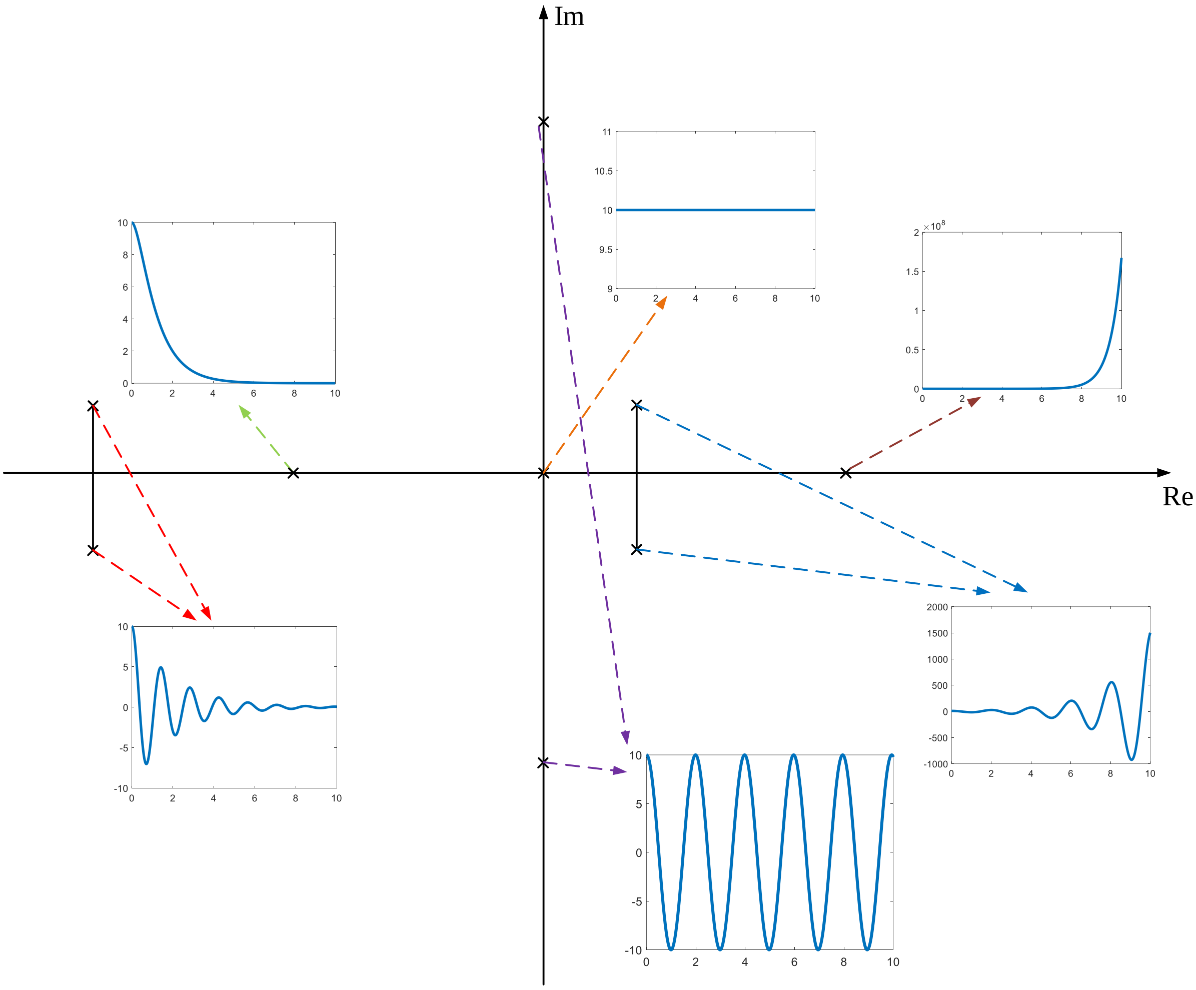
Vizsgálójelek tekintetében az egyszeresen differenciáló jellegű rendszereknél alkalmas jel a sorompófüggvény a kétszeresen differenciáló jellegű rendszerek esetében a gyorsulásfüggvény, míg az integráló jellegű rendszerek vizsgálójele gyakran a Dirac delta impulzus.

A jellegek figyelembe vételével, az alábbiakban felsorolásra kerül néhány tipikus alaptag:

- PT0 –tag nulla energiatárolóval rendelkező arányos tag, ez valójában egy egyszerű erősítés, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = A$ alakú, esetében $\nu = 0$;
- PT1 –tag egytárolós, vagyis egy energiatárolóval rendelkező arányos tag, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_0(s)}{Q_1(s)} = \frac{A}{s+p}$ alakú, esetében $\nu = 0$;
- PT2 –tag kéttárolós, vagyis két energiatárolóval rendelkező arányos tag, ami valós pólusok esetében aperiodikus, míg konjugált komplex póluspárok esetében periodikus viselkedést mutat, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_0(s)}{Q_2(s)} = \frac{A}{(s+p_1)(s+p_2)}$ vagy $G(s) = \frac{A}{s^2+2\delta\omega_0 s+\omega_0^2}$ alakú, esetében $\nu = 0$;
- I0 –tag a tiszta integrátor, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_0(s)}{Q_1(s)} = \frac{A}{s}$ alakú, esetében $\nu = 1$;
- I1 –tag az egy időállandós integrátor, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_0(s)}{Q_2(s)} = \frac{A}{s(Ts+1)}$ alakú, esetében $\nu = 1$;
- D0 –tag az ideális differenciátor, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_1(s)}{Q_0(s)} = Ts$ alakú, esetében $\nu = -1$, ez a rendszer magában nem megvalósítható, mert $n < m$;
- D1 –tag az egytárolós differenciátor, matematikai modellje $G(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{Ts}{(s+p)}$ alakú, esetében $\nu = -1$, ez a rendszer már megvalósítható, mert $n = m$;
- PH –tag az arányos holtidős tag vagy az egyszerű szállítási késés, matematikai modellje $G(s) = Ae^{-s\tau}$ alakú, esetében $\nu = 0$;

Minden LTI rendszer modellje elvileg előállítható 6 alaptag valamilyen kapcsolásával. Ezek az alaptagokot a PT0, PT1, PT2, I0, D0 és a PH.

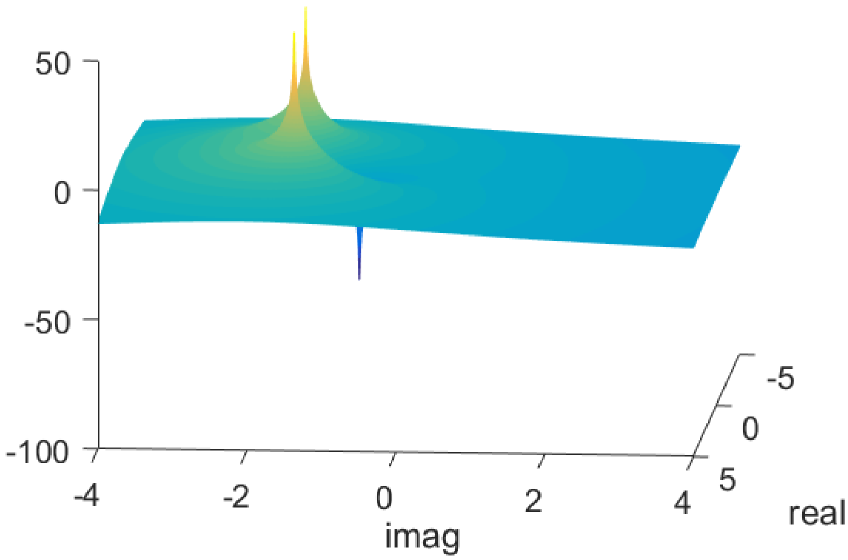
Adja magát a lehetőség, hogy a rendszerre jellemző pólusokat és zérusokat a komplex síkban ábrázoljuk. Ökölszabály, hogy a pólusokat x-el a zérusokat pedig körrel ábrázoljuk. A pólusok helye egyértelműen megadja a hozzá tartozó súlyfüggvényt/átmenetifüggvényt. A 8-2. ábra szemlélteti a tipikus eseteket.



8-2. ábra. – Az LTI rendszer pólusaihoz tartozó tipikus súlyfüggvények.

A valós és képzetes tengelyek a komplex síkot négy részre osszák. Az első negyedben a valós és a képzetes rész is pozitív, a második negyed az óramutatóval ellentétes irányban következik az első után és így tovább a harmadik és a negyedik negyed. Amennyiben a pólusok multiplicitása egy akkor:

- a második és harmadik negyedben levő pólusokhoz tartozó súlyfüggvény amplitúdója az idő múlásával exponenciálisan csökken;
- az első és a negyedik negyedben levő pólusokhoz tartozó súlyfüggvény amplitúdója az idő múlásával exponenciálisan növekszik;
- amennyiben a képzetes rész nulla, a pólus a valós tengelyen van, a súlyfüggvény jellege aperiodikus;
- amennyiben a képzetes rész nem nulla, a súlyfüggvény jellege periodikus;
- nulla valós rész esetében, a pólusok a képzetes tengelyen vannak, a súlyfüggvény harmonikus lengést mutat.



8-3. ábra. – Egy konjugált póluspárral és egy valós zérussal rendelkező rendszer átviteli függvényének modulusa decibelben

A 8-3. ábra szemlélteti a $G(s) = \frac{P_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s+1}{(s+2-j)(s+2+j)}$ átviteli függvénnyel megadott rendszernek a komplex sík felett vett erősítésének változását decibelben.

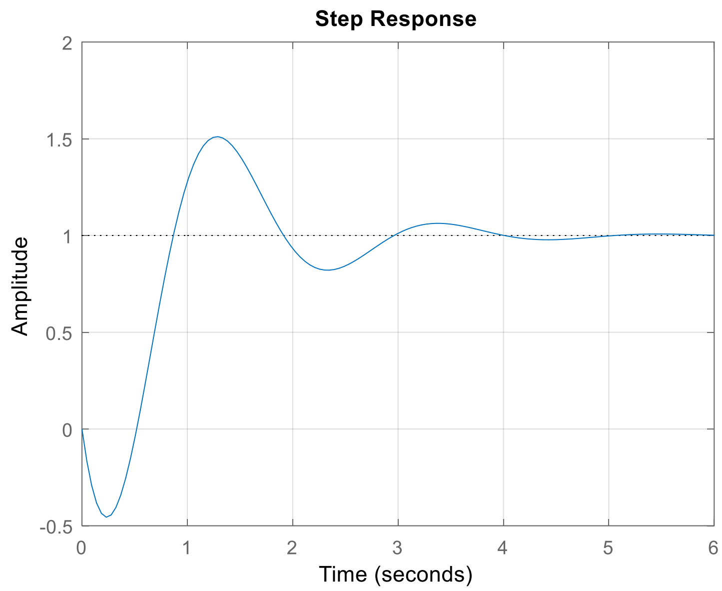
Az LTI rendszer stabilitásáról is szolgáltat információt a pólusok komplex síkban elfoglalt helye.

- Amennyiben a rendszer minden pólusa a második és harmadik negyedben helyezkedik el, a rendszer stabil, stabilis.
- Amennyiben a rendszernek van olyan pólusa, amelyik a képzetes tengelyen van, a rendszer a stabilitás határán van.
- Amennyiben a rendszernek van olyan pólusa, ami az első és a negyedik negyedben van, a rendszer instabil, labilis.

A rendszerre vonatkozó átviteli függvény zérusai differenciáló hatást jelentenek. Legyen egy LTI rendszernek $s = -z$ stabil zérusa. Ekkor ha $Y(s) = U(s) \cdot G(s)$, kiemelve a stabil zérust $G(s)$ felbontható $G(s) = \left(1 + \frac{s}{z}\right) G_1(s)$ alakban, akkor a kimenet számítása: $Y(s) = U(s)\left(G_1(s) + \frac{s}{z} G_1(s)\right)$ lesz. Vezessük be az $Y_1(s) = U(s)G_1(s)$ és az $y_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y_1(s)$ jelöléseket. Ismeretes, hogy az s el való szorzás differenciálást jelent idő tartományban, ezért: $\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s) = U(s)\left(G_1(s) + \frac{s}{z} G_1(s)\right)\right\} = y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z}\frac{y_1(t)}{dt}$. Tehát a stabil zérus (a komplex sík bal oldalán elhelyezett) gyorsítja a rendszert, a kimenet változásával megegyező irányú komponenst ad a jelhez.

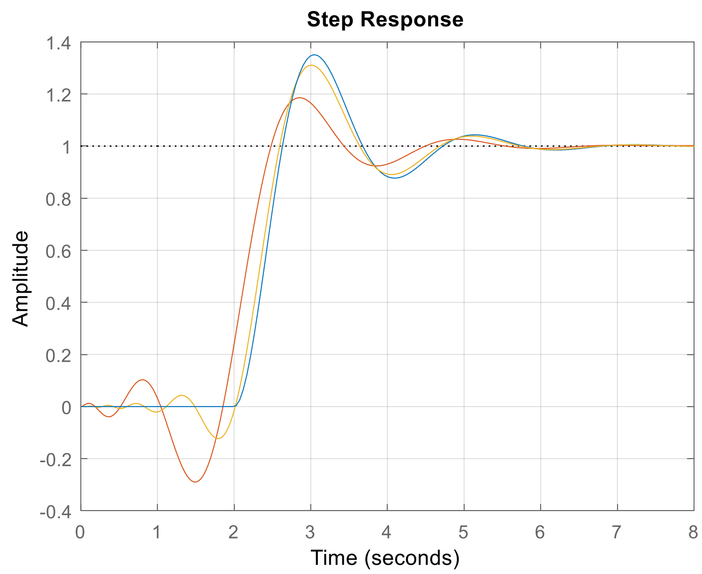
Amennyiben egy rendszernek van zérusa a komplex sík jobb felén, akkor nem minimumfázisú rendszerről beszélünk. A nem minimumfázisú rendszer súlyfüggvényének első szakaszában jelentkezik egy negatív irányú elhajlás, amely csak egy bizonyos idő elteltével vált át a pozitív irányra. Az előző példához hasonlóan most $s = z$ egy instabil zérus. Ekkor $Y(s) = U(s)\left(G_1(s) - \frac{s}{z} G_1(s)\right)$ lesz és az ehhez tartozó időfüggvény: $y(t) = y_1(t) - \frac{1}{z}\frac{y_1(t)}{dt}$, ami azt jelenti, hogy a jel meredekségével ellenkező irányában jelentkezik egy jelkomponens. Csak szemléltetésül, ha például egy személygépkocsi kormányszervo rendszere ilyen lenne, akkor a kormánykerék jobbra fordítása először a kerekek balra, majd egy idő múlva jobbra való csavarodását eredményezné.

Instabil zérussal rendelkező arányos rendszer átmeneti függvénye legalább annyiszor szeli át a nulla egyenest ahány instabil zérusa van a rendszernek. Az instabil zérus valójában késést visz be az átmeneti függvénybe (8-4. ábra).



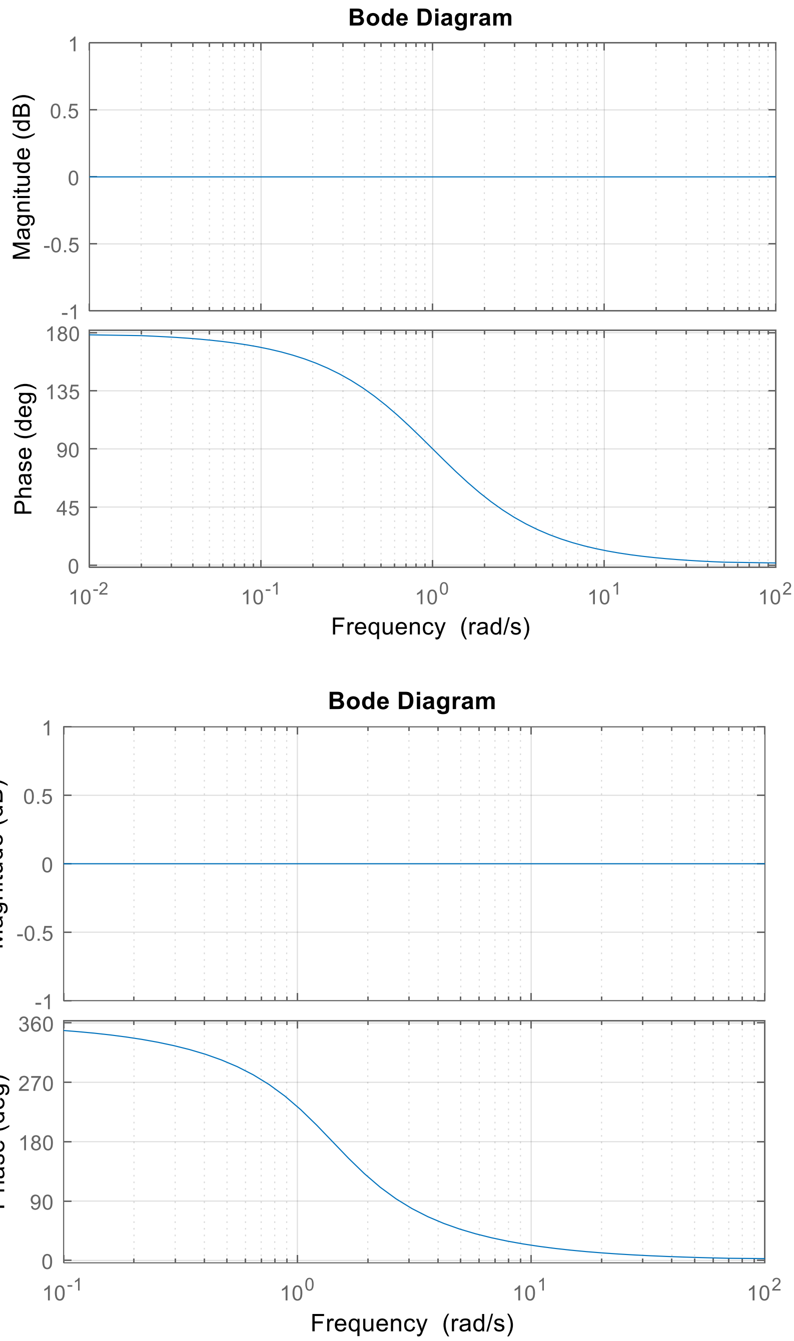
8-4. ábra. – Példa egy instabil zérusra, itt $G(s) = \frac{10-4s}{s^2+2s+10}$.

A 8-1. táblázat hetedik sora az idő tartományban levő szállítási késéssel foglalkozik. Valójában a holtidős tag, vagyis a szállítási késés, approximálható n számú instabil zérussal és stabil pólussal a Padé képlettel a következők szerint: $e^{-\tau s} = \frac{\left(1-\frac{\tau}{2n}s\right)^n}{\left(1+\frac{\tau}{2n}s\right)^n}$, melynek eredménye a 8-5. ábra látható.



8-5. ábra. – A Padé approximáció ereménye, ahol $G(s) = \frac{10}{s^2+2s+10}e^{-2s}$ *, és* $n = 4$ *és* $n = 10$.

Amennyiben egy LTI rendszer pólusai és zérusai a képzetes tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, akkor minden frekvenciát áteresztő szűrőről beszélünk. Ilyenek például a $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$ és a $G(s) = \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2}$ rendszerek vagy például a Padé approximáció.



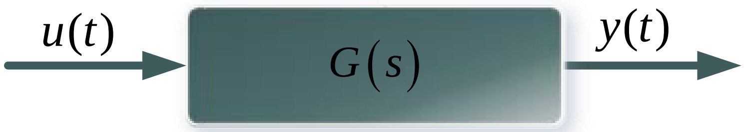
8-6. ábra. – A minden frekvenciát áteresztő rendszer fázis és amplitúdó görbéje.

A mindent áteresztő szűrő (all-pass filter) feladata nem az amplitúdó módosítás, hanem a fázisfordítás. A 8-6. ábra két különböző rendszerre vonatkozóan Bode diagramokon keresztül szemlélteti a mindent áteresztő szűrő hatását a különböző frekvenciákon.

Minden esetben elmondható, hogy időtartományban a rendszer egységugrásra adott válaszából, vagyis az átmeneti függvényből következtethetünk a rendszer jellegére. A rendszer dinamikus viselkedéséről a legtöbb információt a pólusaiból és zérusaiból szerezhetjük.

8.6. Tagok hálózatba kapcsolása

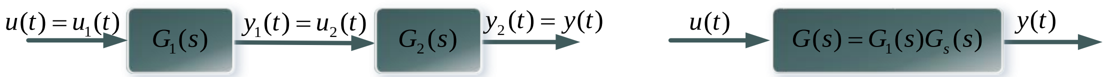
Az alábbiakban tagnak nevezzük azt a jelátviteli tulajdonságával jellemzett egységet amelynek egyértelműen meghatározható bemenete és kimente van. A tagon keresztül zajló információfeldolgozás iránya egyértelmű. Tömbvázlatos formában egy átviteli függvényével meghatározott tagot a 8-7. ábra mutatja, ahol: $\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}}$ és $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} U(s)$, $y(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s)$. Mivel $\mathrm{Y(s) = G(s)U(s)}$ és $\{y(t) = g(t) * u(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \{\mathrm{Y(s) = G(s)U(s)}\}$, így $g(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)$.



8-7. ábra. – Az átviteli függvényével meghatározott tag.

A gyakorlatban előforduló rendszerek csak nagyon ritkán állnak egy tagból, általában tagok egyszerű, vagy összetett kapcsolásával állunk szemben. Ezen tagok mindegyike egy-egy fizikai alrendszer jelátviteli tulajdonságát hordozza magában és fizikailag a struktúrában ott a helyük, ahol vannak, csak nagyon ritkán mozgathatók át máshova. Ami azt jelenti, hogy azoktól a tagoktól kapják a bemenő jelet, melyeket a teljes rendszer megvalósíthatósága és funkcionalitása megkövetel, valamint, hogy kimenetükön keresztül azon tagok számára szolgáltatnak információt, melyek ezt a valóságban elnyelik. Egy összetett rendszer elemzése során olyan eredő átviteli függvényt keresünk, mely a ki/bemeneti jelátviteli funkcióját tekintve helyettesítheti az eredeti rendszerben szereplő alrendszert. Az eredő átviteli függvény gyakran csak elemzési célt szolgál, megvalósítás tekintetében figyelembe kell venni a mindenkori fizikai rendszer lehetőségeit, elemeinek funkcionalitását. Rendszer szintézis esetében is ez a helyzet. Általában egy adott funkció megvalósítását végző rendszer megtervezése és kivitelezése a feladat. A tervezésül kapott rendszermodell megvalósításakor figyelembe kell venni a valós rendszer lehetőségeit. Olyan átviteli függvényekre kell bontani a tervezés eredményét, hogy egyértelműen megvalósítható legyen a matematikai modellnek megfelelő fizikai rendszer. Alrendszereknek, rendszerfunkcióknak számítógépen, mikrokontrolleren történő megvalósításkor általában implementálható a funkcióra vonatkozó diszkretizált matematikai modell. Mégis kijelenthető, hogy úgy az rendszerelemzés min a rendszerszintézis megköveteli a tagok kapcsolásának ismeretét.

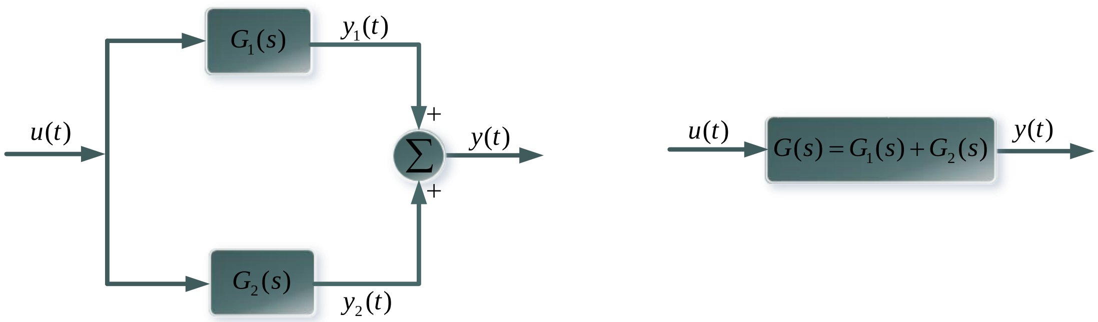
Két tag kaszkád, soros kapcsolása esetében az első rendszer kimenete egyben a második rendszer bemenete is (8-8. ábra). Ilyenkor az eredő átviteli függvény a két átviteli függvény szorzatával egyenlő. Ugyanis: $\mathrm{Y_1(s) = G_1(s)U(s)}$, $\mathrm{Y(s) = G_2(s)Y_1(s)}$, behelyettesítve: $\mathrm{Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)}$ és az eredő átviteli függvény a két átviteli függvény szorzata: $G\mathrm{(s) = G_1(s)G_2(s)}$.



8-8. ábra. – Két tag kaszkád kötése.

Több tag kaszkád kapcsolása esetén $G\mathrm{(s)} = \prod_{i=1}^{n} G_i\mathrm{(s)}$ érvényes a szukcesszív szorzás. Elemzés és kiértékelés szempontjából érdektelen, hogy a szorzásra milyen sorrendben tekintünk, de a gyakorlati megvalósítás során a sorrend általában fontos.

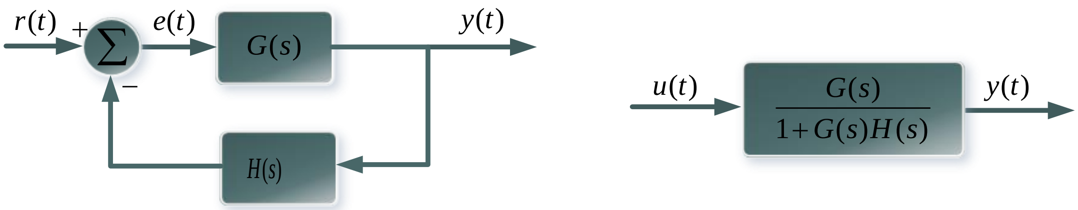
Két tag párhuzamos kapcsolására az a jellemző, hogy mindkettő bemenete ugyanaz, a kimenetüket pedig összeadjuk egy eredő kimenetet eredményezve (8-9. ábra). A matematikai modell ekkor: $\mathrm{Y_1(s) = G_1(s)U(s)}$, $\mathrm{Y_2(s) = G_2(s)U(s)}$ és $Y\mathrm{(s) = Y_1(s) + Y_2(s)}$ és az eredő átviteli függvény párhuzamos kapcsolásnál: $G\mathrm{(s) = G_1(s) + G_2(s)}$.



8-9. ábra. – Két tag párhuzamos kötése.

Több tag párhozamos kapcsolására jellemző: $G(\mathrm{s}) = \sum_{i=1}^{n} G_i(\mathrm{s})$.

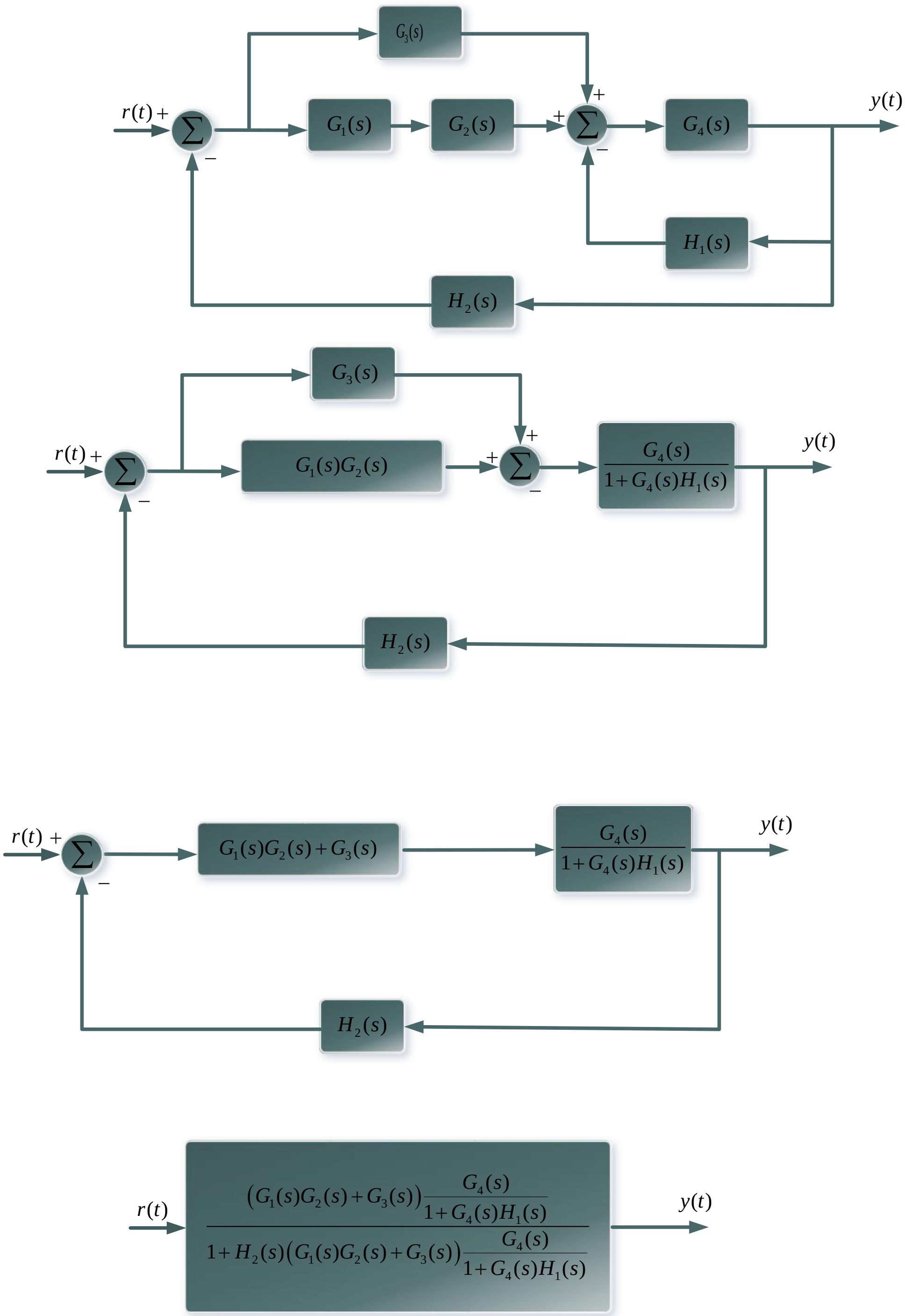
A kaszkád és párhuzamos kapcsolásnál a jel terjedési iránya egy. Visszacsatolás esetében a jel feldolgozási folyamban hurok jelentkezik. Megkülönböztetünk pozitív és negatív visszacsatolást. Amennyiben a $H(\mathrm{s})$ kimenete negatív előjellel szerepel az őt követő összeadóban akkor negatív a visszacsatolás ellenkező esetben pozitív. A 8-10. ábraán látható negatív visszacsatolás eredő átviteli függvényének meghatározása: $E(\mathrm{s}) = R(\mathrm{s}) - H(\mathrm{s})\mathrm{Y}(\mathrm{s})$, $Y(\mathrm{s}) = \mathrm{G}(\mathrm{s})\mathrm{E}(\mathrm{s})$, $Y(\mathrm{s}) = \mathrm{G}(\mathrm{s})\big(R(\mathrm{s}) - H(\mathrm{s})\mathrm{Y}(\mathrm{s})\big)$, $Y(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{G(s)}}{1+\mathrm{G(s)H(s)}} R(\mathrm{s})$, $Y(\mathrm{s}) = W(\mathrm{s})R(\mathrm{s})$ és végül az eredő átviteli függvény $\mathrm{W}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{G(s)}}{1+\mathrm{G(s)H(s)}}$ melynek nevezője az előrecsatolást számlálója pedig az $1 +$ hurokerősítást tartalmazza.



8-10. ábra. – A negatív visszacsatolás.

Tehát negatív visszacsatolásra érvényes hogy, $\mathrm{W}(\mathrm{s}) = \frac{\text{előrecsatolás}}{1+\mathit{hurokerősítés}}$, míg a pozitív visszacsatolásra pedig $\mathrm{W}(\mathrm{s}) = \frac{\text{előrecsatolás}}{1-\mathit{hurokerősítés}}$.

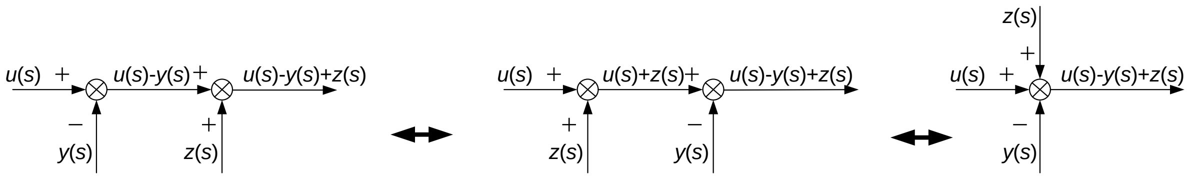
A valóságban előforduló rendszerek nagy hányada összetett kapcsolás, mely esetekben felfedezhetünk kaszkád és párhuzamos kötéseket és visszacsatolásokat egyaránt. A 8-11. ábra tartalmaz egy összetett kapcsolást a hozzá tartozó megoldással együtt.



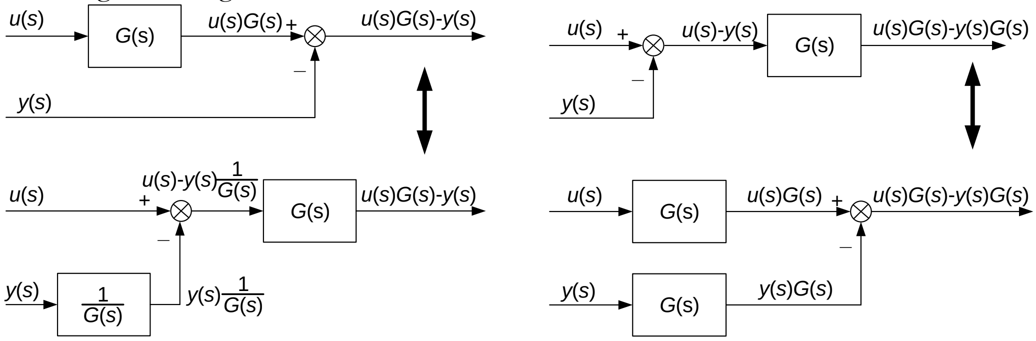
8-11. ábra. – Valóságban előforuló rendszer

A 8-11. ábra látható példa esetében egyértelmű volt az elemi kapcsolások mibenléte. Nem volt nehéz meghatározni a soros és párhuzamos kötéseket és a visszacsatolást. Vannak esetek, amikor átlapolások jelentkeznek az előre és visszacsatolásoknál. Ilyenkor átalakításokat kell eszközölni, melyek akkor lesznek helyesek, ha az átalakítás előtt és után az átalakított tagcsoport bemenetei és kimenetei nem változnak. Ilyen átalakítások:

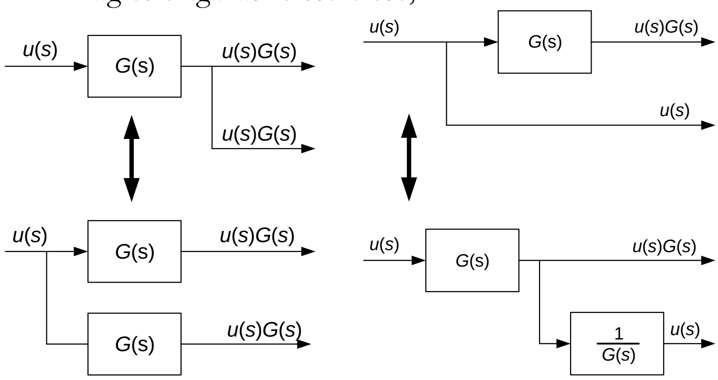
- az összegzők felcserélése, összevonása, szétbontása;



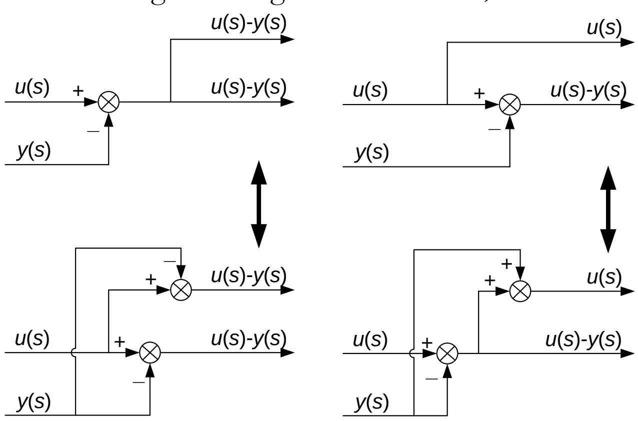
- tag és összegző felcserélése;



- tag és elágazás felcserélése;

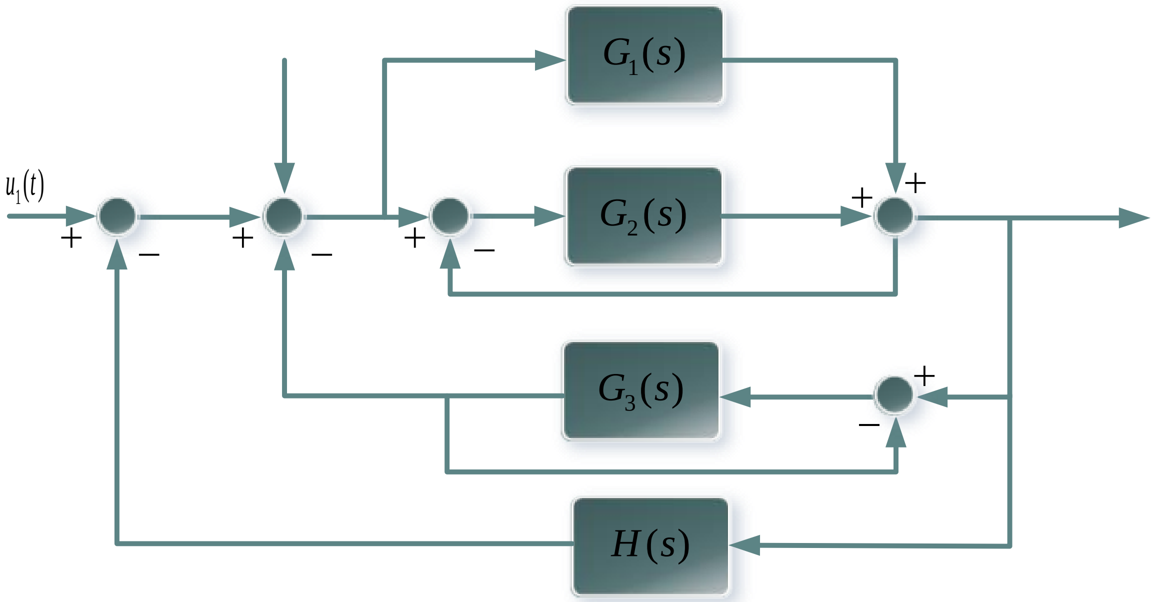


- összegző és elágazás felcserélése;



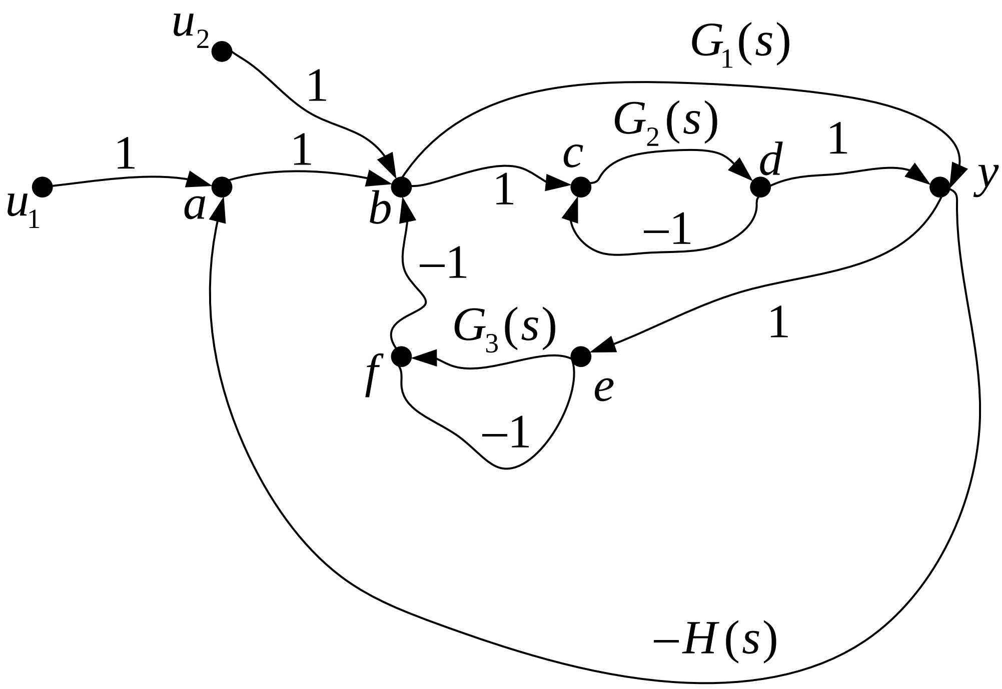
A felsorolt átalakítások hatékonyan hozzájárulnak az összetett kapcsolások eredőjének meghatározásához. A feladat gyakorlottságot és jó meglátást követel. A több bemenetű és több kimenetű tagokból álló összetett hálózat ki/bemeneti eredő átviteli függvényének számítására Samuel Jefferson Mason (1921–1974 Amerikai villamosmérnök http://en.wikipedia.org/wiki/Mason%27s_gain_formula) dolgozott ki algoritmust. A szakmában Mason szabályként ismert algoritmus számítógépen is implementálható. Az általa javasolt egyszerű algoritmus alapján kiszámítható a tagok összetett kapcsolásával megadott rendszer átviteli függvénye.

Következőkben egy két bemenettel és egy kimenettel rendelkező rendszer példáján keresztül az algoritmus bemutatása következik (8-12. ábra és 8-13. ábra).



8-12. ábra. – A rendszer tömbbvázlata.

A 8-12. ábra látható tömbvázlatból jel-folyam gráfot alkotunk mely a 8-13. ábra látható



8-13. ábra. – A jel-folyam gráfot.

A következő lépésben a gráf minden hurkának meghatározzuk a körerősítését. Hurok alatt az ágak azon sorát értjük, melyek esetében a kiindulópont megegyezik a végponttal, úgy, hogy az ágak irányítottságát figyelembe vesszük. A körerősítés az útvonalon levő ágak átvitelének szorzata.

A fellelhető hat hurok:

1. hurok *cdc* $\Delta_1 = -G_2(s)$
2. hurok *fef* $\Delta_2 = -G_3(s)$
3. hurok *bcdyefb* $\Delta_3 = -G_2(s)G_3(s)$

4. hurok *byefb* $\Delta_4 = -G_1(s)G_3(s)$
5. hurok *abcdya* $\Delta_5 = -G_2(s)H(s)$
6. hurok *abya* $\Delta_6 = -G_1(s)H(s)$

Az algoritmus következő pontja a gráf determinánsának kiszámítása a következők szerint:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i \Delta_i + \sum_{i,j} \Delta_i \Delta_j - \sum_{i,j,k} \Delta_i \Delta_j \Delta_k + \cdots \qquad (8\text{-}44)$$

Ahol az első összegben szerepel minden hurok körerősítése, a másodikban az összes nem érintkező páros szorzata, a harmadikban az összes nem érintkező hármas és így tovább. Nem érintkező hurkoknak tekinthetők azok, miknek nincs közös águk.

E szerint a példára vonatkozó determináns:

$$\Delta(s) = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6) + \\ +(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_4 + \Delta_1\Delta_6 + \Delta_2\Delta_5 + \Delta_2\Delta_6 + \Delta_3\Delta_6 + \Delta_4\Delta_5) - (\Delta_1\Delta_2\Delta_3) \qquad (8\text{-}45)$$

A gráf determinánsának meghatározását követően meg kell keresni minden utat, ami a bemeneteket és a kimeneteket összeköti. Kiszámítjuk az utak nyomán levő átviteli függvényeket és determinánsokat. Egy út nyomán levő átviteli függvény az úton fellelt átvitelek szorzata. Az útvonalhoz tartozó determináns számítása ugyanúgy történik, mint a gráf determinánsának számítása, azzal a különbséggel, hogy az adott úthoz tartozó hurkokat figyelmen kívül hagyjuk.

A példában fellelhető utak

1. u_1 bemenethez tartozó út *abcdy* $P_1^1 = G_2(s)$ a determináns $\Delta_1^1 = 1 - \Delta_2$,
2. u_1 bemenethez tartozó út *aby* $P_1^2 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_1^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1\Delta_2$,
3. u_2 bemenethez tartozó út *bcdy* $P_2^1 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_2^1 = 1 - \Delta_2$,
4. u_2 bemenethez tartozó út *by* $P_2^2 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_2^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1\Delta_2$.

Végül az átviteli függvény:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{P_1^1\Delta_1^1 + P_1^2\Delta_1^2}{\Delta} & \dfrac{P_2^1\Delta_2^1 + P_2^2\Delta_2^2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}46)$$

Amint látható a nevező minden átviteli függvénynél a gráf determinánsa. A számláló pedig az egyes utak erősítésének és a hozzájuk tartozó determináns szorzatának összege.

9. Diszkrétidejű jelek és rendszerek a z-operátor tartományban

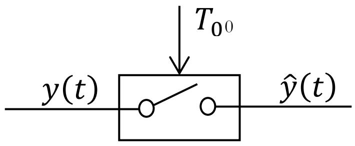
A DFT sikeresen alkalmazható diszkrétidejű jelek és rendszerek frekvenciatartományban levő vizsgálatára, szintézisére. Átmenti jelenségek, átmeneti folyamatok modellezésére, leírására kizárólag a frekvencia dimenziójában történő tárgylás azonban nem elegendő. Az eddigiek során alkalmazott Laplace transzformáció FI jelek és LTI rendszerek esetére vonatkozott. Keressünk egy alkalmas transzformációt, mely kiterjeszti a folytonos idejű jelek és rendszerek esetében használt Laplas transzformációt a diszkrétidejű jelek és rendszerek körére. Ennek a feladatnak a megoldásához ebben a fejezetben először megkeressük az ekvidisztáns lépésközzel mintavételezett folytonosidejű jel Laplace transzformáltját.

A $\mathcal{Z}$ transzformáció és annak inverze, valamint tulajdonságai is ebben a fejezetben kerül röviden bemutatásra. A fejezet emellett kitér a digitális és az analóg világ közötti átalakításokra, a különböző típusú tartószervekre.

9.1. A mintavételezett függvény Laplace-transzformáltja

A DI jel Laplace transzformáltjának meghatározásához tekintsünk egy $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ függvénnyel leírt FI jelet. Ideális mintavételezővel mintavételezve a jelet T_0 mintavételi periodussal jutunk a jel DI matematikai modelljéhez a következőképen: $\hat{y}(t) = y(t) \cdot comb(t)$,

$\hat{y}(t) = \cdots + y(-2T_0)\delta(-2T_0) + y(-T_0)y(t+T_0) + y(0)\delta(t) + y(T_0)\delta(t-T_0) + y(2T_0)\delta(t-2T_0) + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(y(iT_0)\delta(t-iT_0)\big)$, $i \in \mathbb{N}$.



9-1. ábra. – Ideális mintavételező

Az ideális mintavételező egy ideális kapcsolóból áll (9-1. ábra), amely állandó periodusonként, végtelen rövid ideig zárt állapotba kerül, minek hatására periodusonként megjeleníti a bemeneti jel pillanatnyi értékét a kimenetén. A folyamat modellezését megkapjuk ha az eredeti jel mintavételi pillanatokban vett értékeivel szorozzuk az ugyancsak mintavételi pillanatokban eltolt Dirac impulzusokat. Már tárgyaltuk, hogy a Laplace transzformáció adott az: $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt$ kifejezéssel, valamint, hogy az eltolt Dirac delta transzformáltnak a képe operátor tartományban $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}$ és, hogy a Laplace transzformáció lineáris $\mathcal{L}\{a \cdot y(t)\} = a \cdot Y(s)$, felhasználva a fenti definíciót és tulajdonságokat kapjuk az:

$$\hat{Y}(s) = \mathcal{L}\{\hat{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{y}(t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(y(iT_0)\delta(t-iT_0)\big)\Big]e^{-st}dt \quad \text{(9-1)}$$

összefüggést. Felcserélve az összeget és az integrált, valamint figyelembe véve azt, hogy az integrál csak a mintavételi pontokban létezik, és értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big(y(iT_0)\delta(t-iT_0)\big)e^{-st}dt = y[iT_0]e^{-siT_0} \quad \text{(9-2)}$$

akkor:

$$\hat{Y}(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(y[iT_0]e^{-siT_0}\big). \quad \text{(9-3)}$$

Mivel $\mathcal{L}_+\{\delta(t-iT_0)\} = 1 \cdot e^{-siT_0} = (e^{-sT_0})^i$, így a mintavételezett belépő jel jobboldali Laplace transzformáltja:

$$\hat{Y}_+(s) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(y_+[iT_0](e^{-sT_0})^i\right). \quad (9\text{-}4)$$

Vizsgáljuk meg a mintavételezett jel Laplace transzformáltjának periódusosságát, legyen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ a mintavételi periodusidőhöz tartozó körfrekvencia. Ekkor

$$\hat{Y}(s + k\omega_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0]e^{-siT_0}e^{-ik\omega_0 T_0}\right), k \in \mathbb{N}, \quad (9\text{-}5)$$

$$\hat{Y}(s + k\omega_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0]e^{-siT_0}e^{-ik\frac{2\pi}{T_0}T_0}\right) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0]e^{-siT_0}\overbrace{e^{-ik2\pi}}^{1}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0]e^{-siT_0}\right) = \hat{Y}(s). \quad (9\text{-}6)$$

Tehát a mintavételezett függvény mintavételi körfrekvenciája egyben a jel komplex képének periódusa. $\hat{Y}(s) = \hat{Y}(s + k\omega_0)$. Kijelenthető, hogy a komplex kép $k\omega_0$ tartományonként ismétlődik, így a jelben levő teljes információtartalom vizsgálatához, elég azt csak egy periodusra vizsgálni.

9.2. A $\mathcal{Z}$ transzformáció

Az előző részben tárgyaltuk, hogy a diszkrétidejű jel Laplace transzformáltja

$$\hat{Y}(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0](e^{-sT_0})^i\right) \quad (9\text{-}7)$$

, vagyis

$$\hat{Y}(s) = \cdots + y[-T_0]e^{T_0 s} + y[0] + y[T_0]e^{-T_0 s} +$$
$$+y[2T_0](e^{-T_0 s})^2 + y[3T_0](e^{-T_0 s})^3 + \cdots. \quad (9\text{-}8)$$

Az egyszerűbb felírási mód miatt végezzük el a

$$z = e^{T_0 s}$$

helyettesítést. Vegyük észre, hogy ez a helyettesítés valójában egy T_0 mintavételi periodussal való siettetést jelent. Ekkor a mintavételezett jel Laplace tartományban felírt modellje

$$\hat{Y}(z) = \cdots + y[-T_0]z^1 + y[0]z^0 + y[T_0]z^{-1} +$$
$$+y[2T_0]z^{-2} + y[3T_0]z^{-3} + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(y[iT_0]\cdot z^{-i}\right) \quad (9\text{-}9)$$

forma szerint alakul. Alkossunk egy vektort a jel egyes mintavételi időpontokban tapasztalt értékeiből a következők szerint: $[\dots, y[-2T_0], y[-T_0], y[0], y[T_0], y[2T_0], \dots]$ és egyet az eltolási operátor hatványaiból: $[\dots, z^2, z^1, z^0, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, z^{-4}, \dots]$. A mintavételezett jel Laplace tartománya felírhat e két vektor skaláris szorzataként: $\hat{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n}$.

Az így kapott transzformáció immár a $\mathcal{Z}$ transzformáció, melynek definíciója:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (9\text{-}10)$$

Fontos megjegyezni, hogy a $z = e^{T_0 s}$ helyettesítés kifejtve valójában egy komplex exponenciális, ugyanis

$$z = e^{T_0(\sigma + j\omega)} = e^{T_0\sigma}\left(cos(T_0\omega) + jsin(T_0\omega)\right) \quad (9\text{-}11)$$

Most következzen néhány fogalom meghatározása. Az $x[n]$ jel $\mathcal{Z}$ transzformáltjában szereplő $z = e^{T_0 s}$ a jel komplex frekvenciája. Azt a síkot, ahol ábrázoljuk a komplex frekvenciát, melyet két egymásra merőleges tengely határoz meg: az $Re\{z\}$ és az $Im\{z\}$ független tengelyek, z síknak nevezzük. Azt a tartományt, amit z meghatároz, $z-$ tartománynak nevezzük. Az exponens képzetes részét $Im\{T_0(\sigma + j\omega)\}$ nevezzük az igazi vagy valós frekvenciának. Amennyiben $\sigma = 0$, akkor $e^{T_0(0+j\omega)} = e^{T_0 0}\left(cos(T_0\omega) + jsin(T_0\omega)\right) = e^{j\omega T_0} = e^{j\Omega}$, a $z = e^{j\Omega}$ komplex változó ekkor az egység sugarú körön helyezkedik el és meghatározza a valós frekvenciák tartományát. A $\mathcal{Z}$ transzformáció esetében bevett jelölés még a $T_0 s = T_0(\sigma + j\omega) = \Sigma + j\Omega$, ahol $\Sigma = \sigma T_0$, még $\Omega = \omega T_0$, így $z = e^{(\Sigma + j\Omega)}$.

Példaként végezzük el a diszkrétidejű Dirac impulzus transzformálását $\mathcal{Z}$ tartományba. Ismert, hogy $\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$, és $\sum_{-\infty}^{\infty}(\delta[n]) = 1$. Alkalmazva a definíciót:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^{-0} = 1 \quad \text{(9-12)}$$

Egy másik példa legyen az Heaviside függvénynek, az egységugrás függvény $\mathcal{Z}$ transzformáltjának meghatározása, $h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$, $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$, amint látjuk ez egy mértani sor elemeinek összege, így : $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$. Mivel az előzők során már tárgyaltuk, hogy a Dirac impulzus integráltja időtartományban a Heaviside függvény, így várható, hogy a $\frac{z}{z-1}$ egyfajta integrálást jelent a $\mathcal{Z}$ tartományban. A $\frac{z-1}{z}$ reciprok pedig egyfajta differenciálást takar időtartományban.

9.3. Az inverz $\mathcal{Z}$ transzformáció

Az inverz $\mathcal{Z}$ transzformálás során, a jel $\mathcal{Z}$ transzformáltjából állítjuk elő a DI jel mintavételi pontokban vett értékeit. Az inverz transzformáció törvénye az inverz Fourier transzformáció törvényéből levezethető. Ismert, hogy $x_\Sigma[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m} d\Omega$, végezzük el a $z = e^{(\Sigma + j\Omega)}$ helyettesítést, $dz = jz d\Omega$, ekkor $x_\Sigma[m] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Omega=0}^{\Omega=2\pi} X(z) z^{-1} e^{-\Sigma m} z^m dz = \frac{e^{-\Sigma m}}{2\pi j} \int_{\Omega=0}^{\Omega=2\pi} X(z) z^{m-1} dz$. Az integrálás határai még mindig Ω-tól függnek, amikor Ω értéke nulla és 2π között mozog, akkor z egy $|z| = e^{\Sigma}$ sugarú kör mentén, az óramutató járásával ellentétesen forog. Az egyenlet mindkét oldalát leosztva $e^{-\Sigma m}$-el jutunk az:

$$x[m] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{m-1} dz \quad \text{(9-13)}$$

körintegrálhoz, mely az inverz transzformáció definíciója. A gyakorlatban, az inverz transzformáció megoldásához csak nagyon ritkán alkalmazzuk a fenti képletet, inkább a Cauchy-féle integráltételt, vagyis reziduumokon vagy táblázaton keresztül jutunk az idősorhoz.

9.3.1. Az egyoldalas $\mathcal{Z}$ transzformáció

Az egyoldalas Laplace transzformációhoz hasonlóan a belépő DI jelekre és a kauzális DI rendszerekre alkalmazható egyoldalas $\mathcal{Z}$ transzformáció.

$$X(z) = \mathcal{Z}_+\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad \text{(9-14)}$$

Az egyoldalas transzformáció nagy szerepet tölt be a gyakorlatban. Például, segítségével vizsgálhatók a nem nulla kezdeti feltételekkel rendelkező DI rendszerek átmeneti jelenségei.

9.4. A $\mathcal{Z}$-transzformáció néhány tétele

A $\mathcal{Z}$ transzformáció valójában a DI jel Laplace transzformáltjaként került bevezetésre, így várhatóan hordozza magában annak tulajdonságait. Az alábbiakban bizonyítás nélkül a teljesség igényét mellőzve felsorolásra kerül néhány tulajdonság:

Az összeadásra vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{x[n] + y[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\} + \mathcal{Z}\{y[n]\}$;

A konstanssal való szorzásra vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{c \cdot x[n]\} = c \cdot \mathcal{Z}\{x[n]\}$;

A linearitás tétele, tulajdonsága: $\mathcal{Z}\{a \cdot x[n] + b \cdot y[n]\} = \mathrm{a} \cdot \mathcal{Z}\{x[n]\} + b \cdot \mathcal{Z}\{y[n]\}$;

A késleltetésre vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{x[n-d]\} = z^{-d} \mathcal{Z}\{x[n]\}, d \geq 0$;

A jel előrehozatalra vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{x[n+d]\} = z^d \left[\mathcal{Z}\{x[n]\} - \sum_{i=0}^{\mathrm{d}-1} x[i] z^{-i}\right], d \geq 0$;

A csillapításra vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{x[n] e^{-\sigma n T_0}\} = \mathrm{X}(z e^{\sigma T_0})$;

A kezdőérték tétel: $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$;
A végérték tétel: $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$;
Szukcesszív összedás: $\mathcal{Z}\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{z}{z-1}X(z)$;
Idő tartományban való visszatekintő differenciál: $\mathcal{Z}\{x[n] - x[n-1]\} = \frac{z-1}{z}X(z)$;
Differenciálás operátor tartományban: $\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -\mathrm{z} \cdot \frac{d\mathcal{Z}\{x[n]\}}{dz}$;
A konvolúcióra vonatkozó szabály: $\mathcal{Z}\{x[n] * g[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\} \cdot \mathcal{Z}\{g[n]\}$.

9.4.1. Néhány tipikus $\mathcal{Z}$ transzformált és szabály

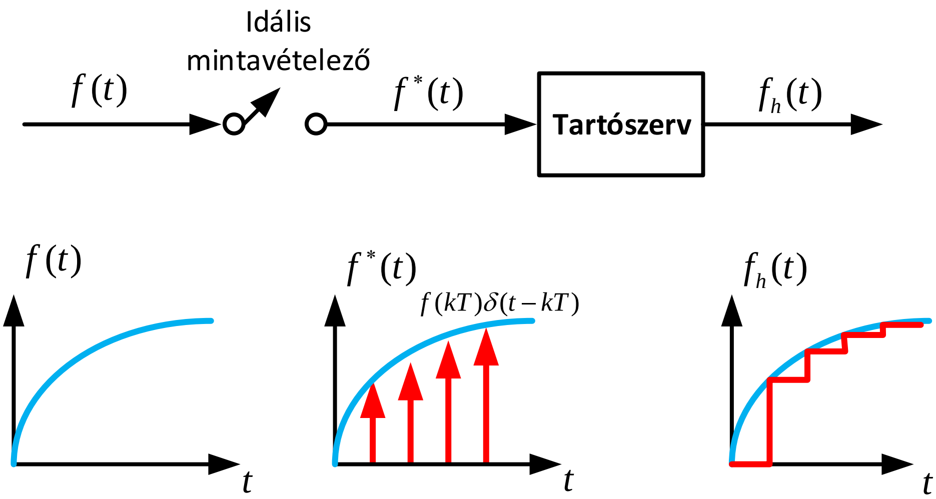
A 9-1. Táblázat összefoglalva tartalmaz néhány tipikus transzformáltat és szabályt.

9-1. Táblázat– Z-transzformációs párok

	Függvény	Z-transzformált	Értelmezési tartomány
1	$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	1	$z\in C$
2	$\delta[n-N]$	z^{-N}	$0<\lvert z\rvert<\infty$
3	$h[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
4	$h[-n-1]$	$-\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
5	$a^n h[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
6	$a^n u[-n-1]$	$-\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
7	$na^n h[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
8	$na^n h[-n-a]$	$-\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
9	$(n+1)a^n h[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
10	n	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
11	n^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert>1$
12	e^{an}	$\frac{z}{z-e^{aT}}$	$\lvert z\rvert>e^{aT}$
13	$b^n n$	$\frac{bz}{(z-b)^2}$	$\lvert z\rvert>b$
14	$e^{an}n$	$\frac{ze^{aT}}{(z-e^{aT})^2}$	$\lvert z\rvert>e^{aT}$
15	$\cos(bn)h[n]$	$\frac{z^2-z\cos(b)}{z^2-2z\cos(b)+1}$	$\lvert z\rvert>1$
16	$\sin(bn)h[n]$	$\frac{z\sin(b)}{z^2-2z\cos(b)+1}$	$\lvert z\rvert>1$
17	$a^n\cos(bn)h[n]$	$\frac{z^2-za\cos(b)}{z^2-2za\cos(b)+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
18	$a^n\sin(bn)h[n]$	$\frac{za\sin(b)}{z^2-2za\cos(b)+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
19	$a^n(h[n]-h[n-N+1])=$ $=\begin{cases}a^n, & 0\leq n<N\\ 0, & \textit{máskor}\end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>0$

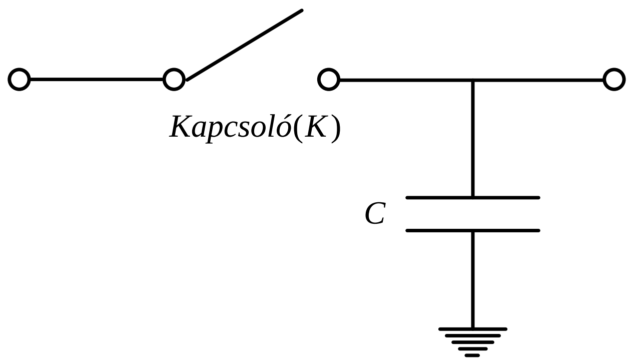
9.5. A zérusrendű tartószerv

Egy $f(t)$ analóg jel értéke folyamatosan változik a független változó értékének változásával. A jelek digitális eszközökkel történő kezelése során ugyan választható a változó mintavételi periodusidő technikája is, de az a megoldás számos elméleti, matematikai és gyakorlati problémát vetne fel. Így az elméleti háttér kidolgozottsága és viszonylag egyszerűsége miatt a gyakorlati esetek nagy arányában az állandó mintavételi periódus elvét alkalmazva végezzük a jelek diszkretizálását és digitalizálását. Ebben az esetben a jel pillanatnyi értékeit csak azonos távolságú, ekvidisztáns mintavételi időpillanatokban vesszük figyelembe. Az analóg jel mintavételi időpontokbani értékeit az ideális mintavételező szolgáltatja. Egy másik tag feladata a mintavételi érték megtartása a következő mintavételi pillanatig. Ez a tag a tartószerv. A tartószerv valójában extrapolálja a jel értékét a következő mintavételi pillanatig. A gyakorlatban két típusú tartószervet alkalmazunk. Az egyik a zérusrendű, mely az utolsó mintavételezett értéket állandóként megtartja a következő mintavételi érték megjelenéséig. A másik az elsőrendű tartószerv, mely egy elsőfokú polinommal, egyenessel helyettesíti a jel értékét a két mintavételi időpont között. A 9-2. ábra szemlélteti a mintavételezés és tartás folyamatát.



9-2. ábra. – A mintavételezés és tartás szemléltetése.

A jel feldolgozási lánc során az $f(t)$ FI jelből ideális mintavételezővel kapjuk a kT pillanatokban meghatározott $f^*(t)$ jelet. A feldolgozási láncban az ideális mintavételezőt a tartószerv követi, a 9-2. ábra esetében ez a nulladrendű (zérusrendű, ZOH zero order hold) tartószerv. A tartószerv kimenete az $f_h(t)$ közelítő jel, mely a következő mintavételi időpontig extrapolálja a jel értékét.



9-3. ábra. – A mintavételezés és a tartás áramköre ideális kapcsoló és ideális kondenzátor felhasználásával.

Nulladrendű tartószerv alkalmazásakor az ideális mintavételezőt és tartót egy ideális kapcsolóval és ideális kondenzátorral modellezhetjük (9-3. ábra). Az ideális kapcsolót végtelen rövidig ideig zárva tartva töltjük fel a nulla belső ellenállású kondenzátort a mintavételezett jel pillanatnyi értékét jellemző feszültségre. Legyen az ideális mintavételező kimenete $f^*(t) = f(t) \cdot comb(t)$,vagyis minden mintavételi pillanatban a kimenetén szolgáltatja a jel pillanatnyi értékét:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(f(kT)\delta(t-kT)\big) \quad \text{(9-15)}$$

Keressük meg mintavételezett jel Laplace transzformáltját, ami:

$$F^*(s) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty}\big(f(kT)e^{-kTs}\big). \quad \text{(9-16)}$$

Az ideális kondenzátor feladata, hogy mindenkor megtartsa és megjelenítse az éppen aktuális mintavételezett értéket a következő mintavételezésig. Jelölje $h(t)$ a Heaviside függvényt, akkor $h(t-kT) - h(t-(k+1)T)$ egy négyszögjel lesz, melynek értéke mindenütt nulla, kivéve a két egymást követő mintavételi időpont között, ahol értéke egy. A zérusrendű tartószerv kimenete időtartományban:

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f(kT)\big(h(t-kT) - h(t-(k+1)T)\big)\Big) \quad \text{(9-17)}$$

összefüggéssel adott. Ennek Laplace-transzformáltja:

$$F_h(s) = \mathcal{L}\{f_h(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f(kT)\frac{1}{s}\big[e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}\big]\Big) =$$

$$= \frac{1}{s}\big[1 - e^{-Ts}\big]\sum_{k=0}^{\infty}\big(f(kT)e^{-kTs}\big) \quad \text{(9-18)}$$

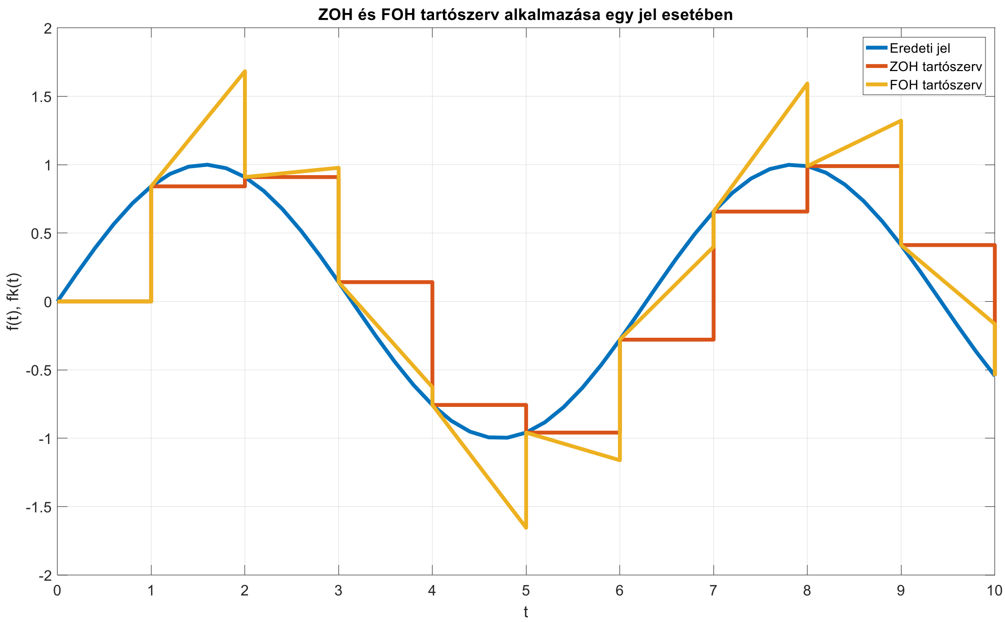
A zérusrendű tartószerv átviteli függvénye:

$$H_{zoh}(s) = \frac{F_h(s)}{F^*(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\Big(f(kT)e^{-kTs}\frac{1}{s}\big[1-e^{-Ts}\big]\Big)}{\sum_{i=0}^{\infty}\big(f(kT)e^{-kTs}\big)} =$$

$$= \frac{1}{s}\big[1 - e^{-Ts}\big] \quad \text{(9-19)}$$

Hasonlóképpen vezethető le az elsőrendű tartószerv átviteli függvénye, mely:

$$H_{foh}(s) = \frac{1+Ts}{Ts^2}\big[1 - e^{-Ts}\big]^2 \quad \text{(9-20)}$$



9-4. ábra. – ZOH és FOH tartószerv alkalmazása egy jel esetében.

A 9-4. ábra szaggatott vonallal ábrázoltuk a folytonos jelet, pirossal a nulladrendű tartószerv által szolgáltatott információt, kékkel pedig az elsőrendű tartószerv esetén megvalósuló extrapolációt. Összevetve a ZOH és az FOH alkalmazását egy jelfeldolgozási folyam esetében elmondható, hogy az esetek jelentős részében a ZOH közelítés elegendő, ugyanis az FOH nem jelent akkora előnyt, mint amekkora hátrányt okoz a közelítést megvalósító kapcsolás összetettsége. A ZOH egyszerű, elegendően hatékony és erőforrástakarékos.

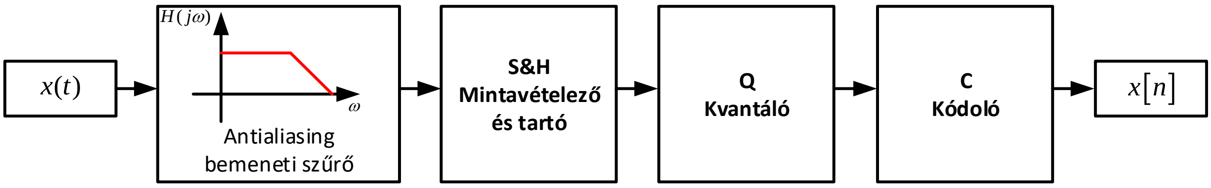
9.5.1. Az analóg-digitális és a digitális-analóg átalakítás

A valóságban előforduló jelek és rendszerek gyakran analógok. A napjainkban használatos jelfeldolgozó, rendszerszintetizáló technikák pedig digitális formában kérik és szolgáltatják az információt. Az analóg és a digitális világ közötti kapcsolatot az analóg/digitális és a digitális/analóg átalakítók valósítják meg. Az analóg jelekből számmal ábrázolt idősorokat szolgáltató egységet analóg/digitális (A/D) átalakítónak nevezzük. Az A/D a folytonos értékű és idejű jelet binárisan kódolt értékké képezi le. A jelenleg széleskörben elterjedt módszerek és technikák minden esetben megkövetelik a digitálisan feldolgozandó analóg jelek azonos távolságban történő mintavételezését. Annak érdekében, hogy a mintavételezés ne járjon információvesztéssel, a mintavételi periodusidő nem választható meg tetszés szerint. Shannon mintavételi törvénye kimondja, hogy egy f_{max} sávkorláttal rendelkező jel mintavételezésének frekvenciája nem lehet kisebb a jelben levő legnagyobb frekvencia kétszeresénél, vagyis

$$f_0 \geq 2f_{max} \quad \text{(9-21)}$$

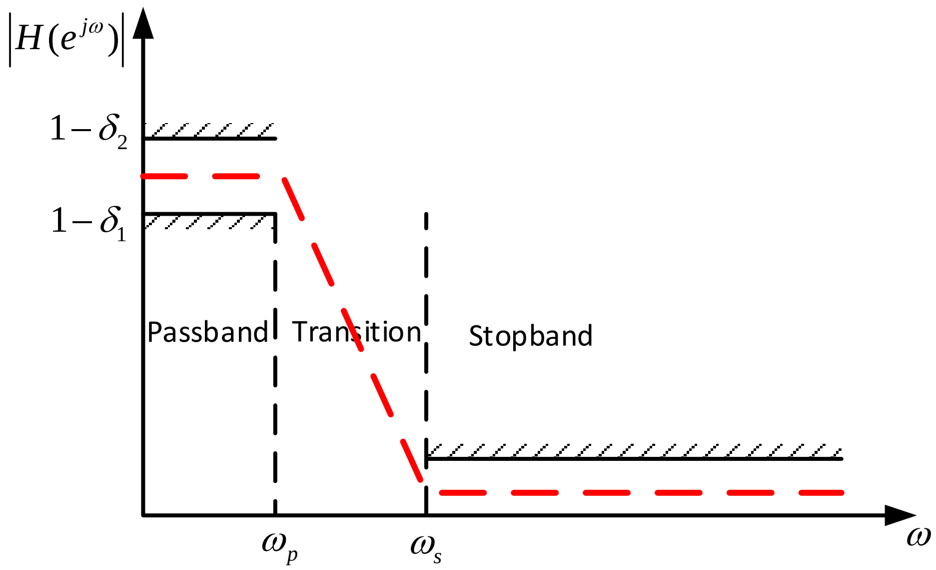
Ez azt is jelenti, hogy információvesztés nélkül csakis sávkorlátos analóg jeleket lehet mintavételezni. Amennyiben a fenti összefüggés nem áll, akkor a mintavételezett jel frekvenciaspektrumában átfedés, aliasing lép fel, amivel mindenképp számolni kell. A mintavételi frekvenciához $T = \frac{1}{f_0}$ mintavételi periodusidő társul.

Ideális esetben az átalakítandó analóg jel spektruma sávkorlátos, és a jel értékkészlete is rendelkezik alsó és felső korláttal. Ilyenkor magától adja magát a mintavételezés frekvenciájának értéke és a mintavételezett jel kvantálási szintektől függő kódolási hossza. Az ideális A/D átalakítók a valóságban nem megvalósíthatók. Ennek több oka is van, például: a valós folytonos jelek sosem teljesen sávkorlátosak, ideális szűrők nem megvalósíthatók, az ideális mintavételező és tartó sem létezik. Az ideális A/D átalakítók a valóságban csak közelíthetők. A 9-5. ábra egy valós jel A/D átalakítása során elvégzendő műveletek egymásutánját szemlélteti. Az egyes tipikus tagok ebben az esetben is ideális működésükkel vannak megadva.



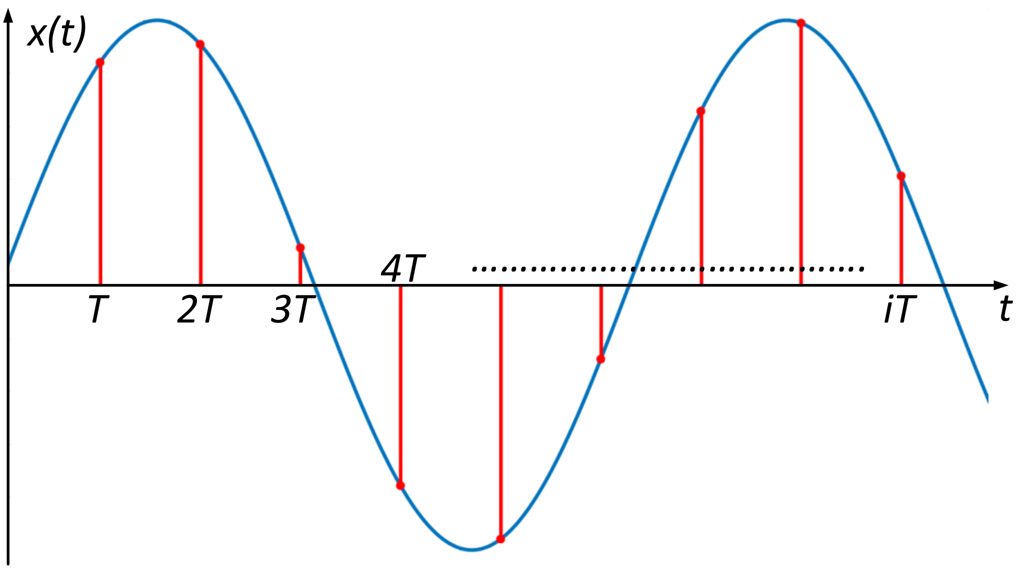
9-5. ábra. – Az A/D átalakítást végző tag elemeinek helye.

A $H(j\omega)$ frekvenciaátviteli függvénnyel megadott (LP, Low Pass) aluláteresztő szűrő feladata, hogy még folytonos időben szűrjön, hogy a mintavételezési törvény alapján határolja az analóg jel spektrumát $f_{max} = \frac{f_0}{2}$ frekvenciára, ahol $\omega_0 = 2\pi f_0$ a mintavételezés frekvenciája. Ezzel a szűréssel tudatosan információvesztést idézünk elő, minek eredményeképp kiküszöbölhető az átfedés (aliasing) megjelenése. A műszaki megoldások területén vannak helyzetek, amikor épp az átfedés jelenségét kihasználva tudunk magasfrekvenciás tartományban jelentkező információhoz jutni, ekkor ez a LP szűrés kihagyandó, de ez céltudatos tevékenység eredménye kell, hogy legyen. A gyakorlatban még a sávkorlátos jelek esetében is jelen van a magasfrekvenciás zaj komponense, ezért az LP szűrőre mindenképp szükség van. Legyen a bemenő jel tartománya ω_M korlátok között $-\omega_M < \omega < \omega_M$, így a valós szűrő áteresztő zónáját állítsuk $\omega_P = \omega_M$ értékre. A zárósáv alsó határa ω_S meghatározható $\omega_0 - \omega_S \geq \omega_M$ alapján. A valós szűrőknek van átmeneti sávuk, aminek szélessége $\omega_S - \omega_P$. A gyakorlatban a $\omega_0 > 2\omega_M$ feltétel szoros teljesítése helyett legtöbbször a $\omega_0 = 2.5\omega_M$ vagy $\omega_0 = 4\omega_M$ gyakorlat a szokás. A valós szűrők esetében az amplitúdókarakterisztika mellett módosul a jel fázisa is, így az eredeti jel információtartamában mindenképp módosítás keletkezik, minek tényét a továbbiak tekintetébe tudomásul kell venni. A 9-6. ábra található egy tipikus $H(j\omega)$ amplitúdókarakterisztika.



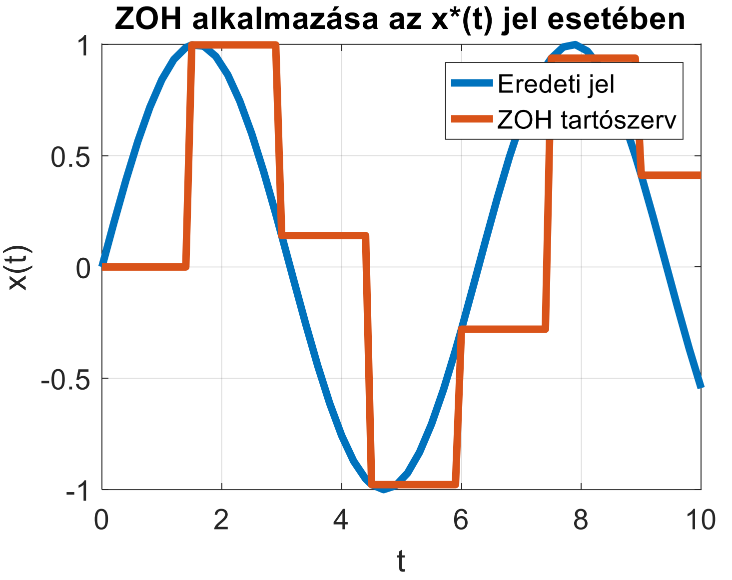
9-6. ábra. – Egy tipikus LP amplitúdó karakterisztika.

A feldolgozási lánc következő eleme a mintavételezést és tartást végző egység. Feladatát tekintve ez a tag biztosítja, hogy két mintavételi időpont között is legyen értéke a mintavételezett jelnek. A nulladrendű tartó kimenetén két mintavétel között nem változik a jel értéke. Ezt az egységet az előzőkben már tárgyaltuk. A 9-7. ábra hivatott bemutatni egy kauzális $x(t)$ analóg jel ideális mintavételezővel mintavételezett képét.



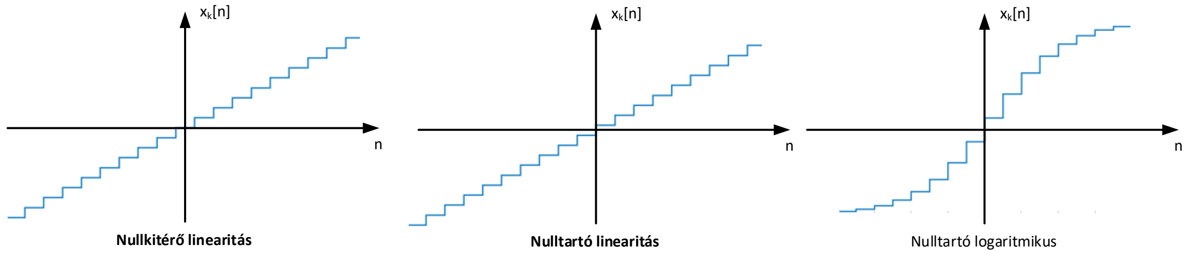
9-7. ábra. – Egy kauzális $x(t)$ analóg jel mintavételezése T mintavételezési periódussal, ideális mintavételező kapcsoló alkalmazásával.

Az ideális mintavételező kimenete a zérusrendű tartószervre van kapcsolva, mely feladatát és működísét tárgyaltuk az előzőek során, a működés eredményének szemléltetésére a 9-8. ábra hivatott.



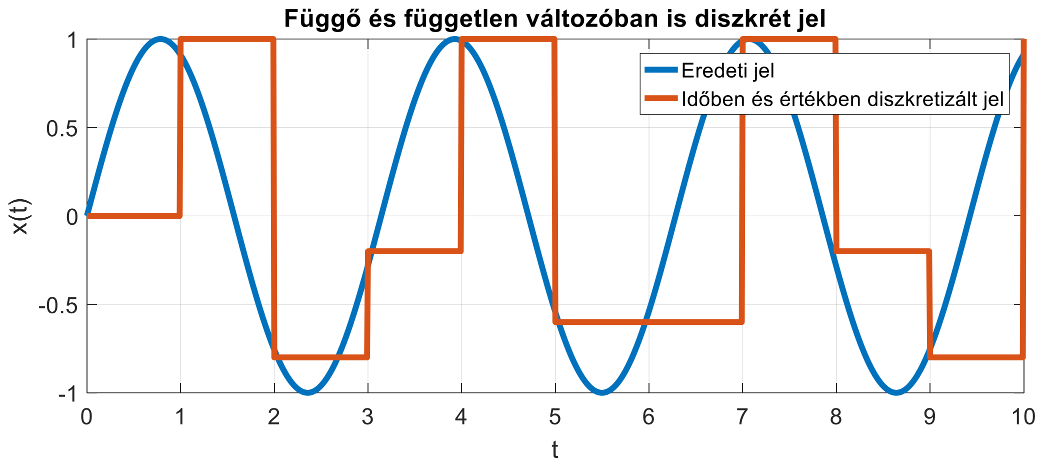
9-8. ábra. – Az $x^*(t)$ jel nulladrendű tartószerv alkalmazásával.

A folyamat következő lépése az $x_h(t)$ jel kvantálása. A kvantálás során, figyelembe véve a jel értékészletét a jelben levő amplitúdók folytonos értékét diszkrétté alakítjuk. A kvantált jel értéke csak meghatározott diszkrét lehet. A kvantálási folyamat egyértelműen leírható egy olyan lépcsős taggal, amelynek bemenete a ZOH kimenete, a kvantált érték pedig a kimenete. Így tehát a kvantálás egy memóriamentes nemlineáris transzformációnak tekinthető.



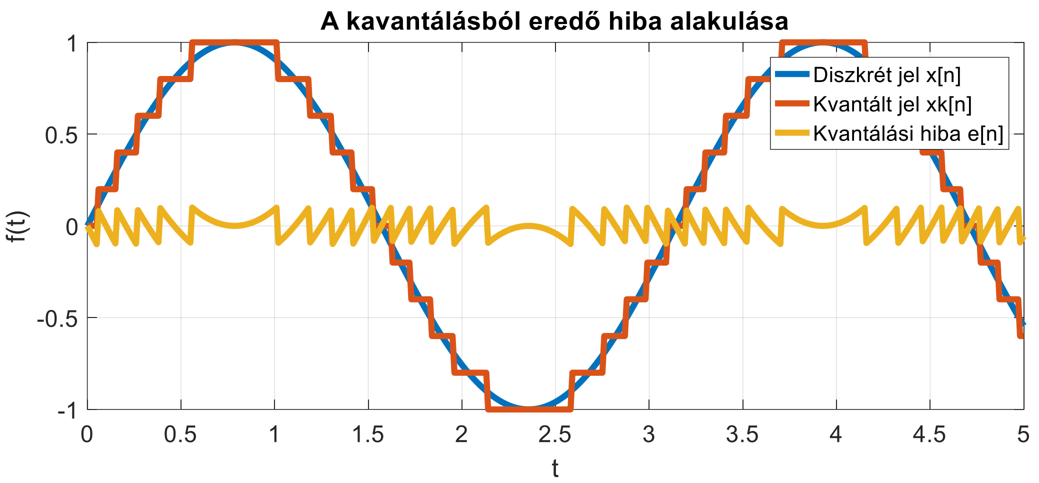
9-9. ábra. - A kvantálást meghatározó néhány lehetséges nemlineáris leképezés.

A gyakorlatban a kvantáláshoz alkalmazhatók más, a 9-9. ábra bemutatottaktól eltérő nemlineáris lépcsőfüggvények is. Ha a kvantálási lépcsők azonosak és a kvantálási szintek a lépcsők közepére esnek, akkor lineáris kvantálásról beszélünk. A kvantálási lépcsőknek nem kell sem azonosnak sem a nullára szimmetrikusnak lenniük, és az sem szükséges, hogy a kvantálási szintek a kvantálási lépcsők közepére essenek. A választott kvantálási eljárás függ a jel és a benne levő információtartalom jellegétől, például az emberi beszédhangot hordozó jel kvantálásához gyakran alkalmazunk logaritmikus jellegű görbét. A 9-10. ábra látható jel úgy független, mint függő változójában diszkrét.



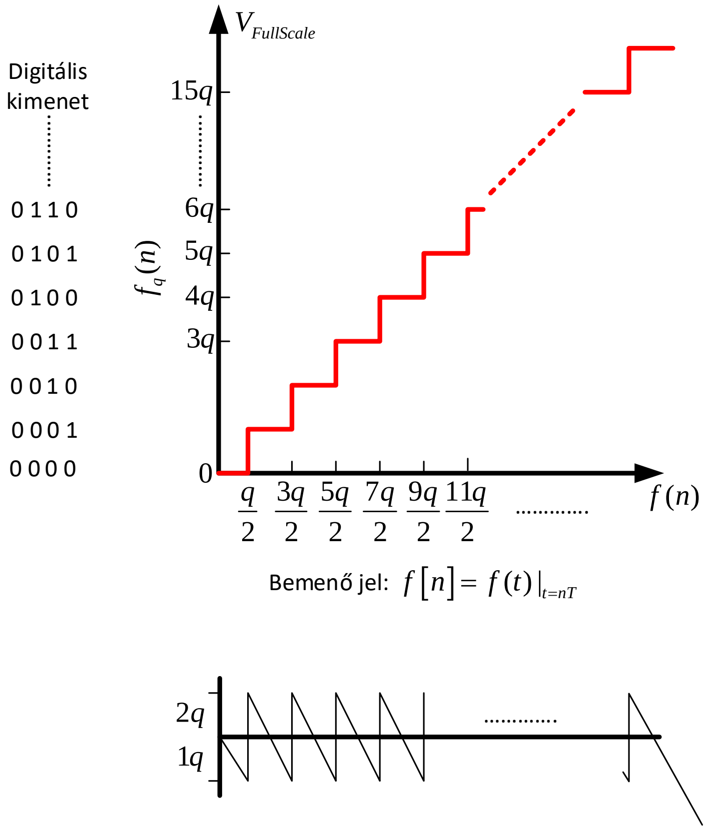
9-10. ábra. – Független és függő változójában diszkrét jel.

Ha a kvantálás a nulla ponthoz és környezetéhez a 0 kvantálási szintet rendeli, akkor a kvantálás nulltartó, ha nincs zérus értékű kvantálási szint, akkor nullkitérő. A kettő között az alapvető különbség az, hogy a jelszünethez a nulltartó kvantálás jelszünetet, a nullkitérő kvantálás pedig hamis jelet rendel. A pillanatnyi amplitúdó és a kvantálási szint különbsége a kvantálási hiba. A kvantált jel tehát az eredeti jel és a kvantálási hiba összegéből áll. A 9-11. ábra szemlélteti a kvantálási zaj fogalmát. A megadott példában nincs jól megválasztva a jel tervezett értékkészlete, így a kvantálás során egyfajta telítési hatás (szaturáció) tapasztalható.



9-11. ábra. – A kvantálásból eredő hiba (piros színnel jelölt jel) alakulása.

Az A/D átalakítás folyamatának következő lépése a kódolás. Bináris számmal történő kódolás során a kvantálási szintekhez véges hosszúságú bitsorozatot rendelünk. A 9-12. ábra mutatja be a kvantálás és kódolás egy megvalósítását. A 9-12. ábra tartalmazza a kvantálási hibát is.



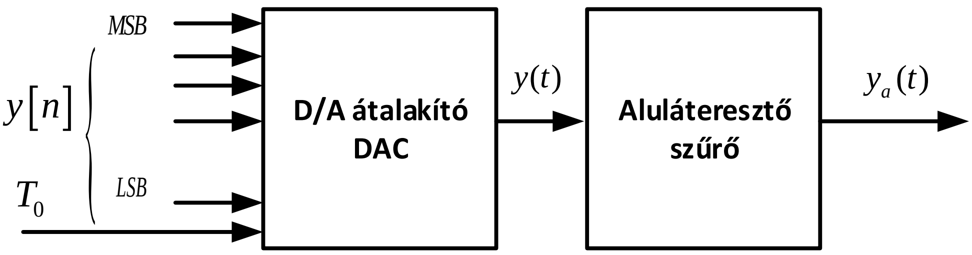
9-12. ábra. – A kvantálási szintekhez tartozó dogotális kód és a kvantálási hiba.

A kvantálási szintek jellemzése a kódolásban nyilvánul meg. A leggyakrabban alkalmazott kódok:

- természetes bináris kód (pozitív egész számok)
- előjel abszolútértékes bináris kód (pozitív és negatív egész számok)
- eltolt nullpontú bináris kód
- Gray kód
- 2-es komplemens kód (előjeles egész számok)
- 1-es komplemens kód
- Lebegőpontos ábrázolás (előjel, törtrész, kitevő)
- BCD kód.

Egy adott mintavételi időpontra vonatkozó mintát kódoló bitsorozat az arra az időpillanatra vonatkozó analóg jelérték digitális megfelelője. A választott kódolásnak mindenképp összhangban kell lenni a kvantálási szintek számával, hogy minden szintet egyedi kóddal lehessen ellátni és a digitális jelet feldolgozó egység igényeivel, az architektúrával. Alkalmas kódolási forma választásával elérhető, hogy a feladat jellegéből adódó tevékenységek, algoritmusok egyszerűbben megoldhatók. Például a Gray kód alkalmas az átviteli csatornán kialakuló bithibák könnyebb kezelésére, egy bit hiba kevesebb abszolút változást eredményez.

A digitális/analóg (D/A) átalakítás folyamata a digitális jelből állítja elő az analóg jelet. A digitális eszközzel feldolgozott információ nagyon sokszor, folytonosan zajló folyamatokból, állandó periodussal vett jelmintákból származik. Biztosítani kell, hogy a digitális úton történő feldolgozás után az információ analóg formát öltsön. Ilyenkor a kapcsolatot a digitális világból az analóg világ felé a D/A átalakító jelenti. A valóságban gyakran előfordul, hogy a D/A kimenetéből származó jel egy beavatkozó szerv bemenetét képezi, ami azt jelenti, hogy az analóg jelet még további kondicionálásnak kell alávetni, például megemelni az energiáját, teljesítményét.

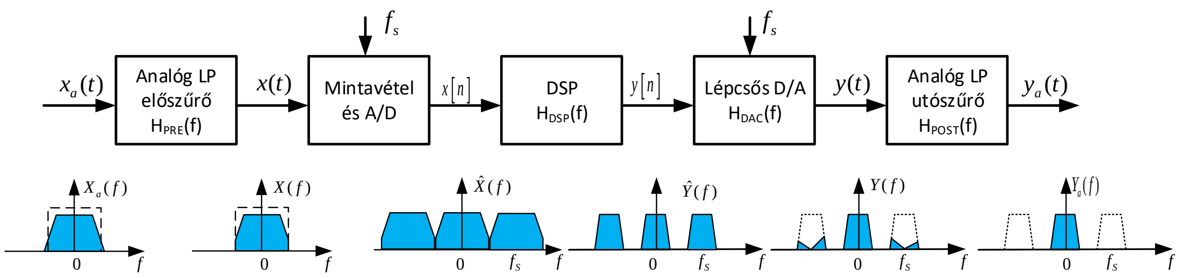


9-13. ábra. – A D/A átalkítás folyamatábrája.

Az átalakítási folyamat két lépésben zajlik. Az első lépésben a digitálisan kódolt, az adott diszkrét időre jellemző diszkrét jelértékeket egy elektronikus kapcsolás időben folyamatos jellé alakítja. Gyakran alkalmazunk erre a feladatra kapcsolható ellenállás hálózatot. A második lépésben egy jelhelyreállító aluláteresztő szűrő a jelet folytonos értékűvé alakítja (9-13. ábra).

Az irodalomban több megoldás található az A/D és a D/A funkciók megvalósítására. A valóságban az analóg-digitális és a digitális-analóg átalakítók tervezése és megvalósítása számos megoldandó kérdést vet fel.

Tipikus forgatókönyvnek számít, az analóg jelből származó információt digitális csatornán továbbítani, digitális feldolgozóegységgel módosítani, majd az így kapott értéket újra analóg jellé alakítani. Egy tipikus jelfeldolgozó folyamat hatásvázlata a 9-14. ábra látható.



9-14. ábra. – Analóg jel digitális úton történő feldolgozásának folyamata.

A folyamat bemenetén jelentkező x_a jel analóg, melyet az analóg LP szűrő sávkorlátossá tesz. Az A/D átalakító f_s mintavételi frekvenciával átalakít $x[n]$ digitális számmá. A digitális számokkal jellemzett információt egy feldolgozóegység (DSP, FPGA vagy mikrokontroller) feldolgozza, módosítja és kimenetén képzi az $y[n]$ digitális értéket. Az így kapott digitális számot egy D/A átalakító analóggá alakítja, az átalakítás spektrumában periodikus jelet eredményez, melyből egy szűrővel kivehető csak egy periodushoz tartozó spektrumhossz, ami a jelben levő teljes információtartalmat képviseli.

9.5.2. Az impulzusátviteli függvény

A nyolcadik fejezetben megadtuk az SISO FI LTI rendszer átviteli függvényét, miszerint $G(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Ebben a részben pedig foglalkoztunk a mintavételezett jel Laplace transzformáltjával és bevezetésre került a $z = e^{T_0 s}$ helyettesítés. DI LTI rendszerek esetében, az FI rendszerek analógiájára megadhatjuk a $G(z)|_{T_0} = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}\Big|_{T_0} = \frac{Y(z)}{U(z)}\Big|_{T_0}$ impulzusátviteli függvényt. Az $Y(z)$ a DI LTI rendszer kimenetén jelentkező jel $\mathcal{Z}$ transzformáltja, $U(z)$ pedig a rendszer bemenetén jelentkező jel $\mathcal{Z}$ transzformáltja. A folytonosidejű LTI rendszer diszkrétidejű megfelelője ismert T_0 mintavételi periodusidő esetén felírható az $s = \frac{1}{T_0} ln(z)$ helyettesítés alkalmazásával. A Laplace operátor kifejezve és az $ln(z)$ -t sorba fejtve: $s = \frac{1}{T_0} ln(z) = \frac{2}{T_0}\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \cdots\right]$, kizárólag az első tagot megtartva juthatunk az

$$s \approx \frac{2}{T_0}\frac{z-1}{z+1} \quad \text{(9-22)}$$

közelítéshez, a Tustin formulához. Egy másik lehetséges közelítés a helyettesítésre a visszatekintő differenciálás módszere. Ekkor $\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=kT_0} \approx \frac{X[kT_0]-X[(k-1)T_0]}{T_0}$, mivel $z = e^{T_0 s}$ egy mintával való előre tolást, $z^{-1} = e^{-T_0 s}$ pedig egy mintával való késleltetést jelent, így a differenciálás megfelelő közelítése $s \approx \frac{1-z^{-1}}{T_0} = \frac{z-1}{T_0 z}$. Ennél a közelítésnél az integrál operátor közelítése Euler módszerrel történik, vagyis: $\frac{1}{s} = \frac{T_0 z}{z-1}$, míg az $\frac{1}{s} = \frac{T_0}{2}\frac{z+1}{z-1}$ Tustin helyettesítés a numerikus integrálást trapéz szabállyal közelíti.

Mindkét helyettesítési módszerről elmondható, hogy relatív kis mintavételezési idő esetében, a gyakorlat számára elfogadható pontossággal adnak DI közelítést egy FI rendszerről.

Egy DI LTI rendszer impulzusátviteli függvénye megadható közvetlenül, egy tervezési folyamat eredményeként vagy esetleg az FI átviteli függvényből egy választott helyettesítést követően. Matematikai szempontból az impulzusátviteli függvény számlálójában és nevezőjében jelentkező polinomok különböző formában írhatók fel. Az egyes formák mindegyike alkalmas, az impulzusátviteli függvénnyel meghatározott rendszerre vonatkozó valamilyen információ direkt kinyerésére. Az alakok a következők:

- A polinomok felírása hatványok lineáris kombinációjának alakjában:

$$G(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad \text{(9-23)}$$

Az ebben az alakban szereplő polinomok együtthatói függnek a mintavételi T_0 periodusidőtől. Esetükben is érvényes, hogy a megvalósítás feltétele $N \geq M$. Ugyanis, ha $z = e^{T_0 s}$ a siettetést jelenti, akkor a számlálót és a nevezőt is megszorozva ugyan azzal a késleltetéssel, eljutunk az impulzusátviteli függvény késleltetési operátorokkal felírt alakjához: $\frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \cdot \frac{z^{-N}}{z^{-N}} = \frac{b_M z^{M-N} + b_{M-1} z^{M-N-1} + \cdots + b_1 z^{1-N} + b_0 z^{-N}}{a_N + a_{N-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-N} + a_0 z^{-N}}$ ami szerint a fent említett reláció fennállásakor már megvalósítható rendszert eredményez. Ebből a kifejezésből szépen látszik, hogy a kauzalitás feltétele: $N \geq M$. Egy adott pillanathoz tartozó kimenet számításához nem kell ismerni a rendszer jövőbeni bemeneteit, ekkor z^{M-N} hatványa is negatív. Amennyiben leosztunk és beszorzunk a_N -el eljuthatunk az impulzusátviteli függvény normalizált alakjához: $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$. Idő tartományban való megvalósításkor az egyes késleltetések figyelembevételével a kifejezés az aktuális kimeneti értéket kifejezve a következő módon átrendezhető: $Y(z)\left[1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}\right] = U(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}\right]$ és végül az idősor elemeivel felírva:

$$y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \cdots + b_M u[n-M] - a_1 y[n-1] - \cdots - a_N y[n-N]. \quad \text{(9-24)}$$

A felírási módból kitűnik, hogy egy DI SISO LTI rendszer aktuális kimenete meghatározható az addigi bemenetek és kimenetek lineáris kombinációjával.

- A zérus-pólus alak:

$$G(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}, \qquad K = \frac{b_M}{a_N} \quad \text{(9-25)}$$

A zérus-pólus alak az egyes polinomok nullahelyeinek ismeretében írható fel. Az impulzusátviteli függvény zérusainak a számláló polinom gyökeit, míg pólusainak a nevező polinom gyökeit értjük. A függvény értéke a zérusok helyén nulla, míg a pólusokén végtelen. A zérusok és pólusok ismeretében direkt információt kapunk a rendszer dinamikus viselkedéséről, stabilitásáról. Ebből az alakból egyértelműen látszik a többtárolós rendszer kaszkádba kötött (sorba kötött) alrendszerek segítségével történő megvalósíthatósága. A pólusok száma és értéke egyértelműen leírja a rendszerben található n darab energiatároló viselkedését.

- A részlettörtes alak:

$$G(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i z}{z-p_i}, \qquad \text{(9-26)}$$

ahol r_i a reziduumok értékeit jelöli.

Ebből az alakból egyértelműen látszik a rendszernek párhuzamosan kötött alrendszerekből való megvalósíthatósága.

Néhány alak közötti összefüggés:

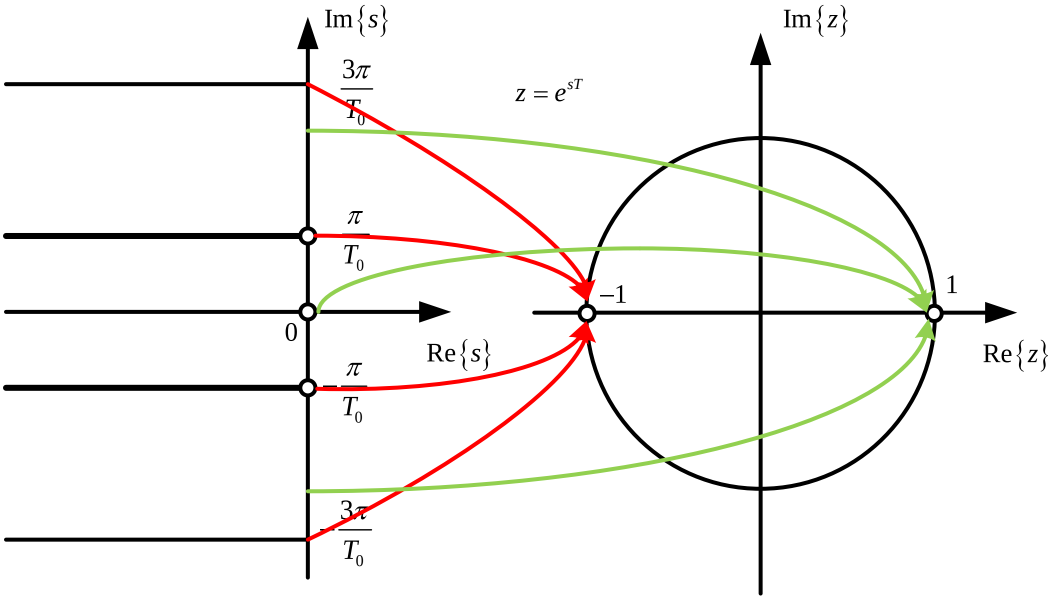
$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{Num(z)}{Den(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}(b_k\cdot z^{-k})}{1+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cdot z^{-k})}=$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{M}(b_k\cdot z^{N-k})}{z^N+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cdot z^{N-k})}=K\cdot\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k\cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k\cdot z^{-1})}=K\cdot z^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \qquad \text{(9-27)}$$

Az impulzusátmeneti függvényt bármilyen alakban is adjuk meg, azok egyszerű matematika technikákkal átalakíthatók egymásba.

9.5.3. SISO DI LTI rendszer stabilitása

FI LTI rendszer esetében átviteli függvényének pólusai meghatározzák stabilitását. Joggal várható, hogy DI esetben a rendszert leíró impulzusátviteli függvény hordozzon a rendszer stabilitására vonatkozó információt. Mivel $z=e^{T_0 s}=e^{T_0(\sigma+j\omega)}=e^{T_0\sigma}(\cos T_0\omega+j\sin T_0\omega)=e^{T_0\sigma}e^{j\omega T_0}$ a z és az s síkok között egy leképezést valósít meg, ennek a leképezésnek a vizsgálatával meghatározható az a tartomány, ahol az adott modellel meghatározott DI rendszer stabilnak számít. Vegyük észre, hogy z egy olyan komplex operátor, melynek modulusa $|z|=e^{T_0\sigma}$, argumentuma pedig $\angle z=\omega T_0$. Ismeretes, hogy $\omega T_0=\frac{2\pi f}{f_0}=\frac{2\pi\omega}{\omega_0}$, ahol ω_0 a mintavételi körfrekvencia, ω pedig változik $-\infty<\omega<\infty$ tartományban így belátható, hogy s sík képzetes tengelye $(\sigma=0)$ egy egységsugarú körre képződik le a z tartományban. A s sík II. ás III. negyede pedig, ahol $\sigma<0$ ennek a körnek a belsejébe, míg az I. és IV. negyed, ahol $\sigma>0$ pedig az egység sugarú körön kívülre vezeti át a pólusokat és zérusokat. A frekvenciára érvényes ugyan a $-\infty<\omega<\infty$ határ, de az FI-ben jelen levő frekvenciák a mintavételezés hatására periódusosan öveket alkotnak, ugyanis $e^{j\omega T_0}=\cos(T_0\omega)+j\sin(T_0\omega)=\cos\left(T_0\left(\omega+\frac{2k\pi}{T_0}\right)\right)+j\sin\left(T_0\left(\omega+\frac{2k\pi}{T_0}\right)\right)$. Minden $\frac{(2k-1)\pi}{T_0}<\omega<\frac{(2k+1)\pi}{T_0}$ öv a Laplace tartományból a $\mathcal{Z}$ tatrományon belül ugyan oda képződik le, így a vizsgálatok szempontjából elegendő az elsődleges övet, a $k=0$ tartományt vizsgálni.



9-15. ábra . – Az FI rendszerre vonatkozó komplex sík leképzése a DI rendszereket jellemző síkra.

Stabilitás tekintetében ez azt jelenti, hogy egy DI LTI modellel leírható rendszer akkor stabil, ha a $\mathcal{Z}$ tartományban megadott impulzusátviteli függvényének minden pólusa az egységsugarú körben helyezkedik el (9-15. ábra). Amennyiben az impulzusátviteli függvénynek van olyan pólusa, amely az egységsugarú körön helyezkedik el, akkor a rendszer a stabilitás határán van. Amennyiben az impulzusátviteli függvénynek van olyan pólusa, amely az egységsugarú körön kívülre esik, akkor a rendszer instabil. A gyakorlatban előforduló DSP-n vagy mikrovezérlőn megvalósított mérnöki megoldások esetében tartózkodni kell az olyan rendszerek implementálásától, ahol a pólusok az egységsugarú körön, vagy a kör belsejében de nagyon közel a stabilitás határához helyezkednek el, mert a digitális számábrázolásból ás a számítási műveletek végzése során jelentkező numerikus hiba tovaterjedéséből következően a valós rendszer, az elméletben elvárt viselkedéstől eltérően könnyen instabillá válhat.

10.A DI LTI rendszerek megvalósítása

A mérnöki gyakorlat többféle megvalósítást ismer egy megfelelően szintetizált, megtervezett DI LTI rendszerre. Ez a fejezet hivatott röviden bemutatni a legfontosabb megvalósítási módokat és az ahhoz tartozó elméleti és gyakorlati lehetőségeket. Röviden bemutatásra került a szoftver eszközökkel történő megvalósítás módja. Tárgyalásra kerül az impulzusátviteli függvény hálózattal történő implementálása. Ezen kérdések mellett a fejezet kitér a DI LTI SISO rendszerek modelljük alapján történő osztályozására és a digitális szűrők érintőleges tárgyalására.

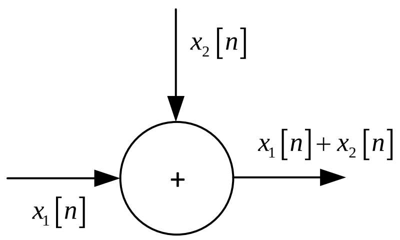
Amennyiben egy DI LTI rendszer impulzusátviteli függvénye adott a $G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$ alakban akkor a hozzá, idő tartományban tartozó rekurzív leírás adott a következő szerint:

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \qquad (10\text{-}1)$$

A fenti formula a kimenet $y[n]$ aktuális értékére vonatkozóan ad meg egy számítási szabályt. Ez a számítás elvégezhető szoftveresen és hardveresen egyaránt. Mindkét megvalósítás esetében ügyelni kell a választott mintavételi periodusidő szigorú betartására, tehát a kimenet értékét biztosítani kell minden mintavételi időpontban.

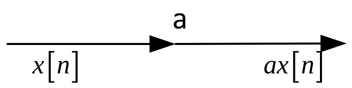
Szoftveres megvalósítás esetén két fontos programrész (eljárás) megírása szükséges. Az első egy „init” eljárás, ami megfelelő típusú globális változóként deklarálja és definiálja az a_k és b_k együtthatókat és kezdőértékeket ad a rekurzív algoritmusban szereplő, globális változóban tárolt jeleknek, állapotváltozóknak és inicializál egy T_0 időnként meghívódó megszakítás-eljárást. A második eljárás a megszakítás-eljárás, amely feladata az új bemeneti érték beolvasása, az aktuális kimenet számítása az állapotváltozók módosítása és a kimeneti érték megjelentetése a kimeneti csatornán. A szoftveres megoldás alkalmazásánál kiemelt figyelmet kell fordítani a megfelelő aritmetika választására. Némely alkalmazás esetében elegendő csak az egész számú aritmetika használata, mások esetében a lebegőpontos aritmetika szükséges.

A hardveres megvalósítás sem bonyolult. Annak érdekében, hogy konkrét hardver architektúrákat határozzunk meg megadunk néhány alapvető műveletvégző elemet grafikus jelöléssel. A jelet és terjedését irányított szakasz jelöli, a jel azonosítóját minden esetben a nyíl mellé írjuk, úgy hogy egyértelmű legyen, hogy az mire vonatkozik. A 10-1. ábra egy összeadási műveletet végző elem ábrázolási módja látható. Az elemnek két bemenete és egy kimenete van. Műveletvégzés tekintetében a bemeneteken jelentkező értékek összege megjelenik a tag kimenetén. Hardveres megvalósítás során ügyelni kell a megfelelő számábrázoláshoz tartozó összeadó alkalmazására.



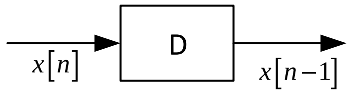
10-1. ábra. – Két diszkrét értéket összeadó tag.

A 10-2. ábra egy állandóval való szorzás műveletet végző elem ábrázolási módja látható. Az elemnek egy bemenete és egy kimenete van. Műveletvégzés tekintetében a bemeneten jelentkező érték és az állandó szorzata jelenik meg a tag kimenetén. Hardveres megvalósítás során ügyelni kell a megfelelő számábrázoláshoz tartozó szorzó alkalmazására.



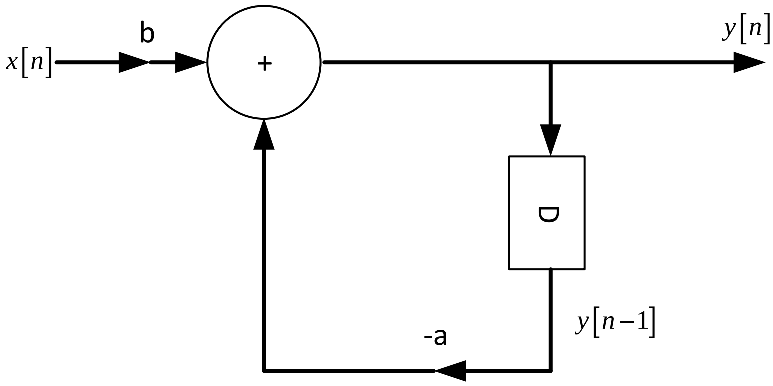
10-2. ábra. – Egy állandóval való szorzás ábrázolása.

Az utolsó típusú tag, a késleltetést végző tag. A 10-3. ábra egy mintavételi ütemet, T_0-t késleltető elem ábrázolási módja látható. Az elemnek egy bemenete és egy kimenete van. Ebben az esetben a „D" valójában a z^{-1} műveletet megvalósító egység. Műveletvégzés tekintetében a bemenet előző ütemben vett értéke jelenik meg a tag kimenetén. Hardveres megvalósítás során ügyelni kell a megfelelő méretű, bit szóhosszúságú shift regiszter alkalmazására.



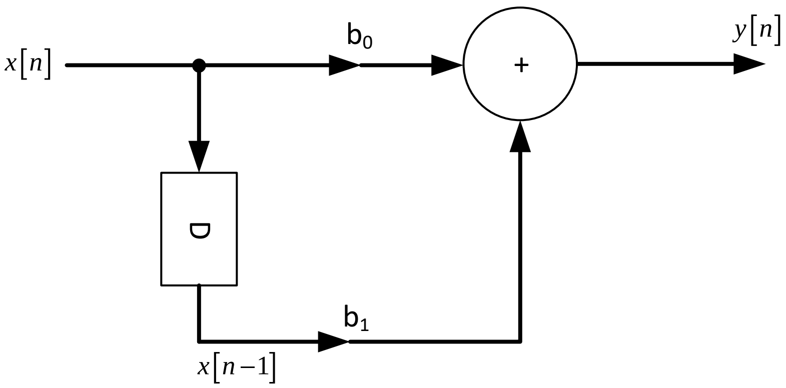
10-3. ábra. – Egy mintavételi időt késleltető tag.

Néhány példán keresztül szemléltessük a fent említett tagok alkalmazását, egy DI SISO LTI rendszert leíró modell megvalósítását. A 10-4. ábra látható példában a megvalósítandó rendszer legyen az $y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$. A kimenet meghatározásához szükség van az aktuális bemenet és az előző kimenet lineáris kombinációjának számítására. Amint azt a 10-4. ábra mutatja, a megoldáshoz egy késleltető elem került felhasználásra, ami tárolja és szolgáltatja az aktuálisat megelőző kimenet értékét, vagyis $y[n-1]$ et.



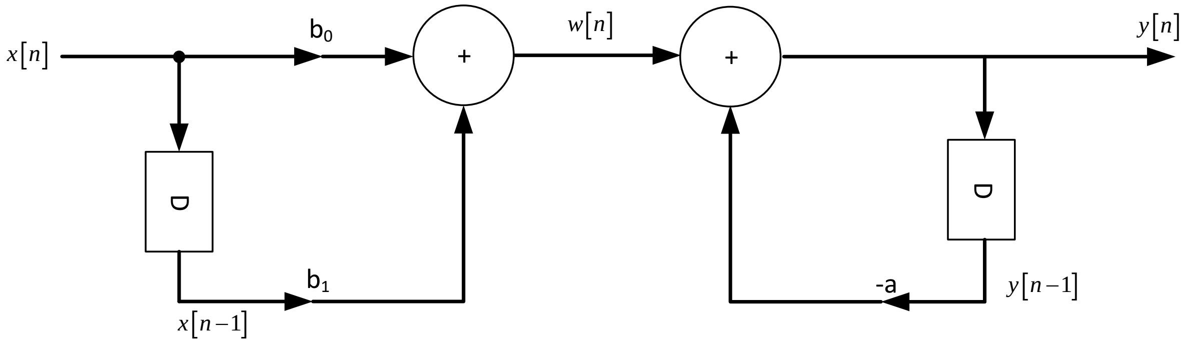
10-4. ábra. – Visszacsatolást tartalmazó, egytárolós DI SISO LTI rendszer sémája.

A következő példában $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$ a kimenet meghatározásához szükség van az aktuális és az azt megelőző bemenet lineáris kombinációjának számítására. Amint azt a 10-5. ábra mutatja, a megoldáshoz itt is egy késleltető elem került felhasználásra.



10-5. ábra. – Csak előrecsatolást tartalmazó DI SISO LTI rendszer sémája.

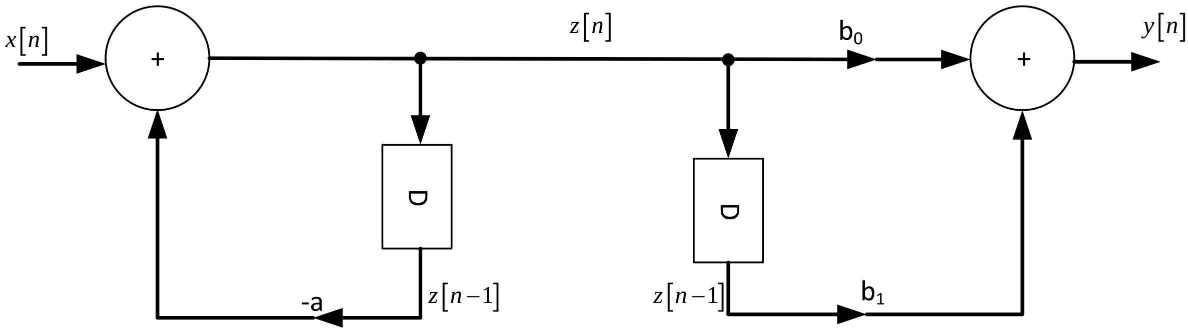
A harmadik példa az aktuális kimenet számításához igényli a kimeneti és bemeneti jelértékek egy mintával való késleltetett értékeit is. Legyen $y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1]$, a 10-6. ábra szemlélteti a kapcsolási rajzot. A 10-6. ábra bemutatott megoldás két darab késleltetést végző elemet tartalmaz. A szakirodalomban ez a kapcsolás „Direkt I” formaként ismert.



10-6. ábra. – Előrecsatolást és visszacsatolást is tartalmazó DI SISO LTI rendszer „Direkt I” formája.

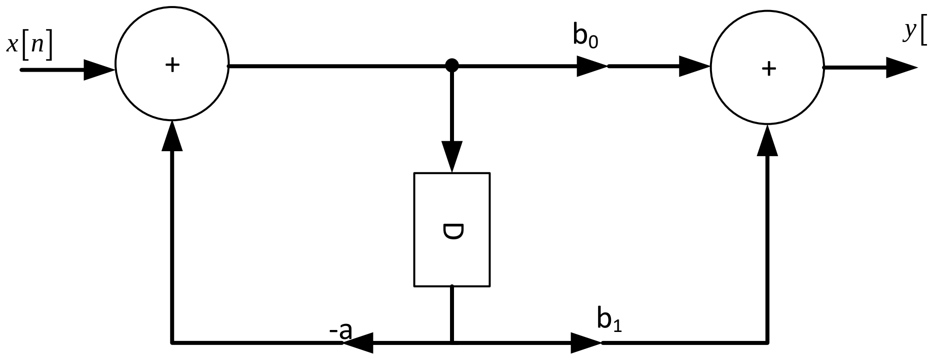
Vegyük észre, hogy a rendszer valójában két sorba kötött alrendszerre bontható: az előrecsatolást tartalmazó alrendszerre és a visszacsatolást tartalmazó alrendszerre. Az egyik alrendszer bemenete az $x[n]$, kimenete pedig a $w[n]$, a másik bemenete a $w[n]$, kimenete pedig az $y[n]$. Ahol is $w[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$ és egy darab késleltetést tartalmaz. A másik alrendszer az $y[n] = -ay[n-1] + w[n]$ összefüggést valósítja meg és szintén egy darab késleltetést tartalmaz. Megvalósítás tekintetében a két alrendszernek a sorba kötésben elfoglalt helye felcserélhető. Az így kialakított új rendszer is két alrendszerből tevődik össze. Jelöljük az első bemenetét továbbra is $x[n]$ –el, ami ugye ez előző megoldásban $w[n]$-volt, kimenetét pedig $z[n]$-el, ami eddig $y[n]$-volt. A második alrendszer bemenete most $z[n]$ lesz, kimenete pedig $y[n]$.

A két alrendszer felcserélése utáni helyzetet leíró modell: $z[n] = -az[n-1] + x[n]$ és $y[n] = b_0z[n] + b_1z[n-1]$. A 10-7. ábra szemlélteti az második megoldáshoz tartozó struktúrát.



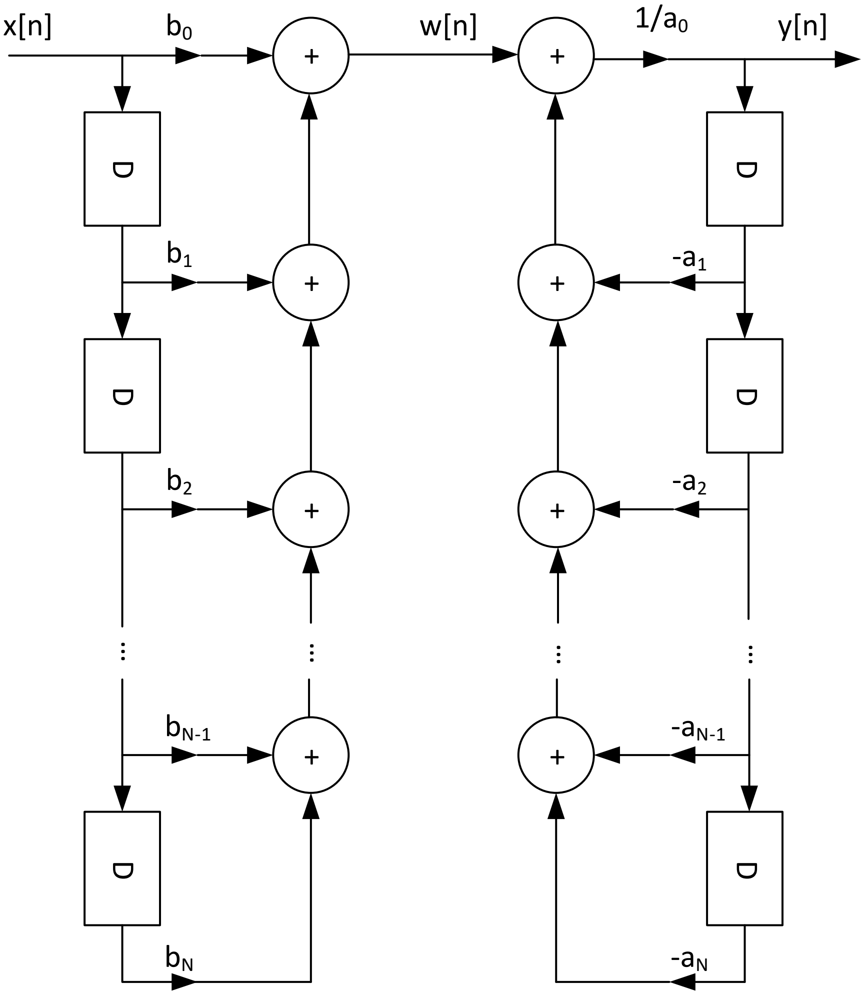
10-7. ábra. – Alternatív megoldás az előrecsatolást és visszacsatolást is tartalmazó DI SISO LTI rendszerre.

Vegyük észre, hogy a 10-7. ábrán két darab késleltetést végző elem található, de azok bemenetén és kimenetén ugyan az a jel jelenik meg. Így joggal merül fel a megoldás, hogy összevonva a két késleltető elemet eggyé, csökkentsük a megvalósítás erőforrás igényét. A szakirodalomban ez a kapcsolás „Direkt II” formaként ismert. Az összevonás utáni helyzetet a 10-8. ábra szemlélteti.



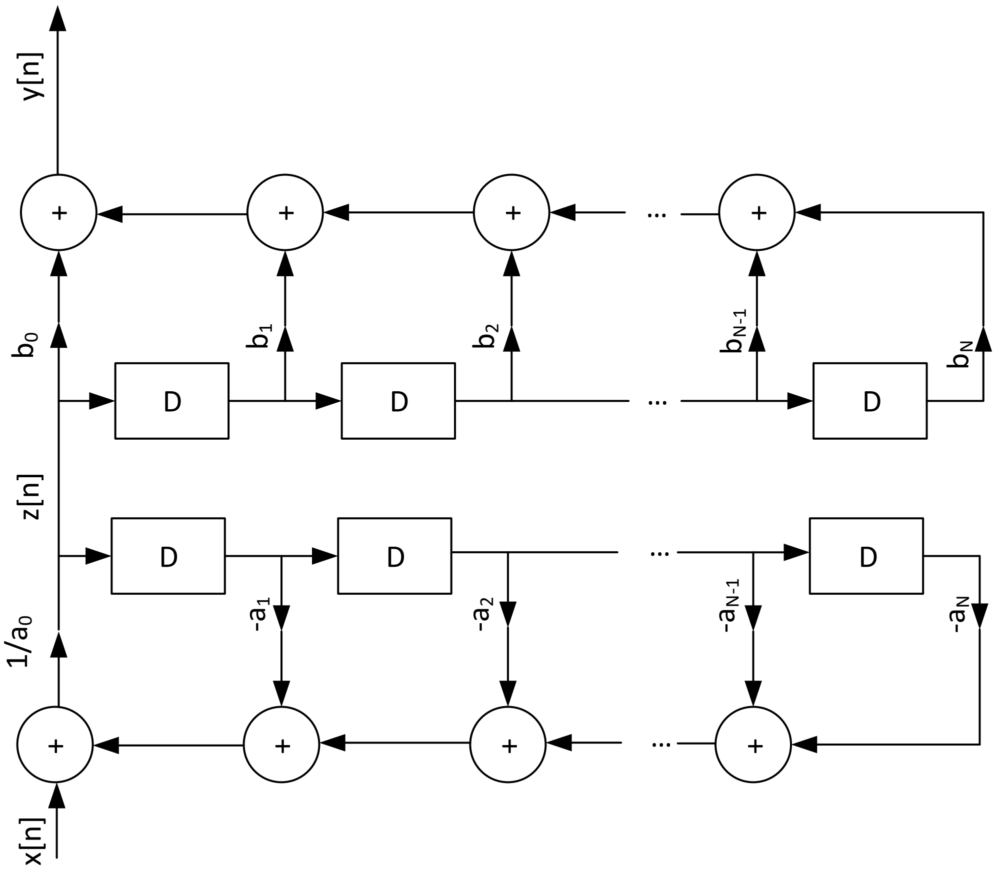
10-8. ábra. – Alternatív megoldás az előrecsatolást és visszacsatolást is tartalmazó rendszerre. A „Direkt II" forma.

A fenti példában tárgyalt egyszerűsítési módszer kiterjeszthető az általános rekurzív leírásra. Tehát, ha $y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$ és esetleg $M \neq N$ akkor a megfelelő a_k , b_k értékének nullázásával az egyenlet alakja: $y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$ alakban is felírható. A 10-9.ábra szemlélteti az előző egyenlet megoldását végző architektúrát, ennél a direkt I formánál az előrecsatolásban és a visszacsatolásban szereplő késleltető elemek száma megegyezik.

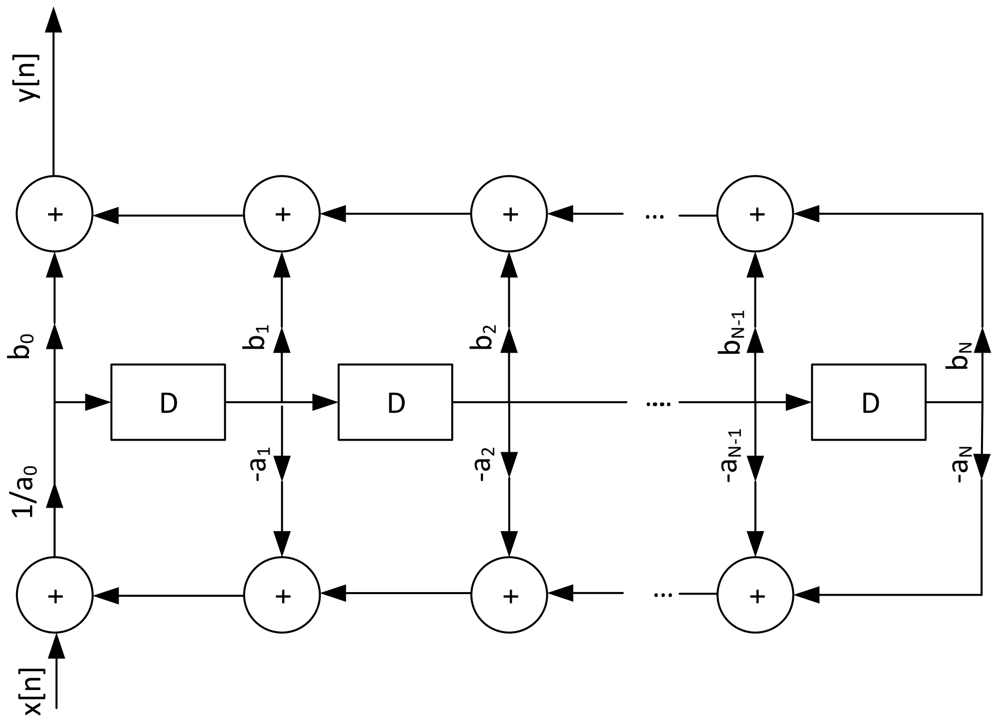


10-9. ábra. – „Direkt I" forma általános architektúrája.

A 10-9. ábrán szereplő jelek a következő általános törvény szerint számítódnak: $w[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x[n-k] \quad y[n] = \frac{1}{a_0}\left[-\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] + w[n]\right]$. Az említett példa mintájára végezzük el a két alrendszer cseréjét. Ekkor $z[n] = \frac{1}{a_0}\left[-\sum_{k=0}^{N} a_k\, z[n-k] + x[n]\right]$ és $y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k\, z[n-k]$ (10-10. ábra és 10-11. ábra).



10-10. ábra. – A „Direkt II” formát bevezető architektúra.



10-11. ábra. – „Direkt II” forma általános architektúrája.

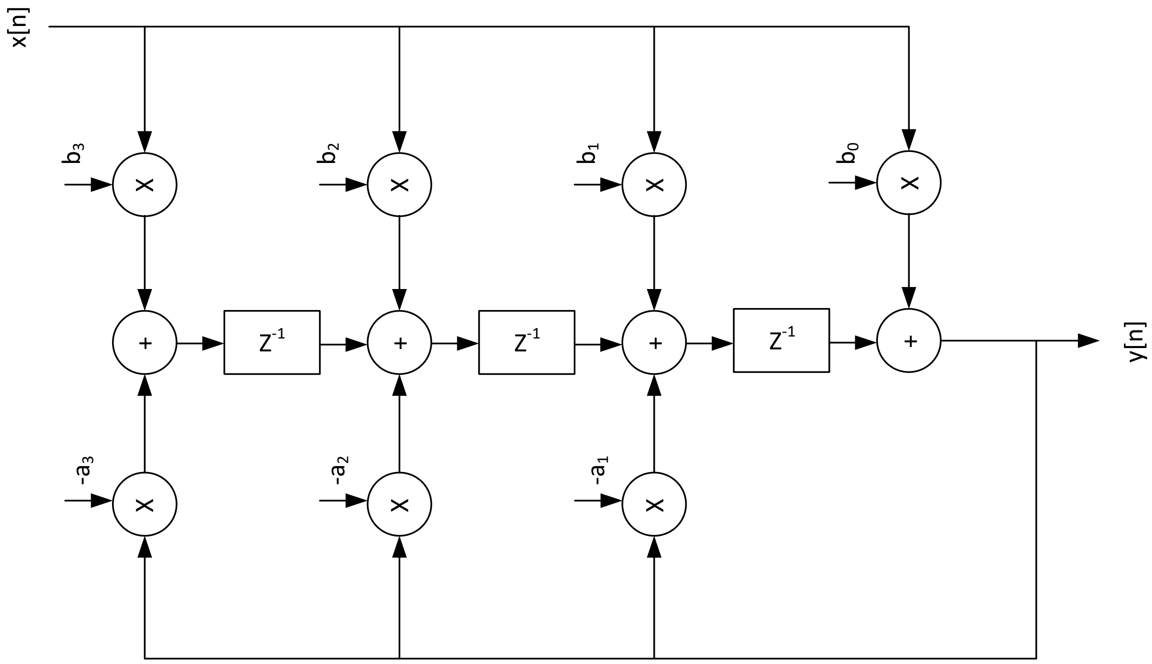
Tehát a direkt II forma előnye, hogy használatával minimalizálásra kerül a késleltetést végző elemek száma. A minimalizálásnak más módja is lehetséges. Egy módszer szerint ha megfelelően csoportosítjuk az egyes késleltető bemeneteibe vezetendő jelet, akkor szintén csökkenthető a késleltetést végző egységek száma. Vegyük például az alábbi DI SISO LTI rendszert:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \\ + b_3x[n-3] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] \quad \text{(10-2)}$$

Alkalmazva az eltolás műveletét jelző „D" operátort, végezzünk csoportosítást a rendszert leíró modellen:

$$y[n] = b_0x[n] + D\left\{\begin{matrix} b_1x[n] - a_1y[n] + \\ +D\{b_2x[n] - a_2y[n] + D\{b_3x[n] - a_3y[n]\}\} \end{matrix}\right\} \quad \text{(10-3)}$$

, így eljutunk alternatív, minimalizált struktúrához (10-12. ábra).



10-12. ábra. – Egy erőforrásoptimalizált DI LTI architektúra.

A fenti architektúrák alkalmasak DI LTI rendszerek tervezésére és megvalósításának előkészítésére, legyen az akár szoftveres vagy hardveres megvalósítás.

Az irodalomban gyakran találkozhatunk az eltolási operátor egy másfajta jelülésével a $q = z^{-1}$ jelüléssel. Ennek a jelölési módnak az az előnye, hogy nem kell a hatványokkal. Az impulzusátviteli függvény késleltetéssel felírt általános alakja ekkor:

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0 + b_1q + \cdots + b_nq^n}{1 + a_1q + \cdots + a_nq^n} \quad \text{(10-4)}$$

10.1. Diszkrétidejű átviteli függvények alapján való rendszerosztályozás

A továbbiakban röviden foglalkozunk a rendszereknek a diszkrét átviteli függvényük, vagyis az impulzusátviteli függvényük szerinti rövid osztályozásával.

A $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$ impulzusátviteli függvényhez, időtartományban tartozó általános alak adott az $y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right]$ kifejezéssel. A modell valójában a bemeneti és kimeneti jelértékek lineáris kombinációjával adja meg a rendszer aktuális kimenetét. Az a_k együtthatók súlyozzák a visszacsatolt jelek értékét az $b_k$együtthatók pedig az előrecsatolást hatását határozzák meg. Amennyiben minden a_k elem, kivéve a_0 -át, értéke nulla, akkor gyakorlatilag a rendszer kimenete csak a bemenet értékeitől függ. Az ilyen rendszerek válasza a dirack impulzusra véges ideig tart, tipikusan a rendszer kimeneti jelértéke rendre a b_k együtthatókkal egyezik meg. Az ilyen rendszert véges impulzusválaszú rendszernek nevezzük, ez a FIR (Finite Impuls Response) rendszer. Mivel a FIR DI LTI esetében a kimenetet visszacsatolás nélkül, csak a korábbi bemenet határozzák meg, másszóval nem vesszük figyelembe a korábbi kimeneteket, így ezeknél a rendszereknél nem jelentkezhet instabilitási probléma. Esetükben a késleltetéssel felírt átviteli függvény alakja $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}$, szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is z^N -el: $G(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \frac{z^N}{z^N}$, így eljutunk az impulzusátviteli függvényhez. $G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{N-k}}{z^N}$, ahonnan kiolvasható, hogy a FIR rendszernek N darab pólusa van a nullában. Ez a tény is azt igazolja, hogy stabil rendszerről van szó. FIR modellel modellezhetők a nemrekurzív vagy mozgóátlagú (MA, Moving-Average) folyamatok.

Amennyiben a_0-án kívül is van olyan a_k elem, mely értéke nem nulla, akkor gyakorlatilag a rendszer aktuális kimenetére hatnak az előző kimenetek értékei, van visszacsatolás. Az ilyen rendszert végtelen impulzusválaszú rendszernek nevezzük, ez az IIR (Infinite Impulse Response) rendszer. Az IIR rendszer esetében rekurzív hatással, súlyozva visszaköszön az előző kimeneti érték. Mivel az IIR DI LTI esetében a kimenetet visszacsatoljuk, így ezeknél a rendszereknél jelentkezhet instabilitási probléma.

Amennyiben $M = 0$, vagyis a b együtthatók vektora csak 1 elemű, $b_0 \neq 0$, akkor autoregresszív (AR) folyamatot leíró IIR egyenletről beszélünk.

Amennyiben $M \neq 0$ és $N \neq 0$, akkor az IIR impulzusátviteli függvény tipikusan rendelkezik nem nulla zérusokkal és pólusokkal, ekkor rekurzív vagy autoregresszív-mozgóátlagú (ARMA) folyamatról beszélünk.

10.2. DI LTI SISO rendszer mint szűrő

Napjainkban a digitális jelfeldolgozás terén számos esetben alkalmaznak szűrőket. A szűrők feladata általában, hogy összetevőket válasszanak szét. A jelfeldolgozás esetében a szétválasztás egyik módozata a jelben szereplő frekvenciatartalom alapúján történik. Ami valójában azt jelenti, hogy a szűrő bemenetére vezetjük a szűrni kívánt jelet, a kimeneten pedig megjelenik a nemkívánt összetevők nélküli, módosított bemenet.

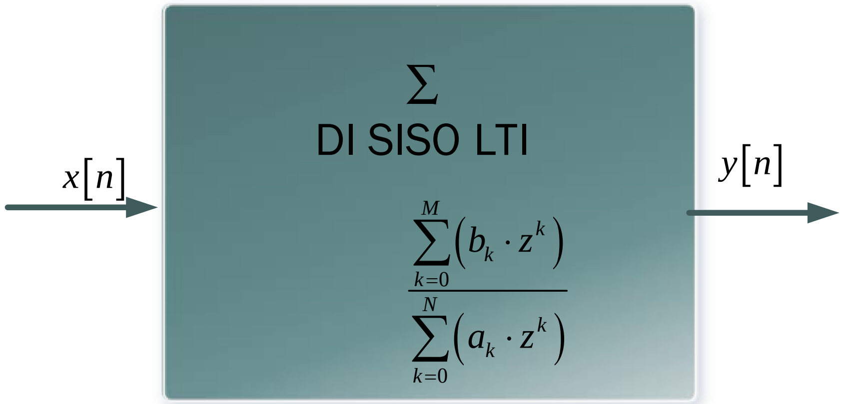
Legyen egy DI LTI rendszer impulzusválasza $g[n]$ melynek $\mathcal{Z}$ transzformáltja $G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\}$, ekkor az LTI rendszerekre vonatkozó a konvolúcióra érvényes szabályt alkalmazva

$$\mathcal{Z}\{y[n] = g[n] * x[n]\} \rightarrow Y(z) = G(z) \cdot X(z) \qquad (10\text{-}5)$$

ahol $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ és $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$ és:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M}(b_k \cdot z^{N-k})}{z^N + \sum_{k=0}^{N}(a_k \cdot z^{N-k})} \qquad (10\text{-}6)$$

Az FI LTI rendszerek szűrési feladatokra való alkalmazásához hasonlóan használhatók a DI LTI rendszerek a diszkrét jelek területén (10-13. ábra). A DI szűrők módosíthatják a fázist, az amplitúdót és az FI vel ellentétben rájuk jellemző egyfajta csoportos késés is. Különböző tervezési technikák állnak rendelkezésre elvárt szűrőkarakterisztikájú szűrők meghatározására. A tervezés eredménye a szűrő mérete N, alkalmas mintavételi periódusidő T_0, a_k valamint b_k együtthatók és a numerikus formátum. A tervezés eredménye lehet aluláteresztő, felüláteresztő, sáváteresztő és sávszűrok (lyukszűrők) egyaránt. A célul választott szűrőkarakterisztika jelentősen meghatározza az IIR vagy FIR struktúra összetettségét.



10-13. ábra. – DI jeleket szűrő tag.

A digitális szűrő paraméterei meghatározhatók digitális szűrőtervező módszerek használatával és FI módszerekkel tervezett szűrő digitalizálásával. Fontos megjegyezni, hogy minden esetben kulcskérdés a megfelelő és állandó mintavételi periodusidő T_0 megválasztása és alkalmazása, úgy a tervezési folyamat során, mint a szűrő működtetése során.

A lineáris szűrők/rendszerek mellett számos területen alkalmaznak nemlineáris DI rendszereket. A sok érdekes felhasználási terület közül talán az egyik legérdekesebb az adaptív szűrők alkalmazásának területe.

11. Irodalomjegyzék

[1] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, „Signals and System”, 2nd Ed. Prentice Hall 1997, ISBN 0-13–814757–4.

[2] B.P. Lathi, „Linear Systems and Sygnals”, 2nd Ed. Oxford Unversity Press, 2005, ISBN-10: 0195158334

[3] Edward W. Kamen, Bonnie S. Heck: „Fundamentals of Signals and Systems Using The Web and MATLAB”, Second Edition. 2000, Prentice-Hall.

[4] Emmanuel Ifeachor, Barrie Jervis: „Digital Signal Processing A Practical Approach”, Prentice Hall, 2002, ISBN-13: 978-0201596199.

[5] Fodor György: „Jelek és rendszerek”, Műegyetem Kiadó, 2006, ISBN: 963 420 869 X.

[6] Gerzson Miklós, Pletl Szilveszter, „Irányítástechnika”, Typotex Kiadó, 2011, ISBN 978-963-279-529-4

[7] Jeges Zoltán: „Jelek és rendszerek”, főiskolai jegyzet, 2002, Szabadkai Műszaki Főiskola.

[8] Kuczmann Miklós: „Jelek és rendszerek”, UNIVERSITAS-GYŐR Kht. Győr, 2005, ISBN: 978-96321-906-2-4.

[9] Ljiljana Milić, Zoran Dobrosavljević: „Uvod u digitalnu obradu signala”, 1999, Akademska misao, Beograd, ISBN: 978-86-7466-558-9.

[10] Miodrag Popvić: „Signali i sistemi”, 2006, Akademska misao, Beograd, ISBN: 86-7466-254-4.

[11] Miodrag V. Popvić: „Digitalna obrada signala”, 2012, Akademska misao, Beograd, ISBN: 86-7466-88-6.

[12] Pletl Szilveszter, Magyar Attila: „Jelek és rendszerek példatár”, Typotex Kiadó, 2011, ISBN: 978-963-279-530-0

[13] Richard Lyons : „Understanding Digital Signal Processing”, 2nd Edition Prentice Hall 2004, ISBN-13: 978-0-13-702741-5.

[14] Schaum's Outlines „Signals and Systems”, Mc Grow Hill, 1998, ISBN: 978-0-07-163473-1.

[15] Zoran Gajić: „Linear Dynamic Systems and Signals”, Prentice Hall, 2003, ISBN: 0-201-61854-0

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu