Dr. Németh József

Függvények alkalmazása feladatokban

http://www.math.u-szeged.hu/∼nemethj

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x-6}+\sqrt{6-x}=x^2-5x-6.$$

Megoldás. Vizsgáljuk az **ÉT.**-t!
A bal oldalon

$$\left.\begin{array}{l} x-6\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 6 \\ 6-x\geq 0 \Longleftrightarrow 6\geq x \end{array}\right\} x=6.$$

Legfeljebb egy megoldás van, amit ellenőrzéssel meg is kapunk.
Tehát a megoldás: $x=6$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt[8]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}=3^x-\log_3(2+x^6).$$

Megoldás.
Vizsgáljuk az **ÉT.**-t:

$$\left.\begin{array}{lcl} 1-x^2\geq 0 & \Longleftrightarrow & |x|\leq 1 \\ x^4-1\geq 0 & & |x|\geq 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-1. \end{array}$$

Vizsgáljuk ezt két értéket:

$$x_1=1: 0\stackrel{?}{=}3-\log_3 3=2$$
$$x_2=-1: 0\stackrel{?}{=}\frac{1}{3}-\log_3 3=-\frac{2}{3}.$$

Nincs megoldás.

3. Oldjuk meg: $\sin\dfrac{\pi x}{4}=x^2-4x+5.$

Megoldás. Legyen

$$f(x)=\sin\frac{\pi x}{4},$$
$$g(x)=x^2-4x=5=(x-2)^2+1.$$

Mivel $R_f=[-1;1]$, $R_g[1;\infty)$. Így $R_f\cap R_g=\{1\}$, azaz
1)

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$\Longleftrightarrow \pi x=2\pi+8\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Longleftrightarrow x=2+8k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2)

$$x^2 - 4x + 5 = 1 \iff x = 2.$$

$\Longrightarrow$ **Megoldás.** $x = 2$.
Megjegyzés. Itt az értékkészlet vizsgálata volt hasznos.

4. Oldjuk meg:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = \sin^7 x + 3$$

É.K.

É.K.: $\{a|\text{létezik } x \in \text{É.T.}_f : f(x) = a\}$

Mo.:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = a$$

$$x^2 - 2x + 1 = ax^2 + 3a$$

$$0 = (a-1)x^2 + 2x + 3a - 1$$

α) $a = 1 \Longrightarrow x = -1$
β) $a \neq 1$, akkor $D \geq 0 \iff$

$$4 - 4(a-1)(3a-1) \geq 0 \iff$$

$$3a^2 - 4a \leq 0$$

Ábra:

$$\Longrightarrow a \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\text{É.K.}_b : \left[0; \frac{4}{3}\right]$$

$$\text{É.K.}_j : [2; 4]$$

$$\Longrightarrow \text{É.K.}_b \cap \text{É.K.}_j = \emptyset \Longrightarrow \text{NINCS M.O.}$$

Megj.:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = \frac{4}{3} + (x+3)^{12}$$

Mo.:

$$\boxed{\text{x=-3}} \qquad \begin{array}{c} \text{É.K.}_b : \left[0; \dfrac{4}{3}\right] \\ \text{É.K.}_j : \left[\dfrac{4}{3}; \infty\right] \end{array}$$

FONTOS: É.K.

5. Határozzuk meg az alábbi függvények értékkészletét:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

c) $f(x) = 5\sin x - 12\cos x$

Ad a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] = \\ &= \sqrt{2}\sin(x + 45^\circ) \end{aligned}$$

Mivel $1 \leq \sin(x + 45^\circ) \leq 1 \Longrightarrow$

$$\text{É.K.}_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Ad b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\cos x + \sin x = \\ &= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right] = \\ &= 2[\sin 60^\circ \cos x + \cos 60^\circ \sin x] = \\ &= 2\sin(x + 60^\circ) \end{aligned}$$

Mivel $-1 \leq \sin(x + 60^\circ) \leq 1 \Longrightarrow$

$$\text{É.K.}_f = [-2; 2]$$

Ad c)

$$\begin{aligned} & f(x) = 5\sin x - 12\cos x = \\ & = \sqrt{12^2 + 5^2}\left[\frac{5}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\sin x - \frac{12}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\cos x\right] = \\ & = 13\left[\underbrace{\frac{5}{13}}_{\cos\varphi}\sin x - \underbrace{\frac{12}{13}}_{\sin\varphi}\cos x\right] = \\ & = 13\sin(x + \varphi) \Longrightarrow \\ & \text{É.K.}: \ [-13; 13]. \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

függvény értékkészletét.

I. Mo.:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = a \Longrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = a^2$$

$$\Longrightarrow x^2 = a^2 - a^2x^2 \Longrightarrow$$

$$x^2(1+a^2) = a^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}$$

És:

$$1 - x^2 > 0$$

kell, azaz

$$1 > x^2,$$

azaz

$$1 > \frac{a^2}{1+a^2}$$

mindig teljesül.
$\Longrightarrow$ É.K. $(-\infty;\infty)$, azaz minden a az É.K. pontja.

II. Mo.:

$$x = \sin t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$f = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

Ábra:

É.K.: $(-\infty;\infty)$

7. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

függvény értékkészletét.

I. Mo.:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = a \Longrightarrow$$

$$x^2 = a^2(1+x^2) \Longrightarrow$$

$$(1-a^2)x^2 = a^2 \Longrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}$$

Nyilván $1-a^2>0$ kell, azaz

$$|a|<1 \Longrightarrow \text{É.K.}(-1;1)$$

II. Mo.:

$$x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}} = \operatorname{tg} t \cos t = \sin t$$

$$\Longrightarrow \text{É.K.} : (-1;1)$$

8. Oldjuk meg a következő egyenleteket:
a) $2^x + 3^x = 2$;
b) $2^x + 4^x = 2\cdot 5^x$;
c) $2^x + 4^x = 2\cdot 5^x(x^3+1)$.

Megoldás.

a) $f(x) = 2^x + 3^x \uparrow \Rightarrow f(x) = 2$-nek legfeljebb egy megoldása van. Könnyű látni, hogy $x=0$ megoldás.

b) Itt a bal oldalon levő és a jobb oldalon levő függvények is monoton nőnek.
Nézzük a következő átalakítást (osszuk végig 5^x-szel):

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2.$$

Így az $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \downarrow$ tehát csak legfeljebb egy helyen veszi fel a 2 értéket. Ezt $x=0$-nál veszi fel, tehát $x=0$ a megoldás.

c) Alkalmazzuk itt is a leosztást:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2(x^3+1).$$

Itt a bal oldal szigorúan csökken, a jobb oldal pedig $\uparrow$, így legfeljebb egy megoldás van, ami itt is könnyen adódik: $x = 0$.

9. Oldja meg a következő egyenletrendszert:
(1) $x - y = 2^y - 2^x$;
(2) $x^2 + y^2 = 1$.
Megoldás. (1)$\Leftrightarrow x + 2^x = 2^y + y$; mivel $f(t) = t + 2^t \uparrow$, ezért $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Tehát $x = y \overset{(2)}{\Rightarrow} 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Így a megoldás: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Megjegyzés. Itt tehát a monotonitást használtuk.

10. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}$$

egyenletet.
Megoldás. Nézzük először az ÉT.-t:

$$\left.\begin{array}{l} x+7 \geq 0 \\ x-1 \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq -7 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} x \geq 1.$$

Az egyenlet ÉT.-a: $x \geq 1$ (hiszen a bal oldal minden x-re értelmezett. Miért?).
Vizsgáljuk a monotonitást.
A jobb oldalon alkalmazzuk a következő trükköt (beszorzunk a konjugálttal):

$$g(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = \frac{x+7-(x-1)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{8}{\underbrace{\sqrt{x+7}}_{\uparrow}+\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\uparrow}} \Rightarrow g(x) \downarrow \text{ az } [1;\infty)\text{-en}.$$

A bal oldalon a gyökjel alatt egy parabola van, amelynek csúcspontja: $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$, hiszen

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Azaz a $h(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ függvény $\uparrow$ az $[1, \infty)$-en, tehát $h(x) = g(x)$ csak legfeljebb egy értékre állhat fenn, azt viszont könnyű látni, hogy $x = 2$ megoldás.

11. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(*) \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[21]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[21]{\cos x}.$$

Megoldás. Vizsgáljuk a monotonitást (ÉT: $(-\infty; \infty)$ és az ÉK. vizsgálat reménytelen). Legyen $f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u - \sqrt[21]{u}$. Mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^u \downarrow$ és $\sqrt[21]{u} \uparrow \Rightarrow -\sqrt[21]{u} \downarrow \Rightarrow f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u - \sqrt[21]{u} \downarrow$. Tehát $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, azaz

$$(*) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

azaz ezek a megoldásai $(*)$-nak.

12. Oldjuk meg:

$$(*) \qquad \sqrt{7 + \sqrt{7 + x}} = x$$

Mo.: Legyen $f(x) = \sqrt{7 + x}$, ekkor

$$(*) \qquad f(f(x)) = x \quad \text{alakú.}$$

Tétel. *Ha $f \uparrow$, akkor az alábbi két egyenletnek ugyanazok a gyökei.*

$$(1) \qquad f(f(x)) = x$$

$$(2) \qquad f(x) = x$$

Bizonyítás.

I. Tegyük fel, hogy x_0 megoldása (1)-nek, azaz $f(f(x_0)) = x_0$ és mégis $f(x_0) \neq x_0$, azaz

0) $f(x_0) > x_0$ vagy

00) $f(x_0) < x_0$.

De mivel $f \uparrow$, így 0) $\Longrightarrow \underbrace{f(f(x_0))}_{x_0} > f(x_0)$, ami ellentmond 0)-nak.

Mivel f $\uparrow$, így 00)$\Longrightarrow$ $\underbrace{f(f(x_0))}_{x_0} < f(x_0)$, ami ellentmond 00)-nak, azaz valóban $f(x_0) = x_0$, azaz x_0 megoldása (2)-nek.

II. Tegyük fel, hogy x_0 megoldása (2)-nek, azaz

$$f(x_0) = x_0 \Longrightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0,$$

azaz x_0 megoldása (1)-nek.
Így valóban a két egyenlet ekvivalens (ugyanazok a gyökei).
$\Longrightarrow$ Elég megoldani az

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{7+x} = x \text{ egyenletet}$$

$$\Longrightarrow\ x^2 - x - 7 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Mo.: $x = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ *FONTOS:*$\uparrow$ **MON. NÖV.**

13. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2+x}}} = x$$

Megoldás. Hol a paraméter?
Próbálkozás:

$$2 + \sqrt{2 - \sqrt{2+x}} = x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - \sqrt{2+x} = (x^2-2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 + x = (2 - (x^2-2)^2)^2.$$
$$\vdots$$

Trükk: $\cos\varphi$; $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$, $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.
Mivel $x \geq 0$ és $2 - \sqrt{2+x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{2+x} \Leftrightarrow$

$$4 \geq 2 + x \Leftrightarrow 2 \geq x; \text{ tehát } 0 \leq x \leq 2.$$

De $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2\cos\varphi \leq 2$.

Tehát: $x = 2\cos\varphi$ vehető; ilyen alakban keresem a megoldást.
Így

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi} = \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{4}} = 2\sin\frac{\varphi}{4}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = \sqrt{2+2\sin\frac{\varphi}{4}} =$$
$$= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{4}\right)} =$$
$$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right)} =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right).$$

Így

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right) = 2\cos\varphi \Leftrightarrow$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right) = \cos\varphi$$
$$\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8} = \varphi(!)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{9}{8}\varphi \Leftrightarrow \varphi - \frac{8\pi}{36} = \frac{2\pi}{9} = 40^\circ$$

Tehát a megoldás: $x = 2\cos 40^\circ \approx 1,532088886\ldots$.

14. Bizonyítsuk be, hogy az $x|x+2p| = p$ egyenletnek a p paraméter bármely értékére pontosan egy megoldása van!

I. Megoldás. Legyen x az egyenlet gyöke. Három esetet fogunk vizsgálni aszerint, hogy $x+2p=0$; $x+2p>0$ vagy $x+2p<0$.

a) Ha $x+2p=0$, akkor csak $p=0$ lehet, ekkor viszont $x=0$ az egyetlen megoldás.

b) Ha $x+2p>0$, akkor az egyenletünk $x^2+2px-p=0$ alakba írható; ennek gyökei $x_1=-p+\sqrt{p^2+p}$ vagy $x_2=-p-\sqrt{p^2+p}$, ahol $p\neq 0$.

Az $x_1+2p>0$, ha $\sqrt{p^2+p}>-p$, vagyis ha $p>0$. Ugyanis a négyzetgyök alatti $p^2+p=p(p+1)$ akkor pozitív, ha vagy $p>0$ vagy $p<-1$. Ez utóbbi azonban nem lehetséges, mert ekkor $\sqrt{p^2+p}<-p$ volna. Tehát x_1 gyöke az eredeti egyenletnek, ha $p>0$.

Az $x_2+2p>0$, ha $-\sqrt{p^2+p}>-p$, ami egyetlen p-re sem igaz. Az x_2 tehát nem gyöke az eredeti egyenletnek.

c) Ha $x+2p<0$, akkor az egyenletünk $x^2+2px+p=0$ alakba írható. Ennek gyökei

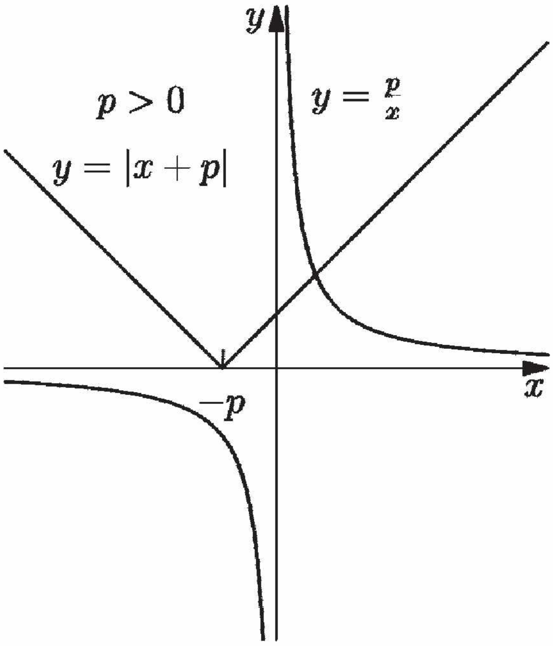
$$x_3=-p+\sqrt{p^2-p} \text{ vagy } x_4=-p-\sqrt{p^2-p}.$$

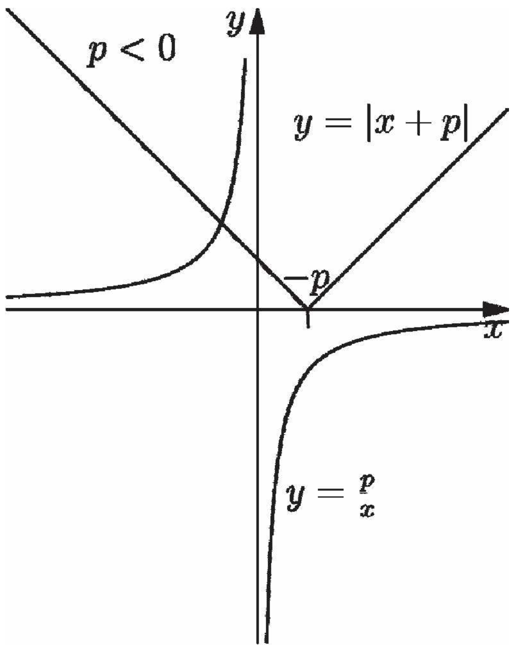
Az $x_3 + 2p < 0$, ha $\sqrt{p^2 - p} < -p$, ami egyetlen p-re sem teljesül. Az x_3 tehát nem gyöke az eredeti egyenletnek.

Az $x_4 + 2p < 0$, ha $-\sqrt{p^2 - p} < -p$, vagyis ha $p < 0$. Ekkor $p^2 - p > 0$, tehát x_4 gyöke az eredeti egyenletnek, ha $p < 0$.

Összefoglalva: $p = 0$; $p > 0$, illetve $p < 0$ esetben is egyetlen gyök van ($x = 0$; $x = x_1$, illetve $x = x_4$). (*Felvételi 1990*)

II. Megoldás. (Függvénytani)





15. Határozzuk meg a megoldások számát a függvényében a következő egyenlet esetén!

$$|x + 2| = ax + 1.$$

I. Megoldás.

a) $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

-2

$$x + 2 = ax + 1 \Leftrightarrow (1 - a)x = -1.$$

• $a = 1$, akkor nincs megoldás.

•• $a \neq 1$, akkor $x = \frac{1}{a-1}$ a megoldás.
Kérdés: $\frac{1}{a-1} \geq -2$ milyen a-ra teljesül?

••• $a > 1$, akkor $\frac{1}{a-1} \geq -2 \Leftrightarrow 1 \geq -2a + 2 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$, azaz, ha $a > 1$, akkor a $[-2; \infty)$-ba esik 1 ilyen megoldás.

•••• $a < 1$, akkor $a \leq \frac{1}{2}$ adódik, azaz ilyen a-ra akkor esik megoldás a $[-2; \infty)$-ba, ha $a \leq \frac{1}{2}$.
b) $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$.

2

$$x + 2 = -ax - 1 \Leftrightarrow (1 + a)x = -3.$$

• $a = -1$, akkor nincs megoldás.

•• $a \neq -1$, akkor $x = \frac{-3}{1+a}$ a megoldás.

Kérdés: $-\frac{3}{1+a} < -2$ milyen a-ra teljesül?

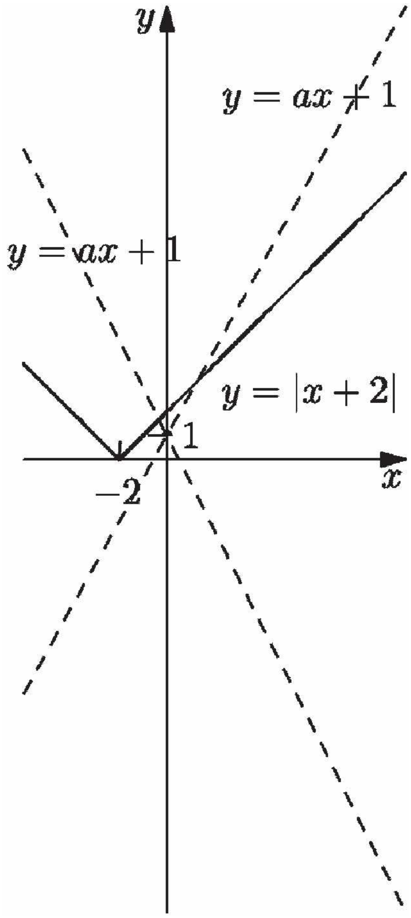
• • • $a > -1$, akkor $-\frac{3}{1+a} < -2 \Leftrightarrow -3 < -2 - 2a \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$, tehát ha $-1 < a < \frac{1}{2}$, akkor van $(-\infty; -2)$-ben 1 ilyen megoldás.

• • •• $a < -1$, akkor $\Rightarrow a > \frac{1}{2}$ tehát ilyen a-ra nincs megoldás.

Mindent összevetve:

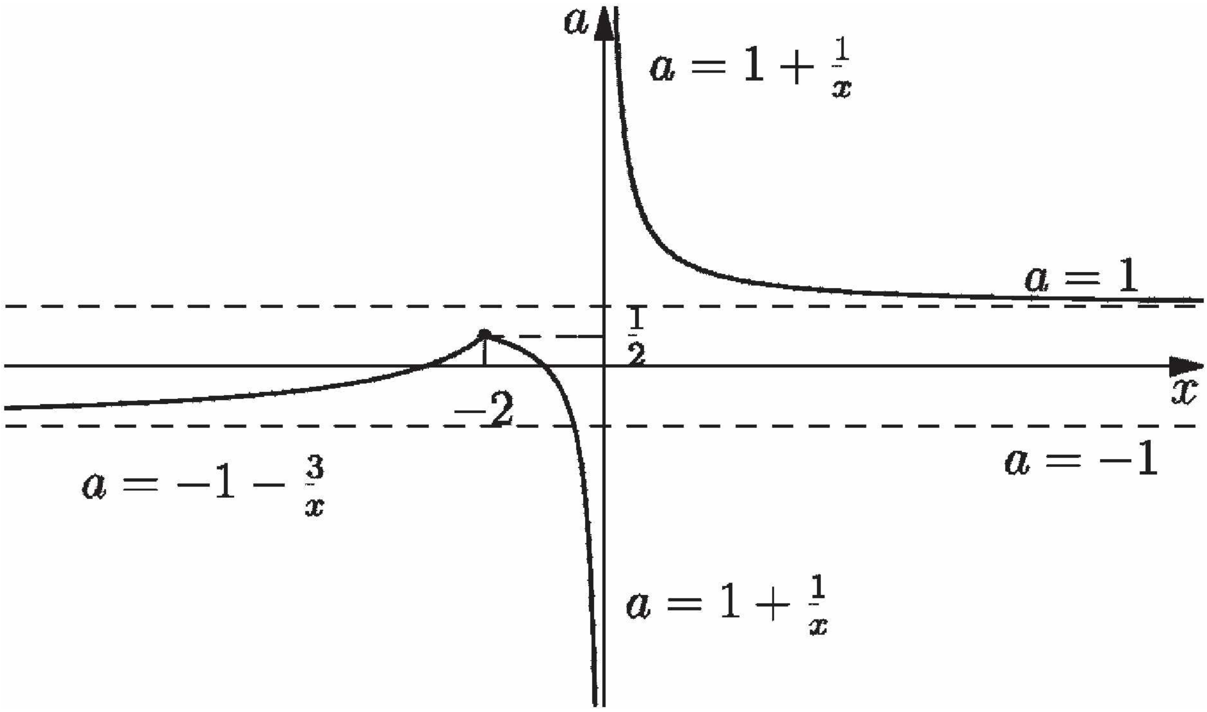
- Ha $-1 < a < \frac{1}{2}$, akkor két megoldás van, hiszen a) és b) esetben is 1-1.
- Ha $a \leq -1$, akkor az a) eset ad 1 megoldást, b) nem, tehát ekkor egy megoldás van.
- Ha $\frac{1}{2} < a \leq 1$, akkor nincs megoldás (ld. a) második és utolsó pontját).
- Ha $a > 1$, akkor egy megoldás van (ld. a) harmadik pontját).
- Ha $a = \frac{1}{2}$, akkor egy megoldás van (ld. a) utolsó pontját).

II. Megoldás.



$a = 1$	NINCS
$\frac{1}{2} < a < 1$	NINCS
$a = \frac{1}{2}$	1 megoldás
$-1 < a < \frac{1}{2}$	2 megoldás
$a = -1$	1 megoldás
$a < -1$	1 megoldás
$a > 1$	1 megoldás

III. Megoldás.



$$a = \frac{-1 + |x+2|}{x} \begin{cases} \nearrow a = 1 + \frac{1}{x}, & -2 \le x; \\ \searrow a = -1 - \frac{3}{x}, & x < -2 \end{cases}$$

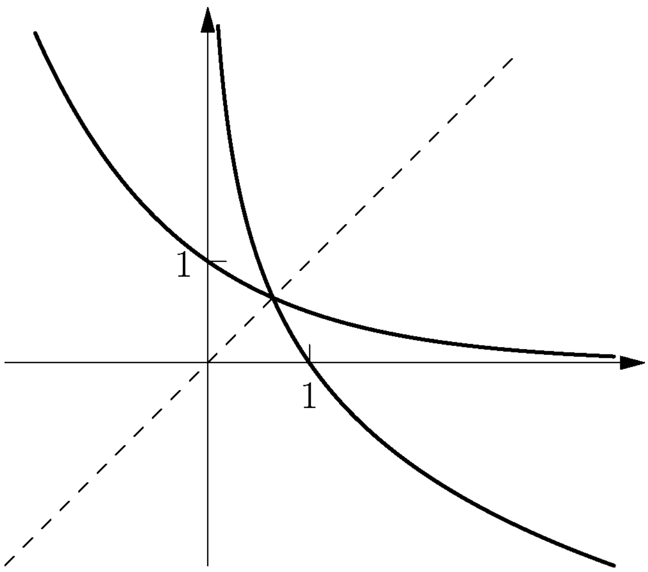
(Innen leolvasható)

16. Hány megoldása van a

$$\log_{1/16} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

egyenletnek?

Megoldás.



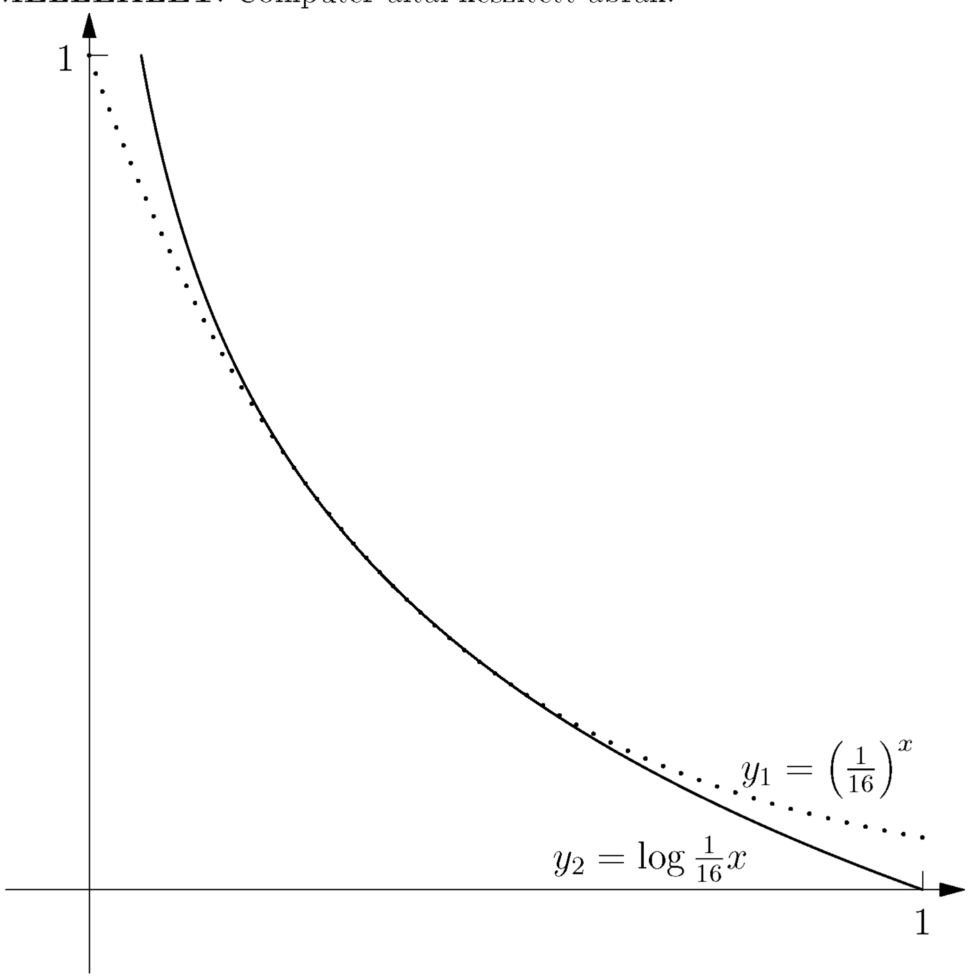
(**felületes!**)
"*Objection?*"
Nézzük a következőt:

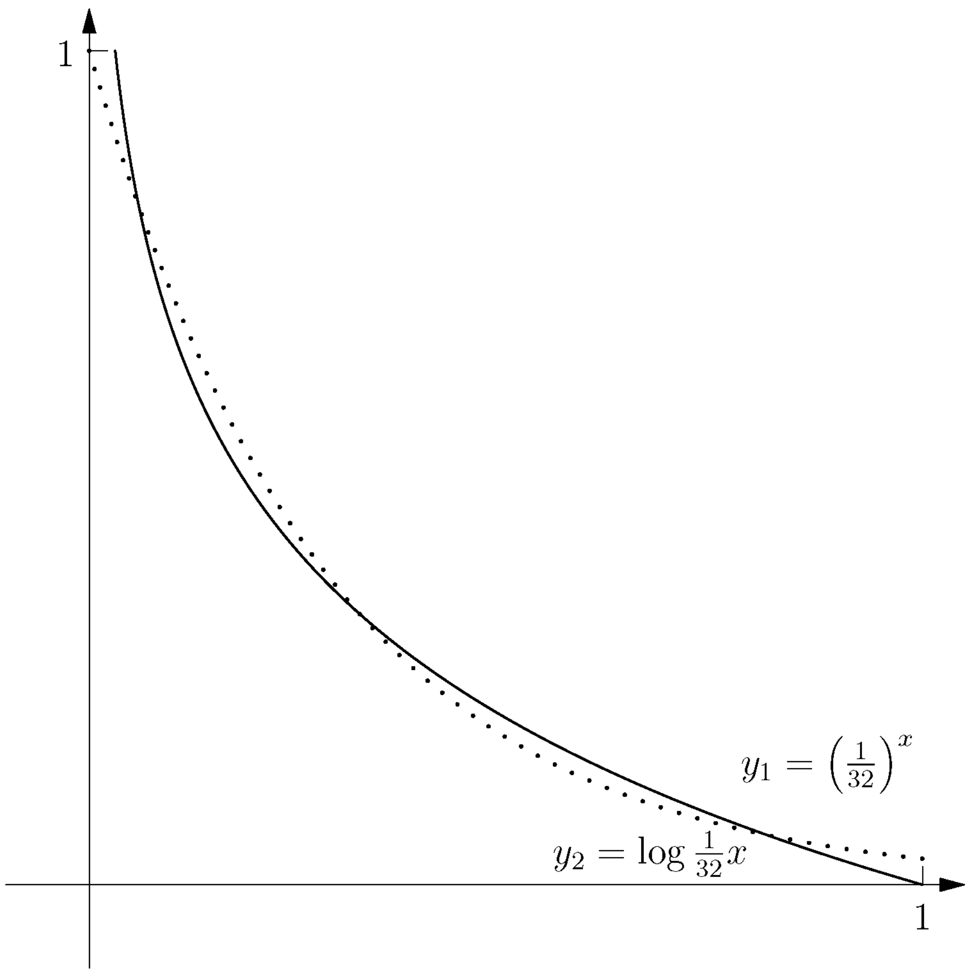
$$\left(y_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^x ;\ y_2 = \log_{1/16} x \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\ y_1 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ rajta van } y_1\text{-n} \\ y_2 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\ y_1 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ rajta van } y_1\text{-n} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ legalább két megoldás van: $x = \frac{1}{4}; x = \frac{1}{2}$ és még egy biztos az $y = x$ egyenesen (inverz miatt).

LD. **MELLÉKLET**: Computer által készített ábrák.





TANULSÁG!

PROBLÉMA. *Milyen* $0 < a < 1$ *esetén van több megoldása az* $a^x = \log_a x$ *egyenletnek?*

Állítás: akkor és csak akkor, ha $0 < a < e^{-e}$.

Bizonyítás: Legyen λ olyan szám, amelyre $a^\lambda = \lambda$ (azaz ahol az $y = x$ egyenest metszi a két görbe). Több metszéspont akkor és csak akkor van, ha $\exists x > \lambda$, amelyre az

$$f(x) := \frac{a^{a^x}}{x} = 1 \text{ teljesül.}$$

Vegyük f differenciálhányadosát, azaz

$$f'(x) = \frac{a^{a^x}}{x^2}[a^x \ln(a^x) \cdot \ln a - 1].$$

α) Ha $e^{-e} < a$, akkor

(1) $$-e < \ln a < 0.$$

Másrészt, mivel a $y = y \ln y$ függvénynek $\frac{1}{e}$-ben van minimuma (ez függvényvizsgálattal könnyen adódik), és ennek értéke $-\frac{1}{e}$, ezért

$$(2)\qquad -\frac{1}{e} \leq a^x \ln a^x < 0$$

$$(\text{mivel } x > 0,\ \text{ezért } a^x < 1).$$

Az (1) és (2) összeszorzásából viszont az adódik, hogy

$$(3)\qquad 1 > a^x \ln a^x \ln a > 0,$$

amiből $f'(x) < 0$-t kapjuk, ami azt jelenti, hogy

$$f(x) \downarrow .$$

Viszont $f(\lambda) = 1$, így azt kapjuk, hogy $\overline{\exists} x > \lambda$ úgy, hogy $f(x) = \underline{1}$ teljesüljön.

β) Ha $a = e^{-e}$, akkor $a^\lambda = \lambda \Leftrightarrow e^{-\lambda e} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{e}$. Így, ha $x > \lambda$, akkor $a^x \neq a^\lambda = \lambda = \frac{1}{e}$, ami azt jelenti, hogy (2)-ben a bal oldalon $<$ jel van, azaz $f'(x) < 0$ ebben az esetben is, és mivel $f(\lambda) = 1$, ezért $\overline{\exists} x > \lambda$, hogy $f(x) = 1$ legyen.

γ) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor

$$(4)\qquad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-e} = (e^{-1})^{\frac{1}{e^{-1}}}.$$

Mivel a $z = y^{\frac{1}{y}}$ függvény növő a $(0,1)$-en (ld. függvénydiszkusszió), ezért (4)$\Rightarrow \lambda < e^{-1}$, amiből

$$(5)\qquad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-1/\lambda}$$

adódik.

Innen $a^\lambda \ln a^\lambda \ln a - 1 = \lambda^2 (\ln a)^2 - 1 > \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$, azaz $f'(\lambda) > 0$ és $f(\lambda) = \underline{1}$, tehát λ-nak van olyan jobb oldali környezete, ahol $f(x) > 1$. Viszont $f(1) = a^a < 1$, így a Bolzano–Darboux- féle tulajdonság miatt a $(\lambda; 1)$ intervallumon valahol kell, hogy az $f(x) = \underline{1}$ teljesüljön. Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés. A fentiekből adódik, hogy $0 < a < e^{-e}$ esetén (a szimmetriát figyelembevéve) legalább 3 metszéspont van. Több azonban nem lehet, mert ha a $g(x) = a^x - \log_a x$

függvénynek 3-nál több zéróhelye lenne, akkor a Rolle-féle középértéktétel szerint a $g'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x \ln a}$ függvénynek legalább 3 zérushelye lenne, ami ekvivalens azzal, hogy az $a^x \ln a = \dfrac{1}{x \ln a} \Leftrightarrow x(\ln a)^2 = a^{-x}$ egyenletnek legalább 3 megoldása lenne, ami viszont az a^{-x} függvény szigorú konvex volta miatt lehetetlen, hiszen egy egyenes egy ilyen görbét legfeljebb 2 pontban metszhet.

Megjegyzés. $\dfrac{1}{e^e} \approx \dfrac{1}{15,15}$ (ezért látszik nehezen az első ábráról, hogy 3 megoldás van).

17. Oldjuk meg $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Először oldjuk meg a

$$(*) \qquad \cos(\sin x) = \sin(\cos x) \quad \text{egyenletet.}$$

$$(*) \Longleftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \sin\cos x$$

a)

$$\frac{\pi}{2} - \sin x = \cos x + 2k\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

b)

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos x + 2k\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x - \cos x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Mivel $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ és $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$, így a) és b) soha sem áll fenn, tehát $(*)$-nak nincs megoldása.

Tekintsük az $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ függvényt. Nyilván $f(x) > 0$-t kell megoldani. De $f(0) = 1 - \sin 1 > 0$ és $f(x) \neq 0$ mindenütt, így $f(x) < 0$ nem lehet (ld. a folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága)$\Longrightarrow$ $f(x) > 0$ $\forall x$-re, azaz az eredeti egyenlőtlenség minden x-re teljesül.

18. Hasonlítsuk össze a $\log_{15} 16$ és $\log_{16} 17$ számokat! (Melyik a nagyobb?)

I. Megoldás: Legyen $f(x) = \log_x(x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ és tekintsük $(1,\infty)$-n ezt a függvényt.

$$f'(x) = \frac{\ln x \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\ln(x+1)}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{x\ln x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} =$$
$$= \frac{x\ln\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}.$$

Mivel $\ln\dfrac{x}{x+1} < 0$ és $\ln(x+1) > 0 \Longrightarrow$ a számláló < 0 és a nevező $> 0 \Longrightarrow f' < 0 \Longrightarrow f \downarrow$, azaz $\underbrace{\log_{15} 16}_{1,02383} > \underbrace{\log_{16} 17}_{1,02186\ldots}$.

Megjegyzés. Pl.: $\underbrace{\log_{1000} 1001}_{1,000144692} > \underbrace{\log_{1001} 1002}_{1,000144524}$ **is jön így.**

II. Megoldás. Tudjuk: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, ha $a \geq 0,\ b \geq 0$.

$$\sqrt{\frac{\log_{15} 16}{\log_{16} 17}} = \frac{1}{\sqrt{\log_{16} 15 \cdot \log_{16} 17}} >$$
$$> \frac{2}{\log_{16} 15 + \log_{16} 17} = \underbrace{\frac{2}{\log_{16} 15 \cdot 17} \overset{?}{>} 1}_{(*)}$$

$(*) \iff 2 > \log_{16} 15 \cdot 17 \iff 256 > 15 \cdot 17 \iff 256 > 255 \Longrightarrow$ valóban $\log_{15} 16 > \log_{16} 17$.

Megjegyzés. Ezzel a módszerrel is általánosan is bizonyítható, hogy

$$\log_x(x+1) > \log_{x+1}(x+2), \text{ ha } x > 1.$$

19. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} =$$
$$= \sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2-4x+5}}.$$

Megoldás. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt[3]{u}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{2}u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-4/3} = \\ &= \frac{1}{2}u^{-3/6} - \frac{1}{3}u^{-8/6} = \\ &= u^{-8/6}\left[\frac{1}{2}u^{5/8} - \frac{1}{3}\right] > 0, \text{ ha } u \geq 1. \end{aligned}$$

Viszont $x^2 + 1 \geq 1,\ 2x^2 - 4x + 5 = 2[x^2 - 2x] + 5 = 2(x-1)^2 - 2 + 5 \geq 1.$

Tehát mivel $f(u) \uparrow$ az $(1;\infty)$-en $\Longrightarrow f(a) = f(b) \Longleftrightarrow a = b$ ($a \geq 1,\ b \geq 1$ esetén). Azaz $x^2+1 = 2x^2-4x+5 \Longleftrightarrow x^2-4x+4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0$. Tehát $x_0 = 2$ az egyetlen megoldás.

Megjegyzés. Itt **felsőbb mat.** módszer kellett. (Bár a feladat "elemi".)

20. Oldjuk meg:

$$x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0.$$

Megoldás. $x_0 = 1$ megoldás.
Ekkor $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = (x-1)(x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41) = 0$.
Kérdés: Van-e több megoldás?
Elég megoldani.

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41 = 0?? \text{ nehéz!}$$

Térjünk vissza az eredetihez. Legyen $f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$.

Tegyük fel, hogy $\exists(x_1 \neq x_0 = 1)$.

Ekkor a Rolle-tétel szerint:

$$f'(x) = \underbrace{5x^4 - 30x^2 + 50}_{(*)} = 0\text{-nak kell,}$$

hogy legyen megoldása.

De $(*)$-nak a diszkriminánsa $< 0 \Longrightarrow$ nincs valós megoldás. Ez ellentmondás, tehát nincs másik megoldás.

21. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} y = (x-y)^2 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Megoldás. (1) fennáll, ha $x = y$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ekkor (2) $\Longrightarrow$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, illetve $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Kérdés. Van-e több megoldás?
Van-e olyan megoldás, ahol $x \neq y$?
Vehető $x > y$ (szimmetria miatt)
Tegyük fel, hogy $\exists\, x > y$ megoldás.

$(1) \Longrightarrow \underbrace{2 \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y}}_{(*)} = \underbrace{x - y}_{(**)} \quad (3)$

$(*) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 c}\left[-\frac{\pi}{2} < -1 \leq y < c < x \leq 1 < \frac{\pi}{2}\right]$ Lagrange-féle középérték-tételből.
$(**) < 2$.

Viszont $2 \cdot \frac{1}{\cos^2 c} \geq 2$.

Tehát (3) bal oldala ≥ 2 és jobb oldala < 2, így ellentmondás, azaz $\overline{\exists}$ több megoldás.

22. Bizonyítsuk be, hogy $\sin 1$ irracionális szám.

Megoldás. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$ Taylor-sor

Így $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \ldots \; (*)$

Tegyük fel, hogy $\sin 1 = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$.

Szorozzuk be $(*)$ mindkét oldalát $(2q+1)!$-sal:

$$\frac{p}{q}(2q+1)! = (2q+1)!\left[1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \cdots\right] \Longrightarrow$$

$$\underbrace{-\left[1 - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{(2q+1)!}\right](2q+1)!}_{\text{egész}} + \underbrace{\frac{p}{q}(2q+1)!}_{\text{egész}} =$$

$$= \underbrace{\pm (2q+1)!\left[\frac{1}{(2q+3)!} - \frac{1}{(2q+5)!} + \cdots\right]}_{(**)}.$$

Belátható $(**)$-ról, hogy nem egész, azaz $0 < ** < 1$ és így $\Longrightarrow$ ellentmondást kaptunk, mert a bal oldal viszont egész.

Megjegyzés. $0 < ** < 1$ könnyen bizonyítható, ha a [ ]-ből kiemeljük $\frac{1}{(2q+3)!}$-t és utána észrevesszük, hogy a szögletes zárójelben levő érték < 1, így a szorzat is biztos < 1.

23. Áll.: π irracionális

Biz. Tfh $\pi = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$.

Tekintsük a $g(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$ fgv-t. Nyilván $g(x) = \frac{1}{n!}(A_0x^n + A_1x^{n+1} + \dots + A_nx^{2n})$, ahol $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{Z}$.

1. Részállítás.

α) $g(0) = g'(0) = \cdots g^{(n-1)}(0) = 0$

β) $g^{(n)}(0),\ g^{(n+1)}(0), \dots g^{(2n)}(0)$ egész számok.

Tehát $g(0), g'(0), \dots, g^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$.

2. Részállítás.

α) $g(\pi) = g'(\pi) = \dots = g^{(n-1)}(\pi) = 0$

β) $g^{(n)}(\pi), g^{(n+1)}(\pi), \dots g^{(2n)}(\pi)$ egész számok

Megjegyzés. $t = a - bx$ helyettesítéssel $x = \pi = \frac{a}{b}$-re $t = 0$ lesz, így adódik az előző ponthoz hasonlóan.

Tehát $g(\pi), g'(\pi), \dots, g^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Azaz összegezve:

(1) $g(0), g'(0), \dots, g^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$

(2) $g(\pi), g'(\pi), \dots g^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$

Tekintsük (parciális integrálással):

$$F(x) = \int \sin x g(x)dx = -\cos x g(x) +$$
$$\int \cos x g'(x)dx = -\cos x g(x) + \sin x g'(x) -$$
$$\int \sin x g''(x)dx = -\cos x g(x) + \sin x g'(x) +$$
$$\cos x g''(x) + \dots \pm \cos x g^{(2n)}(x)$$

A N–L formulából

(3) $\int\limits_0^\pi \sin x g(x)dx = F(\pi) - F(0) =$ egész szám (ld. (1), (2)).

Világos: $\sin x g(x) > 0$, ha $x \in (0, \pi)$
$\Longrightarrow \int\limits_0^\pi \sin x g(x) dx > 0$ és (3) alapján egész szám
Becsüljük:

$$\sin x \leq 1, \ a - bx \leq a, \ x \leq \frac{a}{b} = \pi.$$

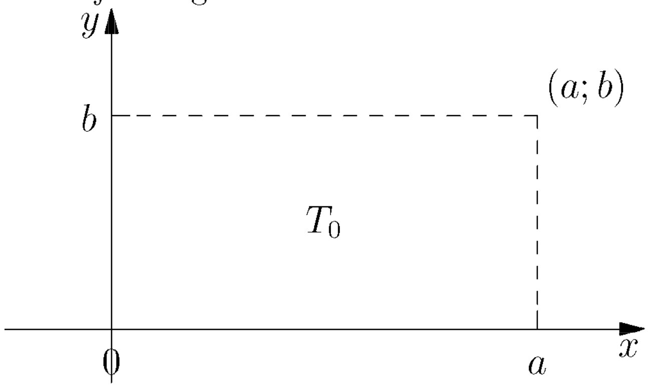
Így $\int\limits_0^\pi \sin x g(x) dx \leq \pi \frac{a^n \pi^n}{n!}$, azaz

$$1 \leq \pi \frac{a^n \pi^n}{n!} = \pi \frac{(a\pi)^n}{n!} \to 0, \ \text{ha } n \to \infty,$$

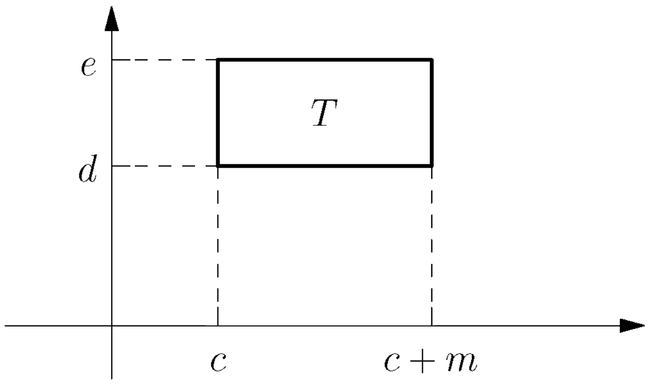
ami ellentmondás.

Megjegyzés. $\pi \sim e$ ugyanígy.

24. Legyen egy téglalap "kiparkettázva" olyan "kis" téglalapokkal, amelyeknek legalább az egyik oldala egész mérőszámú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az eredeti téglalapnak is legalább az egyik oldala egész szám.
Megoldás. (14 megoldás W. Stantől; Math. Monthly, 1987, aug.–szept., 601–617.)
Mi *kettős integrállal* oldjuk meg.



Tekintsük az $f(x, y) = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$ függvényt. Könnyen belátható, hogy tetszőleges "kis" T téglalapra $\iint\limits_T f(x, y) dx dy = 0$, mivel legalább az egyik oldal egész. Mutassuk be ezt pl. a következő eseten:



Ekkor szukcesszív integrálással

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_T f(x,y)dxdy = \\
&= \int_d^e \left[\int_c^{c+m} \sin 2\pi x \sin 2\pi y dx\right] dy = \\
&= \int_d^e \left(\int_c^{c+m} \sin 2\pi x dx\right) \sin 2\pi y dy = \\
&= \int_d^e \left\{\left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right]_c^{c+m}\right\} \sin 2\pi y dy = \\
&= \int_d^e \left\{-\frac{\cos 2\pi(c+m)}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi c}{2\pi}\right\} \sin 2\pi y dy = \\
&= \int_a^e \left\{-\frac{\cos 2\pi c \cos 2\pi m - \sin 2\pi c \sin 2\pi m}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi c}{2\pi}\right\} \\
&\times \sin 2\pi y dy = 0.
\end{aligned}$$

Így tehát minden "kis" téglalapon az integrál:

$$\iint\limits_T f(x,y)dxdy = 0$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{T_0} f(x,y)dxdy = 0$$

Azaz $\int\limits_0^b \left[\int\limits_0^a (\sin 2\pi x \sin 2\pi y)dy\right] dy = 0 \quad (*)$.

Ismét alkalmazzuk a szukcesszív módszert a $(*)$ integrál kiszámítására.

$$\begin{aligned}
&\int_0^b \left[\int_0^a (\sin 2\pi \sin 2\pi y)dx\right] dy = 0 \\
&= \int_0^b \left\{\left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right]_0^a \sin 2\pi y\right\} dy = 0 \\
&= \left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right]_0^a \cdot \left[-\frac{\cos 2\pi y}{2\pi}\right]_0^b = 0. \quad (**)
\end{aligned}$$

Így legalább az egyik tényezőnek 0-nak kell lennie.

De

$$(**) = \left[-\frac{\cos 2\pi a}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi 0}{2\pi}\right] \times$$

$$\times \left[-\frac{\cos 2\pi b}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi 0}{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1 - \cos 2\pi a)\frac{1}{2\pi}(1 - \cos 2\pi b) = 0.$$

$$\Rightarrow \text{vagy } \underbrace{1 = \cos 2\pi a}_{\substack{\Updownarrow \\ a \text{ egész}}} \text{ vagy } \underbrace{1 = \cos 2\pi b}_{\substack{\Updownarrow \\ b \text{ egész}}}$$

Ezzel a bizonyítás kész.

25. Probléma: $a_n = n\sin(2\pi e n!) \to 2\pi$, ha $n \to \infty$

Bizonyítás:

$$a_n = n\sin(2\pi e n!) = n\sin\left[2\pi n! \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right] =$$

$$n\sin\left[2\pi n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots\right)\right] =$$

$$= n\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)\right] \geq$$

$$\geq n\sin\frac{2\pi}{n+1} \to 2\pi$$

Másrészt

$$a_n \leq n2\pi\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right) \leq$$

$$\leq n2\pi\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = n2\pi\frac{1}{n} = 2\pi$$

Így a rendőrelv szerint $a_n \to 2\pi$.

Ebből az eredményből azonnal jön, hogy az e irracionális szám.

26. András és Béla kávét és tejszínt rendelnek egy eszpresszóban. András azonnal beleönti a tejszínt a forró kávéba, összekeveri, lefedi egy szalvétával, és 10 percre elmegy telefonálni. Béla lefedi szalvétával a csészéjét, és várja Andrást, majd amikor az visszajön, akkor önti bele a kávéjába a tejszínt. Ki ivott melegebb kávét, András vagy Béla?

(Feltesszük, hogy a szalvéta és az asztallap tökéletes hőszigetelő, továbbá a levegő és a tejszín hőmérséklete megegyezik.)

Megoldás. Ennek megoldásához ismernünk kell a fizikából a hőátadás törvényét. Ez azt mondja, hogy a különböző hőmésékletű anyagok érintkezésénél az átadott hőmennyiség arányos a hőmérsékletkülönbséggel és az eltelt idővel.
Ha a folyadék a hidegebb környezetnek hőt ad le, csökken a hőmérséklete. A mennyiségi összefüggést a hőtan egy másik törvénye adja, mely szerint a test által leadott hőmennyiség arányos a hőmérsékletcsökkenéssel és a tömeggel.
Ha bevezetjük az $x(t) := T(t) - T_*$ jelölést, akkor kapjuk, hogy

$$x' = -\frac{\eta}{cm}x = -kx \quad \left(k = \frac{\eta}{cm}\right).$$

$$\vdots$$

Tehát András ivott melegebb kávét, hiszen $T_A(10) > T_B$.

Irodalom: Hatvani–Pintér: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Polygon, 1997.

27. Anna és Béla együtt járnak, de párosuk elég furcsa. Béla nehéz természetű. Amikor Anna szereti Bélát, akkor Béla kezdi kevésbé szeretni Annát. Ha Anna utálja Bélát, akkor viszont Béla egyre jobban kezdi szeretni Annát. Anna normális: ha Béla szereti Annát, akkor Anna is egyre barátságosabban néz Bélára, de kezd barátságtalanabb lenni, amikor Béla nem szereti őt. Hogyan lehetne leírni viszonyuk változását?

Tegyük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban találkoztak. A $t \geq 0$-n értelmezett $a = a(t), b = b(t)$ függvények fejezik ki Anna, ill. Béla szeretetét Béla ill. Anna iránt.

Az a függvény változásának a sebessége legyen arányos b-vel:

$$a'(t) = Ab(t),$$

és a b függvény változásának sebessége arányos a-val:

$$b'(t) = -Ba(t).$$

Az egyenletrendszerből $a''(t) = b'(t) = -a(t)$, azaz $a''(t) + a(t) = 0$. Ez egy másodrendű, lineáris egyenlet.

$$\vdots$$

$$a(t) = C\cos t + D\sin t, \quad C, D \text{ állandó}$$

$$b(t) = E\cos t + F\sin t, \quad E, F \text{ állandó}$$

$$a'(t) = -C\sin t + D\cos t = b(t) = E\cos t + F\sin t$$

$$a(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ és } b(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a(t) = e^t + 2te^t = (1 + 2t)e^t,$$

$$b(t) = e^t - 2te^t = (1 - 2t)e^t.$$

$t \geq 0, a(t) \to \infty$ monoton nőve és $b(t) \to -\infty$ monoton fogyva, ha $t \to \infty$. Mint látható, itt semmi remény.