

## Néhány érdekes végtelen összegről

Dr. Németh József

SZTE TTIK Bolyai Intézet

Analízis Tanszék

<http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj>

### **Háttéranyag:**

Németh József: Előadások a végtelen sorokról  
(Polygon, Szeged, 2002)

2

”Nagy”

a) *Arkhimédész* (i.e. 250)  $10^{8 \cdot 10^{16}}$   
(1m=400 jegy; 8 napig fut mellette a fény)

b) *Ókori India*:  $10^{23}$  majom

c) *Sakk*

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ búzaszem}$$

$$2^{64} - 1 = 1,844674407 \cdot 10^{19} \approx 922000$$

millió tonna

(1998: 600 millió tonna a világ évi búzatermése; 1500 évi búzatermés)

d) Minden nap 100.000 Ft=3 millió Ft

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{29} = 2^{30} - 1 = 10.73741823 > 10 \text{ millió Ft}$$

e) Egy 2 km oldalú kockában elhelyezhető a világ összlakossága.  $2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3$  ”fülke”

### Végtelen összegek

a) ”Csoki”

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

b)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = ?$

$\alpha$ ) TORTA

$\beta$ )

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = A \\ \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{3}A \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}A \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 + 2^2 + \cdots = A \\ 2 + 2^2 + \cdots = 2A \end{array} \right\} \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

d)  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = A$  (Leibniz)

$\alpha$ )  $A = 0$

$\beta$ )  $A = 1$

4

$$\gamma) \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\delta) \quad \frac{1-x}{\underbrace{1-x^3}_1} = 1-x+x^3-x^4+x^6-\dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2}$$

$$\dots \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

(Vessük el a végtelent!)

**Definíció.**  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \stackrel{?}{=} A$

$s_n = a_1 + \dots + a_n \rightarrow A$ , akkor a végtelen sok szám összegén  $A$ -t értjük.

**Pl.:**

1) "CSOKI":

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1.
\end{aligned}$$

2) "TORTA":

$$s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{0 - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

**Mértani sor:**  $1 + q + q^2 + \cdots + q^n +$

6

$$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1,$$

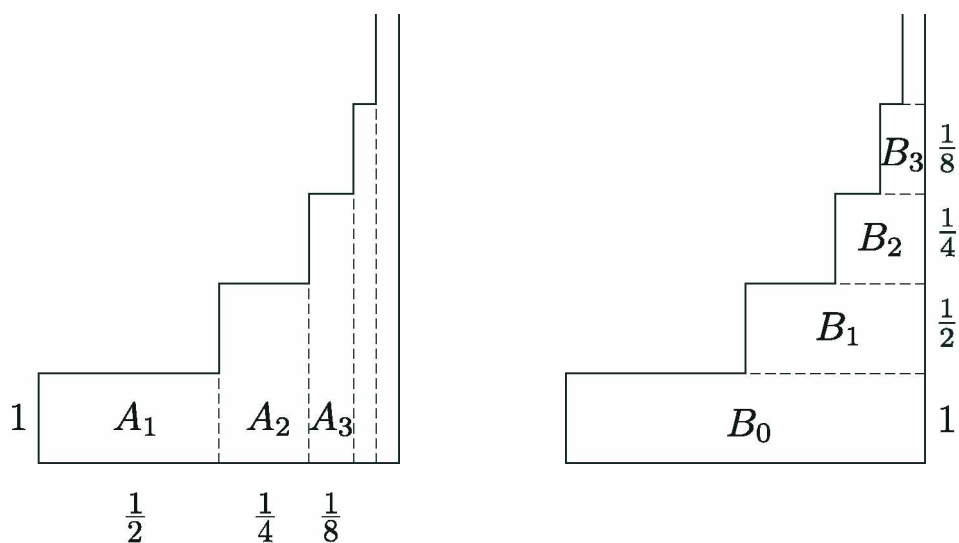
$$\text{hiszen } s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

3)  $1 + 2 + 2^3 + \dots$  esetén  $s_n = 1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \rightarrow \infty$ .

4)  $1 - 1 + 1 - 1 \dots$  esetén  $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$ , így  $s_n$  nem "tart" egy számhoz sem, azaz nincs összege ennek a végtelen sok számnak.

*Egy további érdekes összeg:*  $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} +$

$\frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$  (Swineshead; XIV. század; fizika, valószínűség).



Bontsuk fel a sort a következőképpen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots &= 1 \\
 \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots &= \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots &= \frac{1}{2^2} \\
 \ddots &\vdots
 \end{aligned}$$

Megjegyzés:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000n}{1,06^n} \approx ?$

8

$$\frac{1000}{1,06} + \frac{1000 \cdot 2}{1,06^2} + \frac{1000 \cdot 3}{1,06^3} + \dots$$

*Néhány további érdekes összeg:*

a)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = ?$   
(harmonikus sor)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{83} > 5$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{227} > 6$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{33617} > 11$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{248397} > 13$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1,5 \cdot 10^{43}} > 100$$



Lassú (példa)

$$\begin{array}{rcl}
 1 + \frac{1}{2} & = & 1 + \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & \geq & 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} & \geq & 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} & \geq & 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} & \geq & 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{33} + \cdots + \frac{1}{64} & \geq & 32 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{65} + \cdots + \frac{1}{128} & \geq & 64 \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{2} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

10

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

*Belátható:*

$$\alpha) \sum_{g \notin n} \frac{1}{n} < 80.$$

Bizonyítsuk be, hogy a  $\sum_{9 \notin n}^{\infty} \frac{1}{n}$  sor konvergens.

**Megoldás.** Írjuk fel az új sor néhány tagját részletesen.

$$\begin{aligned} \sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{88}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{888}\right) + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{10^k} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{8 \cdot 8 \cdots 8}}_{(k+1)\text{-szer}}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Végezzük el a következő felső becsléseket:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} &\leq 1 + 1 + \cdots + 1 = 8, \\
 \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{88} &\leq \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} = 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}, \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{10^k} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{8 \cdot 8 \cdots 8}}_{(k+1)\text{-szer}} &\leq 8 \cdot 9^k \cdot \frac{1}{10^k}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} &< 8 \cdot 9^0 \cdot \frac{1}{10^0} + \cdots + 8 \left( \frac{9}{10} \right)^k + \cdots = \\
 &= 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{9}{10} \right)^k = 80,
 \end{aligned}$$

12

tehát a sor valóban konvergens.

$\beta)$   $s_n$  ( $n > 1$ ) soha sem egész szám.

Tegyük fel, hogy van olyan  $n > 1$ ,  
hogy

$$(*) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = A,$$

ahol  $A \in \mathbb{N}^+$ .

Legyen  $p \cdot 2^r$  a legnagyobb paritású tag  
az  $1, 2, \dots, n$  számok között. Ekkor  $(*)$   
a következő alakban írható:

$$(**) \quad \frac{u}{2^s \cdot v} + \frac{1}{p \cdot 2^r} = A,$$

ahol  $v$  és  $p$  páratlan és  $r > s$  (mivel  $r$   
volt a maximális paritás).

Szorozzuk be  $(**)$  mindkét oldalát  $2^s \cdot$   
 $p \cdot v$ -vel, akkor az adódik, hogy

$$u \cdot p + \frac{v}{2^{r-s}} = A \cdot 2^s \cdot p \cdot v,$$

ami ellentmondás, mert a bal oldal első tagja egész, a második pedig nem, így összegük nem adhatja ki a jobb oldalon álló egész számot. Tehát a részletösszegek nem adhatnak egész számot ( $n > 1$ ) esetben).

$$\gamma) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = 2,5$$

*Mi a helyzet, ha váltakozik az előjel?*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = ?$$

- 1) Az összeg:  $A = \log_e 2$  (ld. könyv; 2 megoldás)
- 2) Átrendezés

14

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \quad = A$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \quad = A$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \quad = \frac{A}{2}$$


---

(1) + (3) :

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \quad = \frac{3}{2}A$$

$\Rightarrow$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \quad = \frac{3}{2}A \neq A.$$

Tetszőleges számhoz átrendezhető.

*Még egy érdekesség:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log_e \sqrt[3]{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Kérdés:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  konvergens-e? Mi az összege?

b)  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Van véges összeg:

1)  $s_n < 2$

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

(\*)

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}, \end{aligned}$$

majd az egyes tagokat bontsuk fel törtek különbségére az alábbi módon:

16

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \dots,$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Így (\*) jobb oldala helyett az írható,  
hogy

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},$$

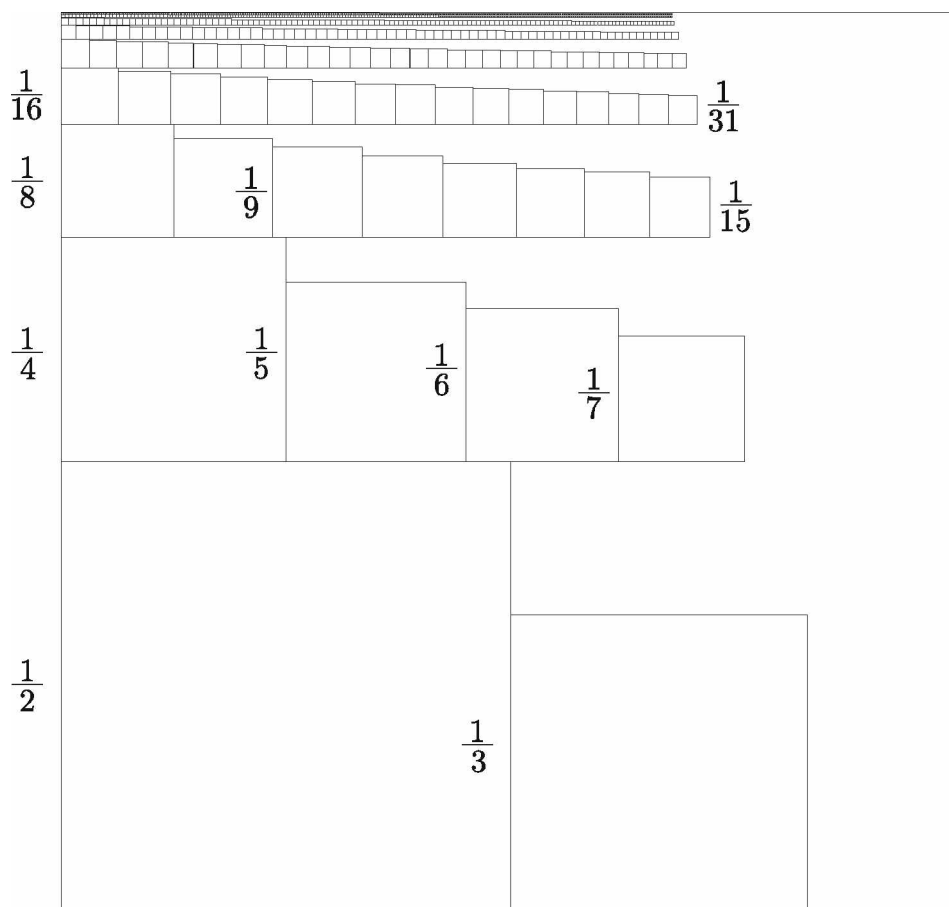
hiszen a közbülső tagok kiesnek, ugyanis  
ez egy teleszkópikus összeg. Azt kapjuk,  
hogy

$$s_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Versenypélda:  $\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} = 1$ .

2) Geometriai megoldás





Mekkora az összeg?

1689 (Jacob Bernoulli) tűzte ki (Baseli probléma)

*Euler* 1734

18

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{100} = 1,54977$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10000} = 1,63498$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{1000000} = 1,64393$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = 1,64493406684822643647 \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} \rightarrow 10 \text{ év}$$

**Tehát**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (elemi bizonyítás a

könyvben:  $\sin mx = \dots$ ; Viete formulák  $n$ -edfokú egyenletre)

*Johann Bernoulli*: "Bárcsak a bátyám

megérhette volna.”

*Euler memóriája*: Vergilius: Aeneasz (580 oldal)

*További összegek* (Euler)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{2^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{1} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{2^2}{5!} \frac{1}{3} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{2^4}{7!} \frac{1}{3} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots = \frac{2^6}{9!} \frac{3}{5} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \dots = \frac{2^8}{11!} \frac{5}{3} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \dots = \frac{2^{10}}{13!} \frac{691}{105} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \dots = \frac{2^{12}}{15!} \frac{35}{1} \pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \dots = \frac{2^{14}}{17!} \frac{3617}{15} \pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \dots = \frac{2^{16}}{19!} \frac{43867}{21} \pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \dots = \frac{2^{18}}{21!} \frac{1222277}{55} \pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \dots = \frac{2^{20}}{23!} \frac{854513}{3} \pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \dots = \frac{2^{22}}{25!} \frac{1181820455}{273} \pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \dots = \frac{2^{24}}{27!} \frac{76977927}{1} \pi^{26}$$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  (?) (Apery)

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  konvergens vagy

divergens?

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{4^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \dots \leq \\
 & \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{2^3}} + \frac{4}{\sqrt{4^3}} + \frac{8}{\sqrt{8^3}} + \dots = \\
 & = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{8}} + \dots = \\
 & = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots = \\
 & = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ (geometria sor)}
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

$\frac{1}{17} + \dots = \infty$  (ld. könyv; oszthatóság;  
harmonikus sor)

Prímszámok a négyzetszámok között.

Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább  $10^6$  db prímszám esik.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden  $n$  természetes szám esetén  $n^2$  és  $(n+1)^2$  közé kevesebb, mint  $10^6$  db prímszám esik.

Jelölje  $p_1^{(n)}, \dots, p_{s_n}^{(n)}$  ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát  $s_n < 10^6$  teljesül minden  $n$  esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}}.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciprok összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  sor konvergens, a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  sor pedig divergens, mégpedig úgy, hogy (pozitív tagú lévén) a részletösszegek tartanak a végtelenbe. Azaz eredeti állításunk valóban igaz.

f)  $\sqrt{2} \approx 1,41 \dots$

24

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^n.$$

$$n \rightarrow \frac{1}{2} \text{ (NEWTON)}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \dots$$

$$x = 1$$



$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

(irracionális; Hyppasos)

g)  $\pi \approx 3,14\dots$

i.e. 2000 (*B*) 3,125

(*E*) 3,16

250 (*A*) 3,1418

i.sz. 263 : 5 tizedesjegy

480 : 7

1429 : 14

1610 : 35

1719 : 112

1847 : 152

1874 : 527

1973 : 1 001 250

1987 : 134 217 700

2002 : 1 240 000 000 000

2010 : 5 000 000 000 000

FRANÇOIS VIÈTE (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

JOHN WALLIS (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

WILLIAM BOUNCKER (kb. 1650):

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \cdots}}}}.$$

MADHAVA, JAMES GREGORY, GOTTF-

RIED WILHELM LEIBNIZ (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

(lassú, de szép; Newton; biz. a könyvben)

ISAAC NEWTON (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots \right).$$

SRINIVASA RAMANUJAN (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}.$$

DAVID CHUDNOVSKY és GREGORY  
CHUDNOVSKY (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + n 545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15  
újabb pontos jegyét adja  $\pi$ -nek.)

JONATHAN BORWEIN és PETER BOR-  
WEIN (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{(A + nB)}{C^{n+1/2}},$$

ahol

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365$$

$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750$$

$$C := [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja  $\pi$ -nek.)

DAVID BAILEY, PETER BORWEIN és  
SIMON PLOUFFE (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left( \frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia; 1761 Lambert; 1882 Lindemann

$$\text{h) } e \approx 2,71 \dots \left( e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n ; \right.$$

folyamatos kamatozás; Euler-szám.)

Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**Megoldás.** Jelöljük a (1) sor  $n$ -edik rész-

30

letösszegét  $s_n$ -nel, azaz

$$(2) \quad s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Be fogjuk látni, hogy  $s_n \rightarrow e$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

A binomiális tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n,
\end{aligned}$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n.$$

Most rögzítsünk egy  $k \in \mathbb{N}^+$  számot. Legyen  $n > k$ , és  $(1 + \frac{1}{n})^n$ -nek a binomiális kifejtéséből hagyjuk el a  $(k+1)$ -edik utáni tagokat. Ezzel az  $(1 + \frac{1}{n})^n$  kifejezést csökkentjük, azaz

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \frac{1}{2!} \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \\
 &+ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
 &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Ha  $n \rightarrow \infty$ , a bal oldal határértéke  $e$ , a



jobb oldalé pedig ( $k$  rögzített)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Ebből tehát az adódik, hogy

$$(4) \quad e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k.$$

Mivel (4) minden  $k$ -ra igaz, így  $k$  helyett  $n$ -et írva és figyelembe véve (3)-at, azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e.$$

A rendőrelv alapján adódik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$ , azaz (1)-t sikerült belátnunk.

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia ( $n \cdot \sin(2\pi en!) \rightarrow 2\pi$ )  $\pi + e$ ???

$$j) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

