

Varró Sándor

Bevezetés az intenzív fény és anyag köölcsönhatásainak elméleti leírásába

Technikai szerkesztő:
Kovács Judit

Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
2010

Tartalomjegyzék

1. Koherens állapotok. A lézerefény mint klasszikus elektromágneses sugárzás	4
1.1. A sugárzási tér kvantálása	4
1.2. Kvantum koherencia függvények	7
1.3. A sugárzási tér koherens állapotai	11
1.4. Klasszikus elektron kvantált sugárzási tere	12
1.5. Elemi megfontolások a kvantált sugárzási tér fázisáról	13
2. Az intenzív lézerefény és elektron kölcsönhatásának klasszikus elektrodinamikai leírása	16
2.1. Nemrelativisztikus elektronpályák monokromatikus lézerefényben	16
2.2. Felharmonikus keltés szabad elektronon, nemlineáris Thomson-szórás	17
2.3. Relativisztikus elektron trajektóriái intenzív sugárzási térben	21
2.4. Egy egyszerű példa a vivő-burkoló fáziskülönbség (abszolút fázis) hatásának szemléltetésére lineáris esetben	24
3. Az intenzív lézerefény és elektron kölcsönhatásának szemiklasszikus leírása	25
3.1. Dipólközelítés, mértéktranszformáció a klasszikus mechanikában és a kvantummechanikában	25
3.2. A Gordon-Volkov-állapotok dipólközelítésben	28
4. Nemrelativisztikus elektronok többfotonos indukált fékezési sugárzása	31
4.1. Integrálegyenlet a lézerefényben szóródó elektron állapotára	32
4.2. Nemlineáris indukált fékezési sugárzás	33
5. Többfotonos ionizáció	36
5.1. A Keldis-féle átmeneti amplitúdó	36
5.2. A Keldis-féle közelítés, sokfotonos ionizáció, optikai tunnelionizáció	37
6. Magasrendű felharmonikusok keltése intenzív lézer fényben	40
6.1. Magasrendű felharmonikusok keltése kötött elektronon	41
6.2. Magasrendű felharmonikusok keltése ütközéskor	43
7. Nemrelativisztikus elektron kölcsönhatása kvantált sugárzási térrel	45
7.1. A "nemrelativisztikus szabad elektron + kvantált módus" rendszer állapotai	46
7.2. Többfotonos indukált fékezési sugárzás kvantált e.m. térben	50
8. Az intenzív lézerefény és elektron relativisztikusan kovariáns leírásának elemei	51
8.1. Az elektron mozgásegyenletének relativisztikus tárgyalása. Kanonikus formalizmus	51
8.2. A nemlineáris Compton-szórás leírása az átmeneti áramok módszerével	56

Bevezetés

A nagyintenzitású fény és anyag kölcsönhatásakor fellépő nemlineáris jelenségek kísérleti tanulmányozása a lézerek felfedezése után vált lehetségessé a 60-as években. Ezekkel a fényforrásokkal biztosítható olyan nagy foton-sűrűség, hogy az anyagot alkotó részecskék (atomok, molekulák, vagy egyszerűen elemi töltések) számottevő valószínűséggel egyszerre több fotonnal is kölcsönhatásba kerüljenek. Ennek nyomán a jelenségek elmélete nagyon gyors fejlődésen ment át. A napjainkban látható újabb fokozott érdeklődést a terület iránt elsősorban azok a projektek ösztönzik, amelyek extrém nagy intenzitású egyszersmind nagyon rövid – attosekundumos – fényimpulzusok generálására alkalmas forrásoknak helyet adó intézetek (Extreme Light Infrastructure: ELI) megvalósítására irányulnak.

A jelen jegyzet elsősorban a *Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizika Tanszékének* a téma iránt érdeklődő hallgatói számára íródott. Elkészítését elsősorban az motiválta, hogy mielőbb egy elektronikus formában elérhető anyag jelenjen meg, elsősorban a témakörrel megismerkedni szándékozó doktoranduszok illetve a fizikus mester szakot végző hallgatók számára. Magyar nyelven ilyen tananyag jellegű munka még nem született, ezért néhány eredeti cikket kívül az irodalomjegyzék is csak néhány nemrégiben megjelent, javarészt áttekintő jellegű referenciát tartalmaz.

A jegyzet anyaga az említett nemlineáris jelenségek közül a legalapvetőbbekre, nevezetesen a szabad elektronok intenzív lézertényben lejátszódó szórásfolyamataira, a sokfotonos fotoeffektusra valamint a magasrendű felharmonikusok keltésére vonatkozó elméleti alapokra koncentráltunk. Az a cél vezérelt bennünket, hogy a fenti jelenségekkel kapcsolatos mérések értelmezésének legszükségesebb elméleti alapjait adjuk. Ennek megvalósítása érdekében a fény-elektron kölcsönhatás leírásához használatos nem-perturbatív módszereket illetve modelleket ismertetünk, mivel a kvantumelektrodinamika hagyományos módszereivel sok esetben csak igen körülményesen, vagy egyáltalán nem érhető el ez a cél. Megjegyezzük, hogy e témakörben már több összefoglaló cikk és könyv is megjelent a nemzetközi szakirodalomban [29-35], amelyekben az intenzív lézerterekben lejátszódó folyamatok többé-kevésbé szisztematikus tárgyalása található.

A hatvanas-hetvenes évek során kidolgozott elméleti módszerekhez képest számottevő koncepcionális áttörés időközben valójában nem volt, ellentétben a kísérleti-technológiai szinten bekövetkezett szédületes iramú fejlődéssel. Ez azt jelenti, hogy az elméleti leírás 'filozófiája' ugyanaz, vagyis lehetőleg egzaktul figyelembe kell venni az intenzív lézertényvel való kölcsönhatást, s az egyéb ágensekkel való kölcsönhatást sok esetben elegendő perturbációként kezelni. Természetesen a kvantumelektrodinamika klasszikusai előtt sem volt ismeretlen ez a megközelítés, ott ezt Furry-képbeli perturbációszámításnak nevezik. Azt hogy mikor tekintünk egy lézertényalapot nagy intenzitásúnak az természetesen az adott kísérleti körülményektől (például az elektront érő egyéb hatások erősségétől) függ. Régóta léteznek már olyan nagyintenzitású lézerek is amelyek fókuszában az elektromos télerősség több nagyságrenddel meghaladja az atomi Coulomb-terek erősségét. Nyilván, egy ilyen intenzív lézertény által kiváltott ionizáció során az atomi terek hatása gyenge perturbációt jelenthet. Általában akkor nevezzük az alkalmazott elektromágneses teret intenzívnek, ha a vele kölcsönható anyag (pl. atomnyaláb, molekulanyaláb, fémfelület, egyéb kondenzált anyagok, szabad elektronok, plazma stb.) valamilyen válaszfüggvénye (pl. elektromos szuszceptibilitás, ionizációs valószínűség, a szórt fény teljesítménye) a bejövő intenzitással nemlineárisan változik. Az intenzív lézerterekben lejátszódó folyamatokat természetes módon két csoportba sorolhatjuk: *lézertény által indukált folyamatok* (pl. többfotonos ionizáció, disszociáció, fémek sokfotonos felületi fotoeffektusa, magasrendű felharmonikus keltés szabad elektronon, gázokban vagy fémfelületen); *lézertény által módosított folyamatok* (pl. elektron szóródása atomon lézertény jelenlétében, Röntgenszórás atomi elektronon ill. Auger-effektus lézertény jelenlétében). A második típusú folyamatok –ellentétben az első típusúakkal– a fény hatása nélkül is végbemehetnek. A lehetőségek száma gyakorlatilag kimeríthetetlen, s az elmélet folyamatos fejlődése, az egyre szaporodó fontos kísérleti eredmények és alkalmazások részleteinek leírásán túl, önmagukban is érdekes matematikai kihívásokkal és megoldásokkal gazdagítja ismereteinket. Az 1. ábrán a foton-elektron kölcsönhatás lehetséges elméleti leírásai módjait foglalja össze. A 8-as és a 9-es mezőhöz tartozó folyamatokkal (optikai párkeltéssel, fény-fény szórással és más a QED vákuum lézerténybeli instabilitásával kapcsolatos jelenségekkel) itt egyáltalán nem fogunk foglalkozni. Az általunk vizsgált jelenségek elméleti leírásához – legalábbis a kísérletek java-részében eddig szereplő lézertényintenzitások tartományában – többnyire elegendő a nemrelativisztikus kvantum-mechanika használata.

Összefoglalásképpen hangsúlyozzuk, hogy a jegyzetben az intenzív lézerterek és anyag kölcsönhatásai

FOTON	Sugár, pálya [Geometriai Optika]	Mező, klasszikus termennyiségek [Maxwell-elmélet]	Kvantált termennyiségek [Diszkrét módusenergia, “Foton-kép”]
ELEKTRON			
Pálya, áramok [Pont, “töltött por” Mechanika, hidrodinamika]	1.	2. Klasszikus elektron, klasszikus retardált terek, sugárzás	3. Klasszikus áram, Poisson foton
Mező, termennyiségek Átmeneti áramok [Hullámmechanika, Kvantummechanika]	4.	5. Szemiklasszikus leírás [Schrödinger-, Dirac-egyenlet és Maxwell-terek]	6. Kvantum átmeneti áram, Általános foton, nemklasszikus állapotok
Kvantált elektrontér [Elektron – Pozitron tér]	7.	8. Párhuzamos külső elektromos és mágneses telekben [Kvantum elektrodinamika]	9. Kvantum Elektrodinamika [QED , “kritikus terek”, párhuzamos, etc...]

1. ábra. A fény-elektron kölcsönhatás leírási módjait foglalja össze. Az 1., 4. és a 7. mező azért üres, mert a kölcsönhatás nem értelmezhető közvetlenül geometriai optikai sugarak és töltések között.

során lejátszódó *néhány fontosabb folyamat* elméleti elemzése során elsősorban a *konceptcionális alapok* kifejtését tartjuk szem előtt, azzal a céllal, hogy a témakör további tanulmányozásához és alkotó továbbfejlesztéséhez is kiindulási alapot nyújtsunk az érdeklődők számára.

A jegyzet a TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KONV-2010-0005 sz. pályázat támogatásával készült.

1. Koherens állapotok. A lézerefény mint klasszikus elektromágneses sugárzás

A sugárzási tér kvantumosságának koncepcióját először Einstein vetette fel 1905-ben a fotoeffektus magyarázata céljából. Elképzelése szerint a fény valamilyen ω körfrekvenciájú komponense $\hbar\omega$ energiájú csomagokból áll, amelyek hullámként terjednek, és egységes egészsként nyelődnek el, illetve sugárzódnak ki. Ezeket a csomagokat később fotonoknak nevezték el, és a fotonkoncepció a modern fizika egyik alappillérvé vált.

Még napjainkban is szokás a fényt szemcsés szerkezetűnek tekinteni, abban az értelemben, hogy az lokalizált részecskékből - fotonokból - áll. Ez a kétségtelenül szemléletes elképzelés sok esetben félrevezető, ugyanakkor az interferencia jelenségek megértésében nem segít. A fény duális természetének két oldala, nevezetesen a diszkrétség (részecsketulajdonság) és a folytonosság (hullámteremtés), természetes egységbe ötvöződik a fény kvantumelektrodinamikai tárgyalásában, melynek alapjait Dirac fektette le a húszas évek második felében.

Ezen elmélet szerint a sugárzási tér normálmódusainak diszkrét, egyenközű az energiaspektruma, és akkor mondjuk, hogy n foton van egy módusban, ha az adott módus az n -edik energiasajátállapotba gerjesztődött. Itt a diszkrétség semmiképpen sem térbeli szemcséséget jelent.

A foton fogalmának értelmezése - úgy véljük - alapvető fontosságú a többfotonos folyamatok tárgyalása során, ezért a Dirac-féle módszer vázolását nem kerülhetjük meg.

Úgy adódott, hogy az intenzív sugárzási tér és töltött részecskék kölcsönhatásának kísérleti vizsgálata csak a lézerek megépítése után vált lehetővé, mivel ezekkel a szükséges nagy intenzitásokat már el lehet érni. Ugyanakkor kiderült, hogy a lézerekből kijövő sugárzás koherens, a Maxwell-terekkel kielégítően leírható. A következőkben ezért a koherenciával, valamint a koherens állapotokkal kissé részletesebben foglalkozunk.

1.1. A sugárzási tér kvantálása

Ismeretes, hogy a sugárzási tér (az elektromágneses tér forrásoktól önálló részét) pusztán az \vec{A} vektorpotenciállal leírható. Ekkor az elektromos térerősség vektor és a mágneses indukció vektora a következőképpen fejezhető ki:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.1-1)$$

A Maxwell-egyenletek következményeképpen \vec{E} és \vec{B} , valamint \vec{A} is a tér árammentes tartományában a homogén D'Alembert-egyenletet elégíti ki:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{0}. \quad (1.1-2)$$

A fenti hullámegyenlet megoldásakor figyelembe kell venni az \vec{E} -re és \vec{B} -re kirótt peremfeltételeket is. Például, ha a sugárzási teret egy reflektáló falú üreg belsejében vizsgáljuk, akkor célszerű \vec{A} -t az üreg sajátmódusai szerint kifejezni:

$$\vec{A} = \sum_n [\alpha_n(t) \vec{u}_n(\vec{r}) + \alpha_n^*(t) \vec{u}_n^*(\vec{r})], \quad (1.1-3)$$

ahol az $\vec{u}_n(\vec{r})$ módusfüggvények a következő vektor-Helmholtz-egyenletet elégítik ki:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_n^2}{c^2} \right) \vec{u}_n(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (1.1-3a)$$

az $\alpha_n(t)$ amplitúdók pedig az

$$\ddot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = 0, \quad \alpha_n(t) = \alpha_n e^{-i\omega_n t} \quad (1.1-3b)$$

harmonikus oszcillátor mozgásegyenletet elégti ki (ω_n az üreg egy sajátfrekvenciája). Az imént vázolt eljárás **a sugárzási tér oszcillátorokra vett felbontásának** nevezzük [1].

Ha a sugárzási tér nem korlátozódik a tér valamely tartományára, tehát ha nincsenek természetes határoló felületei, akkor célszerű az ún. periodikus határfeltételt használni. Ebben az esetben előírjuk, hogy a sugárzással kölcsönható rendszer méreteinél sokkal nagyobb L élhosszúságú kocka szemközti lapjain a vektorpotenciál ugyanazt az értéket vegye fel. A megfelelő módusfüggvények most síkhullámok:

$$\vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (1.1-3c)$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z), \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.1-3d)$$

$\vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda)$ a \vec{k} hullámszámvektorú sugárzás polarizációs vektora ($\lambda = 1, 2$), mely merőleges a \vec{k} vektorra. A sugárzás frekvenciája $\omega_k = c|\vec{k}|$. Periodikus határfeltétel esetén a vektorpotenciált Fourier-integrál helyett Fourier-sorral állítjuk elő, s így a normál módusok mostmár csak megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Ez a tény egyszerűsíti a térben végtelen kiterjedésű tér kvantálását.

A sugárzási tér kvantálása [2] azt jelenti, hogy a normálmódusok $q_n \propto \alpha_n + \alpha_n^*$ és $p_n \propto i(\alpha_n - \alpha_n^*)$ kanonikusan konjugált változóparjait hermitikus operátoroknak tekintjük, és posztuláljuk a szokásos

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] \equiv \hat{q}_n \hat{p}_m - \hat{p}_m \hat{q}_n = i\hbar \delta_{nm} \quad (1.1-4a)$$

Heisenberg-féle felcserélési törvényeket (a betűk fölé tett kalap az adott mennyiségek operátor jellegét jelölik). Ez annak felel meg, hogy az (1.1-3) kifejtésben elvégezzük a következő helyettesítéseket:

$$\alpha_n(t) \longrightarrow c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_n}} \hat{a}_n(t), \quad \alpha_n^*(t) \longrightarrow c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_n}} \hat{a}_n^+(t) \quad (1.1-4b)$$

Az \hat{a}_n kvantált amplitúdók az

$$[a_n, a_m^+] = \delta_{nm} \equiv \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases} \quad (1.1-5)$$

felcserélési összefüggést elégtik ki, és - akárcsak klasszikus megfelelőik - megoldásai a harmonikus oszcillátor egyenletnek, Heisenberg-képben:

$$\hat{a}_n(t) = a_n e^{-i\omega_n t}.$$

A vektorpotenciál Heisenberg-képbeli konkrét alakja periodikus határfeltételek esetén:

$$\widehat{\vec{A}} = \sum_{\vec{k}, \lambda} c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (1.1-6)$$

Az elektromágnes sugárzás jellemzőit az $\widehat{\vec{A}}$ vektorpotenciálból ugyanúgy származtathatjuk, mint a klasszikus esetben. Az (1.1-3) képlet szerint, általános peremfeltételek fennállása esetén:

$$\widehat{\vec{E}} = i \sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k} \left[\vec{u}_k(\vec{r}) \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \vec{u}_k^*(\vec{r}) \hat{a}_k^+ e^{+i\omega_k t} \right] \equiv \widehat{\vec{E}}^{(+)} + \widehat{\vec{E}}^{(-)}. \quad (1.1-7)$$

Az (1.1-7) egyenletben bevezettük az elektromos térerősség $\widehat{\vec{E}}^{(+)}$ pozitív frekvenciás ($e^{-i\omega t}$ időfüggést tartalmazó) és $\widehat{\vec{E}}^{(-)}$ negatív frekvenciás ($e^{+i\omega t}$ időfüggést tartalmazó) komponenseit. Ezt a felbontást a későbbiekben még felhasználjuk.

A térmennyiségeket, illetve azok valamilyen kombinációját leíró operátorok a normálmódusokhoz rendelt Hilbert-tereken működnek. A módusállapotok közül legáltalánosabban használtak a fotonszám sajátállapotok, amelyeket azonnal bevezetünk.

A sugárzási tér összenergiájának operátora

$$H_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\widehat{E}^2 + \widehat{B}^2 \right) = \sum_k \hbar\omega_k \left(\widehat{a}_k^+ \widehat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.1-8)$$

A harmonikus oszcillátor kvantummechanikájából igazán jól ismert, hogy az $\widehat{a}_k^+ \widehat{a}_k = \widehat{n}_k$ számoperátorok sajátértékei a nemnegatív egész számok. A sugárzási tér energiaspektruma tehát diszkrét.

A $k \equiv (\vec{k}, \lambda)$ indexű módus energiasajátértékei: $\hbar\omega_k (n_k + \frac{1}{2})$, ahol $n_k = 0, 1, 2, \dots$

A megfelelő sajátállapotokat $|n_k\rangle$ ket-tel jelölve a számoperátorok sajátértégyenlete a következőképpen írható:

$$\widehat{a}_k^+ \widehat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall k. \quad (1.1-9)$$

Ha a (\vec{k}, λ) módus az $|n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$ **számsajátállapotban** van, akkor azt szokás mondani, hogy a kvantálási térfogatban $n_{\vec{k}, \lambda}$ darab \vec{k} hullámvektorú és $\vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda)$ polarizációjú **foton** van. A módus természetesen egy

$$|\psi_{\vec{k}, \lambda}\rangle = \sum_{n_{\vec{k}, \lambda}=0}^{\infty} c_{\vec{k}, \lambda} |n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$$

szuperponált állapotban is lehet, ekkor $|c_{\vec{k}, \lambda}|^2$ adja meg annak a **valószínűségét**, hogy az adott módusban $n_{\vec{k}, \lambda}$ számú foton van.

Az \widehat{a}_k operátorok a tekintett módus fotonszám sajátállapotait eggyek kisebb indexű állapotokba transzformálják, vagyis a módusok gerjesztettségi indexét 1-gyel csökkentik (az alapállapotot nullavektorba viszik át). Az \widehat{a}_k^+ operátorok a gerjesztettséget 1-gyel növelik.

$$\widehat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad \widehat{a}_k^+ |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle. \quad (1.1-10)$$

E tulajdonságok alapján \widehat{a}_k -t **foton eltüntető**, \widehat{a}_k^+ -t **foton keltő operátoroknak** szokás nevezni.

Az (1.1-7) egyenletből látszik, hogy az elektromos térerősség $\widehat{E}^{(+)}$ pozitív frekvenciás része csak eltüntető operátorokat, míg az $\widehat{E}^{(-)}$ negatív frekvenciás rész csak keltő operátorokat tartalmaz.

E technikai bevezető rész végére még a következő megjegyzések kívánkoznak. Ha a sugárzási tér valamilyen $|\psi\rangle$ tiszta állapotban van, akkor egy F fizikai mennyiség várható értékét az e mennyiségnek megfelelő \widehat{F} operátor középértékeként számítjuk ki.

$$\langle F \rangle_\psi = \langle \psi | \widehat{F} | \psi \rangle. \quad (1.1-11)$$

Nagyon sok gyakorlatilag fontos esetben azonban a kvantumrendszer nem jellemezhető egy adott tiszta állapottal, hanem a tiszta állapotok valamilyen P_ψ statisztikai súlyokkal rendelkező sokaságával [3]. Ekkor F várható értéke

$$\langle F \rangle = \sum_\psi P_\psi \langle \psi | \widehat{F} | \psi \rangle, \quad \sum_\psi P_\psi = 1. \quad (1.1-12)$$

A

$$\widehat{\rho} = \sum_\psi |\psi\rangle P_\psi \langle \psi| \quad (1.1-13)$$

sűrűség operátor bevezetésével (1.1-12) a következő alakra hozható

$$\langle F \rangle = Tr \left(\hat{\rho} \hat{F} \right), \quad (1.1-14)$$

ahol "Tr" az állapotterre vett spúr(trace=nyom)-képzést jelent. Általánosan $Tr A = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle$, ahol $\{|n\rangle\}$ egy teljes ortonormált rendszer. Például a hőmérsékleti sugárzás módusaiban az $|n\rangle$ fotonszám sajátállapotok statisztikus súlyát a Boltzmann-eloszlás határozza meg (az egyszerűség kedvéért vegyünk most csak egy módust),

$$P_n = \frac{e^{-\beta n \hbar \omega}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \hbar \omega}} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta \hbar \omega} = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}}, \quad (1.1-15a)$$

ahol β a Boltzmann-állandó és az abszolút hőmérséklet szorzatának reciproka ($\beta = \frac{1}{k_B T}$). Ez a **Bose-Einstein eloszlás**.

Az (1.1-13) általános formula és (1.1-15a) alapján a termikus sugárzás egy tetszőleges módusának sűrűség operátorára a következő alak adódik

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}} \langle n|. \quad (1.1-15b)$$

1.2. Kvantum koherencia függvények

A kvantumkoherencia függvények definiálása és értelmezése érdekében először tekintsük át röviden egy egyszerű fotondetektálási folyamat leírását.

Feltesszük, hogy egy kezdetben $|\varphi_a\rangle$ alapállapotban lévő atomi elektron a detektálás ideje alatt abszorbeál egy valamilyen fajtájú fotont, és így a $|\varphi_g\rangle$ gerjesztett állapotba kerül.

Eközben a sugárzási tér a $|\psi_i\rangle$ kezdeti állapotból a $|\psi_f\rangle$ végállapotba megy át. Mivel az atomi elektronok hullámfüggvényei a magtól csak Angström nagyságrendű ($\approx 10^{-8}$ cm) távolságokig terjednek ki, és az optikai sugárzások hullámhossza ($10^{-5} - 10^{-4}$ cm) ennél az értéknél legalább három nagyságrenddel nagyobb, ezért az elektron helyén vett elektromos térerősség gyakorlatilag ugyanaz, mint a mag helyén ($e^{i(\vec{r}_e - \vec{r}) \cdot \vec{k}} \approx 1$), mivel $\left| (\vec{r}_e - \vec{r}) \cdot \vec{k} \right| \leq |\vec{r}_e - \vec{r}| |\vec{k}| = \frac{2\pi |\vec{r}_e - \vec{r}|}{\lambda} \ll 1$. Ekkor a folyamat T_{fi} átmeneti amplitúdóit a **dipólkölsönhatás** átmeneti mátrixelemei határozzák meg.

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \varphi_g | e^{\vec{x}}(t') | \varphi_a \rangle \cdot \langle \psi_f | \vec{E}(\vec{r}, t') | \psi_i \rangle, \quad (1.2-1a)$$

ahol $\vec{x} = \vec{r}_e - \vec{r}$ az elektron atommaghoz viszonyított pozíciója, és \vec{r} az atommag helyvektora. (A továbbiakban - az egyszerűség kedvéért - az operátorok jeléről elhagyjuk a "hat" szimbólumot, tehát $\vec{E}(\vec{r}, t)$ -n a térerősség operátorát értjük.) Mivel abszorpciós folyamatot vizsgálunk, világos, hogy az (1.2-1a)-beli mátrixelemhez csak \vec{E} pozitív frekvenciás (azaz abszorpciós operátorokat tartalmazó) része ad járulékot. Ha feltesszük, hogy az atomi detektor sávszélessége sokkal nagyobb, mint a detektált fény spektrális szélessége és a mérési idő reciproka, akkor a fotondetektálás időegységre eső átmeneti valószínűségére (vagyis a fotonszám-lálási sebességre) a következőt kifejezést kapjuk.

$$w_{fi} = s \left| \langle \psi_f | E^{(+)}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle \right|^2 = s \langle \psi_f | E^{(-)}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle \langle \psi_f | E^{(+)}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle, \quad (1.2-1b)$$

ahol s csak a detektor jellemzőit magába foglaló paraméter, az ún. detektor érzékenység, és E az elektromos térerősségnek a $\vec{d} \equiv \langle \varphi_g | e^{\vec{x}} | \varphi_a \rangle$ atomi átmeneti dipólmomentum irányába eső vetülete. Az (1.2-1a)-ból (1.2-1b)-be vezető számolások részletei megtalálhatók pl. Nussenzveig könyvében [4].

A sugárzási tér végállapotaira való összegzés után megkapjuk az időegységre eső teljes átmeneti valószínűséget (Itt felhasználjuk a következő összefüggést: $\sum_f |\psi_f\rangle \langle \psi_f| = 1$, ahol 1 természetesen a sugárzási tér Hilbert-terének egységoperátora.):

$$w_i \equiv \sum_f w_{fi} = s \left\langle \psi_i \left| E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \right| \psi_i \right\rangle = s \left\langle E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \right\rangle \quad (1.2-1c)$$

Ha a sugárzási tér kezdetben nem tiszta állapotban, hanem egy P_i statisztikus súlyokat tartalmazó $\rho = \sum_i |\psi_i\rangle \cdot P_i \langle \psi_i|$ **kevert állapotban** van, akkor a számlálási sebességet a w_i mennyiségek $w = \sum_i P_i w_i$ átlaga adja. Ekkor

$$w = s \left\langle E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \right\rangle = s Tr \left[\rho E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \right]. \quad (1.2-2)$$

Tekintsünk most két különböző helyen lévő az előbbieken leírt detektort. Ezzel az elrendezéssel koincidienciára, illetve késleltetett koincidienciára vonatkozó méréseket is végezhetünk. Belátható, hogy annak az időegységre eső együttes átmeneti valószínűsége, hogy az 1-es detektor az \vec{r}_1 helyen, t_1 időpontban, valamint a 2-es detektor az \vec{r}_2 helyen, t_2 időpontban gerjesztődik, a következő formulával adható meg.

$$\begin{aligned} w_2 &= s^2 \left\langle E^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) E^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) E^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) E^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right\rangle = \\ &= s^2 Tr \left[\rho E^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) E^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) E^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) E^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right] \end{aligned} \quad (1.2-3)$$

Az (1.2-2) képlet szerint a fotondetektálás valószínűsége arányos az intenzitással (ez nyilvánvalóan csak **lineáris detektorra**, nem túl nagy intenzitásokra teljesülhet). (1.2-3) alapján mondhatjuk, hogy egy másodrendű koincidencia együttes valószínűsége arányos az adott helyeken vett intenzitások szorzatának átlagával. Ne felejtjük el, hogy a fenti eredmények olyan azonos tulajdonságú ideális detektorok esetében érvényesek, amelyek pontszerűek, és amelyeknek frekvenciafüggetlen abszorpciós képességük van. Valóságos detektálási folyamatok leírásához (1.2-2) és (1.2-3) bizonyos átlagait kell használnunk. Mindenesetre azt nyugodtan kijelenthetjük, hogy a különböző helyeken és időpontokban lezajló fotondetektálási események közötti korrelációkat általában a téroperátorok szorzatainak (1.2-3) típusú várható értékei írják le. Ezért a sugárzási tér különböző téridő pontokbeli összefüggésének, koherenciájának jellemzésére természetes módon adódik a most bevezetendő **kvantum koherencia függvények** használata.

Az $(n + m)$ -edrendű koherencia függvény definíciója a következő.

$$\begin{aligned} G^{(n,m)}(x_1, x_2, \dots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) \\ \equiv \left\langle E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{n+m}) \right\rangle = \\ = Tr \left[\rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{n+m}) \right] \end{aligned} \quad (1.2-4)$$

ahol a jobb áttekinthetőség kedvéért x_i -vel jelöltük az (\vec{r}_i, t_i) téridő pontokat. A fenti egyenletben a téroperátorok azonos polarizációjú komponensei szerepelnek. Ha különböző polarizációs irányokat is figyelembe veszünk, akkor $G^{(n,m)}$ fenti alakja helyett egy koherencia tenzort kell definiálnunk. Ezen kívül még vannak egyéb általánosítási lehetőségek, mi ezekkel itt nem foglalkozunk, csak az (1.2-4) típusú koherenciafüggvényeket használjuk.

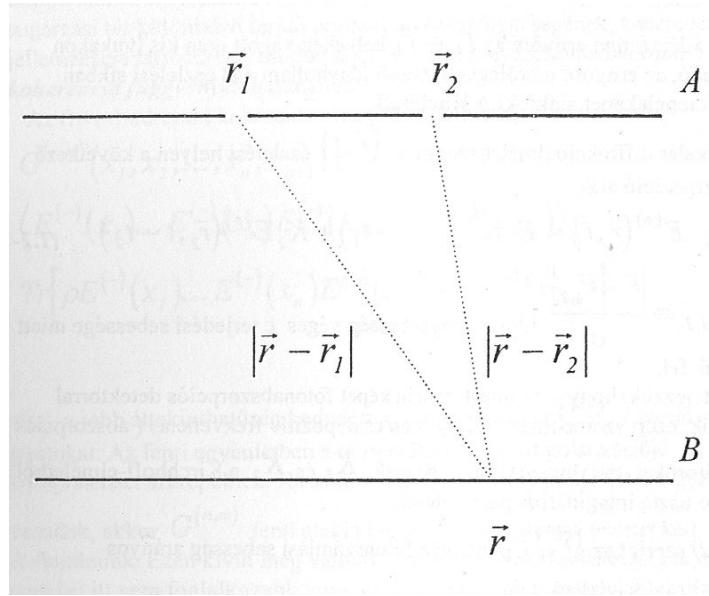
A koherenciafüggvények általános tulajdonságainak felsorolására itt nincs helyünk, ezek közül csak a következőt említjük. Bármely másodrendű koherenciafüggvényre fennáll, hogy a belőle képzett mátrix determinánsa nem negatív. Két változó esetében ezt így fejezhetjük ki.

$$\left| G^{(1,1)}(x_1, x_2) \right|^2 \leq G^{(1,1)}(x_1, x_1) G^{(1,1)}(x_2, x_2). \quad (1.2-5)$$

Ebből következik, hogy a

$$g(x_1, x_2) \equiv \frac{G^{(1,1)}(x_1, x_2)}{[G^{(1,1)}(x_1, x_1) G^{(1,1)}(x_2, x_2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2-6)$$

normált koherenciafüggvény abszolút értéke nem lehet nagyobb 1-nél, $|g| \leq 1$. Az imént definiált $g(x_1, x_2)$ koherenciafüggvény fizikai interpretációjához a Young-féle interferencia kísérletek elemzésével juthatunk el (2. ábra).



2. ábra. A Young-kísérlet vázlata.

Az A átlátszatlan ernyőre az \vec{r}_1 és \vec{r}_2 helyeken vágott igen ki lyukakon áthaladó, az ernyőre merőlegesen beeső fényhullám a B észlelési síkban interferenciaképet alakít ki. A Kirchhoff-féle skalár diffrakcióelmélet szerint az (\vec{r}, t) észlelési helyen a következő szuperpozíció alakul ki.

$$E^{(+)}(\vec{r}, t) = K_1 E^{(+)}(\vec{r}_1, t - t_1) + K_2 E^{(+)}(\vec{r}_2, t - t_2) \quad (1.2-7)$$

A $t_{1,2} \equiv \frac{|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}|}{c}$ idők a fénysebesség véges c terjedési sebessége miatt lépnek fel. Feltételezzük, hogy az interferencia képet fotoabszorpciós detektorral mérjük, azért szerepelnek (1.2-7)-ben csak pozitív frekvenciás (abszorpciós operátorokat tartalmazó) komponensek. K_1 és K_2 a Kirchhoff-elméletből adódó tiszta imaginárius paraméterek.

(1.2-2) szerint az (\vec{r}, t) pontban a foton számlálási sebesség arányos $\langle E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle = G^{(1,1)}(\vec{r}, t)$ vel. (1.2-7) és az (1.2-4), (1.2-6) definíciók felhasználásával kapjuk, hogy

$$\langle E^{(-)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle = G^{(1,1)}(x, x) = 2|K|^2 G^{(1,1)}(x_1, x_1) \{1 + |g(x_1, x_2)| \cos \varphi(x_1, x_2)\} . \quad (1.2-8)$$

Itt feltettük, hogy \vec{r} szimmetrikus \vec{r}_1 -re és \vec{r}_2 -re, ekkor $K_1 = K_2 \equiv K$ és $t_1 = t_2$.

Bevezettük az $x \equiv (\vec{r}, t)$, $x_{1,2} \equiv (\vec{r}_{1,2}, t_{1,2})$ jelöléseket, valamint feltettük, hogy a beeső fény az A ernyő mentén homogén intenzitás eloszlású, azaz $G^{(1,1)}(x_1, x_1) = G^{(1,1)}(x_2, x_2)$. (1.2-8)-ban φ a g másodrendű normálr koherencia függvény (a másodrendű koherencia komplex foka) fázisa. Az interferenciakép x pontbeli **láthatóságát** a kontraszt jellemzi, ezt a következőképpen definiáljuk.

$$l(x) = \frac{G_{\max}^{(1,1)}(x, x) - G_{\min}^{(1,1)}(x, x)}{G_{\max}^{(1,1)}(x, x) + G_{\min}^{(1,1)}(x, x)} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (1.2-9a)$$

amely (1.2-8) alapján egyenlő g abszolút értékével.

$$l(x) = |g(x_1, x_2)| \quad (1.2-9b)$$

Intuitíve világos, hogy a sugárzási tér annál koherensebb (annál zajnélkülibb), minél jobb láthatóságú interferenciaképet produkál két tetszőszerinti pontjából kiinduló és interferáló részhulláma. Ennek alapján a sugárzási teret **másodrendűen koherensnek** nevezzük, ha tetszőleges $\{x_1, x_2\}$ pontpárra $|g(x_1, x_2)| = 1$. Könnyen belátható, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $G^{(1,1)}(x_1, x_2)$ a $V^*(x_1)V(x_2)$ szorzatalakba legyen írható, ahol a $V(x)$ függvény egy lényegtelen fázisfaktor erejéig meghatározott.

A magasabbrendű koherencia definiálásához vezessük be a $2n$ -edrendű $g^{(n,n)}$ függvényeket.

$$g^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \frac{G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{[G^{(1,1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1,1)}(x_{2n}, x_{2n})]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.2-10)$$

A teret $2n$ -edrendűen koherensnek nevezzük, ha bármely 1 és n közé eső m értékre és bármely $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ pont- $2n$ -esre $g^{(m,m)}$ modulusa 1 :

$$|g^{(m,m)}(x_1, \dots, x_{2m})| = 1, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (1.2-11)$$

(1.2-11) egyenletből következik, hogy egy $2n$ -edrendű koherens fény esetében a $G^{(m,m)}(x_1, \dots, x_m, x_m, \dots, x_1)$ függvények faktorizálódnak, azaz

$$G^{(m,m)}(x_1, \dots, x_m, x_m, \dots, x_1) = G^{(1,1)}(x_1, x_1) \dots G^{(m,m)}(x_m, x_m). \quad (1.2-11a)$$

Az (1.2-11a) egyenlet fizikai jelentése az, hogy egy m ($\leq n$)-edrendű koincidencki kísérlet esetében a különböző fotonabszorpciós események függetlenek, nincs közöttük statisztikus korreláció. A statisztikus korrelációk jobb, fluktuációkból erednek, azért a korreláció hiányához zejnélküliséget asszociálhatunk.

Teljes koherens sugárzás esetében azt várjuk, hogy (1.2-11)-nek minden $1 \leq m$ -re teljesülnie kell. Világos, hogy (1.2-11) kielégíthető, ha minden $G^{(n,n)}$ függvény faktorizálható - hasonlóan a másodrendű esethez - ahol, mint láttuk ez a faktorizáció lehetséges.

A fentiek alapján a koherencia Glaubert-féle matematikai definíciója a következő [5],[4]. A sugárzási teret koherensnek nevezzük, ha bármely koherenciafüggvénye a következőképpen faktorizálható

$$G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = V^*(x_1) \dots V^*(x_n) V(x_{n+1}) \dots V(x_{n+m}). \quad (1.2-12)$$

Ha a sugárzási tér valamilyen $|V\rangle$ tiszta állapotban van, akkor $G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \langle V | E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{n+m}) | V \rangle$ faktorizálásnak elégséges feltétele, hogy a következő sajátértékegyenlet teljesüljön.

$$E^{(+)}(x) |V\rangle = V(x) |V\rangle. \quad (1.2-13)$$

Az (1.2-13) egyenlet fennállása esetén nyilván a következő adjungált egyenlet is fennáll.

$$\langle V | E^{(-)}(x) = \langle V | V^*(x). \quad (1.2-13a)$$

Az (1.2-13) sajátértékegyenletet kielégítő $|V\rangle$ állapotokat **koherens állapotoknak** nevezzük.

(1.1-7) felhasználásával (1.2-13) így írható

$$\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) |V\rangle = \left[i \sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k} \vec{u}_k(\vec{r}) \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} \right] |V\rangle = \left[i \sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k} \vec{u}_k(\vec{r}) v_k e^{-i\omega_k t} \right] |V\rangle. \quad (1.2-14a)$$

ahol bevezettük a v_k komplex számokat, melyek a megfelelő \hat{a}_k eltüntető operátorok (komplex amplitúdó operátorok) sajátértékei.

$$\hat{a}_k |V\rangle = v_k |V\rangle, \quad \forall k. \quad (1.2-14b)$$

(1.2-14b) alapján $|V\rangle$ -t az egyes módusokhoz tartozó $|v_k\rangle$ állapotok direktszorzataként vehetjük fel, vagyis

$$|V\rangle = |v_1\rangle |v_2\rangle \dots |v_k\rangle \dots \equiv |\{v_k\}\rangle, \quad (1.2-14c)$$

és

$$\hat{a}_k |v_k\rangle = v_k |v_k\rangle, \quad \forall k \quad (1.2-15)$$

(v_k tetszőleges komplex számok). (1.2-13), (1.2-13a) és (1.2-14a) alapján látszik, hogy a $|V\rangle$ koherens állapotához tartozó $V(x)$ függvény a következő alakú.

$$V(\vec{r}, t) = i \sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k} u_k(\vec{r}) v_k e^{-i\omega_k t}. \quad (1.2-16)$$

Egyszerűen belátható, hogy

$$\langle V | E(\vec{r}, t) | V \rangle = 2 \operatorname{Re} V(\vec{r}, t), \quad (1.2-16a)$$

tehát a $V(\vec{r}, t)$ függvény a klasszikus koherencia elméletében használatos **analitikus szignál** kvantumelektrodinamikai analogonjának tekinthető [4].

1.3. A sugárzási tér koherens állapotai

Mindenek előtt meg kell jegyeznünk, hogy a jól ismert kvantummechanikai harmonikus oszcillátor koherens állapotait Schrödinger már 1926-ban publikálta. Ezek a rendszer legklasszikusabb állapotai, abban az értelemben, hogy a Heisenbert-féle bizonytalansági szorzat ($\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$) ilyen állapotokra a minimális értékét veszi fel. A koherens állapotok kvantumoptikában való használhatóságának felismerése Glauber érdeme [6].

Az alábbiakban a koherens állapotokkal kapcsolatos néhány fontosabb összefüggést közlünk bizonyítás nélkül. Az áttekinthetőség kedvéért csak egy módussal foglalkozunk, és a módusindexet nem írjuk ki. Mint láttuk, a $|v\rangle$ koherens állapot az \hat{a} abszorpciós operátor v sajátértékéhez tartozó sajátvektora,

$$\hat{a} |v\rangle = v |v\rangle. \quad (1.3-1)$$

Tudjuk, hogy a fotonszám-sajátállapotok a módushoz rendelt Hilbert-téren teljes ortonormált rendszert alkotnak, ezért e bázisban az imént definiált koherens állapotok is nyilván kifejezhetők. A sajátérték-egyenlet és a normáltság figyelembevételével a következőt kapjuk.

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{-\frac{|v|^2}{2}}. \quad (1.3-2)$$

Így $\| |v\rangle \|^2 = \langle v | v \rangle = 1$.

(1.3-2) alapján látszik, hogy koherens állapotban a fotonszám eloszlása **Poisson-eloszlást** követ:

$$w_n = |\langle n | v \rangle|^2 = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \text{ahol } \lambda = |v|^2. \quad (1.3-3)$$

A **koherens állapotok** a módus Hilbert-terében **teljes rendszert alkotnak**

$$\int \frac{d^2v}{\pi} |v\rangle \langle v| = \hat{1}, \quad d^2v \equiv d(\operatorname{Re} v) d(\operatorname{Im} v) \quad (1.3-4)$$

(az integrálás a teljes komplex v -síkra értendő), azonban **nem ortogonálisak**.

$$|\langle u|v\rangle|^2 = e^{-|u-v|^2} . \quad (1.3-5)$$

Az (1.3-2) kifejtés, valamint az alábbi Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) -formula $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, ha $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$ alapján belátható, hogy tetszés szerinti paraméterű koherens állapot a vákuumállapotból az alábbi unitér transzformációval előállítható:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle , \text{ ahol } D(\alpha) = \exp [\alpha a^+ - \alpha^* a] , \quad (1.3-5a)$$

ezért D -t a megfelelő koherens állapot keltő operátorának tekinthetjük.

A lézerekből kijövő fény jó közelítéssel magas gerjesztettségű koherens állapotban van, ezért mint az amplitúdó mind a fázis relatív szórása igen kicsiny (a gerjesztettség fokával egyre csökken). Jogos tehát a lézerefény sok esetben az alábbi klasszikus stabil monokromatikus síkhullámmal jellemezni.

$$\vec{E} = F \vec{\varepsilon} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.3-6)$$

Az F amplitúdóba gyakran bele szokás érteni egy adiabatikus be-kikapcsolási faktort is, $F = F_0 e^{-\Gamma|t|}$, ahol Γ a tárgyalt folyamatban szereplő összes frekvenciánál kisebbnek van feltételezve.

1.4. Klasszikus elektron kvantált sugárzási tere

Az alábbiakban a külső (egyszer, s mindenkorra adott) elektromágneses síkhullámtérben mozgó nemrelativisztikus elektron kvantált sugárzási terét vizsgáljuk e tér Schrödinger-egyenletének egzakt megoldásai segítségével. Bebizonyítható, hogyha a sugárzási tér kezdetben vákuumállapotban volt, akkor bármilyen klasszikus áramforrás hatására minden módusa koherens állapotba kerül. Ezek alapján kiszámíthatjuk az adott lézerefénnyel gerjesztett elektron jelét, a sugárzás normálmódusaiba tartozó sugárzás spektrális eloszlását.

A $\vec{j}(\vec{r}, t)$ áramsűrűség sugárzási tere $|\Phi\rangle$ állapotvektorának időbeli változását kölcsönhatási képben az alábbi egyenlet írja le.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle = \left(-\frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) |\Phi\rangle = H_{int} |\Phi\rangle \quad (1.4-1)$$

ahol \vec{A} a sugárzási tér kvantált vektorpotenciálja, amely síkhullámok szerint kifejtve a következő alakú

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{g}(\vec{k}, \lambda; \vec{r}, t) a_{\vec{k}, \lambda} + \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{g}^*(\vec{k}, \lambda; \vec{r}, t) a_{\vec{k}, \lambda}^+ , \quad (1.4-2a)$$

$$\vec{g}(\vec{k}, \lambda; \vec{r}, t) \equiv c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_k t} , \quad \omega_k = c |\vec{k}| . \quad (1.4-2b)$$

Itt \vec{k} az egyes Fourier-komponensek hullámvektora, $\vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda)$ a \vec{k} -hoz tartozó λ indexű polarizációs egységvektor, L^3 a kvantálási térfogat. Az $a_{\vec{k}, \lambda}$ amplitúdók az

$$\left[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}^+ \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \text{ és } \left[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'} \right] = \left[a_{\vec{k}, \lambda}^+, a_{\vec{k}', \lambda'}^+ \right] = 0 \quad (1.4-2c)$$

felcserélési relációkat elégítik ki.

(1.4-1) megoldásai klasszikus áram esetén könnyen felírható, ugyanis alkalmazható a

$$\frac{\partial e^B}{\partial t} = e^B \left\{ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial B}{\partial t}, B \right] \right\} = \left\{ \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial B}{\partial t}, B \right] \right\} e^B \quad (1.4-3)$$

formula, ahol feltettük, hogy $[B, [\dot{B}, B]] = [\dot{B}, [\dot{B}, B]] = 0$, s ez persze itt teljesül, mivel $[\dot{B}, B]$ egyszerű szám (c-szám), esetünkben a $B = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{int}(\tau)$ alakot ölti majd. Vegyük fel ugyanis (1.4-1) megoldását az alábbi alakban,

$$|\Phi(t)\rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\int_{t_0}^t d\tau H_{int}(\tau) + f(t) \right] \right\} |\Phi(t_0)\rangle, \quad (1.4-4a)$$

ahol f meghatározható c-szám függvény. Ezt a megoldandó egyenletbe helyettesítve (1.4-3) felhasználásával belátható, hogy f -nek az alábbi differenciál-egyenletet kell kielégítenie ahhoz, hogy (1.4-4a) valóban megoldás lehessen:

$$\frac{df}{dt} = \frac{i}{2\hbar} \left[H_{int}(t), \int_{t_0}^t d\tau H_{int}(\tau) \right]. \quad (1.4-4b)$$

(1.4-4a)-ból H_{int} konkrét alakjának felhasználásával kapjuk:

$$|\Phi(t)\rangle = \prod_{\vec{k}, \lambda} D[\alpha_{\vec{k}, \lambda}(t)] |\Phi(t_0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} f}, \quad (1.4-5)$$

ahol a D operátorok a már bevezetett unitér transzformációk, vagyis koherens állapotok keltő operátorai.

Az (1.4-5)-ben szereplő α paraméterek H_{int} integrálásából adódnak.

$$\alpha_{\vec{k}, \lambda}(t) = \frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t d\tau \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{g}^*(\vec{k}, \lambda; \vec{r}, \tau). \quad (1.4-5a)$$

A klasszikus forrás tehát (1.4-5) és (1.3-5a) szerint a vákuumból koherens állapotokat generál.

Az állapotok komplex paraméterei lényegében az áramsűrűség Fourier komponenseinek idő szerinti integráljai. Az is igaz, hogyha a tér kezdetben egy tetszőleges koherens állapotban, akkor az áram hatására ismét koherens állapotba megy át. Ezt a $D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha + \beta) \exp[i \text{Im}(\alpha\beta^*)]$ szorzási szabály alapján igazolhatjuk. Azt látjuk tehát, hogy $|\Phi_0\rangle \propto |\{\alpha_0\}\rangle$ áttranszformálódik az $|\{\alpha_0 + \beta\}\rangle$ típusú koherens állapotokba.

1.5. Elemi megfontolások a kvantált sugárzási tér fázisáról

A 1.1 alfejezetben láttuk, hogy a sugárzási tér normálmódusainak kvantálásokat a módusok amplitúdóit az \hat{a} operátorokkal vesszük arányosnak. Így az $[\hat{a}, \hat{a}^+] \equiv \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$ felcserélési összefüggések alapján az energia lehetséges értékeire a kísérletekkel összehiban lévő diszkrét energiaspektrum adódik, mivel az $\hat{n} \equiv \hat{a}^+\hat{a}$ számoperátor sajátértékei a nemnegatív egész számok. A formulák jobb áttekinthetősége érdekében a következőkben a módusindexet egyelőre elhagyjuk, és az operátorokat egyszerűen nagybetűvel, a c-számokat pedig kisbetűvel jelöljük (tehát pl. $\hat{a} \rightarrow A$ és $\hat{a}^+\hat{a} \equiv \hat{n} \rightarrow N$).

Egy z komplex szám felírható egy valós és egy tisztán képzetes rész összegeként, vagyis $z = x + iy$, ahol $x = \frac{z+z^*}{2}$ és $y = \frac{z-z^*}{2i}$. E derékszögű felbontás' mellett egyszerűen adódik a **polárfelbontás** is, amely szerint $z = |z| e^{i\varphi}$, vagyis $z = e^{i\varphi} \sqrt{z^*z}$. Ha a modulust $|z| \equiv r$ -rel jelöljük, akkor a komplex szám szokásos polárkoordinátás alakjához jutunk, és a derékszögű komponensekre kapjuk, hogy $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$, ahol φ -t a komplex mennyiség fázisának (polárszögének) nevezzük. A klasszikus mechanikában ez a felbontás lényegében a hatás- és szögváltozókra való áttérésnek felel meg egy lineáris mozgás esetében, ahol a z komplex sík az $x - p_x$ fázisnévű sík megfelelője lenne. Természetesen felvetődik a gondolat, hogy a kvantált amplitúdókra is elvégezzünk hasonló felbontásokat. A derékszögű felbontás problémamentesen megtehető, s az így kapott $X \equiv (A + A^*)/2$ és $Y \equiv (A - A^*)/2i$ ún. kvadratúrák (hermitikus operátorok) az x és az y valós számoknak felelnek meg. Az $[X, Y] = \frac{i}{2}$ felcserélési összefüggés a helykoordináta és a hozzá konjugált impulzus

Heisenberg-féle felcserélési relációjának, $[x, p_x] = i\hbar$ -nak az analogonja. Ha az A kvantált amplitúdó polárfelbontásával próbálkozunk, akkor azonban súlyos nehézségekbe ütközünk, s valójában ez az eljárás egyszerűen nem vezet eredményre, amint ez a funkcionálanalízisből régóta ismeretes. Az $A = e^{i\Phi} \sqrt{A^+ A}$ formális (és nem is létező) felbontásban Φ játszaná a hermitikus fázisoperátor szerepét, s ha ilyen létezne, akkor közvetlenül értelmezhető lenne az $[N, \Phi] = i$ Heisenberg-típusú felcserélési törvény. Ez esetben a fotonszámra és a fázisra fennállna $(\Delta N)^2 (\Delta \Phi)^2 \geq \frac{1}{4}$ a határozatlansági reláció, ahol a kvantummechanikai szórásnégyzetet szokásosan a következő átlagértékkel definiáljuk:

$$\Delta N \equiv +\sqrt{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}, \quad \langle N \rangle \equiv \langle \psi | N | \psi \rangle, \quad \langle N^2 \rangle = \langle \psi | N^2 | \psi \rangle. \quad (1.5-1)$$

A közvetlen polárfelbontás lehetetlenségét Fritz London már 1927-ben (nem sokkal Diracnak a sugárzási tér kvantálását tárgyaló alapvető cikke megjelenését követően) bebizonyította a következő egyszerű gondolatmenettel. Vezessük be az E **exponenciális fázisoperátort** (a $z = e^{i\varphi} \sqrt{z^* z}$ komplex számokra érvényes felbontásra gondolva) a következőképpen:

$$A = E\sqrt{N}, \quad N = A^+ A, \quad E = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k+1|, \quad A^+ = \sqrt{N} E^+, \quad E^+ = \sum_{k=0}^{\infty} |k+1\rangle \langle k|. \quad (1.5-2)$$

(Megjegyezzük, hogy az irodalomban előfordul még az $E = \hat{e}^{i\Phi}$ szimbolikus jelölés is.) Az (1.5-2) egyenletben a $\{|k\rangle, k = 0, 1, 2, \dots\}$ vektorok a fotonszám-sajátállapotok ortogonális és teljes rendszere, vagyis $N|k\rangle = k|k\rangle$, $\langle k|l\rangle = \delta_{kl}$ és $\sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k| = 1$. Az (1.5-1) egyenletben szereplő definíciók alapján egzak-tul származtatható $[E, N] = E$ és $[E^+, N] = -E^+$ felcserélési összefüggések formálisan teljesülnének akkor is, ha E -t az $E = e^{i\Phi}$ alakban vennénk fel, és előírnánk a már említett $[N, \Phi] = i$ 'hatás-szög kanonikus felcserélési törvényt'. Ez az eljárás azonban ellentmondásra vezetne az eredeti $[A, A^+] = 1$ amplitúdó kvantálási feltétellel. Ennek az az oka, hogy az A -ból definiált E exponenciális fázisoperátor nem unitér, hanem csak 'félig unitér' (pontos matematikai terminológiát használva: **parciálisan izometrikus**). Valóban, $EE^+ = 1$ érvényes, de ugyanakkor $E^+E = 1 - P_0$, ahol $P_0 \equiv |0\rangle \langle 0|$ a vákuumállapot projektora. Következésképpen E és ennek E^+ adjungáltja nem írhatók fel igazi exponenciális kifejezéseként, vagyis $e^{\pm i\Phi}$ alakban, ahol egyetlen közös Φ hermitikus fázisoperátort használnánk. Ezt a 'hiányosságot' a komplex számsorozatok l^2 terén értelmezett mátrixtranszformációkkal a következő egyszerű alakban fejezhetjük ki:

$$EE^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad E^+E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.5-3)$$

Bár, amint az imént láttuk, a hermitikus fázisoperátor értelmezése nehézségekbe ütközik, a komplex számok esetében érvényes Moivre-képletből kapott $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ és $\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$ trigonometri-kus kifejezésekkel analog C '**kvantum koszinusz operátort**' és S '**kvantum szinuszt operátort**' azonban minden további nélkül definiálhatjuk, amint ezt Susskind és Glogower (1964) javasolta:

$$C \equiv \frac{E + E^+}{2}, \quad S \equiv \frac{E - E^+}{2i}, \quad C^2 + S^2 = 1 - \frac{P_0}{2} \neq 1. \quad (1.5-4)$$

Az exponenciális fázisoperátor parciális izometriája miatt a kvantum 'koszinusz' és szinuszt' négyzetösszege nem 1, és kommutátoruk sem nulla, amit abban az esetben kapnánk, ha mindkettő egy közös fázisoperátorral lenne kifejezhető. Mindenesetre a következő felcserélési relációk jól definiáltak, hasonlóan a belőlük származ-tatható határozatlansági relációk is, amelyeket Carruters és Nieto (1968) tanulmányozott először.

$$[S, C] = \frac{P_0}{2i}, \quad [N, C] = -iS, \quad [N, S] = iC. \quad (1.5-5)$$

$$U_1(\Psi) \equiv \frac{(\Delta N)^2 (\Delta C)^2}{\langle S \rangle^2} \geq \frac{1}{4}, \quad U_2(\Psi) \equiv \frac{(\Delta N)^2 (\Delta S)^2}{\langle C \rangle^2} \geq \frac{1}{4}. \quad (1.5-6)$$

A fenti egyenletekben Ψ jel a kvantált módus valamilyen tetszőleges állapotára utal, amelyben a $(\Delta N)^2$, $(\Delta C)^2$ és $(\Delta S)^2$ szórásnégyzeteket értelmezzük, amint azt az (1.5-1) egyenletben is tettük.

Azokat a “kritikus (minimalizáló) állapotokat”, amelyekben az $U_1(\Psi)$ bizonytalansági szorzat a minimális $\frac{1}{4}$ értéket veszi fel Jackiw (1968) találta meg. Itt röviden azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\langle C \rangle \equiv \langle \Psi | C | \Psi \rangle = 0$ és $\gamma \equiv \langle S \rangle \neq 0$, valamint a $\nu \equiv \langle N \rangle$ átlagos fotonszám nem esik egybe valamilyen egész számmal. Az ilyen típusú **fotonszám-fázis minimális bizonytalansági állapotok** a következő konkrét alakban fejezhetők ki:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n I_{n-\nu}(\gamma) |n\rangle, \quad (1.5-7)$$

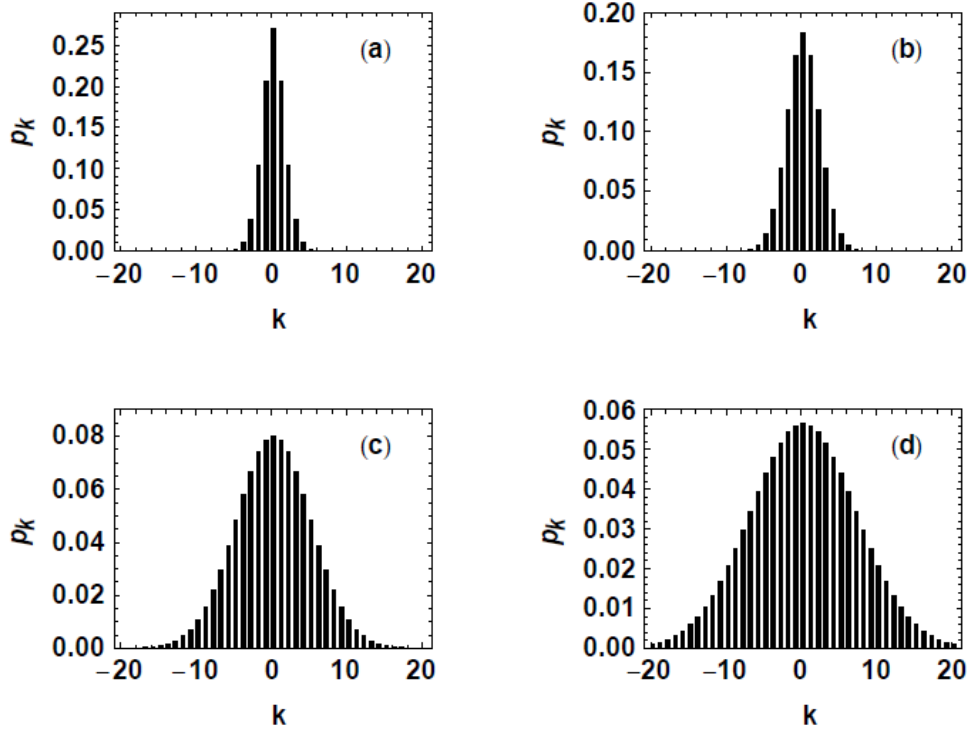
ahol I_n n -edrendű elsőfajú módosított Bessel függvény n ([27], formula 8.406.3), és κ a $\|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle$ feltételből adódó normálási faktor. A c_n kifejtési együtthatók a $(\nu - n) c_n = \frac{i\gamma}{2} (c_{n-1} + c_{n+1})$ rekurziós összefüggésekből adódnak (a $c_{-1} = 0$ kezdeti érték mellett), amelyek a minimalizálási feltétel következményei. A peremfeltétel következtében (amely ekvivalens az $I_{-1-\nu} = 0$ egyenlettel) ν értéke a $2s < \nu < 2s + 1$ sávokra korlátozódik, ahol $s = 0, 1, \dots$. Annak idején Jackiw (1968) cikkében megjegyezte, hogy “sajnos ezek az állapotok, úgy látszik semmiféle fizikai jelentőséggel nem rendelkeznek”. Azonban egy nemrég megjelent munkánkban megmutattuk, hogy az ilyen típusú (pontosabban: teljesen hasonló struktúrájú) állapotok természetes módon megjelennek, ha szabad elektronok Gauss-csomagjainak kölcsönhatását vizsgáljuk magasan gerjesztett (intenzív) kvantált sugárzási térrel [28]. Az ‘elektron+ kvantált módus’ rendszer nemperturbatív tárgyalására a 7. fejezetben kerül sor, de a Gauss-csomagokkal történő általánosítás részleteire ott sem tudunk kitérni, ezért itt csak az említett publikáció egy részeredményén alapuló szemléltető ábrát közlünk a jelen rész befejezéseképpen. (A témával kapcsolatban lásd még: [28])

Nagy $\nu = \langle N \rangle \approx n_0$ várható fotonszámértékekre a kvantált módus \hat{P} redukált sűrűség-operátora a következő alakra hozható:

$$\hat{P} = \sum_{k=-n_0}^{\infty} |n_0 + k\rangle p_k \langle n_0 + k| + O\left(n^{-\frac{3}{4}}\right), \quad p_k \equiv I_k(q) e^q, \quad q = \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi w}\right)^2, \quad (1.5-8)$$

ahol a $\mu = \frac{eF}{mcw}$ dimenziótlan paraméter az elektromos térerősség F várható értékével arányos. A q mennyiségben még szerepel a fény hullámhossza λ , és az elektron hullámcsomag kezdeti szélessége w . A $\{p_k\}$ statisztikai súlyok nagy n_0 esetén normáltak, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$, és az $I_{-k}(z) = I_k(z)$ összefüggés következtében az n_0 kezdeti centrális fotonszám körül (tehát a $k = 0$ rugalmas csatorna körül) a k -fotonos abszorpciók és indukált emissziók valószínűsége megegyezik.

A 3. ábra azt a természetes eredményt is illusztrálja, hogy az intenzitás növekedésével a fotoneloszlás fokozatosan kiszélesedik. Végezetül érdekes megjegyezni, hogy az (1.5-7) egyenletben szereplő, és pusztán formális megfontolásból kapott állapotról a kvantumoptikai szakirodalomban (a fázis kérdésével összefüggésben, mintegy kötelezően) gyakran említést tettek, ugyanakkor valójában egyfajta kuriózumnak tekintették, éppen a közvetlen fizikai jelentés hiánya miatt. 40 év után azonban kiderült, hogy a kvantumelektrodinamika legelemibb kölcsönhatásának, vagyis a szabad elektron és kvantált sugárzás kölcsönhatásának elemzése során éppen ilyen típusú fotonszám-fázis minimális határozatlanságú állapotok adódnak ki, és szolgálnak természetes bázisállapotokként.



3. ábra. Az (1.5-8) egyenletben definiált $\{p_k\}$ fotonszámeloszlást mutatja négy q (négy átlagos intenzitás) érték esetében, nevezetesen: (a) $q = 2.5$, (b) $q = 5$, (c) $q = 25$, és (d) $q = 50$. Ha feltesszük, hogy a hullámhossz és az elektron csomag szélességének aránya $\frac{\lambda}{w} = 4\pi \times 10^3$, akkor ezek a q értékek a következő intenzitásoknak felelnek meg $\lambda \approx 10^{-4} \text{ cm}$ esetén: (a) $1.25 \times 10^{12} \frac{W}{\text{cm}^2}$, (b) $2.5 \times 10^{12} \frac{W}{\text{cm}^2}$, (c) $1.25 \times 10^{13} \frac{W}{\text{cm}^2}$ és (d) $2.5 \times 10^{13} \frac{W}{\text{cm}^2}$.

2. Az intenzív lézerny és elektron kölcsönhatásának klasszikus elektrodinamikai leírása

2.1. Nemrelativisztikus elektronpályák monokromatikus lézernyben

A relativisztikus Newton-egyenlet szerint az e töltésű, m tömegű részecske mozgását a következő differenciálegyenlet határozza meg ($\vec{r}(t)$ a részecske helyvektora, $\vec{v}(t)$ a sebessége)

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v} \gamma) = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.1-1a)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Például monokromatikus síkhullám terében

$$\vec{E} = F \vec{\varepsilon} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad \omega = c |\vec{k}|, \quad \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0, \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (2.1-1b)$$

Nemrelativisztikus esetben az $\frac{1}{c}$ -vel arányos tagokat elhagyjuk, ekkor

$$m \ddot{\vec{r}} = eF \vec{\varepsilon} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) . \quad (2.1-2a)$$

Ez egy nemlineáris egyenlet, megoldása azonban igen egyszerű \vec{k} és $\vec{\varepsilon}$ merőlegessége miatt. Mivel $\vec{k} \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{k} \cdot \vec{v}_0 + \vec{k} \cdot \vec{v}_0 t$, ezért

$$m \ddot{\vec{r}} = eF \vec{\varepsilon} \sin\left[\left(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_0\right)t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0\right] . \quad (2.1-2b)$$

Az $\omega_D = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$ Doppler-eltolódott frekvencia nemrelativisztikus mozgás esetén gyakorlatilag megegyezik az eredeti frekvenciával. Adiabaticus bekapcsolást véve a (2.1-2b) egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{eF}{m\omega_D} \vec{\varepsilon} \cos(\omega_D t - \varphi) + \vec{v}_0 , \\ \vec{r}(t) &= \frac{eF}{m\omega_D^2} \vec{\varepsilon} \sin(\omega_D t - \varphi) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 , \end{aligned} \quad (2.1-2c)$$

ahol $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}_0$. Egyszerűbben, ha a Doppler-eltolódást elhagyjuk:

$$\vec{v}(t) = c\mu \vec{\varepsilon} \cos(\omega t) , \quad \vec{r}(t) = \mu \frac{\lambda}{2\pi} \vec{\varepsilon} \sin(\omega t) . \quad (2.1-2d)$$

Itt feltettük, hogy az elektron kezdetben nyugalomban van az origóban.

Fentebb bevezettük a μ ún. intenzitás paramétert, amely a következőképpen adott:

$$\mu \equiv \frac{eF}{mc\omega} = 10^{-9} \frac{\left\{ \frac{I}{[W/cm^2]} \right\}^{\frac{1}{2}}}{[\hbar\omega/eV]} , \quad (2.1-3)$$

ez dimenziótlan, és numerikus értéke a $\frac{(\text{hullámhossz}=\lambda)}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$, és az *intenzitás* $= I = \frac{c}{8\pi} F^2$ kifejezésekből határozható meg. A fentiekben már figyelembe vettük, hogy az elektron negatív töltésű ($e = -|e| \Rightarrow -e$, ahol e az elemi töltés). Az áramsűrűség, **pontszerű** részecskékről lévén szó,

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -ec\mu \vec{\varepsilon} \cos(\omega t) \delta_3 \left[\vec{r} - \mu \frac{c}{\omega} \vec{\varepsilon} \sin(\omega t) \right] . \quad (2.1-4)$$

Ebben a speciális esetben az előző fejezetben látott (1.4-5a) Fourier-komponensek az

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{\kappa}, \lambda} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\kappa} L^3} \right)^{\frac{1}{2}} ec\mu (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{\kappa}, \lambda)) = \\ &= \int_{t_0}^t d\tau \cos(\omega\tau) \exp \left[-i\mu \frac{c}{\omega} \vec{\kappa} \cdot \vec{\varepsilon} \sin(\omega\tau) + i\omega_{\kappa}\tau \right] \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

alakot öltik.

2.2. Felharmonikus keltés szabad elektronon, nemlineáris Thomson-szórás

Az előző alfejezetben már láttuk, hogy az intenzív lézérfényben mozgó pontszerű elektron sugárzási terének amplitúdói a viszonylag egyszerű (2.1-5) képlet alapján analitikusan is megadhatók. Ezek explicit kiszámításához az alábbiakban még gyakran felhasználandó ún. Jacobi-Anger-formulát hívjuk segítségül [7]:

Jakobi-Anger-formula:

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}, \quad (2.2-1)$$

ahol $J_n(z)$ közösleges n -edrendű Bessel-függvény. A fentiek szerint:

$$\alpha_{\vec{\kappa}, \lambda}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\kappa} L^3} \right)^{\frac{1}{2}} ec\mu (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{\kappa}, \lambda)) \int_{t_0}^t d\tau \sum_n J_n \left(\mu \frac{c}{\omega} \vec{\kappa} \cdot \vec{\varepsilon} \right) \cos(\omega\tau) \exp[i(\omega_{\kappa} - n\omega)\tau].$$

Ha e fenti formula időfüggő részében a koszinuszt exponenciálisokra bontjuk, és az n összegző indexet $(n-1)$ - ill. $(n+1)$ -re cseréljük, akkor a fenti összeg:

$$\sum_n \dots = \sum_n \left[\frac{n J_n \left(\mu \frac{c}{\omega} \vec{\kappa} \cdot \vec{\varepsilon} \right)}{\mu \frac{c}{\omega} \vec{\kappa} \cdot \vec{\varepsilon}} \exp[i(\omega_{\kappa} - n\omega)\tau] \right],$$

ahol felhasználtuk az $\frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] = \frac{n}{z} J_n(z)$ rekurzív formulát, amely a Jacobi-Anger-formulából egyszerűen φ -szerinti deriválással adódik. Az idő szerinti integrálás elvégzés után

$$\int_{t_0}^t d\tau \exp[i(\omega_{\kappa} - n\omega)\tau] = \exp \left[i(\omega_{\kappa} - n\omega) \frac{(t+t_0)}{2} \right] T \frac{\sin \left[(\omega_{\kappa} - n\omega) \frac{T}{2} \right]}{(\omega_{\kappa} - n\omega) \frac{T}{2}}, \quad (*)$$

ahol $T = t - t_0$ a kölcsönhatási idő, amelyről feltesszük, hogy $T \rightarrow \infty$.

Mivel

$$T \frac{\sin \left[(\omega_{\kappa} - n\omega) \frac{T}{2} \right]}{(\omega_{\kappa} - n\omega) \frac{T}{2}} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} d\tau \exp[i(\omega_{\kappa} - n\omega)\tau] \rightarrow 2\pi\delta(\omega_{\kappa} - n\omega), \quad (**)$$

ezért az $\alpha_{\vec{\kappa}, \lambda}$ amplitúdók végülis az alábbi összegre redukálódnak:

$$\alpha_{\vec{\kappa}, \lambda} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{2}} ec\mu (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{\kappa}, \lambda)) \sum_n 2\pi\delta(n\omega - \omega_{\kappa}) \left[\frac{n J_n(z)}{z} \right], \quad (2.2-2)$$

ahol itt $z = \mu \frac{c}{\omega} \vec{\kappa} \cdot \vec{\varepsilon}$, és az n összeghez természetesen csak az $n = 1, 2, \dots$ indexű tagok adnak járulékot. A kisugárzott energia átlagértéke az alábbi képlet segítségével számolható.

$$\begin{aligned} \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle &= \langle 0 | D^+(\alpha) a^+ a D(\alpha) | 0 \rangle = \langle 0 | D^+(\alpha) a^+ D(\alpha) D^+(\alpha) a D(\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | (a^+ + \alpha^*) (a + \alpha) | 0 \rangle = \alpha^* \alpha \equiv |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (2.2-3a)$$

ahol felhasználtuk a D operátor eltolási tulajdonságát. Az időegységre eső átlagos kisugárzott teljes energia (sugárzási teljesítmény)

$$\frac{1}{T} \langle H_{rad} \rangle = \frac{1}{T} \sum_{\vec{\kappa}, \lambda} |\alpha_{\vec{\kappa}, \lambda}|^2 \hbar\omega_{\kappa}. \quad (2.2-3b)$$

Megjegyezzük, hogy a (2.2-3b) formulában a zérusponyi energia már nem szerepel. A keltett sugárzás $\vec{\kappa}$ hullámvektorára vett összegzés az alábbi formulák alapján számítható:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \dots = \sum_{n_x, n_y, n_z} \dots \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \sum \frac{L}{2\pi} \frac{L}{2\pi} \frac{L}{2\pi} \Delta \kappa_x \Delta \kappa_y \Delta \kappa_z \dots \quad (***)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \kappa \dots$$

$$\Rightarrow \int d^3 \kappa \dots = \int_0^\infty d\kappa \kappa^2 \int d\Omega [\vec{s}(\vec{\kappa})] \dots, \quad (***)$$

$$\int d\Omega [\vec{s}(\vec{\kappa})] \equiv \int_0^{2\pi} d\phi_s \int_0^\pi d\theta_s \sin \theta_s \dots,$$

ahol $\vec{s} \equiv \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \{\sin \theta_s \cos \phi_s, \sin \theta_s \sin \phi_s, \cos \theta_s\}$ a sugárzás $\vec{\kappa}$ terjedési vektora irányába mutató egységvektor. $d\Omega [\vec{s}(\vec{\kappa})]$ ($\equiv d\Omega$) a megfelelő térszög (***)-ban természetesen $\Delta n_{x,y,z} = 1$, és $\Delta \kappa_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} \Delta n_{x,y,z}$ a módusok legkisebb "távolsága" a $\vec{\kappa}$ térben.

Mivel $|\vec{\kappa}| \equiv \kappa = \frac{\omega_\kappa}{c}$, ezért $\int_0^\infty d\kappa \kappa^2 = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty d\omega_\kappa \omega_\kappa^2 \dots$, és így - az $\alpha_{\vec{\kappa}, \lambda}$ amplitúdókban szereplők Dirac-delták jelenléte következtében - ez az integrálás igen egyszerűen elvégezhető. A szórt sugárzás lehetséges frekvenciái:

$$\omega_\kappa = n\omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2-4)$$

valgys a beeső lézertény összes felharmonikusa is gerjesztődik. (2.2-3b), (2.2-2), (***) , (2.2-4), valamint μ (2.1-3)-beli definíciója alapján a sugárzási teljesítmény az egyes harmonikusok járulékaiknak összegeként áll elő:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

ahol

$$P_n = I r_0^2 \int d\Omega \sum_{\lambda} [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'(\vec{\kappa}, \lambda)]^2 n^4 \left(\frac{2J_n(z_n)}{z_n} \right)^2, \quad (2.2-5)$$

$$z_n \equiv n\mu (\vec{s} \cdot \vec{\varepsilon}').$$

Itt I a lézertény intenzitása és $r_0 \equiv \frac{e^2}{m c^2} \approx 3 \times 10^{-13} \text{ cm}$ az ún. **klasszikus elektron sugár**.

Az egyes harmonikusok differenciális hatáskeresztmetszete (2.2-5) alapján egyszerűen adódik. A két lehetséges polarizációra vonatkozó összegzés a következőképpen végezhető el (a rövideg kedvéért itt $\vec{\varepsilon}'(\vec{\kappa}, \lambda)$ -t $\vec{\varepsilon}'$ -vel jelöljük):

$$\begin{aligned} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'_1)^2 + (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'_2)^2 &= (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'_1) (\vec{\varepsilon}'_1 \cdot \vec{\varepsilon}) + (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'_2) (\vec{\varepsilon}'_2 \cdot \vec{\varepsilon}) = \\ &= \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{\varepsilon}'_1 \circ \vec{\varepsilon}'_1 + \vec{\varepsilon}'_2 \circ \vec{\varepsilon}'_2) \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \cdot (\bar{1} - \vec{s} \circ \vec{s}) \cdot \vec{\varepsilon} = \\ &= 1 - (\vec{s} \cdot \vec{\varepsilon})^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = |\vec{s} \times \vec{\varepsilon}|^2. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\{\vec{\varepsilon}'_1, \vec{\varepsilon}'_2, \vec{s}\}$ teljes ortogonális rendszer a háromdimenziós térben: $\vec{\varepsilon}'_1 \circ \vec{\varepsilon}'_1 + \vec{\varepsilon}'_2 \circ \vec{\varepsilon}'_2 + \vec{s} \circ \vec{s} = \bar{1}$.

Az n -edik harmonikus **differenciális hatáskeresztmetszete** a fenti képlet és (2.2-5) alapján:

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} n^4 \left(\frac{2J_n(z_n)}{z_n} \right)^2, \text{ ahol } \frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} = r_0^2 |\vec{s} \times \vec{\varepsilon}|^2. \quad (2.2-6)$$

Itt $\frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega}$ a **Thomson-féle hatáskeresztmetszet**. Ha ezt a teljes térszögre kiintegráljuk, akkor a **Thomson-féle formulát** kapjuk: $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$.

A fenti képlet természetesen viszonylag kis intenzitásokra visszaadja a szokásos Thomson-féle keresztmetszetet. Ez úgy látható be, hogy felhasználjuk a Bessel-függvények hatvány-sorát.

Mivel a Bessel-függvények a továbbiakban is fontos szerepet fognak játszani, úgy gondoljuk, hogy célszerű most összefoglalni néhány fontosabb tulajdonságukat.

A $Z_\nu(z)$ Bessel-függvények (más szóval hengerfüggvények) az alábbi differenciál egyenletet elégítik ki:

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_\nu}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) Z_\nu = 0.$$

A reguláris megoldásokat a közönséges Bessel-függvényeknek nevezzük, és $J_\nu(z)$ -vel jelöljük. Az irreguláris megoldások a Neumann-függvények, vagyis másodfajú Bessel-függvények, $N_\nu(z)$, a harmadfajú Bessel-függvényeket Hankel-függvényeknek nevezzük, jelük: $H_\nu^{(1,2)} \equiv J_\nu(z) \pm iN_\nu(z)$. A közönséges Bessel-függvények hatványsora:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

tehát $J_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$, ha $|z| \ll \nu$. Ha ν egész, akkor $\Gamma(n+1) = n!$. Ez azt jelenti, hogy ki $|z|$ érték esetén a Bessel-függvény jól közelíthető az alábbi formulával $J_\nu(z) = \frac{(z/2)^n}{n!}$. Nagy $|z|$ értékekre az aszimptotikus viselkedés $J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Kis intenzitásokra ($z \rightarrow 0$) (2.2-6) a Thomson-formulára redukálódik, és lényegében csak az $n = 1$ alapharmonikus van jelen a szórt fényben. (2.2-5) alapján a kis argumentumokra érvényes aszimptotikus formula segítségével közvetlenül látható, hogy $P_n \propto I^n$, vagyis ebben a határesetben a kisugárzott jel n -edik komponense az intenzitás n -edik hatványával arányos. Ezt nevezzük **n-hatvány szabálynak**, amely a nemlineáris folyamatokra viszonylag kis intenzitások esetén általában igaz. Ezt a matematikailag így szokás kifejezni:

$$\frac{\partial(\log P_n)}{\partial(\log I)} \equiv n(I) \text{ független } I\text{-től, ha } I \text{ "kicsi"}. \quad (2.2-7)$$

Ebben az esetben, ha a jel (jelen esetben P_n) intenzitásfüggését log – log skálán ábrázoljuk, akkor egy n iránytangensű egyenest kell hogy kapjunk.

Visszatérve a Bessel-függvények tulajdonságaihoz: érvényesek a következő rekurziós formulák:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] &= \frac{n}{z} J_n(z), \\ \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] &= \frac{dJ_n(z)}{dz}. \end{aligned}$$

Érvényesek a következő szimmetria relációk:

$$J_n(-z) = J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (2.2-8)$$

Megemlítjük még az alábbi addíciós tételt:

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{n-k}(z_1) J_k(z_2) \quad (2.2-9)$$

Égész n esetén az $I_n(z)$ ún. módosított Bessel-függvény a közönséges Bessel-függvénnyel fejezhető ki:

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) . \quad (2.2-10)$$

Valós z -re $I_n(z)$ valós értékű, hatványsora a következő:

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} .$$

2.3. Relativisztikus elektron trajektóriái intenzív sugárzási térben

A (2.1-1a) relativisztikus mozgásegyenlet részletesen kiírva a következő alakot ölti:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{c} \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)^2}} \right] = e \left[\vec{E}(t, \vec{r}(t)) + \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{B}(t, \vec{r}(t)) \right] , \quad (2.3-1a)$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}(t)) = \vec{\varepsilon} F(\eta) , \quad \eta \equiv t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} , \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} , \quad (2.3-1b)$$

ahol $\vec{\varepsilon}$ a polarizációs egységvektor és \vec{n} a terjedési vektor, valamint általánosan $F(\eta)$ tetszőleges (jó tulajdonságú) függvény lehet. Például egy ω_0 centrális frekvenciájú és τ_0 időbeli szélességű Gauss-impulzus esetében írhatjuk:

$$F(\eta) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi(\eta)}{\partial t^2} , \quad \Pi(\eta) = \frac{c^2}{\omega_0^2} F_0 f_0(\eta) \cos(\omega_0 \eta + \varphi_0) , \quad f_0 = g_0(\eta) \equiv e^{-\eta^2/2\tau_0^2} , \quad (2.3-1c)$$

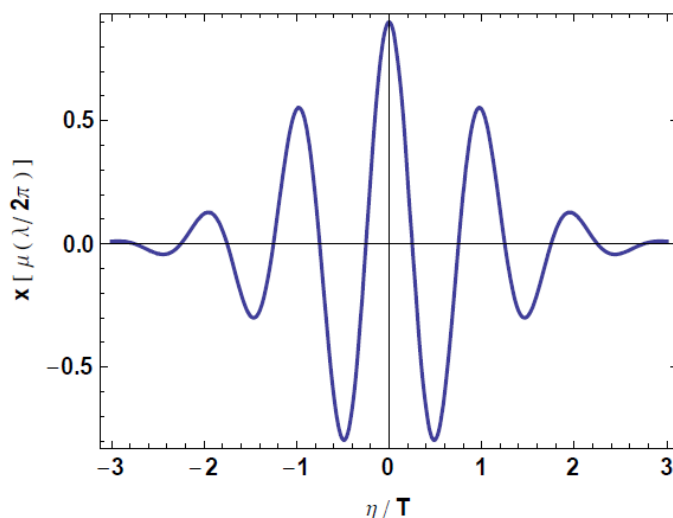
ahol Π a tér Hertz-féle potenciálja, φ_0 a **vivő-burkoló fáziskülönbség** és $2\tau_0\sqrt{\log 2}$ az impulzus teljes szélessége a maximális érték felénél (az angolnyelvű irodalomban erre a mennyiségre a “full width at half maximum” kifejezés használatos, amelyet FWHM-mel rövidítenek). A (2.3-1a) egyenlet valójában egy másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer az $\vec{r}(t)$ pályára, és az első pillanatban reménytelenül bonyolultnak tűnik, még abban az esetben is, ha ideálisan monokromatikus térrel van dolgunk (tehát az f_0 burkolófüggvény konstans). Azonban viszonylag egyszerűen belátható, hogy az általános megoldás tetszőleges $F(\eta)$ függvény esetében kvadraturára vezethető vissza. Ehhez először célszerű bevezetni az elektron $d\tau$ sajátidő elemét a $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ definícióval, s ezután a mozgásegyenletből kiadódik, hogy a $\frac{d\eta}{d\tau} = \gamma \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right) \equiv \alpha$ derivált mozgásállandó, vagyis a fény térerősségeinek argumentuma a sajátidő lineáris függvénye a benne mozgó elektron helyén. Az általánosság csorbítása nélkül tekintsünk egy x -irányban polarizált és a z -irányban haladó síkhullámmal való kölcsönhatást, tehát legyen $\vec{\varepsilon} = (1, 0, 0)$ és $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Ekkor a (2.3-1a) egyenletből és a relativisztikus munkatételből a következő egyenletek nyerhetők:

$$m\alpha \frac{d^2x}{d\eta^2} = -eF(\eta) , \quad \alpha \equiv \gamma \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) = const. , \quad \frac{d^2z}{d\eta^2} = \frac{1}{2c} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 , \quad (2.3-2a)$$

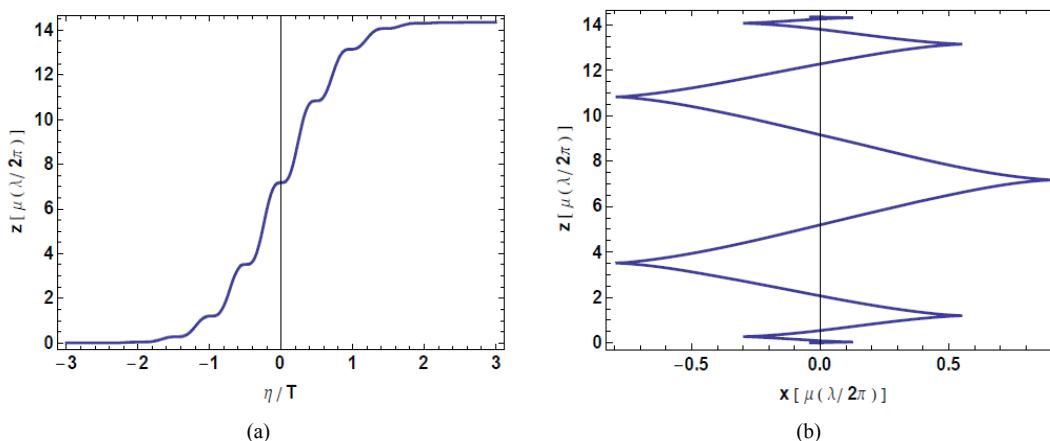
$$\frac{d^2y}{d\eta^2} = 0 , \quad \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 . \quad (2.3-2b)$$

A (2.3-1a) egyenlet első egyenletét kiintegrálva, megkapjuk $\frac{dx}{d\eta}$ -t, s ezt a harmadik egyenletben szerepeltetve $\frac{dz}{d\eta}$ -t, majd $z(\eta)$ -t is meghatározhatjuk, elvileg tetszőleges alakú $F(\eta)$ impulzus esetében. Ez annak köszönhető, hogy a fenti (egzakkt!) egyenlet formálisan a (2.1-2b) Newton-egyenlettel azonos az $\eta \rightarrow t$ helyettesítéssel. A (2.3-2b) egyenlet második egyenletéből az elektron teljes energiája is kiszámolható általános esetben. (2.3-1c) és (2.3-2a, 2.3-2b) szerint az elektron x -koordinátája a Hertz-potenciállal arányos, ezt koszinus-impulzus esetén ($\varphi_0 = 0$, vagyis nulla vivő-burkoló fáziskülönbség esetén) a 4. ábrán szemléltetjük.

A 5. ábrán a longitudinális mozgás időfüggését és az $x - z$ síkban történő mozgás alakját ábrázoltuk.

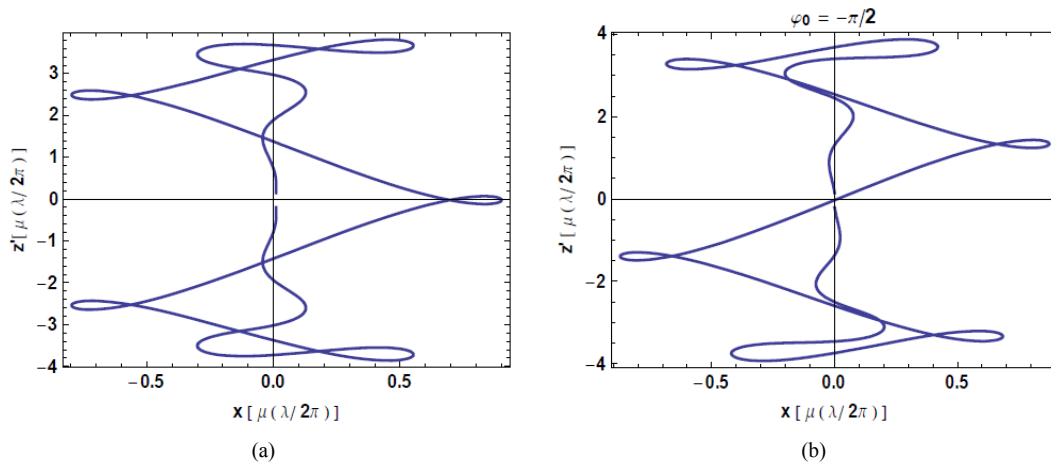


4. ábra. Az elektron pozícióját mutatja a polarizáció irányában egy két-ciklusos koszinusz lézertimpulzussal való kölcsönhatás esetén. A vízszintes tengelyen a hullám argumentuma van a T optikai periódusidő egységében felmérve, a függőleges tengelyen a maximális amplitúdóra normált koordináta értékei szerepelnek. Koszinusos Gauss-impulzussal számoltunk ($\varphi_0 = 0$), és az intenzitás paramétert $\mu = 0.9$ -nek vettük, amely az $I_0 \approx 10^{18} \frac{W}{cm^2}$ relativisztikus intenzitásnak felel meg $h\nu = 1eV$ energiájú optikai fotonok esetében.

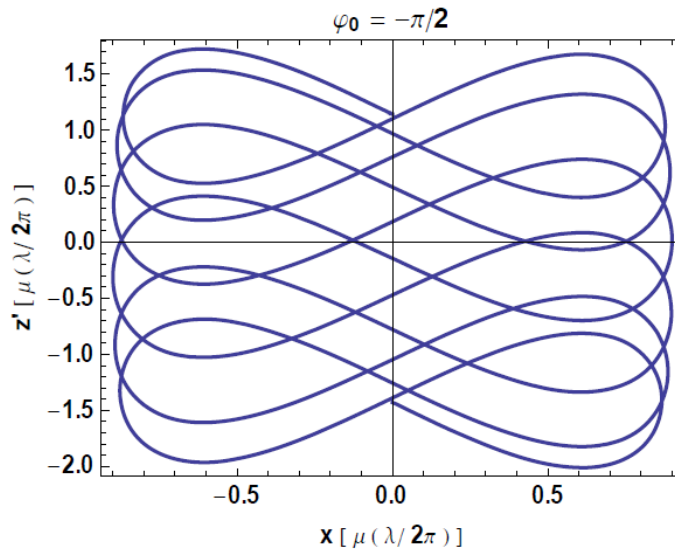


5. ábra. A 5(a) ábrán az elektron longitudinális helyzetének (vagyis a terjedési vektor irányába eső z -komponensnek) az időfüggését ábrázoltuk azonos paraméterértékekre, mint a 4. ábra esetében, nulla kezdősebességet feltételezve. Látható, hogy a mozgás egy szisztematikus eltolódást ("driftet") tartalmaz, amelyet a klasszikus sugárnyomás eredményének tekinthetünk. Az eltolódás sebessége az intenzitással (μ^2 -tel) arányos. A 5(b) ábra világosan mutatja, hogy az elektron mozgása relativisztikus esetben nagymértékben eltér az egyszerű harmonikus mozgástól.

Ha a z -irányú haladást kitranszformáljuk, akkor szembevetendő a koszinusos és a szinuszos változású intenzív lézertérben megvalósuló trajektóriák jelentős különbözősége, vagyis a vivő-burkoló fáziskülönbségtől való függés.



6. ábra. E két ábra lényegében a 5(b) ábrának felel meg koszinuszos ($\varphi_0 = 0$) és szinuszos ($\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$) impulzussal való kölcsönhatás esetén. Annak érdekében, hogy a két eset különbözőségét egyértelműen bemutassuk, az eredeti z -koordinátából a drift-mozgást kitranszformáltuk, és az így kapott z' -koordinátát szerepeltettük a függőleges tengelyen. Mind a baloldali mind a jobboldali ábrán a trajektória kissé az origó alatti helyről indul a negatív értékek felé, aztán a pozitív z' -értékek felé halad, majd "fentről" tér vissza az origóba.



7. ábra. Ezen az ábrán egy hosszabb (20-ciklusos) szinuszos lézérimpulzussal való kölcsönhatás során kialakuló elektrontrajektóriát ábrázoltunk úgy, hogy a z -irányú drift-mozgást javarészt kitranszformáltuk. Az elektronnal egzaktul együtt haladó koordináta-rendszerben a trajektóriák lemniszkáta alakúak. Ezek a híres 8-as alakú trajektóriák (az angol nyelvű irodalomban ezt a mozgást "figure-8 motion"-nak nevezik). Az ábrán mutatott görbe mentén az elektron a $(0, -1.5)$ koordinátájú pontból indul negatív z' -értékek felé, majd áttér a pozitív értékekre, ahol a $(0, +1.2)$ pontig követtük mozgását.

A 7. ábrán a drift-mozgást azért nem transzformáltuk ki teljesen, hogy érzékeltesük, hogy valójában ideális 8-as alakú mozgás még a kezdetben nyugvó elektron esetében sem valósul meg. Ebből a szisztematikus mozgás-

ból ered a nemlineáris Thomson- (Compton-) szórás esetében a felharmonikusok intenzitásfüggő frekvenciaeltolódása, amely tehát a Doppler-effektus egy speciális esete.

2.4. Egy egyszerű példa a vivő-burkoló fáziskülönbség (abszolút fázis) hatásának szemléltetésére lineáris esetben

A **vivő-burkoló fáziskülönbségnek**, vagyis a **lézerimpulzus abszolút fázisa** hatásának kísérleti és elméleti vizsgálata fontos szerepet játszik a fázisstabilizált párciklusos impulzusok fizikájában. Itt először két kérdés vetődik fel természetesen: Milyen pontossággal lehetséges a gyakorlatban azt elérni, hogy egy impulzussorozatban mindegyik impulzus mondjuk koszinusz-típusú legyen, és van-e elvi határa az abszolút fázis bizonytalansága csökkentésének? A második kérdés az, hogy milyen folyamatok, kölcsönhatások vizsgálata segítségével lehet megmérni az abszolút fázist? Itt a második kérdéssel foglalkozunk, a fázis kvantum-bizonytalanságának problémakörére a jegyzet második részében szándékozunk részleteiben visszatérni. A régebben általánosan elfogadott, s a tankönyvekben is hangoztatott nézet szerint az elektron gerjesztési valószínűsége vagy ionizációja nem függ a gerjesztő sugárzás abszolút fázisától. Az újabb vizsgálatok azonban megmutatták, hogy igenis léteznek olyan többfotonos folyamatok (pl. nemlineáris Auger-effektus), amelyek hozama érzékeny az abszolút fázis értékére. Ennek eredményeképpen viszont az lett a széleskörűen vallott vélemény, hogy a vivő-burkoló fázistól való függés kimutatásához feltétlenül a nemlineáris tartományban kell vizsgálni. Ez a manapság tanulmányozott folyamatokra kivétel nélkül érvényes, azonban a kutatók figyelmét elkerülte Fearn és Lamb 1992-es munkája, amelyben megmutatták, hogy a lineáris fotoeffektus is érzékeny a kiváltó impulzus koszinusos vagy szinuszos karakterére. E helyett a kvantummechanikai példa helyett mi itt egy lényegesen egyszerűbb klasszikus rendszert vizsgálunk.

Tekintsünk egy e töltéssel és m tömeggel rendelkező csillapított lineáris oszcillátort Ω sajátfrekvenciával és Γ csillapítási tényezővel, s tegyük fel hogy ezt egy általános Gauss-impulzussal gerjesztjük. A rendszer Newton-egyenlete a következő:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = -\frac{e}{m} F(t), \quad F(t) = F_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.4-1)$$

Az egyenletet Fourier-transzformálva az oszcillátor amplitúdóspektrumára (ezt nevezhetjük egyfajta frekvenciafüggő „szuszeptibilitásnak” is) a következő kifejezés adódik:

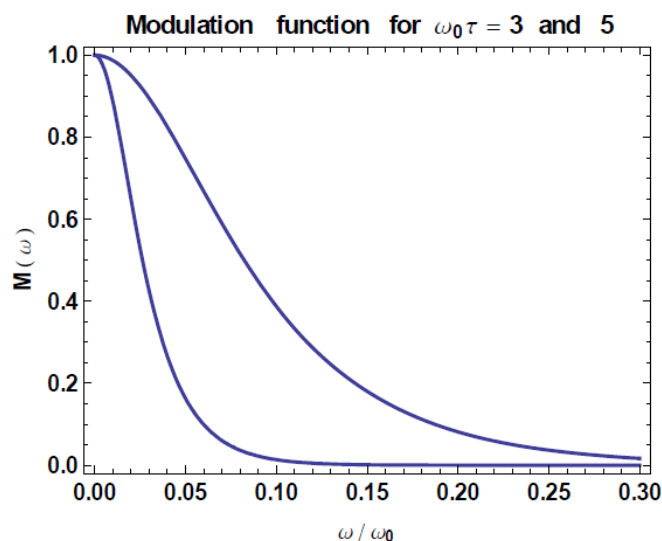
$$|x(\omega)|^2 = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{|F(\omega)|^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2}, \quad |F(\omega)|^2 = |C(\omega)|^2 [\cosh(2\tau^2\omega\omega_0) + \cos(2\varphi_0)], \quad (2.4-2)$$

ahol $|C(\omega)|$ nem függ a φ_0 abszolút fázistól. Mivel $\cos(2\varphi_0) -1$ és $+1$ között változik (π periódussal), természetesen adódik a következő $M(\omega)$ **modulációs függvény** bevezetése:

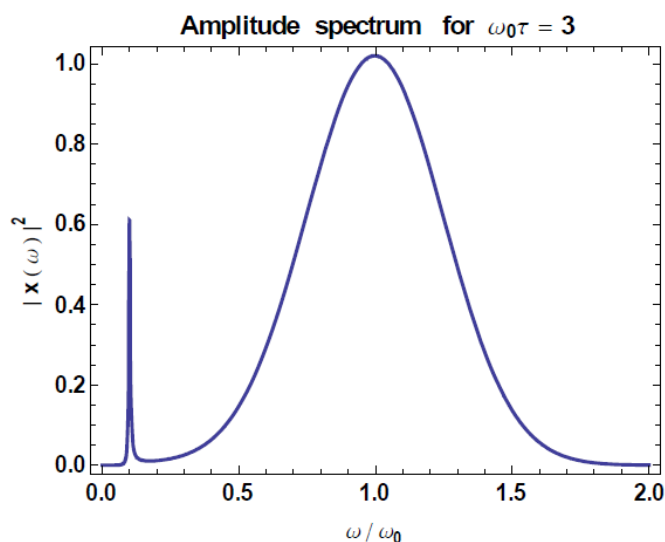
$$M(\omega) \equiv \frac{[|x(\omega)|^2]_{\max} - [|x(\omega)|^2]_{\min}}{[|x(\omega)|^2]_{\max} + [|x(\omega)|^2]_{\min}} = \frac{1}{\cosh(2\tau^2\omega\omega_0)}. \quad (2.4-3)$$

A fenti függvény az optikában jól ismert láthatósággal analóg mennyiség, tehát a fázis változásakor bekövetkező modulációs mélységet jellemzi számszerűen. Tekintettel a gerjesztés linearitására, a modulációs függvény nem függ az intenzitástól. A 8. ábra szerint a moduláció csak kis frekvenciáknál számottevő, azonban a jel (esetünkben az indukált dipól) pont kis frekvenciákra kicsiny, mivel a gerjesztő spektrum maximuma $\omega \approx \omega_0$ környékén van.

Ezen egyszerű modell szerint a lineáris tartományban a válasz spektruma követi a gerjesztés spektrumát. Hogyha a rendszer egy alacsonyfrekvenciás rezonanciával rendelkezik, amint ezt a 9. ábrán illusztráltuk, akkor ezen a helyen a moduláció jelentős. A rezonáns jel maga megnövekszik, s egyben a moduláció is számottevően függ az abszolút fázistól. Ezt a 10. ábra mutatja.



8. ábra. A (2.4-3) egyenletben definiált modulációs függvényt mutatja lényegében három- és ötciklusos Gauss-impulzus esetében (felső görbe: $\omega_0\tau = 5$, alsó görbe: $\omega_0\tau = 3$).

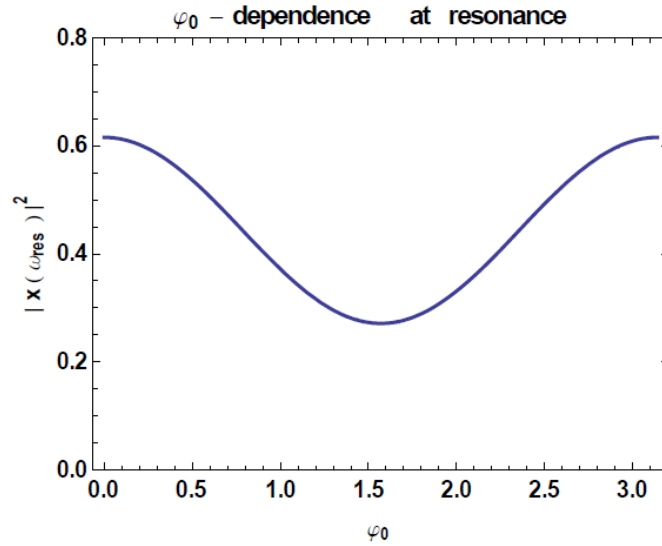


9. ábra. A lineáris oszcillátor amplitúdó (dipól) spektrumát mutatja $\Omega = 0.1\omega_0$ sajátfrekvencia és $\Gamma = 0.005\omega_0$ csillapítási tényező esetén.

3. Az intenzív lézerefény és elektron kölcsönhatásának szemiklaszikus leírása

3.1. Dipólközelítés, mértéktranszformáció a klasszikus mechanikában és a kvantummechanikában

Amint azt az 1.2 alfejezetben láttuk, az optikai frekvenciájú ($\lambda \sim 10^{-4} \text{ cm}$ hullámhosszú) sugárzással kölcsönható atomi elektronok szempontjából a sugárzás homogénnek tekinthető (azaz a helyfüggése elhanyagolható),



10. ábra. A (2.4-2) egyenlet alapján a dipólmomentum rezonáns (az $\omega = \Omega = 0.1\omega_0$ frekvenciánál felvett) értékének változását mutatja a vivő-burkoló fázis függvényében.

miel az atomi méretek ($a_0 \sim 10^{-8} \text{ cm}$) a hullámhossznál sokkal kisebbek. Ebben az esetben a fény által indukált átmenetek az atomi dipólmomentum átmeneti mátrixaelemeivel jellemezhető, ezért ezt a közelítést **dipólközelítésnek** hívjuk. Most megvizsgáljuk, hogy az elektron (vagy általában valamilyen töltött részecske) mozgásegyenletének felírásához milyen lehetőségek kínálkoznak e közelítésben.

A klasszikus mechanikában az $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$ nemrelativisztikus Newton-egyenlet az L Lagrange-efüggvényre vonatkozó következő variációs elvből is származtatható:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0, \quad (3.1-1)$$

ahol $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - eV$, és $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$.

$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{E}_s(t)$ a sugárzási tér elektromos térerőssége dipólközelítésben, V az elektront érő egyéb hatásokat leíró potenciál, pl. H-atom eseténben $eV = -\frac{e^2}{|\vec{r}|}$. A hatásintegrál variációjának eltűnéséből a másodfajú Lagrange-egyenlet fennállása következik, s ebből egyszerű számolással a fenti Newton-egyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = e \left[\vec{E}_s + (-\nabla V) \right].$$

Bevezetve a $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$ kanonikus impulzus és a $H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L$ Hamilton-függvényt, L (3.1-1) alakjából:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right)^2 + eV. \quad (3.1-2)$$

A kanonikus mozgásegyenletekből természetesen szintén a fenti Newton-egyenlet adódik:

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\nabla V, \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = e \left[\vec{E}_s + (-\nabla V) \right].$$

Mint tudjuk, két olyan Lagrange-függvény amelyek egy tetszőleges függvény idő szerinti deriváltjában különböznek egymástól ugyanahhoz a mozgásegyenlethez vezetnek. Ha a fenti L -ből az $\frac{e}{c} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{A}) = \frac{e}{c} \left[\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \right]$ teljes deriváltat kivonjuk, akkor a kapott új L' Lagrange-függvényben a régi kölcsönhatási tag helyett a $-\frac{e}{c} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$ kifejezés szerepel.

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{e}{c} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} - eV. \quad (3.1-3)$$

Az ennek megfelelő Hamilton-függvény:

$$H' = \frac{p^2}{2m} - e \vec{r} \cdot \vec{E}_s(t) + eV(\vec{r}). \quad (3.1-4)$$

Az utóbbi formula származtatásakor már feltettük, hogy $\frac{d\vec{A}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, vagyis a sugárzási tér homogenitását tételeztük fel. A H' -ben fellépő $-e \vec{r} \cdot \vec{E}_s = -\vec{d} \cdot \vec{E}_s$ dipólenergia miatt ezt a közelítést **dipólközelítésnek** nevezzük. A fenti közelítés jogosságát már megindokoltuk. Most arra vagyunk kíváncsiak, hogy a kvantummechanikában mi a megfelelője ennek.

Ha a klasszikus modellen túllépünk, akkor az elektront is - hasonlóan a fényhez - térmennyiséggel (hullám-függvénnyel) kell leírunk. Ez a **szemiklasszikus** elmélet. A különböző mértékbeli Hamilton-függvényeknek az elektron Hilbert-terén ható operátorok felelnek meg a szokásos korrespondencia elvvel összhangban. Mind a klasszikus mind a kvantummechanikai leírásban az első esetben a kanonikus impulzus $\vec{p} = m \dot{\vec{r}} + \frac{e}{c} \vec{A}$, míg a második esetben $\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$, tehát az első esetben ($\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mérték) az $m \dot{\vec{r}}$ kinetikus impulzus különbözik a kanonikus impulzustól, ugyanakkor az $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -típusú kölcsönhatás esetében azzal megegyezik.

A kvantummechanikai tárgyalás formailag ugyanazt adja mint a fenti klasszikus megfontolások. (Itt ideiglenesen a $\hat{\cdot}$ jelölést használjuk az operátorjelleg hangsúlyozása érdekében.)

Ha a ψ hullámfüggvény a fenti helyzetben a következő Schrödinger-egyenletet elégíti ki

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\widehat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \widehat{\vec{A}} \right)^2 + e\widehat{V}, \quad \widehat{\vec{p}} \equiv -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (3.1-5)$$

akkor tetszőleges $\chi(\vec{r}, t)$ függvénnyel (melyet a mértéktranszformáció generátor függvényének nevezünk) a

$$\psi' = \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \chi(\vec{r}, t) \right] \psi \quad \text{és} \quad \hat{H}' = e^{+\frac{ie}{\hbar c} \chi} \hat{H} e^{-\frac{ie}{\hbar c} \chi} - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.1-6)$$

transzformált mennyiségekre (3.1-5)-tel teljesen analóg egyenlet teljesül

$$\widehat{H}' \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}, \quad \text{ahol} \quad \widehat{H}' = \frac{1}{2m} \left(\widehat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \widehat{\vec{A}'} \right)^2 + e\widehat{V}', \quad (3.1-7)$$

ahol bevezettük az ún. másodfajú mértéktranszformációt az elektromágneses potenciálokra:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad V \rightarrow V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.1-8)$$

(Hangsúlyozzuk, hogy itt \vec{A} vektorpotenciál és a V skalárpotenciál térfüggésére még semmit megszorítás nem szükséges a fenti formulák érvényességét illetően.) Mint tudjuk, ezen transzformált potenciálokból ugyanazon elektromos térsűrűség és mágneses indukció adódik a szokásos módon, mint az eredetiekből:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla} V' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}, \quad \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}'. \end{aligned} \quad (3.1-8a)$$

A (3.1-5), (3.1-6), (3.1-7), (3.1-8) egyenletek telsen általánosságban használhatók. Ha dipólközelítést használunk, akkor \vec{A} csak időtől függ, és - amint azt a klasszikus esetben már láttuk - \vec{A} nullává tehető. Ehhez a χ generátorfüggvényt a következőképpen kell választani: $-\vec{r} \cdot \vec{A}(t)$.

A fizikailag különböző mértékek használata fizikailag természetesen egyenértékű mindaddig, amíg a tekintett problémát egzaktul meg tudjuk oldani. A számított eredmények és a kísérleti tapasztalat között azonban jelentős eltérés lehet abban az esetben, ha a sugárzási tér hatását perturbációs számítással vesszük figyelembe. A $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mérték, valamint az $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -mérték nagyságrendekkel különböző eredményt adhat. Erre jó példa a spontán emisszió analízise [8]. Ennek részleteiben itt nem megyünk bele, mindössze azt jegyezzük meg, hogy az $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -mérték (dipólközelítésben, ill., ha ezen túlmegyünk, és az elektromágneses tér magasabbrendű multipól tagjait is használjuk) a kísérleti eredmények értelmezése szempontjából sokkal hasznosabb, mint a $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mérték. Ez persze a vizsgált folyamat természetétől is függ, és esetenként meg kell vizsgálni melyik mértéket célszerű használni. A továbbiakban mi az $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -mértéket választjuk kiindulási pontnak. A következőkben e -vel ismét az elemi töltést (vagyis az elektron töltésének abszolút értékét) jelöljük, tehát $e = -|-e| \rightarrow e = |-e|$.

3.2. A Gordon-Volkov-állapotok dipólközelítésben

A fenti diszkusszióknak megfelelően az elektron fényvel való kölcsönhatásának leírása érdekében az alábbi Schrödinger-egyenletből indulunk ki. (Nemrelativisztikus leírást használunk és eltekintünk a fény elektromágneses terének térfüggésétől.) (Itt már az operátorokat nem jelöljük kalappal, ez a jelen esetben nem vezethet félreértéshez.)

$$H\varphi = i\hbar\partial_t\varphi, \text{ ahol } H = \frac{p^2}{2m} + e\vec{r} \cdot \vec{F}(t), \text{ és } \vec{F}(t) = \vec{\varepsilon}F \sin \omega t \quad (3.2-1)$$

A fenti egyenlet tetszőleges $\vec{F}(t)$ -vel megoldható, mi itt elsősorban a tiszta monokromatikus eset vizsgálatára szorítkozunk. Az intenzív sugárzási tér (röviden: lézerefény) elektromos téresrősségvektorát \vec{F} -el jelöljük, lineáris polarizációt tételezünk fel, valamint az F amplitúdóba beleértünk egy adiabatikus be-kikapcsolási faktort (erről már szó volt az 1.3 részben). A (3.2-1) -ben szereplő Schrödinger-egyenlet megoldását röviden **Volkov-állapotnak** fogjuk nevezni. Gordon [9] a húszas évek második felében megadta a róla elnevezett Klein-Gordon-egyenlet egzakt megoldásait tetszőleges síkhullámtérrel kölcsönható elektron esetére. E megoldásokat 1935-ben Volkov [10] lényegében újra felfedezte, amikor is a megfelelő Dirac-egyenlet megoldásait határozta meg. E pontos megoldásokra a továbbiakban nincs szükségünk, megelégszünk a nemrelativisztikus leírással dipólközelítésben, vagyis a (3.2-1) egyenlet egzakt megoldásaival.

Induljunk ki a (3.2-1) egyenlet következő módosított konkrét alakjából (a Dirac-féle bra-ket jelölést használjuk a könnyebb áttekinthetőség kedvéért).

$$[H_0 + e\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon}F \sin \omega t] |\Psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t |\Psi(t)\rangle. \quad (3.2-2)$$

Ha $H_0 = \frac{p^2}{2m}$, akkor $|\Psi(t)\rangle \equiv |\varphi(t)\rangle$ egy Volkov-állapot. Egyébként H_0 lehet egy olyan Hamilton-operátor, amely magában foglalja az egyéb hatásokat is. Például $H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$, ahol $V(\vec{r})$ az elektront érő egyéb hatásokat reprezentáló potenciális energia (tehát nem feltétlenül elektromágneses potenciál, mint ahogy az előző alfejezetben feltettük). A dipólkölcsönhatás a fenti egyenletből kiküszöbölhető, de cserébe egy $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -típusú és egy A^2 -típusú kölcsönhatási tagot kapunk.

Induljunk ki tehát a (3.2-2) egyenletből. Legyen $|\Psi(t)\rangle = U_r(t) |\psi(t)\rangle$, ahol

$$U_r(t) \equiv \exp \left[i \frac{e\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon}F}{\hbar\omega} \cos \omega t \right], \quad (3.2-3a)$$

s így az új transzformált állapot egy $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékbeli Schrödinger-egyenletet elégít ki.

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \vec{\varepsilon} \frac{eF}{\omega} \cos \omega t \right)^2 |\psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle, \quad \vec{A} = \vec{\varepsilon} \frac{cF}{\omega} \cos \omega t. \quad (3.2-3b)$$

Itt $|\psi(t)\rangle$ egy $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékbeli Volkov-állapot lesz. (3.2-3b) szerint érvényes a következő egyenlet:

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right)^2 |\psi(t)\rangle = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 \right) |\psi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle, \quad (3.2-3c)$$

s emiatt beszélünk most ún. $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékről. A fenti egyenlet könnyedén megoldható, mivel $\vec{A} = \vec{A}(t)$ csak az időtől függ.

Az A^2 -es tagot azonnal kitranszformálhatjuk a következő transzformációval

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \frac{e^2}{2mc^2} A^2(\tau) \right] |\psi_1(t)\rangle = U_2(t) |\psi_1(t)\rangle, \quad (3.2-4)$$

ahol

$$U_2(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \Delta E_2 t - i \frac{\Delta E_2}{2\hbar\omega} \sin 2\omega t \right]. \quad (3.2-4a)$$

A fenti exponens kiszámításához felhasználtuk a $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ trigonometrikus összefüggést, valamint bevezettük a ΔE_2 váltóáramú Stark-eltolódást ("AC Stark-shift" az angol szakirodalomban), amelyet szokás még ponderomotoros energia eltolódásnak is nevezni:

$$\Delta E_2 \equiv \frac{e^2 F^2}{4m\omega^2} = \frac{1}{4} \mu^2 mc^2. \quad (3.2-4b)$$

A μ dimenziótlan intenzitásparaméter (2.1-3)-ban már bevezettük.

Tekintsük ezek után a következő *Ansatz*-ot $\vec{p} \cdot \vec{A}$ eliminálása céljából:

$$|\psi_1(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \int_{t_0}^t d\tau \vec{A} \right] |\psi_2(t)\rangle = U_p(t) |\psi_2(t)\rangle, \quad (3.2-4c)$$

ahol

$$U_p(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\alpha}_0 \sin \omega t \right] \quad (3.2-4d)$$

szintén egy unitér transzformáció, amely egy eltolást reprezentál. Az U_p transzformáció végülis az $\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}_0 \sin \omega t$ klasszikus trajektóriával való térbeli eltolás generátora. Ezt általában Kramers-Henneberger-transzformációnak nevezik [11], [12]. Itt

$$\vec{\alpha}_0 = \vec{\varepsilon} \frac{eF}{m\omega^2} = \vec{\varepsilon} \mu \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (3.2-4e)$$

A $|\psi_2\rangle$ transzformált állapot a szabad Schrödinger-egyenletet elégíti ki, hiszen minden kölcsönhatási tagot kiküszöböltünk:

$$\frac{p^2}{2m} |\psi_2(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi_2(t)\rangle. \quad (3.2-4f)$$

A fenti egyenlet megoldása egyszerűen felírható:

$$|\psi_2(t)\rangle = U_{p^2}(t) |\psi_2(t_0)\rangle, \quad U_{p^2}(t) \equiv \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t - t_0) \right],$$

ahol az imént bevezetett unitér transzformáció a szabad terjedés evolúciós operátora. A fenti eredmények összefoglalva a (3.2-2) eredeti egyenlet egzakt megoldásainak általános alakjára a következő kifejezést kapjuk [12]:

$$|\Psi(t)\rangle = U_r(t) U_p(t) U_2(t) U_{p^2}(t) |\Psi(t_0)\rangle . \quad (3.2-5)$$

Ha $|\Psi(t_0)\rangle$ egy impulzus sajátállapot, akkor (3.2-5) az adott impulzussal paraméterezett Gordon-Volkov-állapot $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -mértékbeli alakjára redukálódik:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\vec{p}}(t)\rangle &= U_r(t) U_p(t) U_2(t) U_{p^2}(t) |\vec{p}\rangle = \\ &= \exp\left[i\frac{e\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} F}{\hbar\omega} \cos\omega t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{\alpha}_0 \sin\omega t\right] \\ &\exp\left[-i\frac{\Delta E_2}{2\hbar\omega} \sin 2\omega t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} + \Delta E_2\right)t\right] |\vec{p}\rangle . \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

Megjegyezzük, hogy a $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékben a $|\Psi(t)\rangle$ Volkov-állapot teljes általánosságban a következő tömör formulával adható meg:

$$|\Psi_{\vec{p}}(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(\tau)\right)^2\right] |\vec{p}\rangle . \quad (3.2-7)$$

A (3.2-6) alak származtatásakor feltettük, hogy a lézerefény lineáris polarizációjú. Cirkuláris polarizáció esetén $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{k})$ jobbrendszert alkot) az elektromos térerősség vektora így írható fel:

$$\vec{E} = F (\vec{\varepsilon}_1 \sin\omega t \mp \vec{\varepsilon}_2 \cos\omega t) , \quad (3.2-8a-C)$$

s az ennek megfelelő vektorpotenciál:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{cF}{\omega} (\vec{\varepsilon}_1 \cos\omega t \pm \vec{\varepsilon}_2 \sin\omega t) = \\ &= \frac{cF}{\omega\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_{\pm} e^{-i\omega t} + \vec{\varepsilon}_{\pm}^* e^{i\omega t}) , \quad \vec{\varepsilon}_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_1 \pm i\vec{\varepsilon}_2) . \end{aligned} \quad (3.2-8b-C)$$

A felső ill. alsó előjel a jobbra ill. balra cirkulárisan polárizált fényre vonatkozik. Itt bevezettük az $\vec{\varepsilon}_{\pm}$ komplex polarizációs egységvektorokat ($\varepsilon^2 = 0$, $\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon} = 1$).

A (3.2-7) formula alapján a $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékbeli Volkov-állapot most a következőképpen írható (a továbbiakban a \pm indexet nem tüntetjük fel):

$$|\Psi_{\vec{p}}(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} + 2\Delta E_2\right)t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{2ea_0}{mc\omega} |\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}| \sin(\omega t - \chi)\right] |\vec{p}\rangle , \quad (3.2-9-C)$$

ahol

$$a_0 \equiv \frac{cF}{\omega\sqrt{2}} , \quad \chi \equiv \arg[\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}] . \quad (3.2-9a-C)$$

Tehát itt a dupla frekvenciás ($\sim \sin 2\omega t$) moduláció nincs jelen, ugyanis $A^2 = 2a_0^2 = \text{konstans}$.

A már többször felhasznált Jacobi-Anger-formula [7] felhasználásával,

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\varphi} \quad (3.2-10)$$

mind (3.2-6), mind (3.2-9-C) idő szerint Fourier-sorba fejthetők (a könnyebb áttekinthetőség kedvéért $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértéket használunk, tehát (3.2-6)-ból az U_r operátort elhagyjuk):

$$|\psi_{\vec{p}}(t)\rangle = \sum_n B_n(a, b) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p + \Delta E_2 + n\hbar\omega)t} |\vec{p}\rangle, \quad (3.2-11-L)$$

ahol

$$E_p \equiv \frac{p^2}{2m}, \quad a \equiv \frac{1}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\alpha}_0, \quad b \equiv \frac{\Delta E_2}{2\hbar\omega}, \quad (3.2-11a-L)$$

és

$$B_n(a, b) \equiv \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{n-2l}(a) J_l(b). \quad (3.2-11b-L)$$

B_n -t általánosított Bessel-függvénynek nevezzük.

Cirkuláris polarizáció esetén:

$$|\psi_{\vec{p}}(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p + 2\Delta E_2 + n\hbar\omega)t} J_n(|\varsigma|) e^{in\chi} |\vec{p}\rangle, \quad (3.2-12-C)$$

ahol

$$\varsigma \equiv \frac{2ea_0}{\hbar mc\omega} (\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}), \quad \chi \equiv \arg[\varsigma]. \quad (3.2-12a-C)$$

Az U_r operátor elhagyása a következő esetben jogos:

$$\frac{e\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} F}{\hbar\omega} \approx \frac{eF}{mc\omega} \frac{mc}{\hbar} r \approx \mu \left(\frac{r}{\lambda_C} \right) \ll 1, \quad \text{ahol } \lambda_C \equiv \frac{\hbar}{mc}$$

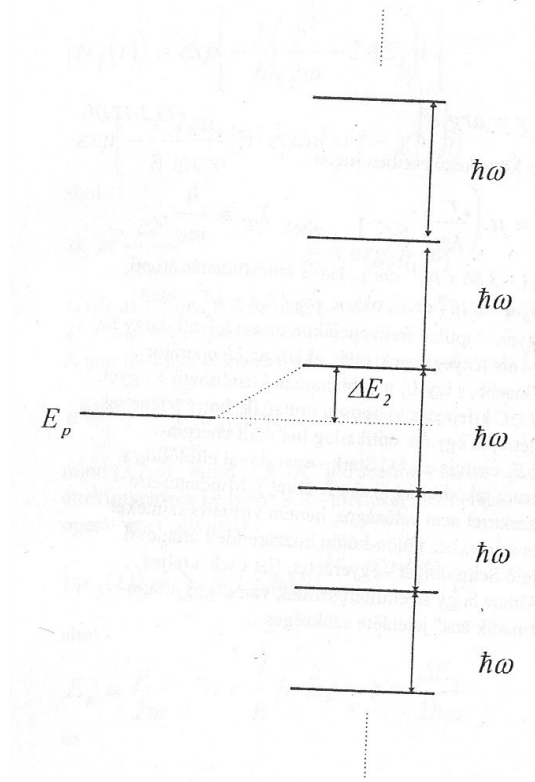
a Compton-hullámhossz ($\sim 3.86 \times 10^{-11} \text{ cm}$). Ha a kölcsönhatás atomi méretekre terjed ki ($r \sim a_B \sim 5 \times 10^{-9} \text{ cm}$), akkor $\frac{a_B}{\lambda_C} \sim 10^2$, tehát $\mu \times 10^2 \ll 1$ kell legyen. Optikai frekvenciákon ez azt jelenti, hogy ha az intenzitás $10^{13} \frac{W}{\text{cm}^2}$ -nél lényegesen kisebb, akkor az U_r operátor exponense 1-nél sokkal kisebb, s így U_r megbízhatóan közelíthető 1-gyel.

A (3.2-11-L) ill. a (3.2-12-C) kifejtések világosan mutatják, hogy a fényvel való kölcsönhatás során létrejön egy ún. optikailag indukált energiaszinterszerkezet. A kezdeti E_p energia az AC Stark-energiával eltolódik, s erre egy egyenközű spektrum rakódik rá (lásd a 11. ábrát). Mindenesetre az lényeges, hogy ez a szerkezet nem valóságos, hanem virtuális szinteket ír le itt. Ugyanis az egyes szintekhez külön-külön hozzárendelt állapotok nem elégítik ki a megfelelő Schrödinger-egyenletet. Ezt csak a teljes szuperpozíció teljesíti. Ahhoz hogy az említett szintek valóságos állapotokká váljanak, egy "harmadik test" jelenléte szükséges.

4. Nemrelativisztikus elektronok többfotonos indukált fékezési sugárzása

Köztudott, hogy a sugárzási tér egyetlen módusával (vagy olyan módusok összességével, amelyek hullámvektora azonos irányú) kölcsönható elektron fotont nem abszorbeálhat ill. emíthet. Ahhoz, hogy ilyen reális abszorpciós vagy emissziós folyamatok lejátszódjanak egy harmadik testre van szükség.

E fejezetben a harmadik test szerepét egy az origóban nyugvó végtelen nagy tömegű ion (vagy atom, molekula) játsza, amelynek az atomra gyakorolt hatását a $V(r)$ sztatikus potenciállal jellemezzük. Feltesszük, hogy a potenciál az alkalmazott intenzív fény hullámhosszához lényegesen kisebb tértartományban különbözik jelentősen zérustól. Például egy árnyékolt ion esetében $V(r) = \frac{e^{-r/d}}{r}$, ahol d a Debye-hossz, amely rendszerint sokkal kisebb az optikai hullámhosszánál. Ekkor az elektron szóródását a dipólközelítéssel kapott (3.2-6), (3.2-7) ill. (3.2-9-C) bázisállapotok segítségével írhatjuk le.



11. ábra. Optikailag indukált energia-szinterszerkezet.

4.1. Integrálegyenlet a lézerfényben szóródó elektron állapotára

A monokromatikus lineárisan polarizált fény esetében ((3.2-3b), (3.2-6) és (3.2-7) figyelembevételével) a tekintett szórásfolyamat nem függhet az A^2 -es tagtól, ugyanis ez csak az időváltozótól függ és kiesik a sak a térváltozótól függő V potenciálon való szóródás amplitúdójából. Induljunk ki a (3.2-2)-ben megadott Hamilton-operátorral meghatározott Schrödinger-egyenletből, és térjünk át $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékre. E transzformáció után az elektron állapotfüggvénye a következő egyenletet elégíti ki:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + V \right] |\psi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle . \quad (4.1-1)$$

A lézerfényvel való kölcsönhatást - hasonlóan az előbbi fejezetben látottakhoz - a (3.2-4a), (3.2-4d) transzformációkkal küszöbölhetjük ki. Hasonlóan (3.2-6)-hoz, a (4.1-1) egyenlet megoldását vegyük fel a következő alakban:

$$|\psi(t)\rangle = U_p(t) U_2(t) U_{p^2}(t) |\psi_3(t)\rangle , \quad (4.1-2a)$$

ahol a $|\psi_3(t)\rangle$ transzformált állapot az alábbi egyenletet elégíti ki:

$$U_{p^2}^{-1} U_2^{-1} U_p^{-1} V U_p U_2 U_{p^2} |\psi_3\rangle = i\hbar \partial_t |\psi_3\rangle . \quad (4.1-2b)$$

A fenti differenciálegyenletből az alábbi integrálegyenlet származtatható

$$|\psi_3(t)\rangle = |\psi_3(t_0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau U_{p^2}^{-1}(\tau) U_2^{-1}(\tau) U_p^{-1}(\tau) V U_p(\tau) U_2(\tau) U_{p^2}(\tau) |\psi_3(\tau)\rangle . \quad (4.1-2c)$$

Az eredeti állapotra (4.1-2a), (4.1-2c) alapján kapjuk:

$$|\psi(t)\rangle = U_\alpha(t) |\psi(t_0)\rangle - \frac{i}{\hbar} U_\alpha(t) \int_{t_0}^t d\tau U_\alpha^{-1}(\tau) V |\psi(\tau)\rangle , \quad (4.1-3a)$$

ahol rövidség kedvéért bevezettük az

$$U_\alpha(t) \equiv U_p(t) U_2(t) U_{p^2}(t) \quad (4.1-3b)$$

operátort, amely nem más mint $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékbeli Volkov-állapot generátora:

$$|\psi_{\vec{p}}(t)\rangle = U_\alpha(t) |\vec{p}\rangle . \quad (4.1-3c)$$

A $|\psi_{\vec{p}'}(t)\rangle$ Volkov-állapotba való szóródás amplitúdója (4.1-3a), (4.1-3c) alapján

$$\langle \psi_{\vec{p}'}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi_{\vec{p}'}(t) | \psi(t_0) \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \langle \psi_{\vec{p}'}(\tau) | V | \psi(\tau) \rangle . \quad (4.1-4)$$

Ha (4.1-4) jobboldalán $|\psi(\tau)\rangle$ -t egy kezdeti $|\psi_{\vec{p}}(\tau)\rangle$ Volkov-állapottal közelítjük, akkor az így kapott átmeneti amplitúdó egzaktul kiszámolható. (A $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ határesetben (4.1-4)-ben csak a második tag ad nemeltűnő járulékot az első taggal a továbbiakban nem foglalkozunk.)

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \psi_{\vec{p}'}(t) | V(\vec{r}) | \psi(t) \rangle . \quad (4.1-5)$$

A fenti formulát először Bunkin és Fjodorov [13] publikálták.

4.2. Nemlineáris indukált fékezési sugárzás

A (4.1-5) átmeneti amplitúdó analóg a szórás számítás szokásos elméletében fellépő Born-féle amplitúdóval, amelyben a kezdeti ill. végállapotok egyszerűen a szabad részecske impulzus sajátállapotai s nem Volkov-állapotok. A fenti formulát úgy is megkaphattuk volna hogy az elektron egzakt állapotát kifejtjük Volkov-állapotok szerint, s a kifejtési együtthatókra kapott egyenletet Born-közelítésben megoldjuk. E módszert s ennek általánosabb vonatkozásait is a [14], [15] munkákban részletesen tárgyaltuk.

A Volkov-állapotok az előbbi alfejezetben származtatott konkrét alakját felhasználva az átmeneti amplitúdó a következőképpen írható:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(\frac{i p'^2 - p^2}{\hbar} - iz \sin \omega t\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V(\vec{q}) , \quad (4.2-1a)$$

ahol $V(\vec{q})$ a szórópotenciál Fourier-transzformáltja,

$$V(\vec{q}) = \int d^3r V(r) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} , \quad \vec{q} \equiv \vec{p} - \vec{p}' , \quad (4.2-1b)$$

és bevezettük még a következő jelölést:

$$z \equiv \frac{1}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{\alpha}_0 = \frac{eF}{m\hbar\omega^2} \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{p} - \vec{p}') . \quad (4.2-1c)$$

Megjegyezzük még, hogy a Fourier-transzformált fellépése abból következik, hogy V mátrixelemét az impulzus sajátállapotok koordinátareprezentációbeli alakját használtuk:

$$\langle \vec{r}' | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} . \quad (4.2-1d)$$

A (3.2-10) Jacobi-Anger-formula segítségével (4.2-1a)-ban a szinusz exponenciális kifejezését Fourier-sorba fejthetjük, s ez után az idő szerinti integrálás egyszerűen elvégezhető. Az eredmény parciális amplitúdók inkohereus szuperpozíciója lesz:

$$T_{fi} = \sum_n T_{fi}^{(n)} , \quad T_{fi}^{(n)} = -2\pi i \delta(E' - E - n\hbar\omega) t_{fi}^{(n)} \quad (4.2-2a)$$

$$t_{fi}^{(n)} \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} J_n(z) V(\vec{q}) . \quad (4.2-2b)$$

(4.2-2a)-ban $E = \frac{p^2}{2m}$ és $E' = \frac{p'^2}{2m}$ az elektron kezdeti ill. végső energiája. A Dirac-delták a különböző rendű fotonabszorpciókra ($n > 0$) és emissziókra ($n < 0$) vonatkozó energiámérleget adják,

$$E' = E + n\hbar\omega , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \quad (4.2-2c)$$

Az átmeneti amplitúdók ismeretében az n -edrendű folyamatok differenciális hatáskeresztmetszetei a szokásos módon számolhatók (meghatározzuk az időegységre eső átmeneti valószínűségeket, majd a végállapotok impulzusai szerint ezeket kiintegráljuk s a kapott eredményt elosztjuk a bejövő részecskeáram abszolút értékével).

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{p'}{p} J_n^2(z) \frac{d\sigma_B}{d\Omega} , \quad \frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |V(\vec{q})|^2 . \quad (4.2-3)$$

A fenti képletben $\frac{d\sigma_B}{d\Omega}$ a $\vec{p} \rightarrow \vec{p}'$ szórás Born-féle differenciális hatáskeresztmetszete. Megjegyezzük, hogy cirkuláris polarizáció esetében (lásd a (3.2-8a-C, 3.2-8b-C) és a (3.2-9-C, 3.2-9a-C) képleteket) a (4.2-3) formulával teljesen azonos alakú eredményt kapunk, a különbség csupán a z paraméter jelentésében van.

$$z \rightarrow z \equiv \frac{2ea_0}{mc\hbar\omega} |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{q}| = \frac{eF}{m\hbar\omega^2} \sqrt{(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{q})^2 + (\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{q})^2} . \quad (4.2-3a-C)$$

Bebizonyítható [16], hogy alacsonyfrekvenciás közelítésben ($\hbar\omega \ll E$) a Born-közelítésnél lényegesen pontosabb eredmény is származtatható, amely szintén (4.2-3) szerkezetű.

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{p'}{p} J_n^2(z) \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} , \quad (4.2-4)$$

ahol $\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}$ a lézerefény jelentése nélkül végbemenő folyamat teljes rugalmas szórás hatáskeresztmetszete. Az utóbbi formulát Kroll-Watson-formulának nevezzük.

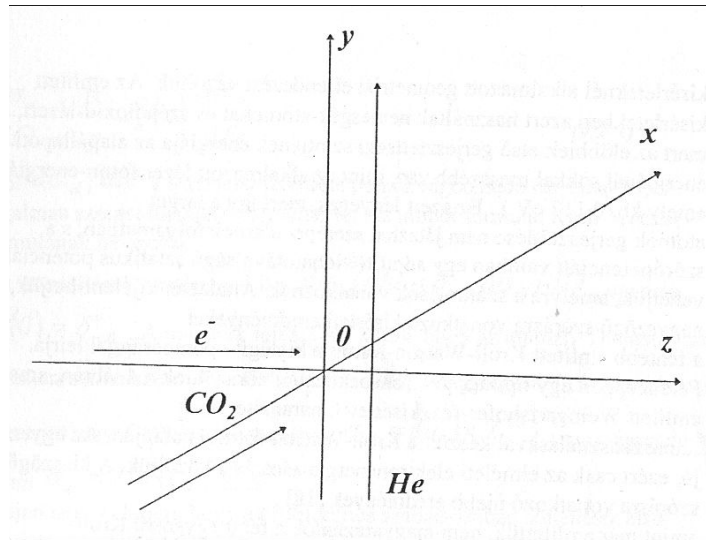
Kis intenzitások esetén ($z \sim 0$) $\frac{d\sigma_n}{d\Omega} \approx \delta_{n,0} \frac{d\sigma_B}{d\Omega}$, ugyanis $J_n(0) = \delta_{n,0}$. A második fejezetben láttuk, hogy az intenzív Thomson-szórás hatáskeresztmetszete $\sigma_{Th} \approx r_0^2 \approx 10^{-25} \text{ cm}^2$ nagyságrendű, ugyanakkor (4.2-4) szerint egy Z töltésű ion esetében $\sigma_{el} \approx 10^9 \left(r_0 Z^{\frac{1}{3}} \right)^2$ nagyságrendű lehet, tehát $\sigma_{el} \approx 10^9 \sigma_{Th}$. Ezek alapján nem véletlen, hogy a többfotonos szabad-szabad átmenetek első kísérleti kimutatása indukált fékezési sugárzás esetén sikerült [17]. Itt 11 eV-os elektronok Argon atomokon való nagyszögű szóródását vizsgálták. A kölcsönhatási tartomány 200 μs -os kihagyásokkal 2 μs időtartamokra $10^9 \frac{W}{\text{cm}^2}$ intenzitású CO₂-lézerral világították meg és elektronspektrométerrel analizálták a szórt elektronok energiaspektrumát. Azt találták, hogy a lézerefény hatására az $E' = E + n\hbar\omega$ energiaértéknél az eloszlási görbén lokális maximumok jelennek meg. Ezek a maximumok az egy, két stb. számú fotont abszorbeált elektronoktól erednek. A Bessel-függvények elméletéből ismert, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(z) = 1 \quad (4.2-5)$$

ezt összegszabálynak nevezzük. Ha a végimpulzus n -függésétől eltekintünk, akkor az összegszabály a következőképpen írható:

$$\sum_n \frac{d\sigma_n}{d\Omega} \approx \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} . \quad (4.2-6)$$

Az új kísérletek [18] szerint kisszögű szórás esetében a Kroll-Watson-formula egyáltalán nem alkalmazható, több nagyságrenddel kisebb eredményt ad mint a mérések. A 12. ábrán pl. a [18]-ban publikált kísérleteknél alkalmazott geometriai elrendezést vázoltuk. Az említett kísérletekben azért használtak nemesgáz-atomokat és széndioxid-lézert, mert az előbbieket első gerjesztettségi szintjének az alapállapot energiájánál sokkal messzebb van, mint az alkalmazott lézer foton-energiája (amely kb. 0.117 eV). Ez azért lényeges, mert így a target atomok gerjesztődése nem játszat szerepet a szórásfolyamatban, s a szórópotenciált valóban egy adott rövidtávolságú sztatikus potenciálnak vehetjük, amelyre a számítások vonatkoznak. Általában kijelenthetjük, hogy a nagyszögű szórásra vonatkozó kísérleti eredményeket a fentebb említett Kroll-Watson-formula kielégítő pontossággal leírja. Példaképpen egy tipikus elektronspektrumot ábrázoltunk a 13. ábrán, amely a már említett Weingartshofer-féle kísérletek paramétereinek felhasználásával készült a Kroll-Watson-formula alapján. Az egyezés igen jó, ezért csak az elméleti elektronenergia-eloszlást közöljük. A kisszögű szórásra vonatkozó újabb eredmények [18], amint már említettük, nem magyarázhatók a fenti egyszerű Kroll-Watson-formulával. Úgy tűnik, hogy egészen más (nem feltétlenül egyrészesecskes modelleken alapuló) képet kell figyelembevenni a szórás pontosabb (kielégítő) leírásához. Erre egy ígéretes kísérletnek tűnik a [19]-es referenciában közölt publikációnk.



12. ábra. A lézerefény jelenlétében atomokon szóródó elektronokkal kapcsolatos kísérletekben szokásosan használt geometriai elrendezés. Az általában nemesgáz (az ábrán hélium) atomokból álló atomsugárba merőleges a bejövő elektronnyaláb. Mindkettejükre merőleges a bejövő lézerefény (esetünkben CO_2 -lézer) hullámvektora, s a sugárzás - az ábra jelöléseit használva - a z -irányban polarizált. Ezt tehát úgy állítják be, hogy a bejövő elektronok impulzusával párhuzamos legyen: $p \parallel \varepsilon$. A Bessel-függvény argumentumának nagyságát ugyanis a $p \cdot \varepsilon$ szorzat lényegesen befolyásolja.

5. Többfotonos ionizáció

E fejezetben származtatjuk a Keldis-féle amplitúdót. A Keldis-féle közelítés egy jól áttekinthető sémát biztosít a minőségileg különböző nemlineáris folyamatok osztályozásához. Az előző fejezetben látott integrálegyenlet itt is alkalmazható, mindössze a peremfeltételeket kell megváltoztatni.

5.1. A Keldis-féle átmeneti amplitúdó

A **Keldis-féle amplitúdót** tulajdonképpen már az előző fejezetben felírtuk. A (4.1-4) egyenletben végállapotként egy Volkov-állapotot jelöltünk meg:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_{\vec{p}}(t) | V(\vec{r}) | \psi(t) \rangle. \quad (5.1-1)$$

Itt persze az egzakt állapotot nem tudjuk, mindössze azt tételezzük fel, hogy a végállapot egy Volkov-állapot. Ez is természetes közelítés, hiszen pl. egy H-atom ionizációjakor a maradék proton Coulomb-tere egy hosszúhátótávolságú vonzó potenciállal reprezentálható, tehát a kiszabadult elektron síkhullámmal való leírása meglehetősen durva közelítésnek tűnik. Az (5.1-1) amplitúdó matematikailag egzakt, nem tartalmaz közelítést, fizikailag viszont az előbb említett egyszerűsítésen alapul. A szórnak megfelelő peremfeltétel a kezdeti és végállapotra aszimptotikusan szabad állapotot jelöl meg (végülis a Volkov-állapot egy modulált szabad elektron síkhullám), viszont az ionizáció esetében a kezdőállapot kötött állapot. A Keldis-féle közelítés abban áll, hogy az (5.1-1) amplitúdóban az egzakt $|\psi(t)\rangle$ állapotot az atom perturbálatlan alapállapotával közelítjük, azaz

$$|\psi(t)\rangle \approx |\psi_g\rangle \exp\left[+\frac{i}{\hbar} |E_g| t\right] \quad (5.1-2)$$

Így a fenti amplitúdó analitikusan kiszámítható.

Világos, hogy a többfotonos ionizáció akkor lényeges, ha az $A = |E_g|$ ionizációs energia nagyobb a $h\nu$ fotonenergiánál. Ahhoz, hogy e magasabbrendű folyamatok számottevő valószínűséggel végbemehessenek kellően nagy lézerintenzitás szükséges. A Keldis-féle amplitúdó [18], [19] - lévén, egyrészt a fényvel való kölcsönhatás szempontjából nemperturbatív, másrészt analitikusan kiszámítható - hatásos módszert biztosít a nemlineáris ionizáció főbb sajátosságainak szisztematikus elemzéséhez. Ez azért is helentős, mert a kötött elektronok intenzív lézerfényvel való kölcsönhatásának elméleti leírása általában igen kemény problémát jelent. Ennek az az oka, hogy az elektron Schrödinger-egyenlete nem oldható meg egzaktul ha az elektron a kötő potenciál és (az időtől függő) lézertér egyidejű hatása alatt mozog. Vegyük először is a legalapvetőbb példát: a hidrogén atomban kötött elektron monokromatikus fényvel való kölcsönhatását. A nemrelativisztikus leírás és a dipólközelítés még igen nagy intenzitásoknál is elfogadható, s így az ide vonatkozó Schrödinger-egyenlet a következő alakot ölti (feltesszük, hogy a lézerfény x -irányba lineárisan polarizált):

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{r}|} + exF \sin \omega t \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (5.1-3)$$

ahol $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$, és $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, amint az jól ismert. Bár (5.1-3) a spektroszkópia legelemibb (realisztikus) problémájának matematikai megfogalmazása, lévén egy nemszeparálható négyváltozós parciális differenciál-egyenlet, egzakt megoldására csekély reményünk lehet. A közvetlen numerikus integráláshoz szupercomputerekre (a CRAY különböző verziói pl.) van szükség [20]. Az ezekkel kapott eredményekhez azonban többnyire elég nehéz a megfelelő fizikai interpretációt megtalálni.

Éppen ezért bármilyen (közelítő) analitikus eredmény, amely az $I \sim F^2$ intenzitás valamely tartományában a kísérletekkel összhangban álló leírást ad, nagy fontossággal bír. Egy ilyen analitikus módszer a Keldis-féle közelítés, amelyet szerzője már a hatvanas évek közepén publikált, azonban valósi jelentőségét csak a nyolcvanas években ismerték fel széleskörűen. Alább - néhány, a szokásos Dirac-féle perturbációszámítással kapcsolatos megjegyzés után - a Keldis-módszer főbb eredményeit ismertetjük.

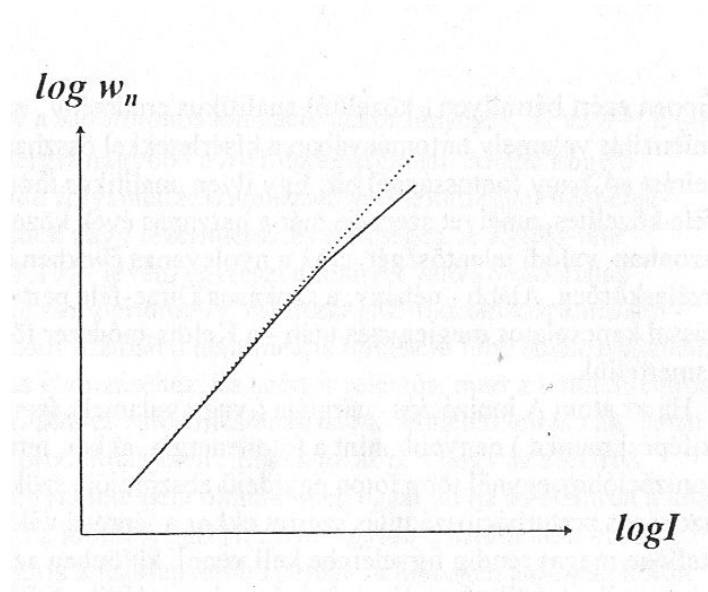
Ha az atom A ionizációs energiája (vagy valamely fém esetében a kilépési munka) nagyobb, mint a fotonenergia, akkor, természetesen, az ionizációhoz egynél több foton egyidejű abszorpciója szükséges. A szokásos perturbációs számítás szerint ekkor a fényvel való kölcsönhatást kellően magas rendig figyelembe kell venni, különben az ionizáció kinematikailag tiltott, valószínűségére zérus adódik. A folyamat végbemenetelének kinematikai feltétele:

$$n\hbar\omega = A + E_k, \quad (5.1-4)$$

ahol E_k a távozó elektron kinetikus energiája. Mivel az n -edrendű folyamat mátrixeleme F^n -el arányos, ezért az átmeneti valószínűségek az intenzitás n -edig hatványával lesznek arányosak: $w_n \sim I^n$. Másképpen:

$$\frac{\partial \log w_n}{\partial \log I} = n. \quad (5.1-5)$$

A perturbációs sorban az első el nem tűnő tag a domináns, ezért a teljes valószínűség $w_n \sim I^{n_0}$, ahol $n_0 \equiv \left[\frac{A}{\hbar\omega} + 1 \right]$. Az (5.1-5) egyenlet által kifejezett ún. " **n -edik hatvány szabály**" a perturbációs számítás végülis triviális következménye. Felvetődik a kérdés, hogy vajon milyen függést kapunk az intenzitás olyan nagy értékeinél amelyekre a perturbációs sor egymást követő tagjai már összemérhetőek? *Létezik-e egy olyan határ (tartomány) amelyen túl a perturbációs számítás csöndöt mond?* Mint bebizonyosodott ilyen határ valóban létezik. Ezt kísérletileg először a hetvenes évek közepén mutatták ki [21] a fémek felületi többfotonos fotoeffektusa tanulmányozásakor. Az eredményt a 13. ábrán mutatjuk be vázlatosan. A perturbációs számítástól való eltérés a Keldis-féle elmélet alapján analitikusan is leírható (lásd a köv. részt).



13. ábra. A nemlineáris fotoáram intenzitásfüggése (vázlatos). Az (5.1-5) perturbatív eredmény szerint a függést egy n iránytangensű egyenes ábrázolja, ezt a szaggatott vonallal jelöltük. A mérési eredmény [21] szerint ez az iránytangens kellően nagy intenzitásoknál folyamatosan csökken. Ez a csökkenés az optikai tunnelizáció fellépésének következménye.

5.2. A Keldis-féle közelítés, sokfotonos ionizáció, optikai tunnelionizáció

Ha (5.1-1)-ben az (5.1-2) közelítést valamint a $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -mértékbeli Volkov-állapot (3.2-11-L)-beli konkrét alakját figyelembe vesszük, akkor az ionizáció átmeneti amplitúdójára a következő formula adódik:

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_{\vec{p}}(t) | V(\vec{r}) | \psi_g \rangle \exp \left[+\frac{i}{\hbar} At \right] = \\
&= -2\pi i \sum_n T_{fi}^{(n)} \delta(E + \Delta E_2 - n\hbar\omega + A)
\end{aligned} \tag{5.2-1a}$$

ahol

$$T_{fi}^{(n)} \equiv B_n \left(-\mu \frac{c p_{nx}}{\hbar\omega}, \frac{\Delta E_2}{2\hbar\omega} \right) \langle \vec{p}_n | V | \psi_g \rangle \tag{5.2-1b}$$

(A fenti formulák származtatásakor feltételeztük, hogy a lézertény x -irányban lineárisan polarizált.)

Az (5.2-1a) képletben a Dirac-delták a különböző többfotonos csatornák energiamérlegét adják, nevezetesen:

$$E = n\hbar\omega - (A + \Delta E_2) = \frac{p_n^2}{2m} \geq 0, \tag{5.2-1c}$$

valysis p_n -nek valósnak kell lennie (egyébként az elektron nem terjedhet szabadon).

Az n_0 küszöbindexet amelytől kezdve az (5.2-1c) egyenlet teljesül, az ionizációhoz szükséges fotonok minimális számának (vagy egyszerűen minimális fotonszámának) nevezzük. Ha $\Delta E_2 \ll \hbar\omega$, akkor B_n -ek közelíthetők a Bessel-függvényekkel, s így az m -edik ionizációs csatornába jutó időegységre eső átmeneti valószínűség:

$$w_n \approx J_n^2 \left(\mu \frac{c p_{nx}}{\hbar\omega} \right) \left| \langle \vec{p}_n | V(\vec{r}) | \psi_g \rangle \right|^2 \delta(\dots) \tag{5.2-2}$$

Kis intenzitásoknál $J_n(z) \sim \frac{(z/2)^n}{n!}$ következtében $w_n \sim I^n$, ami éppen a perturbatív eredmény. (5.2-1c) szerint az $n > n_0$ csatornák is nyitottak, s magasabb intenzitásoknál előfordulhat, hogy az $n_0 + s$ rendű járulékok nem elhanyagolhatóak. Mivel ekkor az ionizációs küszöbhez szükségesnél nagyobb az egyidejűleg abszorbeált fotonok száma, a jelenséget **"küszöb fölötti"**, vagy más szóval **"extra fotonos" ionizációnak** nevezzük. Az (5.2-1c) kinematikai egyenletből is következik, hogy a fényel való kölcsönhatás miatt a kilépési munka a ponderomotoros potenciális energiával megnövekszik, ugyanis az elektron energiája átlagértékének ez utóbbi az alsó határa. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az effektív kilépési munka $A + \Delta E_2$, amely persze az intenzitásnak megfelelően az n_0 küszöbindex (a *"minimális fotonszám"*) is az intenzitással növekszik. Végül is a küszöb fölötti csúcsok eltűnnek, és a spektrum egyre nagyobb és nagyobb n értékek felé tolódik el. Ez az ún. **"csúcscsökkentés"** (angolul "peak suppression") jelensége. Ezt az 14. ábra szemlélteti.

Az elektron végső impulzusára kiintegrálva megkapjuk a teljes ionizációs valószínűséget:

$$w = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int d^3p \rho(\vec{p}) w_n \tag{5.2-3}$$

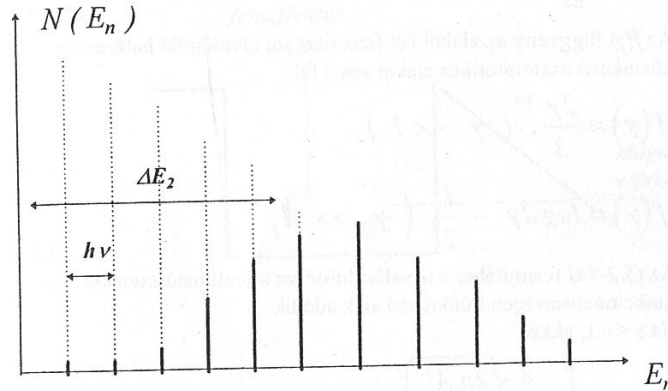
ahol $\rho(\vec{p})$ a végállapotok sűrűsége (Dirac-deltára való normálás esetén: $\frac{1}{\hbar^3}$). Keldis egy kváziklasszikus módszer segítségével a w valószínűsége egy zárt közelítő formulát származtatott:

$$w \propto \exp \left[-\frac{2A}{\hbar\omega} f(\gamma) \right], \tag{5.2-4a}$$

ahol

$$f(\gamma) \equiv \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \operatorname{arsh} \gamma - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma}. \tag{5.2-4b}$$

A γ paraméter, amelyet a fenti egyenletekben használunk, a híres **Keldis-féle** γ , amelyet alább definiálunk.



14. ábra. A "csúcselnyomás" jelensége a küszöb fölötti többfotonos ionizáció során. Az atom kötelékéből kiszabadult elektron energiaspektruma diszkrét, $h\nu$ távolságú csúcsokból áll. Az (5.2-1c) kinematikai egyenletből következik, hogy ΔE_2 növekedésével (egyre nagyobb intenzitásoknál) a közvetlenül a küszöb fölött lévő csúcsok eltűnnek, s a spektrum egyre nagyobb n -értékek felé tolódik.

A Keldis paraméter definíciója a következő:

$$\gamma \equiv \frac{\omega \sqrt{2mA}}{eF}. \quad (5.2-4c)$$

Az $f(\gamma)$ függvény az alábbi két fizikailag jól elkülönítható határesetben a következő aszimptotikus alakot veszi fel:

$$f(\gamma) \approx \frac{2\gamma}{3}, \quad (\gamma \ll 1) \quad (5.2-4d)$$

$$f(\gamma) \approx \log 2\gamma - \frac{1}{2}, \quad (\gamma \gg 1). \quad (5.2-4e)$$

Az (5.2-4a) formulából a w valószínűsége a fenti határesetekben két, funkcionálisan igen különböző alak adódik.

Ha $\gamma \ll 1$, akkor

$$w \propto \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2mA^3}}{\hbar eF}\right), \quad (5.2-5)$$

($\gamma \ll 1$: optikai tunnelezés)

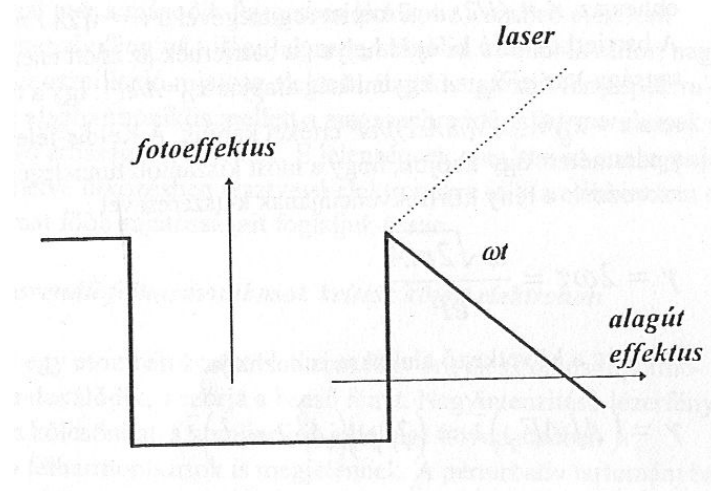
Ha $\gamma \gg 1$, akkor

$$w \propto \left[\mu^2 \left(\frac{mc^2}{8A}\right)\right]^{\frac{A}{\hbar\omega}}, \quad (5.2-6)$$

($\gamma \gg 1$: többfotonos ionizáció)

ez utóbbi esetben, mivel $\frac{A}{\hbar\omega} = n_0$ és $\mu^2 \sim I$, végülis a perturbatív eredményt kaptuk vissz, vagyis $w \sim I^{n_0}$. Az (5.2-5) formula emlékeztet a sztatikus elektromos terek által kiváltott tunnelionizáció valószínűségére. Ezért

mondjuk, hogy ha a Keldis paraméter kellően kicsiny, akkor az elektron egy optikai periódus alatt kitunnelezhet a lézertér által letört atomi potenciálfalon. Ehhez a következő kép kapcsolható. A lézer fény $F(t) = F \sin \omega t$ elektromos terében az elektron potenciális energiája $V(x, t) = e x F \sin \omega t$ (lineáris polarizációt tételezünk fel). Ez egy egyenessel ábrázolható, amely két szélső irány között periodikusan oszcillál (lásd a 15. ábrát).



15. ábra. A Keldis-féle paraméter magyarázatához.

Jelöljük az ionizációs energiát (kilépési munkát) A -val, és rendeljük ehhez az $A = \frac{1}{2} m v^2$ képlet segítségével a $v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$ sebességet. A barrierből való kilépés helye (a barriernek az adott energián vett vastagsága) az $e F x_0 = A$ egyenlőség alapján $x_0 = \frac{A}{e F}$. Így a tunnelezési időre a $\tau = \frac{x_0}{v} = \frac{\sqrt{m A / 2}}{e F}$ értéket kapjuk. A Keldis-féle dimenziótlan γ paramétert úgy kapjuk, hogy a most kiszámolt tunnelezési időt megszorozzuk a fény körfrekvenciájának kétszeresével:

$$\gamma = 2\omega\tau = \frac{\omega\sqrt{2mA}}{eF}. \quad (5.2-7)$$

Ezt még a következő alakokra is hozhatjuk:

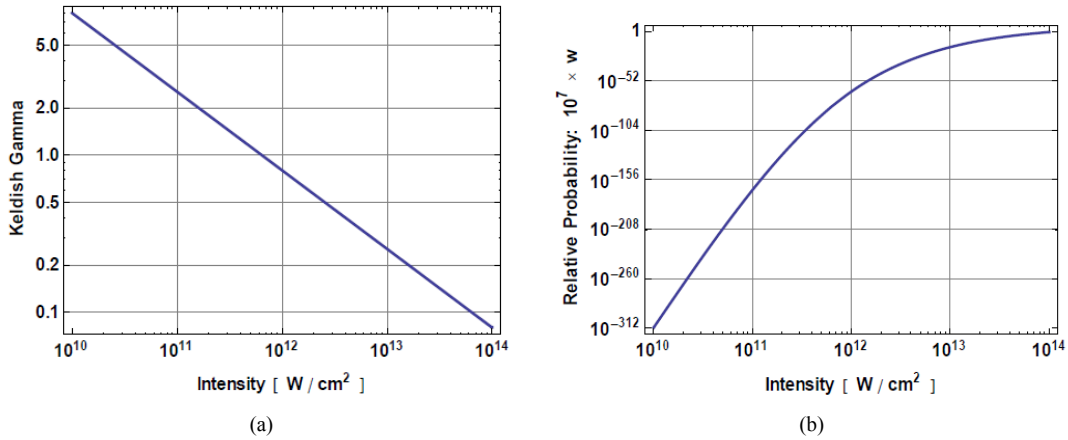
$$\gamma = \left(\frac{A}{\Delta E_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\mu} \left(\frac{A}{2mc^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2-7a)$$

ahol μ és ΔE_2 a már korábban bevezetett intenzitásparaméter illetve ponderomotoros energiaeltolódás.

Ha $\gamma \sim \frac{\tau}{T} \ll 1$ (vagyis a tunnelezési idő a T optikai periódusidőnél sokkal kisebb), akkor az elektron **optikai tunneleffektussal** kiszabadulhat a kötésből. Erre akkor van számottevő esély, ha ω kellően kicsiny és/vagy F (azaz az intenzitás) kellően nagy.

6. Magasrendű felharmonikusok keltése intenzív lézer fényben

Amint azt már a második fejezetben láttuk, ha a szabad elektront kellően intenzív fényvel világítjuk meg, akkor az ez által kiváltott nagy amplitúdójú oszcilláció miatt az elektron által kisugárzott fény spektrumában az alapharmoniku mellett a magasabbrendű felharmonikusok is számottevő erősségűek lehetnek. E jelenségnek megvan az analogonja a kötött illetve ütközésben résztvevő elektronokra is. Az alábbiakban e két folyamat főbb sajátosságait foglaljuk össze.



16. ábra. A baloldali ábra a Keldis-féle γ paraméter intenzitástól való függését mutatja logaritmikus skálán $A = 16eV$ és $\hbar\omega = 0.1eV$ esetében. Ez argon atomok CO_2 lézerrel történő ionizációjának felel meg. A jobboldali ábra az ionizáció relatív valószínűségét mutatja a bejövő intenzitás függvényeként. A Keldis-paraméter körülbelül $10^{12} \frac{W}{cm^2}$ intenzitásnál veszi fel az egységnyi értéket, s ezután a perturbatív viselkedés (n_0 konstans meredekség log-log skálán) fokozatosan átmegy a tunnelionizációra jellemző exponenciális függésbe.

6.1. Magasrendű felharmonikusok keltése kötött elektronon

Ha pl. egy atomban kötött elektront fény éri, elektromos dipólmomentum indukálódik, s szórja a beeső fényt. Nagyintenzitású lézertérben a kölcsönhatás nemlineáris jellege következtében a magasabb felharmonikusok is megjelennek. A perturbatív tartományban ($\gamma \gg 1$) a felharmonikusok intenzitása n -nel monoton és gyorsan csökken, míg a nemperturbatív tartományban ($\gamma \ll 1$) a spektrális komponensek csak egy valamilyen N számú vonalat tartalmazó plateau után csökkennek számottevően [20]. Ezt az általános viselkedést a 17. ábrán szemléltettük. Mivel e folyamat leírása sem lehetséges egzaktul csak numerikusan, ezért itt egy meglehetősen durva ugyanakkor analitikusan kézbentartható közelítést mutatunk be, melynek segítségével a harmonikus spektrum legalábbis kvalitatíve leírható. Mindössze az a célunk, hogy egy egyszerű képet adjunk a felharmonikusok keletkezési mechanizmusáról a klasszikus elektrodinamika alapján. A módszer kvantummechanikai általánosítását is elvégeztük [22], erre itt nem térünk ki, ugyanis (legalábbis nem túl extrém körülményekre alkalmazva) a klasszikus eredményekhez közeli eredményekre vezet.

Tekintsük a $V(\vec{r})$ kötő potenciáltérben és az $\varepsilon F \sin \omega t$ lézertérben mozgó elektron Newton-egyenletét.

$$m \ddot{\vec{r}} = -eF \vec{\varepsilon} \sin \omega t - \vec{\nabla} V. \quad (6.1-1)$$

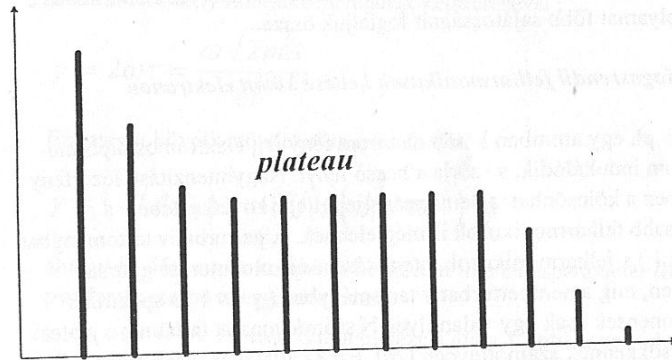
Ha a V potenciál járulékatól eltekintünk, akkor a fenti egyenlet a már korábban tárgyalt (2.1-2b) egyenlettel analóg, melynek megoldása egyszerű integrálással azonnal megkapható:

$$\vec{\alpha}(t) = \alpha_0 \vec{\varepsilon} \sin \omega t, \quad \alpha_0 = \mu \frac{c}{\omega} = \mu \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (6.1-2)$$

ahol α_0 a szabad elektron fénybeli oszcillációjának amplitúdója. Ebből világos, hogy

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}(t) + \vec{\alpha}(t)) = -\vec{\nabla} V,$$

ugyanis $\vec{\alpha}(t)$ a $-\vec{\nabla} V$ erő jelenléte nélkül érvényes megoldás. Vezessük be most a $\vec{\xi} = \vec{r} + \vec{\alpha}$ változót. Ekkor



17. ábra. Az atomi elektronokon keltett magasrendű felharmonikusok intenzitás eloszlásának vázlata.

$$m \frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{\xi} - \vec{\alpha}) . \quad (6.1-3)$$

Mivel $\vec{\alpha}(t)$ a (6.1-2) szerint az idő periodikus függvénye, ezért $V(\vec{\xi} - \vec{\alpha}(t))$ Fourier-sorba fejthető:

$$V(\vec{\xi} - \vec{\alpha}(t)) = \sum_n V_n(\vec{\xi}) e^{-in\omega t} . \quad (6.1-4a)$$

$\vec{\xi}$ -t hasonlóképpen sorbafejtve:

$$\vec{\xi} = \sum_n \vec{\xi}_n , \quad (6.1-4b)$$

és a fenti egyenleteket felhasználása után (6.1-3)-ban az azonos indexű tagokat egyenlővé téve $\vec{\xi}$ komponenseire a következő közelítő differenciál-egyenletek adódnak:

$$\frac{d^2 \vec{\xi}_n}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{\xi}) e^{-in\omega t} . \quad (6.1-5)$$

Ha $\vec{\xi}$ lassan változik, akkor (6.1-5) szerint a gyorsuláskomponensek az $n\omega$ felharmonikus frekvenciákkal oszcillálnak. (6.1-5)-öt egy kis térfogatban lokalizált töltéseloszlásra átlagolva megkapjuk a gyorsuláskomponensek átlagát. A jól ismert Larmor-formula szerint [23] a szórt sugárzás $n\omega$ frekvenciájú és $\vec{\varepsilon}$ polarizációjú komponensének egységnyi térszögbe jutó teljesítménye:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi c^3} \left| \vec{\varepsilon} \cdot \left\langle \frac{d^2 \vec{\xi}_n}{dt^2} \right\rangle \right|^2 = \frac{e^2}{8\pi n^2 c^3} \left| \vec{\varepsilon} \cdot \langle \vec{\nabla} V_n \rangle \right|^2 . \quad (6.1-6)$$

Megjegyezzük, hogy a kvantummechanikai eredmény [22] teljesen hasonló alakú. A különbség persze az átlagképzésben van. Egy $f(\xi)$ klasszikus töltéseloszlásra:

$$\langle \vec{\nabla} V_n \rangle = \int d^3\xi f(\vec{\xi}) \vec{\nabla} V_n(\vec{\xi}) ,$$

ugyanakkor egy kvantummechanikai eloszlásra:

$$\langle \vec{\nabla} V_n \rangle = \langle \psi_g | \vec{\nabla} \hat{V}_n | \psi_g \rangle ,$$

ahol ψ_g az atomi elektron alapállapota. Belátható, hogy ha $V(\vec{r})$ centrálisan szimmetrikus (azaz $V(\vec{r}) = V(r)$) akkor $gradV_n(\vec{r})$ paritása ellenkező n paritásával. Következésképpen - mivel a $\psi_g(\vec{r})$ alapállapot páros függvény - a harmonikusok spektrumában csak a páratlan $n = 2k + 1$ rendű felharmonikusok fognak szerepelni. Ezt az elméleti észrevételt a vonatkozó kísérleti eredmények egyértelműen igazolják. Ha a rendszer nem centrálisan szimmetrikus (ez a helyzet a következő alfejezetben tárgyalt esetben is), akkor ilyen kiválasztási szabály nem érvényes, és mindegyik felharmonikus gerjesztődik.

6.2. Magasrendű felharmonikusok keltése ütközéskor

Ha egy elektron lézerefény jelenlétében egy sztatikus potenciálon szóródik, akkor - amint azt a 4. fejezetben láttuk - a szórás rugalmatlan, s a szórt elektron energiaspektrumában oldalsávok jelennek meg, amelyek n lézerefoton abszorpciójának ill. emissziójának felelnek meg. Ebből sejtethető már, hogy, mivel az elektron hullámfüggvénye $\exp(-in\omega t)$ időfüggő modulációs faktorokat tartalmaz, ezért a töltéssűrűség ill. az áramsűrűség az összes felharmonikus frekvenciájával oszcillál. Következésképpen ilyen típusú ütközésekkor is felharmonikusok keltésre lehet számítani. Valószínűleg a legegyszerűbb modell amellyel ez a jelenség leírható az elektron egydimenziós szóródása egy potenciálfalon lézerefény jelenlétében. Ha a fémbeli elektronok Sommerfeld-féle leírására gondolunk, akkor az alábbi tanulmányozandó modellhez egy konkrét fizikai problémát is rendelhetünk [24], [25].

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy áthatolhatatlan potenciál fal helyezkedik el az (x, y) síkban úgy, hogy $V(z) = 0$, ha $z < 0$, és $V(z) = \infty$, ha $z > 0$. Az elektron (a $-z$ irányból) balról érkezik, és reflektálódik a falon a $z = 0$ helyen. Feltesszük még, hogy egyidejűleg kölcsönhat a z -polarizációjú lézerefénnyel, amelyet az $A(t) = \frac{eF}{\omega} \varepsilon_z \cos \omega t$ vektorpotenciállal reprezentálunk. A szórás leírásához elegendő a következő egyszerűsített Gordon-Volkov-állapotokat használni (lásd a 3.2 fejezetet), ugyanis a szórási amplitúdókat meghatározó (alább felírandó) peremfeltételből mind a mértékfaktor mind az A^2 -es tag járuléka kiesik. Mivel az elektron terjedési tartományában a potenciál zérus, ezért a fundamentális megoldásokat a 3.2 fejezet alapján az egyszerűsített Gordon-Volkov-állapotok adják (az x és y irányú mozgás triviális, ezért a továbbiakban csak a z -irányú mozgással foglalkozunk):

$$\psi_p = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - p(z - \alpha \sin \omega t)) \right], \quad (6.2-1)$$

ahol $E = \frac{p^2}{2m}$, $\alpha = \frac{mc}{\omega}$, $\mu = \frac{eF}{mc\omega}$. Bár (6.2-1) megoldása a megfelelő Schrödinger-egyenletnek, de a $z = 0$ helyen nem azonos zérus, azaz nem elégíti ki az előírandó következő peremfeltételt.

Minden időpontban teljesülnie kell, hogy

$$\psi(z = -0, t) = 0. \quad (6.2-2)$$

A fenti egyenlet csak a (6.2-1) megoldások szuperpozíciójával elégíthető ki. Vegyük fel tehát a teljes megoldást a fenti megoldások következő (különböző energiákhoz tartozó) szuperpozíciójaként:

$$\psi(z, t) = \psi_{p_0}^{(+)} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \psi_{p_n}^{(-)}, \quad (6.2-3)$$

ahol

$$\psi_{p_0}^{(+)} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 t - p_0 z) \right] \exp [-ia_0 \sin \omega t], \quad (6.2-3a)$$

$$\psi_{p_n}^{(-)} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 + n\hbar\omega) t + \frac{i}{\hbar} p_n z \right] \exp [ia_n \sin \omega t], \quad (6.2-3b)$$

$$p_n = \sqrt{2m(E_0 + n\hbar\omega)}, \quad a_n = \frac{p_n \alpha}{\hbar}. \quad (6.2-3c)$$

A (+) felső indexű állapot reprezentálja az E_0 energiával és p_0 impulzussal bejövő elektront, míg a (-) felső indexű állapotok a reflektált komponensek $E_0 + n\hbar\omega$ energiával és (az $E = \frac{p^2}{2m}$; $p = +\sqrt{2mE}$ tömeghőj relációnak megfelelően) $-p_n$ impulzussal. Ha $E_0 + n\hbar\omega < 0$, akkor p_n tiszta imaginárius ($p_n = +i|p_n|$), és ezek a komponensek a többfotonos szóródás szempontjából zárt csatornákhöz tartoznak, mindenesetre a felharmonikusok elnyeléséhez lényegesen hozzájárulnak. Világos, hogy létezik egy olyan n_0 küszöbindex, amelyre a megfelelő impulzus még valós (tehát szabad terjedést ír le), de az $(n_0 - 1)$ -hez már imaginárius érték tartozik. Így, ha $n < n_0$, akkor evanescens (esetünkben a $-\infty$ irányba exponenciálisan csökkenő) komponenseket kapunk. A (6.2-3)-ban szereplő R_n ismeretlen reflexiós koefficienseket a (6.2-2) illesztési egyenletből határozhatjuk meg, s ezzel megkaphatjuk a probléma egzakt megoldását. A (6.2-3) formula jobboldalán álló tagokat a Jacobi-Anger-formula (lásd a (3.2-10) képletet) segítségével Fourier-sorba fejthetjük, s ha előírjuk, hogy minden Fourier-együttható zérus legyen, akkor természetesen a szükséges (6.2-2) peremfeltétel minden időpontra teljesül. Végeredményben az ismeretlen R_n reflexiós koefficiensekre a következő végtelen lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk (ahol J_n közönséges elsőfajú Bessel-függvény):

$$J_n(a_n + a_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{n-k}(a_n - a_k) R_k . \quad (6.2-4)$$

Ez az egyenlet teljes általánosságban csak numerikusan oldható meg pontosan. Ha $\hbar\omega \ll E_0$, akkor az a_n mennyiségek n -től való függésétől eltekinthetünk, s így a jobboldalon szereplő magmátrix Kronecker-deltával közelíthető, $J_{n-k}(0) = \delta_{n,k}$ és így $R_k \sim J_k(2a)$. Könnyen belátható, hogy ebből a közelítésből a (4.2-4) Kroll-Watson-féle formula származtatható visszaszórás esetére. A visszaszórt többfotonos áramok és a bejövő áram hányadosát normált áramkomponenseknek nevezzük:

$$j(n) \equiv \frac{p_n}{p_0} |R_n|^2 , \quad (6.2-5a)$$

ezek a valószínűségek megmaradása miatt a következő összegszabályt elégítik ki (terjedés csak $n > n_0$ indexű csatornában történik):

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} j(n) = 1 . \quad (6.2-5b)$$

A fenti összegszabály a (6.2-4) egyenlet numerikus megoldásai pontosságának ellenőrzésére is használható. A módszer részleteit [25]-ben foglaltuk össze.

A harmonikusok amplitúdójának kiszámításához ($\vec{r} \cdot \vec{E}$ -mértékben) a következő mátrixelemet kell kiszámolni:

$$\left\langle 1_{\vec{k}', \vec{\varepsilon}'} \left| \left\langle \psi \left| \left(e^{\vec{r} \cdot \vec{E}} \right) \right| \psi \right\rangle \right| 0_{\vec{k}', \vec{\varepsilon}'} \right\rangle ,$$

ahol E a kvantált (spontán megjelenő) tér elektromos térerősségvektora (ezt az első fejezet (1.1-7) képletében tetszőleges módusfüggvényekre már felírtuk), és $\vec{\varepsilon}'$ ill. \vec{k}' a megjelenő felharmonikus polarizáció egységvektora ill. hullámszámvektora. Végülis az emisszióért felelős effektív kölcsönhatási tag (síkhullámmódust véve dipólközelítésben):

$$.ie \left(\frac{2\pi\hbar\omega'}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} (\vec{\varepsilon}' \cdot \vec{r}') e^{i\omega' t} . \quad (6.2-6)$$

Tehát az átmeneti mátrixelem kiszámításának egyetlen nemtriviális lépése a $\langle \psi | \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{r}' | \psi \rangle = \varepsilon'_z \langle \psi | z | \psi \rangle$ várható érték kiszámítása. E várhatóérték tulajdonképpen az $e^{\vec{r} \cdot \vec{E}}$ dipólmomentum várhatóértéke, ennek Fourier-komponensei határozzák meg a felharmonikusok amplitúdóját.

A ψ állapot ismeretében a $\langle \psi | z | \psi \rangle$ várhatóérték, s ennek Fourier-komponensei egzaktul meghatározhatók:

$$\langle \psi | z | \psi \rangle = \langle z \rangle (t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{-in\omega t} . \quad (6.2-7)$$

ψ (6.2-3) alakját figyelembevéve a z_n mennyiségekre ($n > 1$ esetben) kapjuk:

$$z_n = \frac{\hbar^2}{L} \left\{ \begin{array}{l} -2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{J_{n-k}(a_0 - a_k) R_k}{(p_k + p_0)^2} \right] \\ + \sum_{k \neq l = -\infty}^{+\infty} \frac{J_{n+k-l}(a_k^* - a_l) R_k^* R_l}{(p_k^* + p_0)^2} + \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} \frac{J_n(-2a_k)(|R_k|)^2}{4p_k^2} \end{array} \right\} \quad (6.2-8)$$

A fenti egyenlet származtatásakor felhasználtuk, hogy

$$\int_{-\infty}^0 dz \exp(ikz) = \pi \delta(k) - iP \left(\frac{1}{k} \right),$$

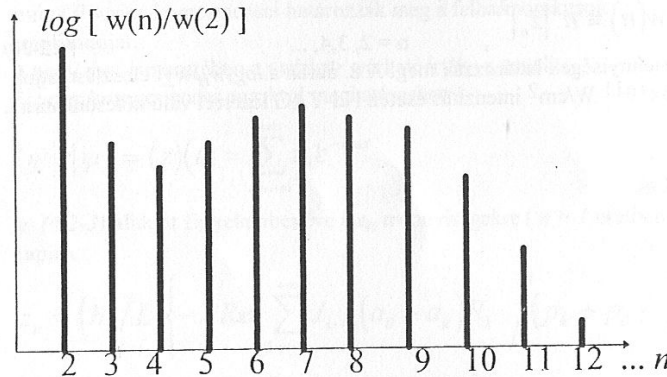
ahol P főértéke jelöl. Ha az R_n koefﬁciensek ismertek, akkor z_n pontosan meghatározható. Bevezetve a $\bar{z}_n \equiv Lk_0^2 z_n$ dimenziótlan mennyiségeket, ahol $k_0 = \frac{p_0}{\hbar}$, az egységnyi időre és egységnyi térszögre vett valószínűség az alábbi formulával adható meg:

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial t \partial \Omega} = (\varepsilon'_z)^2 \frac{e^2 \omega^3}{\hbar c 2\pi c^3} (Lk_0^2)^{-2} n^3 |\bar{z}_n|^2. \quad (6.2-9)$$

A felharmonikusok eloszlásának n -függését végülis a

$$w(n) \equiv n^3 |\bar{z}_n|^2, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (6.2-10)$$

mennyiségek határozzák meg. A 18. ábrán a $\log \frac{w_n}{w_2}$ eloszlást látjuk $5 \times 10^{11} \frac{W}{\text{cm}^2}$ intenzitás esetén Nd-YAG lézerrel való kölcsönhatásra.



18. ábra. A felharmonikusok relatív spektruma a szövegben említett paraméterek esetében.

7. Nemrelativisztikus elektron kölcsönhatása kvantált sugárzási térrel

A jelen fejezet első részében meghatározzuk az "elektron + kvantált elektromágneses sugárzási módus" rendszer Schrödinger-egyenletének megoldásait. A második részben kiszámoljuk a kvantált sugárzás jelenlétében valamelyik sztatikus potenciálon történő elektronszóródás differenciális hatáskeresztmetszetét. A kapott eredményt összevetjük a fentebb már levezetett szemiklasszikus eredménnyel.

7.1. A "nemrelativisztikus szabad elektron + kvantált módus" rendszer állapotai

Az "elektron + kvantált e.m. módus" rendszer Hamilton-operátora nemrelativisztikus esetben:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + H_f, \quad (7.1-1)$$

amely természetes módon három részre bontható

$$H = H_e + H_{ef} + H_f, \quad (7.1-1a)$$

ahol

$$H_e = \frac{p^2}{2m}, \quad H_f = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad \text{és} \quad H_{ef} = -\frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2. \quad (7.1-1b)$$

H_e és H_f az elektron ill. a tekintett ω körfrekvenciájú e.m. módus energiaoperátorai. H_{ef} a kölcsönhatást írja le. Az \vec{A} vektorpotenciál Schrödinger-képben dipól-közelítés esetén a következő alakú

$$\vec{A} = \alpha \left(\vec{\varepsilon} a + \vec{\varepsilon}^* a^+ \right), \quad \alpha \equiv c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.1-1c)$$

$L^3 = V$ a kvantálási térfogat, $\vec{\varepsilon}$ a polarizációs egységvektor, és az a, a^+ amplitúdók az $[a, a^+] = 1$ felcserélési összefüggésnek tesznek eleget. Cirkulárisan polarizált módus esetén

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\varepsilon}_1 \pm i \vec{\varepsilon}_2 \right), \quad \vec{\varepsilon}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\varepsilon}_1 \mp i \vec{\varepsilon}_2 \right), \\ \varepsilon^2 &= 0 = \varepsilon^{*2}, \quad \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon} = 1 \end{aligned} \quad (7.1-1d)$$

s ezért a H_{ef} -ben szereplő A^2 -et tartalmazó tag beolvasztható a H_f módusenergiába:

$$H_f + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 = \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad (7.1-1e)$$

ahol

$$\Omega = \omega \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right), \quad \omega_p^2 \equiv \frac{4\pi e^2}{mL^3}. \quad (7.1-1f)$$

Megjegyezzük, hogy ω_p azonosítható az $\frac{1}{L^3} = \frac{1}{V}$ sűrűségű elektrongáz plazmafrekvenciájával. Lineáris polarizáció esetén ε valós és $\varepsilon^2 = 1$. Ekkor az A^2 -et tartalmazó tagban megmaradnak az a^2 - ill. az a^{+2} -tel arányos járulékok. Összefoglalva:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot \left(\vec{\varepsilon} a + \vec{\varepsilon}^* a^+ \right), \quad (7.1-2C)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} (a + a^+) + \frac{e^2 \alpha^2}{2mc^2} (a^2 + a^{+2}) \quad (7.1-3L)$$

A rövidség kedvéért a (7.1-2C)-ben felírt Hamilton-operátor diagonalizálásával foglalkozunk részletesen.

A

$$H |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} \quad (7.1-4)$$

Schrödinger-egyenletnek nyilvánvalóan vannak stacionárius megoldásai, mivel H nem függ az időtől.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} |\psi\rangle, \quad (7.1-4a)$$

ahol a megfelelő energiasajátérték-egyenlet:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (7.1-4b)$$

Mivel a H a térkoordinátáktól is független, természetes a megoldást a következő alakban keresni:

$$|\psi\rangle = |\vec{p}\rangle |\chi\rangle, \quad (7.1-4c)$$

ahol $|\vec{p}\rangle$ az elektron egy impulzussajátállapota és $|\chi\rangle$ a kvantált módus alább meghatározandó állapota, amely a következő egyenlet megoldása:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot (\vec{\varepsilon} a + \vec{\varepsilon}^* a^+) \right] |\chi\rangle = E |\chi\rangle. \quad (7.1-5)$$

A fenti egyenletben szereplő kölcsönhatási tagot az első fejezetben már megismert eltolási operátor felhasználásával ki tudjuk transzformálni, ezzel a diagonalizálás egyszerűen végrehajtható. Alkalmazzuk a

$$D(\sigma) = \exp[\sigma^* a - \sigma a^+] \quad (7.1-6)$$

generátorú unitér transzformációt a fenti egyenletre. Itt σ egyelőre ismeretlen paraméter. A következő

$$D(\sigma)^{-1} a D(\sigma) = a + \sigma, \quad D(\sigma)^{-1} a^+ D(\sigma) = a^+ + \sigma^* \quad (7.1-6a)$$

eltolási tulajdonságok felhasználásával a transzformált egyenletre kapjuk:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} + |\sigma|^2 \right) + (\hbar\Omega\sigma^* - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}) a \right. \\ \left. + (\hbar\Omega\sigma - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}^*) a^+ - (\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} \sigma + \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}^* \sigma^*) \frac{e\alpha}{mc} \right] D(\sigma)^{-1} |\chi\rangle = ED(\sigma)^{-1} |\chi\rangle \quad (7.1-7a)$$

Ezután válasszuk σ -t úgy, hogy a fenti egyenlet baloldlalan a és a^+ együtthatói zérusok legyenek:

$$\sigma = \frac{e\alpha}{mch\Omega} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}^*. \quad (7.1-7b)$$

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} - |\sigma|^2 \right) \right] D(\sigma)^{-1} |\chi\rangle = ED(\sigma)^{-1} |\chi\rangle \quad (7.1-7c)$$

Világos, hogy (7.1-7c) egyenlet a

$$D(\sigma)^{-1} |\chi\rangle = |n\rangle \quad (7.1-7d)$$

fotonszám-sajátállapotokkal kielégíthető, mivel

$$a^+ a |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

és az energiasajátértékekre ekkor az alábbi kifejezés adódik:

$$E = E(\vec{p}, n) \equiv \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} - |\sigma|^2 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1-7e)$$

A fenti eredményeket összegyűjtve a (7.1-4) Schrödinger-egyenlet stacionárius megoldásait a következőképpen állítjuk elő:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E(\vec{p}, n)t\right] |\vec{p}\rangle D(\sigma) |n\rangle. \quad (7.1-8)$$

$D(\sigma)$ unitaritása miatt a (7.1-8)-ban megadott megoldásrendszer teljes és ortonormált. Az első fejezet (1.3-5a) képlete szerint $D(\sigma)$ a σ paraméterű $|\sigma\rangle$ koherens állapot keltő operátora, ezért (7.1-7e) és (7.1-8) alapján megállapíthatjuk, hogy rögzített \vec{p} esetén a rendszer legalacsonyabb energiájú állapotában ($n = 0$) az e.m. módus koherens állapotban van.

A teljesség kedvéért itt csak bizonyítás nélkül közöljük, hogy a lineáris polarizációjú módushoz tartozó (7.1-3L) Hamilton-operátor az

$$S(\theta) = \exp \left[-\frac{\theta}{2} (a^{+2} + a^2) \right], \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{e^2 \alpha^2}{mc^2 \hbar \Omega} \quad (7.1-9)$$

Bogoljubov-transzformációval (amely melleleg az összenyomás, "squeezing" generátora) az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} H \rightarrow H' &= S(\theta)^{-1} H S(\theta) = \\ &= \frac{p^2}{2m} + \hbar \Omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \sec h 2\theta - \frac{e\alpha}{mc} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} (a + a^+) e^{-\theta}. \end{aligned} \quad (7.1-10)$$

(7.1-10) ugyanolyan struktúrájú, mint (7.1-3L), tehát diagonalizálása az imént bemutatott D -transzformációs módszerrel történhet [14]. A (7.1-8) megoldásokban szereplő $D(\sigma)|n\rangle$ állapotokat általánosított koherens állapotoknak nevezzük tetszőszerinti $n > 0$ egész értékre. Természetes, hogy ezek az állapotok is kifejezhetők számsajátállapotok szerint:

$$D(\sigma)|n\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} c_r |r\rangle, \quad c_r = \langle r | D(\sigma) | n \rangle. \quad (7.1-11)$$

Mivel $D(\sigma)$ unitér, ezért $|c_r|^2$ valószínűségeloszlás normált. c_r -ek konkrét alakját a Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)-formula segítségével kaphatjuk meg, amely szerint ha az A és B operátorok kommutatóikkal felcserélhetőek, akkor érvényes a következő összefüggés:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

$D(\sigma)$ ennek figyelembevételével az $e^{\sigma a^+} e^{-\sigma^* a} e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}$ alakra hozható, s ezután az $(\langle r | e^{\sigma a^+}) (e^{-\sigma^* a} | n \rangle)$ mátrixelemek véges összegek formájában meghatározhatók. Ezek kifejezhetők az általánosított (más szóval: asszociált) Laguerre-polinomokkal:

$$\begin{aligned} c_r &= \langle r | D(\sigma) | n \rangle = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n!}{r!} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{r-n} L_n^{r-n}(|\sigma|^2) e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}, \quad (r > n) \\ \left(\frac{r!}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} (-\sigma^*)^{n-r} L_r^{n-r}(|\sigma|^2) e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}, \quad (r < n) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (7.1-12a)$$

Általában az $L_n^\alpha(x)$ polinomok a következőképpen állíthatók elő [7]:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{l=0}^n \binom{n+\alpha}{n-l} \frac{(-x)^l}{l!}. \quad (7.1-12b)$$

A $|c_r|^2$ eloszlás alacsonyrendű momentumai a (7.1-12a) konkrét alakok ismerete nélkül is kiszámíthatók, ha felhasználjuk a (7.1-6a)-ban megadott eltolási tulajdonságokat. Például:

$$\langle r \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} |c_r|^2 r = \langle n | D(\sigma)^{-1} a^+ a D(\sigma) | n \rangle = n + |\sigma|^2, \quad (7.1-13a)$$

$$\Delta r^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = 2|\sigma|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.1-13b)$$

A fentiek szerint egy kezdetben éles eloszlás ($|c_r|^2 = \delta_{r,n}$) az elektronnal való kölcsönhatás következtében $|\sigma| \sqrt{2n+1}$ mértékében szétfolyik, és centruma $|\sigma|^2$ -tel eltolódik.

A továbbiakban szempontjából érdekes az az eset amely során a kezdeti fotonszám nagyon nagy (a módus igen magas gerjesztettségű állapotban van; tehát a sugárzás nagyon intenzív). Ekkor c_r -ek (7.1-12a) kifejezéseit a Laguerre-polinomokra vonatkozó Hilb-formula segítségével értékelhetjük ki. Eszerint [7]

$$x^{\frac{m}{2}} L_n^m(x) e^{-\frac{x}{2}} = \frac{(n+m)!}{(n+\frac{m+1}{2})!} J_m \left[(\nu x)^{\frac{1}{2}} \right] + O \left(n^{-\frac{3}{4}} \right), \quad (7.1-14)$$

ahol $\nu = 4n + 2m + 2$, és J_m közösleges elsőfajú m -edrendű Bessel-függvény.

(7.1-12a) és (7.1-14) c_r -eket az $r > n$ esetben így írhatjuk:

$$\begin{aligned} c_r &= \langle r | D(\sigma) | n \rangle = & (7.1-15) \\ &= e^{im\chi} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2n}{2n+m+1} \right)^{\frac{m}{2}} J_m \left[(\nu x)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{O \left(n^{-\frac{3}{4}} \right)}{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ahol

$$m \equiv r - n > 0, \quad x \equiv |\sigma|^2, \quad \nu \equiv 4n + 2m + 2, \quad \chi \equiv \arg \sigma. \quad (7.1-15a)$$

Hasonló formula érvényes, ha $r < n$. Fentebb már láttuk, hogy $|\sigma|^2$ arányos $\frac{1}{V}$ -vel, vagyis a kvantálási térfogat reciprokával. (7.1-15)-ben tehát a Bessel-függvénye argumentuma arányos a foton-sűrűség ($\frac{n}{V}$) várható értékének négyzetgyökével. (7.1-15) alapján $c_{n \pm m}$ -et egzaktul kiértékelhetjük az $n \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ határesetben, ha a $\rho \equiv \frac{n}{V}$ foton-sűrűséget és $m = |r - n|$ -et a határértékképzés során állandónak tartjuk.

$$\begin{aligned} \lim c_{n \pm m} &= e^{\pm im\chi} J_{\pm m}(|\varsigma|), & (7.1-16) \\ n \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \rho &= \frac{n}{V}, \quad m \text{ fix} \end{aligned}$$

ahol

$$\varsigma \equiv 2 \frac{ea_0}{m\hbar\omega} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}, \quad a_0 \equiv \frac{c}{\omega} (2\pi\rho\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}, \quad \chi \equiv \arg \varsigma. \quad (7.1-16a)$$

Megjegyezzük, hogy az $\vec{A} = a_0 (\vec{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{\varepsilon}^* e^{i\omega t})$ klasszikus vektorpotenciállal jellemzett elektromágneses sugárzási tér energiasűrűsége (7.1-16a) alapján éppen $\rho\hbar\omega$. A fenti \vec{A} vektorpotenciállal az

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right)^2 \varphi(t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \quad (7.1-17)$$

szemiklasszikus Schrödinger-egyenlet persze egyszerűen megoldható, amint azt már fentebb láttuk. A megoldás modulált síkhullám, s a modulációs faktort a szokásos módon a Jacobi-Anger-formula segítségével Fourier-sorba fejthetjük (lásd a (3.2-9-C) formulát). Végeredményben a $D(\sigma) |n\rangle$ állapot a fenti határesetben a következő kompakt alakra hozható:

$$D(\sigma) |n\rangle \rightarrow \sum_m J_m(|\varsigma|) e^{im\chi} |n+m\rangle. \quad (7.1-18)$$

A fenti megfeleltetéseket figyelembevéve azonnal belátható, hogy az előbbi egyenletben szereplő kifejtési együtthatók pontosan meggyeznek a (3.2-12-C) egyenletben szereplő Fourier-koefficiensekkel.

7.2. Többfotonos indukált fékezési sugárzás kvantált e.m. térben

A 4. fejezetben kiszámítottuk egy $V(\vec{r})$ hatására intenzív fény jelenlétében bekövetkező elektronszórás differenciális hatáskeresztmetszetét. Megállapítottuk, hogy az átmeneti amplitúdó végtelen sok parciális amplitúdó inkohérens szuperpozíciójaként állítható elő, s minden egyes ilyen amplitúdó a Dirac-deltákkal kifejezett rezonancia-feltételt kielégítő szórásfolyamathoz tartozik. A

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + n\hbar\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.2-1)$$

rezonanciafeltétel értelmezésekor azt állítottuk, hogy n foton abszorpciójához ill. emissziójához tartozó energiamegmaradást fejez ki, holott a lézerefény klasszikus vektorpotenciállal jellemeztük. Az előbbi rész alapján könnyen belátható, hogy ez az interpretáció jogos volt. Ennek érdekében vegyünk most kezdeti és végállapotnak (7.1-8) típusú stacionárius állapotokat (amelyek - legalábbis egy kvantált módussal való kölcsönhatás esetén, dipólközelítésben - teljesen egzaktak). A $V(\vec{r})$ potenciál hatására a

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E(\vec{p}, n)t\right] |\vec{p}\rangle D(\sigma) |n\rangle, \quad (7.2-2a)$$

kezdeti és a

$$|\Psi'(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E(\vec{p}', n')t\right] |\vec{p}'\rangle D(\sigma') |n'\rangle \quad (7.2-2b)$$

végállapotok közötti átmenet amplitúdója Born-közelítésben

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \Psi'(t) | V(\vec{r}) | \Psi(t) \rangle. \quad (7.2-3a)$$

Az idő szerinti integrálás elvégzése után kapjuk:

$$T_{fi} = -2\pi i \delta[E(\vec{p}', n') - E(\vec{p}, n)] \langle \vec{p}' | V(\vec{r}) | \vec{p} \rangle \langle n' | D^{-1}(\sigma') D(\sigma) | n \rangle. \quad (7.2-3b)$$

A Dirac-delta itt az alábbi energiamegmaradást fejezi ki:

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega \left(n - n' - (|\sigma|^2 - |\sigma'|^2) \right). \quad (7.2-3c)$$

Mivel az e.m. módusnak sem a kezdeti sem a végállapota nem fotonszám sajátállapot, ezért (7.2-3c)-t nem interpretálhatjuk úgy, hogy a módus foton tartama a szórásfolyamat során n -ről n' -re változott, azonban a megfelelő fotonszám várható értékekre az állítás már lényegében igaz.

A (7.2-3b) eredmény ismeretében a folyamat differenciális hatáskeresztmetszete a szokásos módon kiszámítható:

$$\frac{d\sigma_{\pm l}}{d\Omega} = \frac{p'}{p} |M_{\pm l}(n)|^2 \frac{d\sigma_B}{d\Omega}, \quad (7.2-4)$$

ahol

$$M_{\pm l}(n) \equiv \langle n \pm l | D(-\sigma') D(\sigma) | n \rangle, \quad l \equiv |n' - n|. \quad (7.2-4a)$$

A Born-féle keresztmetszetet már (4.2-3)-ban definiáltuk.

Az M mennyiséget a D operátorok szorzási szabálya alapján az alábbi alakra hozhatók:

$$M_{\pm l}(n) = \langle n \pm l | D(\tau) | n \rangle e^{i \text{Im}(\sigma' \sigma^*)}, \quad (7.2-4b)$$

$$\tau \equiv \sigma - \sigma' = \frac{e\alpha}{mc\hbar\Omega} \vec{\varepsilon}^* \cdot (\vec{p} - \vec{p}').$$

Ezek a mátrixelemek - amint azt az előző részben láttuk - Laguerre-polinomokkal fejezhető ki, pl. az $n' > n$ esetben:

$$M_l(n) = \left(\frac{n!}{(n+l)!} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^l L_n^l(|\tau|^2) \exp \left[-\frac{1}{2} |\tau|^2 + i \operatorname{Im}(\sigma' \sigma^*) \right]. \quad (7.2-5)$$

A Hilb-féle formula használatával (amint azt már az előző részben tettük) az M mátrixelemek a szemiklasszikus határesetben a Bessel-függvényekkel hozhatók kapcsolatba (ha $\frac{n}{\nu}$ és l rögzített):

$$\lim M_{\pm l}(n) = J_{\pm l}(|Z|) e^{\pm i l \chi}, \quad (7.2-6)$$

ahol

$$Z = 2 \frac{e a_0}{m c \hbar \omega} \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{p} - \vec{p}'), \quad \chi = \arg Z. \quad (7.2-6a)$$

Ezek figyelembevételével megállapíthatjuk, hogy ha a kezdeti fotonszám igen nagy, akkor a (7.2-4) formula igen jó közelíthető a

$$\frac{d\sigma_{\pm l}}{d\Omega} = \frac{p'}{p} J_l^2(|Z|) \frac{d\sigma_B}{d\Omega}. \quad (7.2-7)$$

Ez formailag tökéletesen megegyezik a szemiklasszikus eredménnyel.

8. Az intenzív lézerfény és elektron relativisztikusan kovariáns leírásának elemei

8.1. Az elektron mozgásegyenletének relativisztikus tárgyalása. Kanonikus formalizmus

Az elektron mozgásegyenlete az \vec{E} elektromos térerősséggel és \vec{B} mágneses indukcióval jellemzett elektromágneses térben rövid számolással a következő alakra hozható:

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{e}{c} \left(u_0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right), \quad u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad d\tau \equiv dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{r}}{cdt} \right)^2} \equiv dt \gamma, \quad (8.1-1a)$$

ahol bevezettük az $u = \{u^\mu\} = (u_0, \vec{u})$ négyessebbséget, amely az $x = \{x^\mu\} = (ct, \vec{r})$ négyeskoordinátának a τ sajátidő szerinti deriváltja. A μ index a 0, 1, 2 és 3 értéket veheti fel. Egyszerűen származtatható a relativisztikus munkatétel is:

$$m \frac{du_0}{d\tau} = \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{E}, \quad (8.1-1b)$$

amely szerint a részecske $m c u_0 = \gamma m c^2$ energiájának időegységre eső megváltozása egyenlő a rá ható $e \vec{E}$ elektromos erő $e \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ teljesítményével. A (8.1-1a, 8.1-1b) egyenleteket szokás az alábbi kovariáns alakban összefoglalni, az $F = \{F_{\mu\nu}\}$ térerősségtenzor bevezetésével:

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right). \quad (8.1-1c)$$

A fenti egyenletben bevezettük még az $A = \{A_\mu\}$ négyespotenciált és a $\partial = \{\partial_\mu\}$ négyes-gradiens is, ahol $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla}$ a szokásos (hármás-) gradiens. A Minkowski-tér (+ - - -) szignatúrájú η metrikus tenzorát használjuk, tehát

$$\eta_{00} = -\eta_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (8.1-1d)$$

Egy $\{\alpha^\mu\}$ négyesvektor kovariáns és kontravariáns komponensei között az $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$ kapcsolat érvényes (ismétlődő alsó és felső indexekre mindig összegzés értendő). Két tetszőleges a és b négyesvektor skalárszorzata:

$$a \cdot b \equiv \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad a^2 \equiv a \cdot a. \quad (8.1-1e)$$

Először egy általános közelítő egyenletet vezetünk le, amely alapján az elektron ‘átlagos’ mozgására vonatkozó következtetéseket vonhatunk le. Ha felírjuk a (négyes) vektorpotenciál sajátidő szerinti totális deriváltját az elektron trajektóriája mentén, valamint ha figyelembe vesszük a térerősség tenzornak a (8.1-1c) egyenletbeli általános kifejezését, akkor az eredeti mozgásegyenletből a következőt kapjuk:

$$\frac{dA_\mu(x(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = \partial_\nu A_\mu u^\nu, \quad m \frac{d}{d\tau} \left[u_\mu + \frac{e}{mc} A_\mu(x(\tau)) \right] = \frac{e}{c} [\partial_\mu A_\nu]_{x=x(\tau)} u^\nu. \quad (8.1-2a)$$

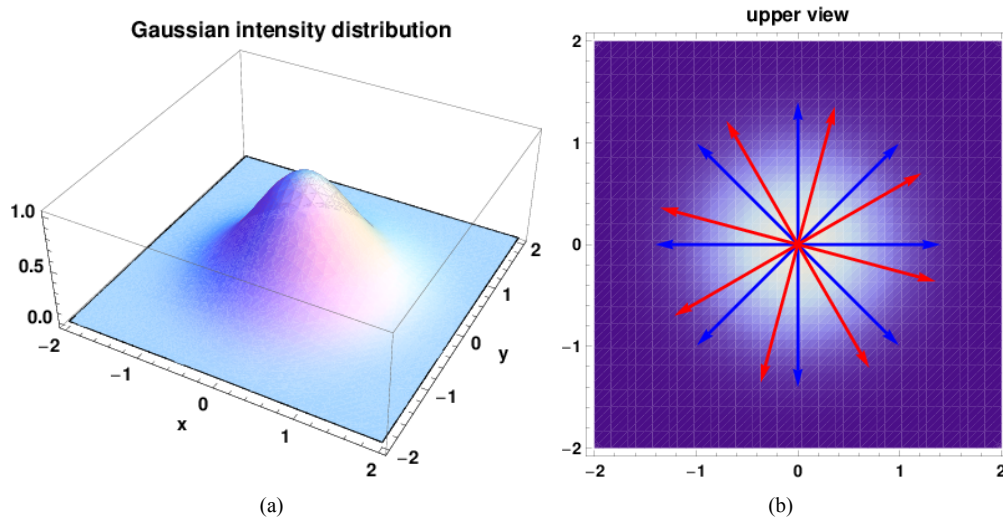
A vektorpotenciál és a sebesség fenti kombinációja tehát természetes módon megjelenik (itt tulajdonképpen a kinetikus és a kanonikus impulzus kapcsolatáról van szó), s ezért indokolt erre egy új V_μ sebességváltozót bevezetni, s ezzel (8.1-2a) alapján írhatjuk:

$$m \frac{dV_\mu}{d\tau} = -\frac{e^2}{mc^2} A^\nu (\partial_\mu A_\nu) + \frac{e}{c} V^\nu (\partial_\mu A_\nu), \quad mV_\mu \equiv mu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu. \quad (8.1-2b)$$

Ha felhasználjuk az $A^\nu (\partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{2} \partial_\mu (A^2)$ azonosságot, ahol a fenti rövidített jelöléssel $A^2 \equiv A^\nu A_\nu = A_0^2 - \vec{A}^2$, akkor a jobboldal első tagja a (8.1-2b) egyenletben a $-\frac{e^2 A^2}{2mc^2}$ ponderomotoros potenciális energiaeloszlás négyesgradienseként értelmezhető, amelyet természetesen az elektron (vagy más töltött részecske) aktuális helyén kell venni. Hangsúlyozzuk, hogy eddig a pontig a (8.1-2b) egyenlet származtatásakor semmilyen közelítést nem használtunk, ugyanakkor több érdekes speciális eset egyszerű megértésében segíthet. Ha például egy lézernyaláb a vivőfrekvenciának megfelelő periódusidőnél (és a centrális hullámhossznál) viszonylag nagyobb téridőtartományban oszlik el akkor $\langle V \rangle \approx \langle u \rangle$ és $\langle V \cdot A \rangle \approx 0$, ahol a szögletes zárójellel a gyors oszcillációkra vett átlagolást jelöltük. Ebben az esetben az átlagos (szisztematikus, haladó) mozgás jó közelítéssel leírható az alábbi differenciálegyenletekkel:

$$m \frac{d\langle V_\mu \rangle}{d\tau} = -\frac{e^2}{2mc^2} \partial_\mu \langle A^2 \rangle, \quad m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -\vec{\nabla} U_p, \quad U_p = \frac{mc^2}{4} \mu_0^2 g(\vec{r}), \quad \mu_0 \equiv \frac{eF_0}{mc\omega_0}, \quad (8.1-2c)$$

ahol μ_0 a centrális frekvenciához tartozó már megismert dimenziótlan intenzitásparaméter, és $g(\vec{r})$ valamilyen lassan változó intenzitásprofil (amelynek maximális értéke 1 a nyaláb közepén). A (8.1-2c) egyenlet második egyenlete az első speciális nemrelativisztikus közelítéseként adódott, ahol \vec{v} a szokásos (három-) sebesség. Az U_p mennyiséget röviden **ponderomotoros potenciálnak** szokás nevezni, maximális értéke a $1.25 \times 10^{13} \frac{I}{E_{ph}^2}$ képlet alapján számolható, ahol az I intenzitás $\frac{W}{cm^2}$ -ben értendő, és az E_{ph} centrális fotonenergia eV egységekben. Például $\hbar\omega_0 = 1 eV$ és $I = 10^{14} \frac{W}{cm^2}$ esetén ez az energijárulék $12.5 eV$, vagyis több mint tízszerese a fotonenergiának. Lényeges, hogy U_p nem függ a töltés előjelétől, mivel annak négyzetével arányos, és negatív gradiense (vagyis az átlagos erő) a csökkenő intenzitásértékek felé (tehát a nyaláb tengelyétől a pereme felé) hat. Ez azt jelenti, hogy mondjuk egy plazma ionjainak és elektronjainak eredetileg homogén eloszlásába egy kellően intenzív lézernyaláb átmenetileg lyukat’ égethet, úgy hogy a töltéseloszlást szétnyomja. Régebben felvetődött ennek a mechanizmusnak a felhasználása egyfajta lézeres részecskegyorsításra is. Az átlagos ponderomotoros potenciál hatását a 9. Ábrán szemléltetjük. Másik példaként említhetjük a 2.5 fejezetben látott csúcslézerjelenségével kapcsolatos jelenséget. Az ionizációkor születő elektronok egy lézernyaláb különböző helyein más és más ponderomotoros potenciálban vannak, és a szükséges minimálisan abszorbeált fotonok száma az $n\hbar\omega_0 > A + U_p$ feltételből adódik, ahol a ΔE_2 megegyezik az adott helyen lévő U_p ponderomotoros potenciális energia értékével. A távozó elektron kinetikus energiája $n\hbar\omega - A - U_p > 0$, s amint a detektor felé halad, mintegy leszánkázik’ a jó közelítéssel konzervatívnak vehető $U_p(\vec{r})$ ponderomotoros potenciálh egy oldalán, s így éppen energiát nyer a nyalábtól való teljes szeparáció során. Ezt a jelenséget figyelembe kell venni az elektronspektrumok kiértékelésénél.



19. ábra. A baloldali ábra a z -tengelyű lézernyaláb intenzitás eloszlását szemlélteti Gauss típusú transzverzális profil esetében. A jobboldali ábrán a pozitív és negatív töltéseknek a nyaláb tengelyétől (a ponderomotoros potenciális energia negatív gradiense, vagyis taszítása miatt fellépő) kifelé irányuló gyorsulását piros és kék vektorok szimbolizálják.

Az fény-anyag kölcsönhatás kvantummechanikai leírására leggyakrabban használt módszer a kanonikus formalizmuson alapul egyszerűen azért, mert a kvantálást kölcsönhatás nélkül is már eleve a kanonikusan konjugált változókra értelmezzük. Ennek következtében az állapotfüggvény Schrödinger- vagy Dirac egyenlete tartalmazza a Hamilton-operátort, amely a rendszer energiáját képviseli. Már az intenzív lézerterek elektrodinamikájának kialakulása kezdetén, vagyis a 60-as évek első felétől jól ismert, hogy a Volkov-állapotok (vagyis a teszőleges síkhullámmal (vákumban) kölcsönható töltések állapotfüggvénye lényegében kváziklasszikus hullámfüggvény, akár nemrelativisztikus, akár relativisztikus leírást használunk. Ez azt jelenti, hogy a hullámfüggvény fázisa pontosan megegyezik $-\frac{iS}{\hbar}$ -sal, ahol S a klasszikus probléma hatásfüggvénye. Ezért most megvizsgáljuk közelebbről a relativisztikus határfüggvényt, amelyet a megfelelő Hamilton-Jacobi-egyenletből határozzunk meg.

Egy $A(x)$ négyespotenciállal jellemzett elektromágneses térben valamely e töltésű részecske relativisztikus Lagrange-függvénye (lásd a (8.1-1e) egyenletben összefoglalt jelöléseket):

$$L(x, \dot{x}) = -mc\sqrt{\dot{x}^2} - \frac{e}{c}A \cdot \dot{x}, \text{ ahol } \dot{x}_\mu \equiv \frac{dx_\mu}{dt}. \quad (8.1-3)$$

A részecske teljes energiája:

$$E = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + eA_0, \quad (8.1-4a)$$

amely vonatkoztatási rendszerenként más és más. Azonban a p kanonikus négyesimpulzussal kifejezett következő mennyiség minden rendszerben zérus:

$$H \equiv \dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{d\tau}{dt} \left[mc^2 - \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}A \right) \cdot \left(p - \frac{e}{c}A \right) \right] = 0, \quad p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}. \quad (8.1-4b)$$

Megjegyezzük, hogy a (8.1-4b) egyenletben definiált relativisztikus kanonikus impulzus térbeli komponenseinek konkrét alakja a következőképpen írható:

$$p_\mu = -mc \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} - \frac{e}{c} A^\mu, \text{ tehát } p^i = mc \frac{v^i}{c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \frac{e}{c} A^i, m\vec{u} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (8.1-4c)$$

Az utolsó egyenletet (8.1-2b)-vel összehasonlítva látjuk, hogy a kanonikus impulzus az ott bevezetett 'szisztematikus sebesség'-gel arányos: $\vec{p} = m\vec{V}$. (8.1-4b) első egyenletéből az következik, hogy a $p = \frac{\partial S}{\partial x} \equiv \partial S$ és $X = \frac{\partial S}{\partial P}$ alakú kanonikus transzformáció $S = S(x, P)$ generátorfüggvénye kielégíti a relativisztikus Hamilton-Jacobi-egyenletet:

$$\left(\partial S - \frac{e}{c} A\right) \cdot \left(\partial S - \frac{e}{c} A\right) = (mc)^2. \quad (8.1-5)$$

Síkhullámtérben a vektorpotenciál funkcionális alakja $A = A(k \cdot x)$, ahol $\{k^\mu\} = (k_0, \vec{k})$, $k_0 = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$ és $k \cdot x = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$. Ilyen potenciál esetében, ha a (8.1-5) elsőrendű parciális differenciálegyenlet megoldását az $S = P \cdot x + f(\xi)$ alakban keressük, ahol P konstans és $\xi \equiv k \cdot x$, akkor a megoldás azonnal, egyszerű integrálással adódik. A megoldás kulcseleme az a felismerés, hogy a vákuumbeli diszperziós összefüggés miatt $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = 0$, valamint teljesül a $k \cdot A \equiv k_\mu A^\mu = 0$ transzverzalizációs feltétel is. (Ez utóbbi Coulomb-mértékben a $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ alakban írható.) Az $S = P \cdot x + f(\xi)$ „Ansatz”-ot a (8.1-5) egyenletbe helyettesítve $f(\xi)$ -re egy elsőrendű differenciálegyenlet adódik, s ezt közvetlenül kiintegrálhatjuk:

$$S = P \cdot x + \frac{1}{2k \cdot P} \int_{\xi=k \cdot x} d\xi \left[2 \frac{e}{c} P \cdot A(\xi) - \left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2(\xi) \right], P^2 \equiv P_\mu P^\mu = (mc)^2, \quad (8.1-6a)$$

$$\{P_\mu\} = \left(\frac{E_P}{c}, \vec{P} \right), E_P = \sqrt{(c\vec{P})^2 + (mc^2)^2}. \quad (8.1-6b)$$

Megjegyezzük, hogy a $P^2 = (mc)^2$ összefüggés fennállásakor azt szokás mondani, hogy a P integrációs konstans a „szabad tömeghéjon” van (angol kifejezéssel: „free mass-shell”), mivel kielégíti a szabadelektron relativisztikus energia-impulzus összefüggését ((8.1-6b) egyenlet). A 2.3 fejezetben láttuk, hogy a síkhullám argumentuma $\xi \equiv k \cdot x = \omega \left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)$ az elektron helyén az elektron sajátidejének lineáris függvénye, vagyis $t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}(t) = \alpha\tau + const$, s ez általánosan igaz tetszőleges (tehát nem csak monokromatikus) síkhullámra. A fenti formulák minden további bonyodalom nélkül alkalmazhatók például polikromatikus általános szuperpozíciókra is, amelyek elliptikusan polarizáltak. A lényeges az, hogy az összes komponens polarizációs vektora merőleges legyen a közös \vec{n} terjedési irányra, és hogy a téridő-koordinátáktól való függés kizárólag a $t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}$ kombinációt tartalmazza. Az előbbi megfontolásokban szereplőtől lényegesen eltérő matematikai szerkezettel találkozunk azonban ha például állóhullámokkal való kölcsönhatást szeretnénk leírni (itt mind a $t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}$, mind a $t + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}$ kombináció előfordul, és elliptikus integrálok jelennek meg S kifejezésében). Az $X = \frac{\partial S}{\partial P}$ összefüggésből (8.1-6b) alapján kapjuk:

$$X = x_p(\tau) + (k \cdot p)^{-1} \int_{k \cdot x} d\xi \frac{e}{c} A(\xi) - k (k \cdot p)^{-2} \int_{k \cdot x} d\xi \left[\frac{e}{c} p \cdot A - \left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2 \right] = x_{(0)} + \frac{p\tau}{m}, \quad (8.1-7a)$$

$$p(\tau) = p + \frac{k}{2k \cdot p} \left[2 \frac{e}{c} p \cdot A - \left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2 \right]. \quad (8.1-7b)$$

A utóbbi egyenletekben, a jelölés kissé áttekinthetőbbé tétele érdekében a (8.1-6a, 8.1-6b)-ben szereplő integrációs paramétert itt kis p -vel jelöltük, tehát $p^2 = (mc)^2$. A (8.1-7a) egyenlet az $x_p(t)$ trajektóriára valóban egy bonyolult függvényegyenlet, a részletes alakra azonban a következőkben nem lesz szükségünk. Közeliítőleg

monokromatikus esetben (vagyis ha A egyszerű szinusos függést tartalmaz és a burkolófüggvény gyakorlatilag konstansnak vehető) a (8.1-7b) egyenlet átlagát véve egy periódusra egyszerűen adódik az négyesimpulzus átlaga:

$$\tilde{p} = p + \frac{mc^2\mu^2}{4k \cdot p} k \equiv p + \Delta p, \quad \mu = \frac{eF_0}{mc\omega}, \quad \mu^2 = 8.5 \times 10^{-11} I \lambda^2, \quad (8.1-7c)$$

ahol μ a már korábban megismert dimenziótlán intenzitásparaméter, és az intenzitást $\frac{W}{cm^2}$ -ben a hullámhosszat pedig mikronban mérjük. A (8.1-7c) formula tartalmazza a 11. ábrán bemutatott optikailag indukált szintszerkezetben szereplő eltolódást (a második tag időszerű komponense ΔE_2 -be megy át a nemrelativisztikus határesetben). Az impulzus egy \vec{k} -val arányos intenzitásfüggő eltolódást szenved a relativisztikus tartományban, ez a körülmény az intenzív Compton-szórás részleteit jelentősen befolyásolhatja. Megjegyezzük még, hogy a $k \cdot k = 0$ nullvektor-tulajdonság következtében $k \cdot \tilde{p} = k \cdot p$, ez az egyenlet felhasználható arra, hogy a 'felöltöttet' impulzusból az eredeti impulzust kiszámoljuk.

A klasszikus megoldással való szoros kapcsolata miatt, végezetül ide kívánczik a Klein-Gordon-egyenlet megoldásának rövid ismertetése is. Egy $A(x)$ négyespotenciállal jellemzett külső térben az elektron **Klein-Gordon-egyenlete** a következő:

$$(\Pi^2 - \kappa^2) \phi = 0, \quad \kappa \equiv \frac{mc}{\hbar}, \quad \Pi \equiv i\partial - \varepsilon A, \quad \varepsilon \equiv \frac{e}{\hbar c}, \quad (8.1-8)$$

ahol κ a Compton-hullámszám, és $\hbar\Pi$ a **kinetikus négyesimpulzus operátora**. Mint később látni fogjuk a 'skalár elektron' fenti hullámegyenlete a másodrendű Dirac-egyenlet egy közelítése, ha a spinnel való kölcsönhatásból eredő tagot elhagyjuk. Ez sok esetben fizikailag is elfogadható közelítés.

A lézerefény jellemzésére a Coulomb-mértékbeli vektorpotenciált használjuk, és $A(x)$ transzverzális síkhullámot jelent, vagyis $A(x) = A(\xi)$, $\xi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ és $k \cdot A = 0$, pontosan úgy mint a fenti klasszikus (nem-quantumos) leírásban. E tulajdonságok alapján egyrészt az adódik, hogy $\Pi^2 = (i\partial)^2 - 2\varepsilon A \cdot i\partial + \varepsilon^2 A^2$, másrészt kézenfekvőnek látszik a megoldást egy ξ -től függő modulált síkhullám formájában felvenni, azaz

$$\phi_p(x) \sim \exp[-i(p \cdot x + f_p(\xi))].$$

Ezt a (8.1-8) Klein-Gordon-egyenletbe behelyettesítve f_p -re az alábbi egyszerű egyenletet kapjuk:

$$\frac{df_p}{d\xi} = \frac{1}{2k \cdot p} [\varepsilon p \cdot A - \varepsilon^2 A^2] \equiv I_p(\xi), \quad f_p(\xi) = \int d\xi I_p(\xi), \quad \phi_p(x) \sim \exp\left[-\frac{i}{\hbar} S_p(x)\right]. \quad (8.1-9)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott megoldás exponensében (lásd (8.1-9) harmadik összefüggését) pontosan a klasszikus hatásfüggvény szerepel, amelyet már a (8.1-6a) egyenletben megkaptunk. Itt tehát a kváziklasszikus (WKB-) közelítés valójában egzakt. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tömörség érdekében célszerű az impulzus helyett a hullámszámot bevezetni ($p \rightarrow \frac{p}{\hbar} \rightarrow \equiv p$), amint ezt a fenti kvantummechanikai formulákban is tettük. Kissé hosszadalmas számolással megmutatható [14], hogy a megfelelően normált **pozitív energiás megoldások** (ha a p impulzus a pozitív tömeghéjon van, vagyis: $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + \kappa^2}$) alakja:

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2p_0)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-i\left(p \cdot x + \int^{\xi=k \cdot x} d\xi' I_p(\xi')\right)\right]. \quad (8.1-10a)$$

Ezek a megoldások a következő **ortogonalitási összefüggést** elégítik ki:

$$\int d^3x \phi_p^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{p'}(x) = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \text{ahol } f \overleftrightarrow{\partial}_0 g \equiv f \frac{\partial g}{\partial x_0} - \frac{\partial f}{\partial x_0} g. \quad (8.1-10b)$$

A **nemnegatívenergiás megoldások** hasonló ortogonalitási összefüggést elégítenek ki „egymás között”, és az is belátható, hogy a fenti skalárszorzatra nézve mindegyikük ortogonális az összes pozitív energiás megoldásora. A (8.1-9) ill. a (8.1-10a) egyenletekben megadott egzakt megoldásokat a „**skalár elektron Gordon-Volkov-állapotainak**” nevezzük. Ezeket Gordon már a 20-as évek második felében meghatározta, abban a

cikkében, amelyben a róla elnevezett egyenletet is bevezette. (Vele lényegében egyidőben Schrödinger, Fock és Kudar János mellett még mások is „levezették” ezt az egyenletet.) Gordon e megoldásokat Compton-szórás hatáskeresztmetszetének kiszámításához használta fel (az exponensben szereplő oszcilláló tagokat elhanyagolta, ugyanis kis intenzitásoknál ezek valóban lényegtelenek). A tankönyvekben szereplő pontosabb de még mindig perturbatív formulát először Klein és Nishina határozták meg a Dirac-egyenlet közelítő megoldásaiból az átmeneti áramok módszerével. Érdekes megjegyezni, hogy kezdetben a Compton-eltolódást többen próbálták eredménytelenül a (8.1-7c) kifejezésben szereplő intenzitásfüggő Δp négyesimpulzus-eltolódással magyarázni. Ez nem vezethetett sikerre, már csak azért sem mert (8.1-7c) bár relativisztikus, de ugyanakkor klasszikus formula, abban az értelemben, hogy nem tartalmazza a Planck-féle állandót, ellentétben a kísérleti eredményekkel.

A Dirac-egyenlet általános egzakt megoldásait síhullámmal kölcsönható elektron esetében Volkov publikálta először 1935-ben. Ezekkel a megoldásokkal a jegyzet egy későbbi fejezetében foglalkozunk.

8.2. A nemlineáris Compton-szórás leírása az átmeneti áramok módszerével

Az **átmeneti áramok** módszerét (mint a korrespondencia-elv alkalmazásának egy speciális esetét) sikerrel alkalmazták a kvantummechanika- és elektrodinamika kialakulása körül. Ez a módszer valójában az új elméletével egyező eredményeket szolgáltat számos fontos esetben, s ezen felül jelentős előnye, hogy a klasszikus terminológiával leírható, s így intuíciónkhoz közelebb áll mint a kvantumtérelmélet. A módszer lényege az, hogy az elektron (vagy más töltés) mozgásához szokásosan hozzárendelt áramsűrűséget az elektron két állapota közötti átmenethez tartozó átmeneti áramsűrűséget asszociálunk, és ezt szerepeltetjük forrástagként az inhomogén Maxwell-egyenletekben. Ha ez utóbbiakat pl. a retardált potenciálok segítségével megoldjuk, akkor megkapjuk a másodlagos spontán sugárzást, vagyis a szórt teret. A spontán megjelenő új sugárzás szempontjából ez mindenképpen egy előrendű folyamat, függetlenül attól, hogy az eredeti bejövő gerjesztés (esetünkben például lézersugárzás) mennyire intenzív. A következőkben még tovább megyünk az egyszerűsítésben, és kvantumátmentekből származó átmeneti áram helyett klasszikus átmeneti áramot használunk az intenzív Compton-szórás leírására. Amellett, hogy a végeredmény megegyezik a relativisztikus Furry-képben végzett perturbációs számítással adódó eredménnyel, már itt is gyakorlatilag ugyanazokkal a matematikai részletekkel találkozunk, mint a teljes elméletben. Ez egyben alkalmat ad arra, hogy több, később is előforduló hasznos formulát bevezessünk.

A „klasszikus átmenet” $j(z')$ négyesáramsűrűségét a szokásossal teljesen analóg módon vezethetjük be:

$$j(z') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dz}{d\tau} \delta(z' - z(\tau)) , \quad z(\tau) = x_{p'}(\tau) - x_p(\tau) , \quad (8.2-1)$$

ahol $x_p(\tau)$ és $x_{p'}(\tau)$ a kezdeti és a végállapoti trajektóriák, amelyeket a (8.1-7a) klasszikus eredmény szerint írunk fel. A szórt sugárzás A' négyespotenciálja az alábbi inhomogén d'Alembert-egyenletet elégíti ki, amelyet a retardált Green-függvény segítségével fejezünk ki.

$$\partial^2 A' = \frac{4\pi}{c} j , \quad A'(z) = \frac{4\pi}{c} \int d^4 z' G(z - z') j(z') , \quad \text{ahol } \partial^2 G(z - z') = \delta_4(z - z') . \quad (8.2-2)$$

A középso egyenletben lévő konvolúciót célszerű Fourier-komponensekkel felírni:

$$A'(z) = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{4\pi}{c} \int d^4 k' G(k') j(k') , \quad A'(z) = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{4\pi}{c} \int d^4 k' \frac{j(k')}{(k')^2} e^{-ik' \cdot z} . \quad (8.2-3)$$

Ez a reprezentáció azért természetes, mert a Green-függvény Fourier-előállítása igen egyszerű, nevezetesen $G(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4 k^2}$. A k'_0 szerinti integrálás során a komplex síkon a retardálásnak megfelelő kontúrt választjuk, ekkor

$$k'_0 \rightarrow \frac{\omega'}{c} = \sqrt{(k'_1)^2 + (k'_2)^2 + (k'_3)^2} , \quad \text{és } A'(z) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k'}{\omega'} \left[j(k') e^{-ik' \cdot z} \right]_{(k')^2=0} \quad (8.2-4)$$

A szórt fény $A'(z)$ vektorpotenciáljának ε' és k' hullámszámú komponensét (8.2-4) alapján az $\varepsilon' \cdot j(k')$ Fourier amplitúdó adja tehát, s ez a (8.2-1) eredeti alak segítségével egyszerűen kifejezhető:

$$\varepsilon' \cdot j(k') = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon' \cdot \frac{dz(\tau)}{d\tau} e^{-ik' \cdot z(\tau)}. \quad (8.2-5)$$

(8.2-4) második egyenletéből az is belátható, hogy a hullámszámközbe emittált energiaáram

$$dE' = \frac{d^3k'}{2(2\pi)^3} |\varepsilon' \cdot j(k')|^2. \quad (8.2-6)$$

Ha (8.2-5)-be $z(\tau)$ (8.2-1)-beli alakját helyettesítjük, és figyelembe vesszük az $x_p(\tau)$ kezdeti és az $x_{p'}(\tau)$ végállapotú trajektóriák (8.1-7a)-ban megadott alakját, akkor a következő integrált kapjuk:

$$\begin{aligned} \varepsilon' \cdot j(k') = e \int_{-\infty}^{\infty} du [(\alpha' - \alpha) + 2(\beta' - \beta) \cos u + 2(\gamma' - \gamma) \cos 2u] \times \\ \times \exp[i((\zeta' - \zeta)u + (\xi' - \xi) \sin u + (\eta' - \eta) \sin 2u)], \end{aligned} \quad (8.2-7a)$$

$$\alpha \equiv \frac{\varepsilon' \cdot \tilde{p}}{k \cdot p}, \quad \beta \equiv \frac{ea}{4c} \frac{1}{k \cdot p} [(\varepsilon \cdot k)(p \cdot \varepsilon) - (\varepsilon' \cdot \varepsilon)], \quad \gamma \equiv \frac{e^2 a^2}{8c^2} \frac{k' \cdot k}{(k \cdot p)^2}, \quad (8.2-7b)$$

$$\zeta \equiv \frac{k' \cdot \tilde{p}}{k \cdot p}, \quad \xi \equiv \frac{ea}{4c} \frac{1}{k \cdot p} \left[\frac{k' \cdot k}{k \cdot p} (\varepsilon \cdot p) - (k' \cdot \varepsilon) \right], \quad \eta \equiv \frac{e^2 a^2}{8c^2} \frac{k' \cdot k}{(k' \cdot p)^2} \quad (8.2-7c)$$

Vesszövel a szórt \tilde{p}' impulzusra utalunk, pl. $\alpha \equiv \frac{\varepsilon' \cdot \tilde{p}'}{k \cdot p'}$. A (8.2-7a)-ban szereplő integrál kiértékeléséhez a már ismert Jacobi-Anger-formulát használhatjuk:

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi},$$

ahol elsőfajú, n -edrendű közönséges Bessel-függvény. Ezzel

$$\varepsilon' \cdot j(k') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\alpha' - \alpha) C_n + (\beta' - \beta) (C_{n-1} + C_{n+1}) + (\gamma' - \gamma) (C_{n-1} + C_{n+1})] 2\pi\delta(\zeta' - \zeta + n), \quad (8.2-8a)$$

$$C_n(\xi' - \xi, \eta' - \eta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-2l}(\xi' - \xi) J_l(\eta' - \eta). \quad (8.2-8b)$$

A (8.2-8a) egyenletben fellépő Dirac-féle delta argumentuma az egyes harmonikusokat reprezentálja:

$$\frac{k' \cdot \tilde{p}'}{k \cdot p'} - \frac{k' \cdot \tilde{p}}{k \cdot p} = \text{egész szám}, \quad (8.2-9)$$

A fenti összefüggés kompatibilis az alábbi négyesimpulzus-megmaradással

$$\tilde{p}' + \hbar k' = \tilde{p} + n\hbar k. \quad (8.2-10)$$

Ugyanakkor (8.2-10)-ből kiindulva (8.2-9)-ben \hbar kiesik, tehát numerikus értékére semmilyen megszorítás nem adódik, azaz a (8.2-9) formulából kiindulva \hbar -t „kézzel tettük be”. A (8.2-10) megmaradási törvény csak a fotonhipotézisből sejtethető meg, illetve a kvantum-elektrodinamika formalizmusából adódik ki automatikusan.

A felöltötetett \tilde{p} négyesimpulzus (8.1-7c) klasszikus formulájának felhasználásával megkapjuk az intenzív Compton-szórásra vonatkozó frekvenciafeltételt:

$$\omega'_n = \frac{n\omega}{1 + \left(\mu^2 + n\frac{2\omega}{\omega_C}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}} \rightarrow \frac{n\omega}{1 + \mu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (8.2-11)$$

ahol $\theta \leq (\vec{k}, \vec{k}')$ a szórásszög, és $\omega_C = \frac{mc^2}{\hbar}$ az elektron Compton-frekvenciája. A második formula a klasszikus elméletből is kiadódik és a $\hbar \rightarrow 0$ határesetben érvényes.

Hivatkozások

- [1] L. D. Landau és I. M. Lifsic: **Klasszikus erőterek** (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- [2] Nagy Károly: **Kvantummechanika** (Tankönyvkiadó, Budapest, 1981)
- [3] R. Loudon: **Quantum theory of light** (Clarendon, Oxford, 1973)
- [4] H. M. Nussenzveig: **Introduction to quantum optics** (Gordon and Breach, New York, 1973)
- [5] R. J. Glaubert: Phys. Rev., **130**, 2529 (1963)
- [6] R. J. Glaubert: Phys. Rev., **131**, 2766 (1963)
- [7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik: **Table of interals, series and products** (Academic, New York, 1980)
- [8] W. Becker, R. R. Schlicher and M. O. Scully: Phys. Rev. Lett., **47**, 1262 (1981)
- [9] V. Gordon: Z. Physik, **40**, 117 (1926)
- [10] D. M. Volkov: Z. Physik, **94**, 250 (1935)
- [11] H. A. Kramers: **Collected scientific papaers** (North-Holland, Amsterdam, 1956), W. C. Hennenberger: Phys. Rev. Lett., **21**, 838 (1968)
- [12] S. Varro and F. Ehlotzky: Nuovo Cim., **131**, 3215 (1992)
- [13] F. V. Bunkin i M. V. Fjodorov: ZsETF, **49**, 1215 (1965)
- [14] Varró S.: Magyar Fizikai Folyóirat, **XXXI**, 398 (1983)
- [15] Varró S.: Magyar Fizikai Folyóirat, **XXXIV**, 408 (1990)
- [16] N. M. Kroll and K. M. Watson: Phys. Rev., **A8**, 804 (1973)
- [17] A. Weingartshofer et al.: Phys. Rev. Lett., **39**, 269 (1977)
- [18] B. Wallback and J. K. Holmes: Phys. Rev., **A48**, R2515 (1993), L. V. Keldysh: Sov. Phys. JETP, **47**, 1307 (1964)
- [19] S. Varró and F. Ehlotzky: J. Phys. B, **28**, L673 (1995), Farkas Gy. és Varró S.: in **Kvantumelektronika**, (Szerk.: Varró S.) (KFKI, Budapest, 1995)
- [20] M. Gavrilá (Ed.): **Atoms in intense fields** (Academic, New York, 1992)
- [21] Gy. Farkas and Z. Gy. Horváth: Opt. Comm., **12**, 392 (1974)
- [22] S. Varró and F. Ehlotzky: Can. J. Phys., **71**, 340 (1974)
- [23] J. D. Jackson: **Classical electrodinamics** (Wiley, N. Y., 1962)
- [24] S. Varró and F. Ehlotzky: Phys. Rev., **A49**, 3106 (1994)
- [25] S. Varró and F. Ehlotzky: J. Phys. B, **28**, 121 (1995)
- [26] Varró S.: in **A kvantumelektronika alapjai**, (Szerk.: Varró S.) (KFKI, Budapest, 1985)
- [27] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik: **Table of Integrals, Series, and Products**, Sixth Edition (Academic, New York, 2000)

- [28] Varró S: **Entangled photon-electron states and the number-phase minimum uncertainty states of the photon field**. New Journal of Physics 10, 053028 (35 pages) (2008), E-print [http://arxiv.org:arXiv:0712.3849v1\[quant-ph\]](http://arxiv.org:arXiv:0712.3849v1[quant-ph])
- [29] Mourou G A, Tajima T and Bulanov S V: Optics in the relativistic regime. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 309-371 (2006)
- [30] Varró S : Linear and Nonlinear Absolute Phase Effects in Interactions of Ultrashort Laser Pulses with a Metal Nano-Layer or with a Thin Plasma Layer. *Laser and Particle Beams*, **25**, No. 3, 379-390 (2007). <http://arxiv.org : physics/0610266>
- [31] Varró S and Farkas Gy : Attosecond electron pulses from interference of above-threshold de Broglie waves. *Laser and Particle Beams*, Vol. **26**, No.1, 9-19 (2008) [http://arxiv.org : 0705.0212v1 \[physics.plasm-ph\]](http://arxiv.org : 0705.0212v1 [physics.plasm-ph])
- [32] Krausz F and Ivanov M: Attosecond physics. 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163-234
- [33] Ehlotzky F, Krajewska K and Kaminski J Z, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 046401 (2009)
- [34] Varró S, Kroó N, Farkas Gy and Dombi P: Spontaneous emission of radiation by metallic electrons in the presence of electromagnetic fields of surface plasmon oscillations. *Journal of Modern Optics*, **57**, No. 1. 10 January, 80-90. (2010) [http://arxiv.org : arXiv: 0705.0212v1 \[physics.plasm-ph \]](http://arxiv.org : arXiv: 0705.0212v1 [physics.plasm-ph])
- [35] Varró S : Entangled states and entropy remnants of a photon-electron system. *Physica Scripta* **T140** (2010) 014038 (8pp). E-print arXiv: 0910.4764 [quant-ph]