Rekurzív sorozatok

Németh Zoltán
SZTE Bolyai Intézet
www.math.u-szeged.hu/˜nemeth

Miért van szükség közelítő módszerekre?

Miért van szükség közelítő módszerekre?

- mert a pontos formula nehézkes: $x^2 - x - 8 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$

Miért van szükség közelítő módszerekre?

- mert a pontos formula nehézkes: $x^2 - x - 8 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$
- mert a pontos formulát nem ismerjük: $x^3 - x - 8 = 0$, $x = \sqrt[3]{(\cdots) + \sqrt{\cdots}} + \sqrt[3]{(\cdots) - \sqrt{\cdots}}$

Miért van szükség közelítő módszerekre?

- mert a pontos formula nehézkes: $x^2 - x - 8 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$
- mert a pontos formulát nem ismerjük: $x^3 - x - 8 = 0$, $x = \sqrt[3]{(\cdots) + \sqrt{\cdots}} + \sqrt[3]{(\cdots) - \sqrt{\cdots}}$
- mert nincs pontos formula: $x^5 - x - 8 = 0$, $x = ?$

Miért van szükség közelítő módszerekre?

- mert a pontos formula nehézkes: $x^2 - x - 8 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$
- mert a pontos formulát nem ismerjük: $x^3 - x - 8 = 0$, $x = \sqrt[3]{(\cdots) + \sqrt{\cdots}} + \sqrt[3]{(\cdots) - \sqrt{\cdots}}$
- mert nincs pontos formula: $x^5 - x - 8 = 0$, $x = ?$

- Egy meglévő közelítésből csinálunk egy jobbat $\Longrightarrow$ rekurzió

A $\sqrt{2}$ közelítése

Legyen $x_1 := \frac{3}{2}$. Nyilván $x_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, ezért $\frac{2}{x_1} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$.

A $\sqrt{2}$ közelítése

Legyen $x_1 := \frac{3}{2}$. Nyilván $x_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, ezért $\frac{2}{x_1} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$.

$x_2 := \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{17}{12}$

A $\sqrt{2}$ közelítése

Legyen $x_1 := \frac{3}{2}$. Nyilván $x_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, ezért $\frac{2}{x_1} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$.

$$x_2 := \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_3 := \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{577}{408}$$

A $\sqrt{2}$ közelítése

Legyen $x_1 := \frac{3}{2}$. Nyilván $x_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, ezért $\frac{2}{x_1} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$.

$$x_2 := \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_3 := \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{577}{408}$$

$$x_3^2 = 2{,}000006\ldots$$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

$x_2 := 2{,}25$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

$x_2 := 2{,}25$

$x_3 := 2{,}23611111\ldots$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

$x_2 := 2{,}25$

$x_3 := 2{,}23611111\ldots$

$x_4 := 2{,}236797791580400\ldots$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

$x_2 := 2{,}25$

$x_3 := 2{,}23611111\ldots$

$x_4 := 2{,}236797791580400\ldots$

$x_5 := 2{,}2367977499789696 44\ldots$

A $\sqrt{5}$ közelítése

Legyen $x_1 := 2$ és $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$

$x_2 := 2{,}25$

$x_3 := 2{,}23611111\ldots$

$x_4 := 2{,}236797791580400\ldots$

$x_5 := 2{,}2367977499789696\,44\ldots$

$x_6 := 2{,}2367977499789696\,40\ldots$ (16 pontos jegy)

Newton gyökvonó módszere

Legyen $x_1, c > 0$ *és* $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$*. Ekkor az* (x_n) *sorozat konvergens és* $x_n \to \sqrt{c}$*.*

$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}$ (számtani és mértani közepek)

Newton gyökvonó módszere

Legyen $x_1, c > 0$ *és* $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$. *Ekkor az* (x_n) *sorozat konvergens és* $x_n \to \sqrt{c}$.

$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}$ (számtani és mértani közepek)

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \leq x_n \iff$
$x_n^2 + c \leq 2x_n^2 \iff c \leq x_n^2$

Newton gyökvonó módszere

Legyen $x_1, c > 0$ *és* $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$. *Ekkor az* (x_n) *sorozat konvergens és* $x_n \to \sqrt{c}$.

$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}$ (számtani és mértani közepek)

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \leq x_n \iff$
$x_n^2 + c \leq 2x_n^2 \iff c \leq x_n^2$

monoton és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens, $x_n \to \ell$.

Newton gyökvonó módszere

Legyen $x_1, c > 0$ *és* $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$. *Ekkor az* (x_n) *sorozat konvergens és* $x_n \to \sqrt{c}$.

$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}$ (számtani és mértani közepek)

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \leq x_n \iff$
$x_n^2 + c \leq 2x_n^2 \iff c \leq x_n^2$

monoton és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens, $x_n \to \ell$.

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \Longrightarrow \ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{c}{\ell}) \Longrightarrow c = \ell^2$.

Milyen gyors a módszer?

$0 < b < a$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

Milyen gyors a módszer?

$0 < b < a$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

$x_n \approx \sqrt{c} \Rightarrow \frac{c}{x_n} \approx \sqrt{c}$,

$|x_n - \sqrt{c}| =: \varepsilon_n \Rightarrow |\frac{c}{x_n} - \sqrt{c}| = \varepsilon_n$

Milyen gyors a módszer?

$0 < b < a$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

$x_n \approx \sqrt{c} \Rightarrow \frac{c}{x_n} \approx \sqrt{c}$,

$|x_n - \sqrt{c}| =: \varepsilon_n \Rightarrow |\frac{c}{x_n} - \sqrt{c}| = \varepsilon_n$

$b = \frac{c}{x_n},\ a = x_n$

Milyen gyors a módszer?

$0 < b < a$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \frac{(a-b)^2}{8b}$$

$$x_n \approx \sqrt{c} \Rightarrow \frac{c}{x_n} \approx \sqrt{c},$$

$$|x_n - \sqrt{c}| =: \varepsilon_n \Rightarrow \left|\frac{c}{x_n} - \sqrt{c}\right| = \varepsilon_n$$

$$b = \frac{c}{x_n},\ a = x_n$$

$$\varepsilon_{n+1} := x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{8b} \le \frac{(2\varepsilon_n)^2}{8\frac{c}{x_n}} \approx K \cdot \varepsilon_n^2$$

Milyen gyors a módszer?

$0 < b < a$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

$$x_n \approx \sqrt{c} \Rightarrow \frac{c}{x_n} \approx \sqrt{c},$$

$$|x_n - \sqrt{c}| =: \varepsilon_n \Rightarrow \left|\frac{c}{x_n} - \sqrt{c}\right| = \varepsilon_n$$

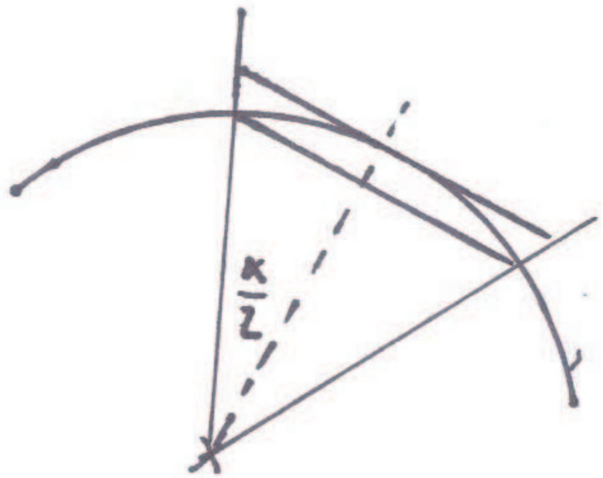
$$b = \frac{c}{x_n},\ a = x_n$$

$$\varepsilon_{n+1} := x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b} \leq \frac{(2\varepsilon_n)^2}{8\frac{c}{x_n}} \approx K \cdot \varepsilon_n^2$$

$\varepsilon_{n+1} \approx K \cdot \varepsilon_n^2 \Longrightarrow$ a pontos tizedesjegyek száma (nagyjából) megkétszereződik

A π közelítése

Az 1 sugarú körbe és a kör köré írható szabályos n-szögek kerülete k_n és K_n.



$\alpha = \frac{2\pi}{n},\ k_n = 2n \sin\frac{\alpha}{2},\ K_n = 2n \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$
$k_n \to 2\pi,\ K_n \to 2\pi$

A π közelítése

$$k_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}, \;\; K_n = 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$k_{2n} = 4n \sin \frac{\pi}{2n}, \;\; K_{2n} = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$$

A π közelítése

$$k_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}, \;\; K_n = 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$k_{2n} = 4n \sin \frac{\pi}{2n}, \;\; K_{2n} = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta, \;\; \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$\frac{k_{2n}}{K_{2n}} = \cos \frac{\pi}{2n}$$

A π közelítése

$$k_n = 2n \sin \tfrac{\pi}{n}, \;\; K_n = 2n \operatorname{tg} \tfrac{\pi}{n}$$

$$k_{2n} = 4n \sin \tfrac{\pi}{2n}, \;\; K_{2n} = 4n \operatorname{tg} \tfrac{\pi}{2n}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta, \;\; \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$\frac{k_{2n}}{K_{2n}} = \cos \frac{\pi}{2n}$$

$\frac{2}{K_{2n}} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{K_n}$, $k_{2n} = \sqrt{k_n K_{2n}}$ (harmonikus, ill. mértani közép)

A π közelítése

$\frac{2}{K_{2n}} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{K_n}$, $k_{2n} = \sqrt{k_n K_{2n}}$ (harmonikus, ill. mértani közép)

A közepeket ismerve:

$$k_n \leq k_{2n} \leq K_{2n} \leq K_n$$

$$k_3 \leq k_6 \leq k_{12} \leq \cdots \leq K_{12} \leq K_6 \leq K_3$$

A π közelítése

$\frac{2}{K_{2n}} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{K_n}$, $k_{2n} = \sqrt{k_n K_{2n}}$ (harmonikus, ill. mértani közép)

A közepeket ismerve:

$$k_n \leq k_{2n} \leq K_{2n} \leq K_n$$

$$k_3 \leq k_6 \leq k_{12} \leq \cdots \leq K_{12} \leq K_6 \leq K_3$$

A $(k_{3 \cdot 2^n})$ sorozat *növő és felülről korlátos*, a $(K_{3 \cdot 2^n})$ sorozat *csökkenő és alulról korlátos* $\Longrightarrow$ konvergensek

A π közelítése

$\frac{2}{K_{2n}} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{K_n}$, $k_{2n} = \sqrt{k_n K_{2n}}$ (harmonikus, ill. mértani közép)

A közepeket ismerve:

$$k_n \leq k_{2n} \leq K_{2n} \leq K_n$$

$$k_3 \leq k_6 \leq k_{12} \leq \cdots \leq K_{12} \leq K_6 \leq K_3$$

A $(k_{3\cdot 2^n})$ sorozat *növő és felülről korlátos*, a $(K_{3\cdot 2^n})$ sorozat *csökkenő és alulról korlátos* $\Longrightarrow$ konvergensek

$|K_{2n} - k_{2n}| \leq \frac{1}{4}|K_n - k_n| \Longrightarrow$ a hiba lépésenként negyedére csökken

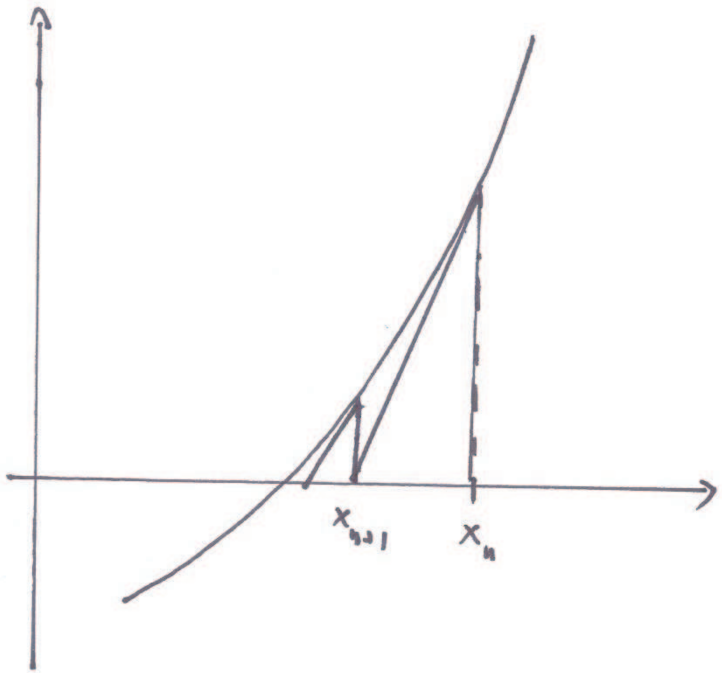
Arkhimédesz eredménye

n	$k_n =$	$K_n =$
3	$5{,}196152\ldots$	$10{,}392304\ldots$
6	$5{,}999999\ldots$	$6{,}928202\ldots$
12	$6{,}211656\ldots$	$6{,}430779\ldots$
24	$6{,}265256\ldots$	$6{,}319318\ldots$
48	$6{,}278699\ldots$	$6{,}292170\ldots$
96	$6{,}282062\ldots$	$6{,}285427\ldots$

$$2\pi \approx 6{,}283185\ldots$$

Egy általános módszer

Egy függvény zérushelyét keressük



Az x_n pontban az érintő egyenlete

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

A Newton–Raphson rekurzió

Az x_n pontban az érintő egyenlete
$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$
A rekurzió: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

A Newton–Raphson rekurzió

Az x_n pontban az érintő egyenlete
$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$
A rekurzió: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x) := x^2 - c \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$

A Newton–Raphson rekurzió

Az x_n pontban az érintő egyenlete
$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$
A rekurzió: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x) := x^2 - c \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$

Ha $f(x) := x^3 - c \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} \Rightarrow$
$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{c}{x_n^2})$ (köbgyökvonás)

Az általános tétel

Legyen f kétszer differenciálható $[a, b]$-n,
$f(a) < 0 < f(b)$, és $f'(x) > 0$, $f''(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$).
Ekkor az $x_0 := b$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat a függvény egyetlen zérushelyéhez konvergál.

Bizonyítás-vázlat: f folytonos és szigorúan növő
$\Rightarrow$ pontosan 1 zérushelye ($=: c$) van.

Az általános tétel

Legyen f *kétszer differenciálható* $[a,b]$*-n,* $f(a) < 0 < f(b)$*, és* $f'(x) > 0$*,* $f''(x) \geq 0$ *(*$x \in [a,b]$*).* *Ekkor az* $x_0 := b$*,* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ *sorozat a függvény egyetlen zérushelyéhez konvergál.*

Bizonyítás-vázlat: f folytonos és szigorúan növő $\Rightarrow$ pontosan 1 zérushelye ($=: c$) van.

A definícióból $x_{n+1} \leq x_n$. f konvex $\Rightarrow$ a c, x_n közötti húrnál az x_n-beli érintő meredekebb $\Rightarrow$ $c \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Az általános tétel

Legyen f *kétszer differenciálható* $[a,b]$*-n,* $f(a) < 0 < f(b)$*, és* $f'(x) > 0$*,* $f''(x) \geq 0$ *(*$x \in [a,b]$*). Ekkor az* $x_0 := b$*,* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ *sorozat a függvény egyetlen zérushelyéhez konvergál.*

Bizonyítás-vázlat: f folytonos és szigorúan növő $\Rightarrow$ pontosan 1 zérushelye ($=: c$) van.

A definícióból $x_{n+1} \leq x_n$. f konvex $\Rightarrow$ a c, x_n közötti húrnál az x_n-beli érintő meredekebb $\Rightarrow$ $c \leq x_{n+1} \leq x_n$.

A sorozat csökkenő és alulról korlátos $\Rightarrow$ $x_n \to \ell$, $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \Rightarrow f(\ell) = 0$.

Az általános tétel

Legyen f kétszer differenciálható $[a,b]$-n, $f(a) < 0 < f(b)$, és $f'(x) > 0$, $f''(x) \geq 0$ ($x \in [a,b]$). Ekkor az $x_0 := b$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat a függvény egyetlen zérushelyéhez konvergál.

Bizonyítás-vázlat: f folytonos és szigorúan növő $\Rightarrow$ pontosan 1 zérushelye ($=: c$) van.

A definícióból $x_{n+1} \leq x_n$. f konvex $\Rightarrow$ a c, x_n közötti húrnál az x_n-beli érintő meredekebb $\Rightarrow$ $c \leq x_{n+1} \leq x_n$.

A sorozat csökkenő és alulról korlátos $\Rightarrow$ $x_n \to \ell$, $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \Rightarrow f(\ell) = 0$.

ha f csökkenő és/vagy konkáv $\Rightarrow$ hasonló

Egy példa

$$\cos x = x^3 \implies x_{n+1} := x_n + \frac{\cos x_n - x_n^3}{\sin x_n + 3x_n^2}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0{,}5\ldots \\
x_1 &= 1{,}1\ldots \\
x_2 &= 0{,}9\ldots \\
x_3 &= 0{,}867\ldots \\
x_4 &= 0{,}865477\ldots \\
x_5 &= 0{,}865477403311\ldots \\
x_6 &= 0{,}8654774033102\ldots
\end{aligned}$$

Még egy példa

$$x^3 - x + 1 = 0 \implies x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -1{,}5 \\ x_2 &= -1{,}347826\ldots \\ x_3 &= -1{,}325200\ldots \\ x_4 &= -1{,}324718\ldots \\ x_5 &= -1{,}324717\ldots \\ x_6 &= -1{,}324717\ldots \end{aligned}$$

Ellenpéldák

Az $e^x - 2x = 0$ egyenletre a sorozat 0, 1, 0, 1, $\ldots$?? (Persze ennek az egyenletnek nincs megoldása.)

Ellenpéldák

Az $e^x - 2x = 0$ egyenletre a sorozat 0, 1, 0, 1, $\ldots$?? (Persze ennek az egyenletnek nincs megoldása.)

A módszer általában nem működik jól, ha a függvénynek többszörös zérushelye vagy inflexiós pontja van.

Ellenpéldák

Az $e^x - 2x = 0$ egyenletre a sorozat 0, 1, 0, 1, $\ldots$?? (Persze ennek az egyenletnek nincs megoldása.)

A módszer általában nem működik jól, ha a függvénynek többszörös zérushelye vagy inflexiós pontja van.

animáció: http://www.math.umn.edu/˜garrett/qy/Newton.html

Milyen gyors a módszer?

Tegyük fel az eddigiek mellé, hogy
$0 < m < f'(x) < M$, $0 \leq f''(x) \leq L$ ($x \in [a,b]$).

Bizonyítás-vázlat: Taylor kifejtés:
$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(x - x_n)^2$
($x_n < d < x$)

Milyen gyors a módszer?

Tegyük fel az eddigiek mellé, hogy
$0 < m < f'(x) < M$, $0 \leq f''(x) \leq L$ ($x \in [a, b]$).

Bizonyítás-vázlat: Taylor kifejtés:
$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(x - x_n)^2$
($x_n < d < x$)

$x = c \Rightarrow$
$0 = f(c) =$
$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(c - x_n)^2$

Milyen gyors a módszer?

Tegyük fel az eddigiek mellé, hogy
$0 < m < f'(x) < M$, $0 \leq f''(x) \leq L$ ($x \in [a, b]$).

Bizonyítás-vázlat: Taylor kifejtés:
$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(x - x_n)^2$
($x_n < d < x$)

$x = c \Rightarrow$
$0 = f(c) =$
$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(c - x_n)^2$

$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(d)}{f'(x_n)} (c - x_n)^2$

Milyen gyors a módszer?

Tegyük fel az eddigiek mellé, hogy
$0 < m < f'(x) < M$, $0 \le f''(x) \le L$ ($x \in [a,b]$).

Bizonyítás-vázlat: Taylor kifejtés:
$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(x - x_n)^2$
($x_n < d < x$)

$x = c \Rightarrow$
$0 = f(c) =$
$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(d)(c - x_n)^2$

$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(d)}{f'(x_n)} (c - x_n)^2$

$\varepsilon_{n+1} := |x_{n+1} - c| \le \frac{1}{2} \frac{L}{m} (c - x_n)^2 \approx K \cdot \varepsilon_n^2$

A buta számítógép

Négyzetgyök, π, harmadfokú egyenlet …
Mi van, ha osztani sem tudunk?

A buta számítógép

Négyzetgyök, π, harmadfokú egyenlet . . .
Mi van, ha osztani sem tudunk?

az $\frac{1}{a}$ szám az $\frac{1}{x} - a = 0$ egyenlet megoldása

A buta számítógép

Négyzetgyök, π, harmadfokú egyenlet ...
Mi van, ha osztani sem tudunk?

az $\frac{1}{a}$ szám az $\frac{1}{x} - a = 0$ egyenlet megoldása

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2x_n - a \cdot x_n^2$$

A buta számítógép

Négyzetgyök, π, harmadfokú egyenlet …
Mi van, ha osztani sem tudunk?

az $\frac{1}{a}$ szám az $\frac{1}{x} - a = 0$ egyenlet megoldása

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2x_n - a \cdot x_n^2$$

$$a = 3,\ x_0 := 0{,}5$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}25 \\ x_2 &= 0{,}3125 \\ x_3 &= 0{,}3320\ldots \\ x_4 &= 0{,}333328\ldots \end{aligned}$$

Egy másik érdekesség

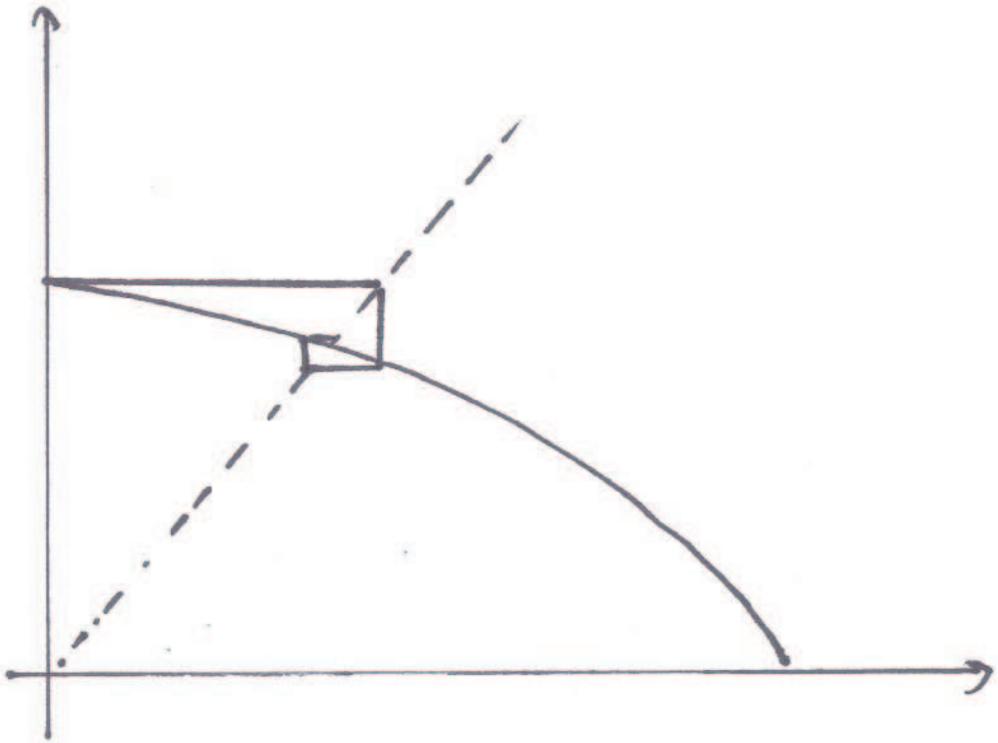
$\cos 0 = 1$, $\cos 1 = 0.5403\ldots$,
$\cos 0{,}5483\ldots\; = 0{,}8575\ldots$ ...
$\cos 0{,}739\ldots\; = 0{,}739\ldots$

$x_{n+1} := \cos x_n$ konvergens sorozat, $x_n \to \ell$,
$\ell = \cos \ell$

Egy másik érdekesség

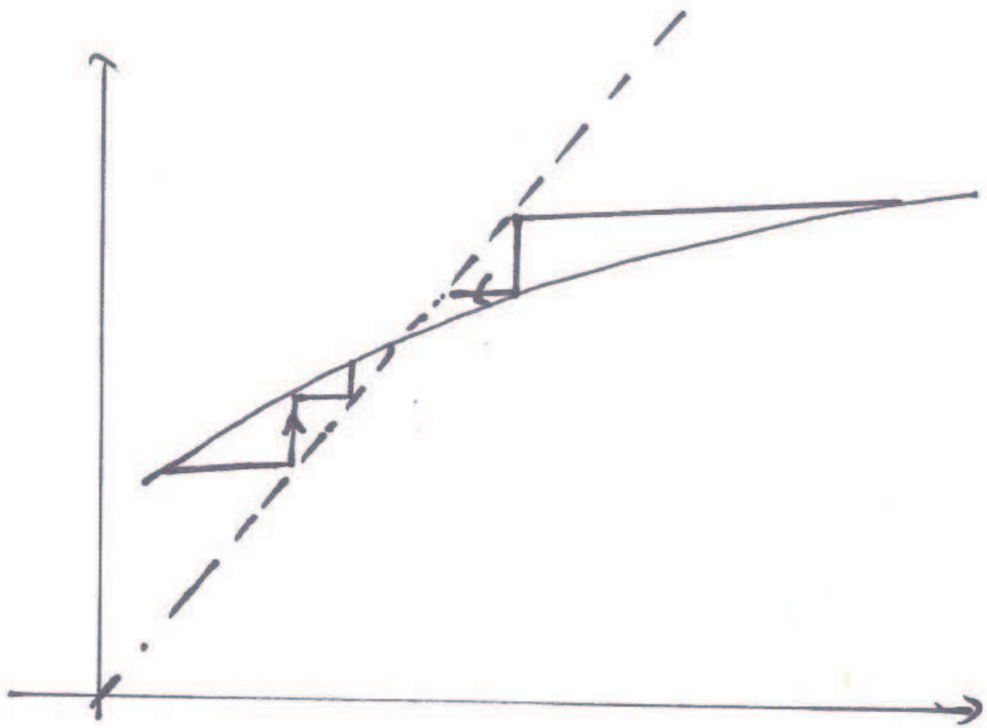
$\cos 0 = 1, \cos 1 = 0.5403\ldots,$
$\cos 0{,}5483\ldots = 0{,}8575\ldots \ldots$
$\cos 0{,}739\ldots = 0{,}739\ldots$

$x_{n+1} := \cos x_n$ konvergens sorozat, $x_n \to \ell$,
$\ell = \cos \ell$



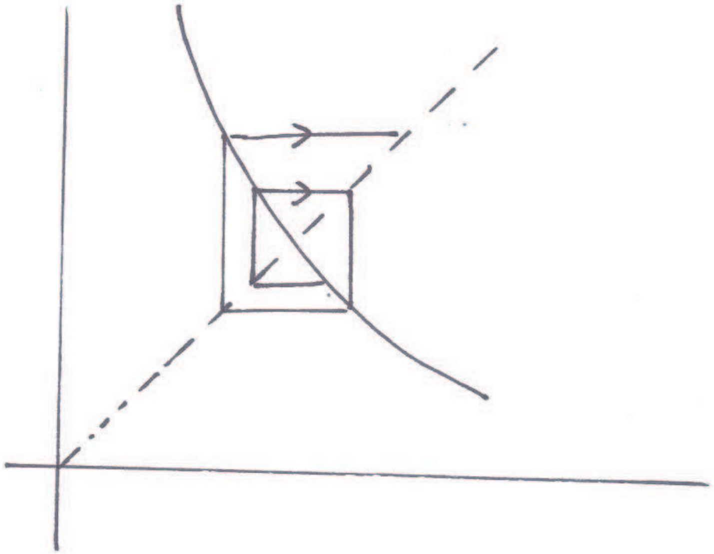
A módszer

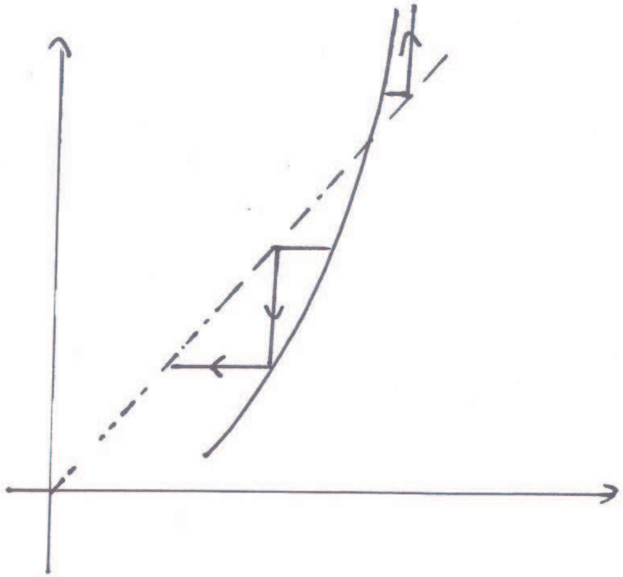
$x_{n+1} := f(x_n)$
Függőlegesen a függvénygörbére, vízszintesen a negyedfelezőre



A módszer

Ha a függvény meredek, sorozatunk nem konvergens





A fixpont-iteráció

Legyen az $f : [a, b] \to [a, b]$ *függvény olyan, hogy* $|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$, *ahol* $0 < q < 1$. *Ekkor az* $x_0 \in [a, b]$, $x_{n+1} := f(x_n)$ *sorozat konvergens,* $x_n \to \ell$, *ahol* $\ell = f(\ell)$.

a függvény *összehúzó* (kontraktív); ℓ fixpont

A bizonyítás vázlata

legfeljebb egy fixpont lehet; a függvény folytonos; ha (x_n) konvergens, határértéke csak a fixpont lehet

A bizonyítás vázlata

legfeljebb egy fixpont lehet; a függvény folytonos; ha (x_n) konvergens, határértéke csak a fixpont lehet

$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = q|x_n - x_{n-1}| = q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| = \cdots = q^n|x_1 - x_0|$

A bizonyítás vázlata

legfeljebb egy fixpont lehet; a függvény folytonos; ha (x_n) konvergens, határértéke csak a fixpont lehet

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| = q|x_n-x_{n-1}| = q^2|x_{n-1}-x_{n-2}| = \cdots = q^n|x_1-x_0|$$

$$|x_{n+p}-x_n| \leq |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1}-x_n|$$

$$|x_{n+p}-x_n| \leq |x_1-x_0|(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^n) = |x_1-x_0|q^n\frac{1-q^p}{1-q} \to 0$$

A bizonyítás vázlata

legfeljebb egy fixpont lehet; a függvény folytonos; ha (x_n) konvergens, határértéke csak a fixpont lehet

$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| = q|x_n-x_{n-1}| = q^2|x_{n-1}-x_{n-2}| = \cdots = q^n|x_1-x_0|$

$|x_{n+p}-x_n| \leq |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1}-x_n|$

$|x_{n+p}-x_n| \leq$

$|x_1-x_0|(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^n) =$

$|x_1-x_0|q^n\frac{1-q^p}{1-q} \to 0$

Ha n elég nagy, $|x_{n+p}-x_n|$ tetszőlegesen kicsi lesz $\Rightarrow$ (x_n) konvergens (Cauchy-kritérium)

Milyen gyors a módszer?

$$x_n - \ell =: \varepsilon_n, \; x_{n+1} - \ell =: \varepsilon_{n+1}$$

Milyen gyors a módszer?

$x_n - \ell =: \varepsilon_n, \; x_{n+1} - \ell =: \varepsilon_{n+1}$

tudjuk: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$

Milyen gyors a módszer?

$$x_n - \ell =: \varepsilon_n, \;\; x_{n+1} - \ell =: \varepsilon_{n+1}$$

tudjuk: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \ell + \varepsilon_{n+1} = f(\ell + \varepsilon_n)$$

Milyen gyors a módszer?

$$x_n - \ell =: \varepsilon_n,\ x_{n+1} - \ell =: \varepsilon_{n+1}$$

tudjuk: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \ell + \varepsilon_{n+1} = f(\ell + \varepsilon_n)$$

$$\ell + \varepsilon_{n+1} = f(\ell) + f'(\ell) \cdot \varepsilon_n$$

Milyen gyors a módszer?

$$x_n - \ell =: \varepsilon_n, \; x_{n+1} - \ell =: \varepsilon_{n+1}$$

tudjuk: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \ell + \varepsilon_{n+1} = f(\ell + \varepsilon_n)$$

$$\ell + \varepsilon_{n+1} = f(\ell) + f'(\ell) \cdot \varepsilon_n$$

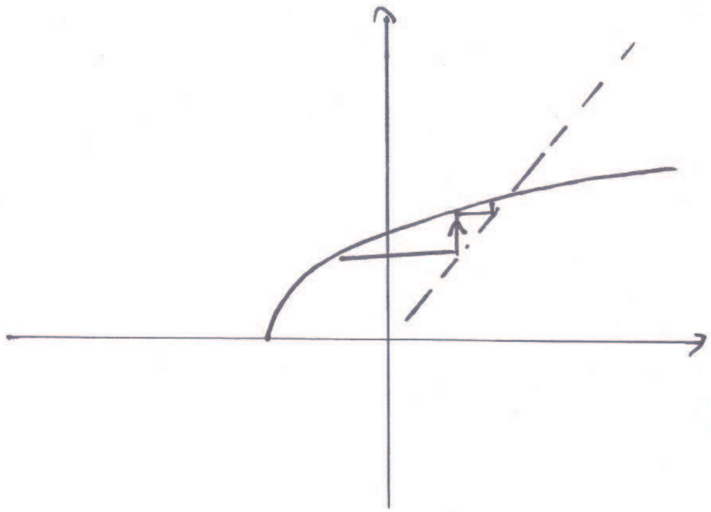
$\varepsilon_{n+1} = f'(\ell) \cdot \varepsilon_n$ ($|f'(\ell)| < 1$, mert f lapos)

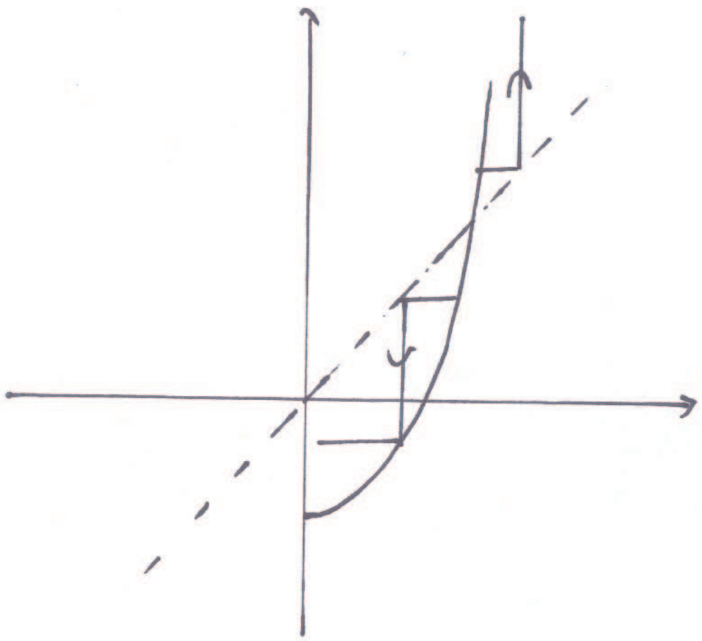
Egyenletek megoldása

$x^2 - x - 2 = 0$ megoldása:

$x = \sqrt{x+2}$ $\Rightarrow$ működik a módszer

$x = x^2 - 2$ $\Rightarrow$ nem működik a módszer





Animáció: http://www.scottsarra.org/math/courses/na/nc/FixedPointIteration.html

Köszönöm a figyelmet!