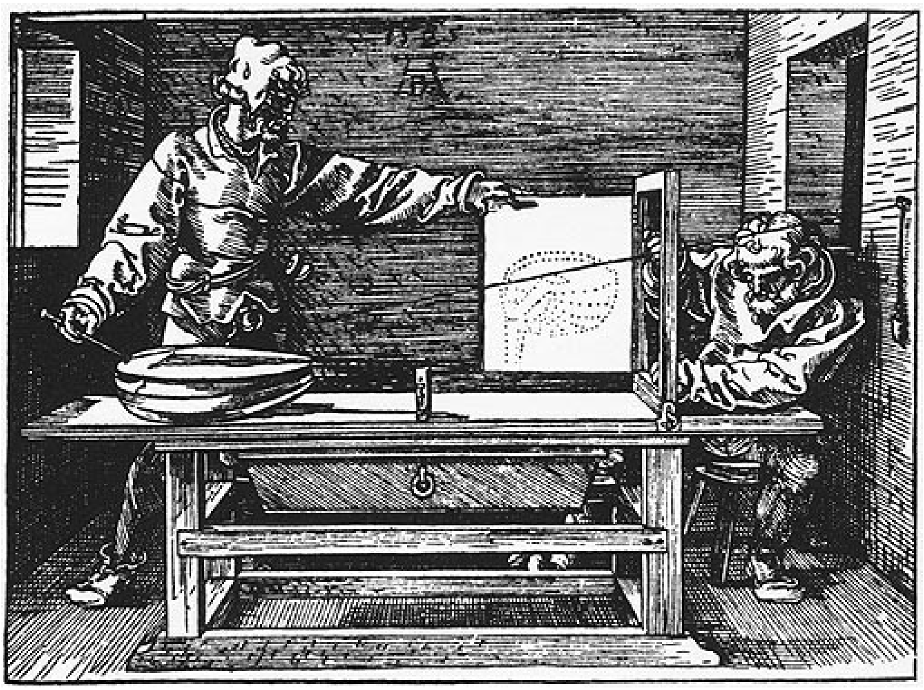
Teaching Mathematics and Statistics in Sciences, Modeling and Computer-Aided Approach

IPA HU-SRB/0901/221/088

3D papíron és képernyőn: Három dimenziós alakzatok képi megjelenítése

(Az axonometrikus és a perspektív ábrázolás alapjai)

Szilassi Lajos



A. Dürer fametszete a perspektíva tanulmányozásáról

Szegedi Tudományegyetem
2011

Tartalom

Bevezetés

A háromdimenziós alakzatokról készülő pontos, rekonstruálható rajzoknak az elkészítése a klasszikus ábrázoló geometria feladata, amely manapság kiegészül a számítógéppel készülő rajzok – esetenként interaktívan kezelhető, mozgatható jelenetek – készítésével. Ebben az írásban a szemléletes képek készítésének a két módszerét, az axonometrikus és a perspektív ábrázolást mutatjuk be elsősorban az előállítás elvi szempontjait, matematikai hátterét szem előtt tartva. Kitérünk a körzőt, vonalzót igénylő szerkesztési módokra, valamint arra, hogy számítógéppel miként lehet ilyen rajzokat előállítani.

Itt nem elsősorban valamely e célra készült szoftver kezelési, alkalmazási lehetőségeit mutatjuk be, hanem azoknak a matematikai hátterét elemezzük.

Célunk az, hogy olvasóink értsék, tudatosan szemléljék a papíron, vagy képernyőn eléjük kerülő rajzok készítésének a matematikai hátterét, bemutassuk az egyes ábrázolási módok előnyeit, hátrányait. Megadjuk a lehetőségét annak, hogy olvasóink maguk is készítsenek ilyen rajzokat, megfelelő programozói ismeretek birtokában önálló számítógépi szoftvereket is.

Az itt bemutatott rajzok majdnem mindegyikéhez csatoltuk a rajzot előállító fájlt. Ezzel „mozgathatóvá” tesszük az ábrázolt geometriai szituációkat, megteremtve annak a lehetőségét, hogy felhasználóink alaposabban, különböző beállításokban tanulmányozzák azokat.

Ennek a két *dinamikus sík-, ill. térgeometriai* szoftvernek a használatához itt találunk egy-egy rövid bevezető leírást: *Euklides, Euler3D* Ugyanitt találhatók e szoftverek telepítésére vonatkozó utasítások is.

Maguk a fájlok, a képek alá írt szöveghez csatolt hivatkozásokkal (linkekkel) aktivizálhatók. Az Euklides fájlokhoz tartoznak e fájlok tartalmára, kezelésére vonatkozó *leírások is.* amelyek a fájllal azonos nevű text fájlok. Ezek a képekre kattintva olvashatók be.

Javasoljuk olvasóinknak, hogy ezt az írást e szoftverek egyidejű interaktív kezelésével együtt tanulmányozzák.

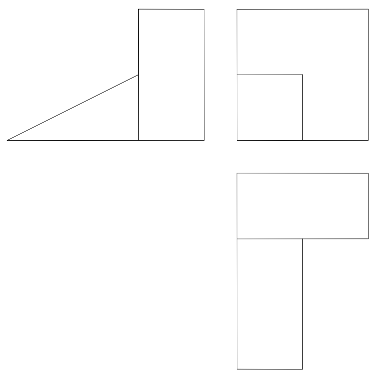
Mindehhez jó munkát, az önálló felfedezés örömét kívánjuk.

1. Az ábrázoló geometria eszközei

Manapság a valós, vagy csak elképzelt térbeli (három dimenziós) alakzatokról hihetetlenül szép kivitelezésű, alkalmasint mozgó, sőt: interaktívan mozgatható rajzokat tárnak elénk a sokat tudó számítógépek. A legtöbbször leveszik a vállunkról a rajzolás terhét, bár egyúttal megfosztanak a rajzolás örömétől is. Semmiképpen nem elégedhetünk meg a látvány passzív befogadásával, ha nem is tudunk olyan szép rajzokat készíteni, mint amik a szemünk elé kerülnek, mindenképpen tudnunk kell, hogy mi is történik, miközben egy térbeli forma, a papírunkra, vagy a képernyőre kerül. Ezt a tudatosságot szeretnénk ki-(vagy tovább-)fejleszteni olvasóinkban, beleértve nem csak azt, hogy olvasóink értő szemmel nézzenek meg egy akár kézzel, akár számítógéppel készült rajzot, hanem maguk is képesek legyenek ilyen kézzel rajzolt, vagy szerkesztett, sőt alkalmasint saját számítógépes programmal előállított rajzok készítésére. Ezért fogjuk most áttekinteni az ábrázoló geometria alapjait, különös tekintettel a „látszati kép" előállítására.

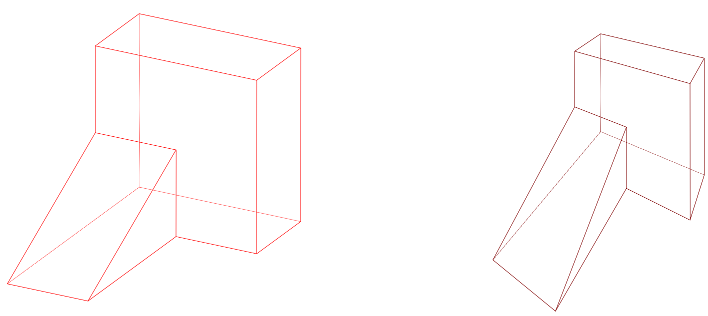
Az ábrázoló geometria feladata az, hogy a térbeli alakzatokról egyértelműen rekonstruálható, szemléletes képet készítsen. Olyat, amelyről egyaránt leolvashatók mind az adott geometriai alakzat szerkezetére vonatkozó, mind a metrikus adatok. Módszere a vetítés: párhuzamos vagy egy pontból kiinduló egyenesekkel egy vagy több (kép)síkra – a papír vagy a képernyő síkjára– vetítjük az ábrázolandó geometriai alakzatot.

Ha az egyszerűbb szerkeszthetőség vagy a könnyebb rekonstruálhatóság, az adatok mérethű leolvashatósága az ábrázolás elsődleges szempontja, akkor a Monge[1]-féle két képsíkos, más szóval vetületi ábrázolás a megfelelő ábrázoló geometriai eszköz egy térgeometriai alakzat egyértelmű meghatározására. Ha a szokásos módon csak két képsíkot használunk az alakzat megadására, akkor pl. egy poliéder (sokszöglapú mértani test) egyértelmű megadásához el kell neveznünk a csúcsokat, külön megjelölve minden csúcspont első (azaz felülnézeti, és második, azaz elölnézeti képét. E nélkül csupán a két képből olykor nem rekonstruálható egyértelműen a térbeli alakzat. Egy harmadik (oldalnézeti) kép jelentősen hozzájárulhat az alakzat egyértelmű rekonstrukciójához.



Egy poliéder felülnézeti, elölnézeti és (jobboldali[2]) oldalnézeti képe

Ha az ábrázolás elsődleges célja a szemléletesség, akkor inkább az axonometrikus vagy a perspektív ábrázolás tűnik megfelelő eszköznek.



Az előbbi poliéder axonometrikus és perspektív rajza.

[1] Gaspard Monge (1746–1818) francia matematikus, a francia forradalom után tengerészeti miniszter, hadügyi szervező.

[2] A jobboldali jelző arra utal, hogy a jobb kezünk irányából vetítjük az alakzatot az alakzat első két képétől balra elhelyezett harmadik képsíkra, így az a képsíkok egyesítése (a papírunk síkjába történt forgatása) után az oldalnézeti kép a rajz baloldalára kerül.

Most az axonometrikus és perspektív ábrázolás alapjainak megismerését tűzzük ki célul. Nem csak azért, hogy ilyen ábrák elkészítésében némi jártasságot szerezzenek olvasóink, hanem azért is, mert a (tan)könyvekben és a számítógép képernyőjén főként axonometrikus, illetve perspektív képekkel találkozunk. Így feltétlenül szükségesnek tartjuk, hogy ezeket értő módon, olykor kellő kritikával szemléljék. Meg fogjuk vizsgálni egy-egy ábrázolási mód előnyeit és hátrányait, ehhez többnyire ugyanannak az alakzatnak a különböző ábrázolási módokban készült képeit állítjuk elő.

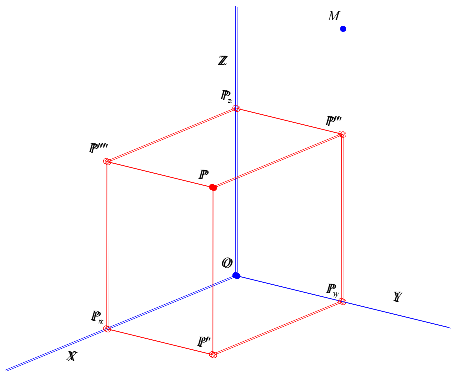
2. Axonometria

2.1. *Az axonometrikus ábrázolás alapjai*

Az axonometrikus ábrázolás lényege, hogy egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük el az ábrázolandó térgeometriai alakzatot, majd ezzel a koordináta-rendszerrel együtt párhuzamos vetítéssel vetítjük egyetlen síkra, az úgynevezett axonometrikus képsíkra. Maga az *axonometria* szó a latin axis=tengely és a mérés szavakon alapuló szóösszetétellel keletkezett

Legyen adott a térben három, egy pontra (az origóra) illeszkedő egymásra páronként merőleges, irányított egyenes, *x*, *y* és *z*, amelyek ebben a sorrendben un. jobbsodrású[3] rendszert alkotnak. Helyezzünk el ebben az un. térbeli derékszögű koordinátarendszerben egy P pontot. Merőlegesen vetítsük rendre az (x,y), (y,z) és az (x,z) síkokra, majd az így kapott P’, P’’ és P’’’ pontot az eredeti P ponttal és a tengelyekkel együtt vetítsük – párhuzamos vetítéssel – a papírunk (képernyőnk) síkjára, az axonometrikus képsíkra, amely nem lehet párhuzamos a vetítés irányával. A koordinátatengelyek képét axonometrikus tengelykeresztnek nevezzük. A pontok axonometrikus képét ugyanúgy jelöljük, mint magát a térbeli pontot. Ha a P, P’, P”, P”’ pontok közül bármely kettő megfelelő módon adott, akkor a többi egyértelműen szerkeszthető. A ”megfelelő mód” jelen esetben azt jelenti, hogy a pont megfelelő rendezőinek a megfelelő koordináta tengelyekkel párhuzamosnak kell lennie. Így pl. a $PP'P_yP''$ egy olyan paralelogramma, amelynek az oldalai párhuzamosak az *x* ill. *z* tengellyel. (P_y a *P*-n átmenő (x,z) síkkal párhuzamos síknak az *y* tengellyel alkotott metszéspontja.) Ez a követelmény lényegében azonos azzal, ahogy a Monge-féle ábrázolásban a pont két képét összekötő rendezőnek merőlegesnek kellett lennie a képsíkok metszésvonalára.

[3] A ”jobbsodrású” azt jelenti, hogy ha a jobb kezünk hüvelyk ujja (durván) az *x*, a mutató ujjunk az *y* tengely pozitív felével egyező irányba mutat, akkor a középső újunkat az előző kettő síkjára merőlegesen tartva az a *z* tengely pozitív felével lesz egyirányú. Megjegyezzük, hogy ez épp úgy a matematikán kívüli megállapodás, mint ahogy a síkban az óramutató járásával ellentétes forgásirányt tekintjük pozitívnak.



[Egy pont axonometrikus képe]

Feladat: *Adott egy axononometrikus tengelykereszt, A P és P'' pont (ahol P P'' párhuzamos az X tengellyel. Szerkesszük meg a P', P''' valamint a Px,Py, Pz pontokat. (A P'' pont megadását az M pont mozgatásával érjük el.)*

A P pontnak a koordinátatengelyekre eső merőleges vetületeinek, a P_x , P_y , P_z pontoknak az axonometrikus képeiből ugyancsak egyértelműen meghatározható a P pont axonometrikus képe. Ezek a pontok viszont egyértelműen meghatározhatók, ha adott a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységnyi szakaszoknak az axonometrikus képe. Lényegében a P pont koordinátái a térbeli derékszögű koordinátarendszerben (P_x, P_y, P_z). Így azt mondhatjuk, hogy egy derékszögű koordinátáival adott pont axonometrikus képe egyértelműen meghatározott. De vajon rekonstruálható is? Erre a kérdésre ad választ az axonometrikus ábrázolás legalapvetőbb összefüggése:

POHLKE[4] TÉTELE:

Legyen adott a síkban három, egy pontból kiinduló különböző irányú, tetszőleges hosszúságú szakasz. Mindig található a térben három egymásra páronként merőleges és egyenlő hosszú szakasz (ilyen például egy kocka egy csúcsából kiinduló három éle), amelyeket egy alkalmasan választott párhuzamos vetítés a sík megadott szakaszaiba képez le.

A párhuzamos vetítés során a párhuzamos egyenesek vetületei párhuzamosak maradnak (vagy egybeesnek), ezért bármely olyan rajzról, amely három – páronként közös oldallal rendelkező – paralelogrammából áll, azt mondhatjuk, hogy az egy kocka párhuzamos vetítéssel kapott képe. Ez a vetítés persze a legtöbbször nem merőleges az axonometrikus képsíkra (a papírunk síkjára). Éppen itt a probléma. Egy rajzra ugyanis többé-kevésbé rá merőleges irányból szokás ránézni, miközben az ilyen rajzot alkalmasint egészen lapos szögből és a megfelelő irányból kellene néznünk ahhoz, hogy „onnan nézve” olyannak tűnjön a kép, amely jól megközelíti a valódi alakzatot.

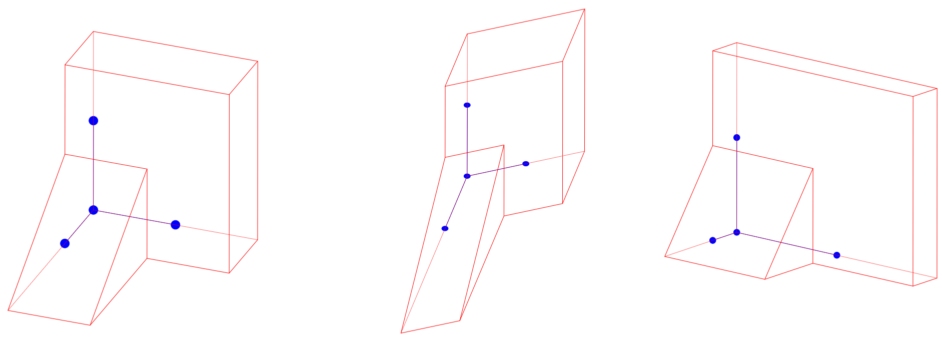
Az olyan axonometriát, amelyben a vetítés iránya nem merőleges az axonometrikus képsíkra, *ferdeszögű (klinogonális) axonometriának* nevezzük. Klinogonális axonometriában igen könnyű lerajzolnunk egy poliédert, hiszen arra kell csak ügyelnünk, hogy a párhuzamos szakaszok közötti párhuzamosság és aránytartás megmaradjon a képen is. Persze többnyire nem lehetünk elégedettek ezekkel a rajzokkal, hiszen nem könnyű eltalálnunk, honnan kellene ránéznünk a papírra ahhoz, hogy a valóságot jól közelítőnek vélhessük a képet.

[4] Karl Pohlke(1810-1876) német gimnáziumi tanár 1853-ban ismerte fel a nevéhez fűződő összefüggést, de csak 1860-ban közölte a *Darstellende Geometrie* című tankönyvében (bizonyítás nélkül).

Mondjuk azt, hogy a térbeli derékszögű koordináta-rendszer tengelyei legyenek ennek a kockának az él-egyenesei, és legyen egységnyi e kocka éle. A sík találomra felvett három, közös kezdőpontú szakasza eszerint e koordinátatengelyek irányát, és ezeken a tengelyeken az egységnyi szakasz képét jelentik. Ezeknek a szakaszoknak és a térbeli kocka élének a hányadosát az x, y, illetve *z* ***tengely menti rövidüléseknek*** nevezzük. (Ez a hányados alkalmasint 1-nél nagyobb is lehet: gondoljunk arra, hogy estefelé egy letűzött bot árnyéka nagyobb is lehet, mint maga a bot.)

Egy síkidom és a síkidom párhuzamos vetülete között un. affin kapcsolat áll fenn. Például az origóból kiinduló x, ill., y tengelyre illeszkedő egységszakaszok affin képei e szakaszoknak a (tetszőlegesen megadott) képe lesz. Ezek egyértelműen meghatározzák azt az affinitást, ami a (térbeli) xy sík és axonometrikus képe között fennáll. Így a Monge-ábrája alapján egyértelműen és rekonstruálható módon szerkeszthető az alakzat axonometrikus képe.

Ugyancsak egyértelműen és rekonstruálható módon ábrázolható minden térbeli derékszögű koordinátáival, tehát egy számhármassal megadott pont. Ugyanis az axonometrikus rendszer lényegében egy közös origóból kiinduló három számegyenesből áll. Az ábrázolás elnevezése is erre utal: az *axonometria* a latin axis = tengely és a mérés szavakból képzett szó.

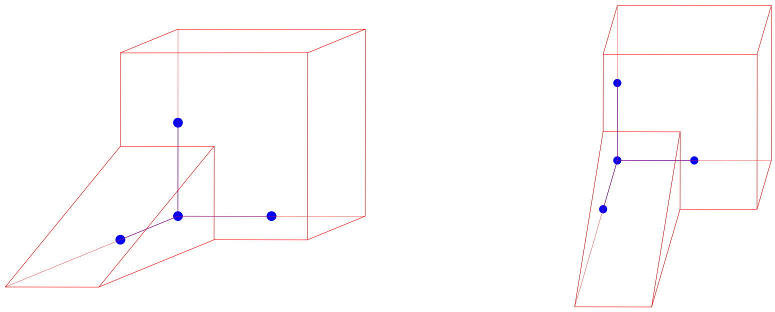


Egy konkáv poliéder klinogonális axonometrikus képei

Feladat: Egy klinogonális axonometrikus rendszert adunk meg, amelyben a tengelyek iránya és a rövidülések tetszőlegesen felvehetők.
Ennek speciális esete a kavalier axonometria, amelyben az Y és Z tengely merőleges egymásra, és ezeken a rövidülések egységnyiek.
Ezt a tengelykeresztet fogjuk felhasználni különböző alakzatok ábrázolására.
Egy konkáv poliéder: (4. fólia)

2.2. *A kavalier-axonometria*

Van a klinogonális axonometriának egy gyakran – talán túlságosan is gyakran – használt speciális esete, az úgynevezett *kavalier-axonometria***.** Ebben az axonometriában a térbeli koordináta-rendszer (*y,z*) síkja párhuzamos az axonometrikus képsíkkal, így az *y* és *z* tengelyen a rövidülés 1, az *x* tengelyen – amely ezekhez képest tetszőlegesen állhat – kisebb és nagyobb is lehet 1-nél. (Többnyire 1/2-nek vagy 2/3-nak szokás választani, de ez egyáltalán nem „kötelező”.)

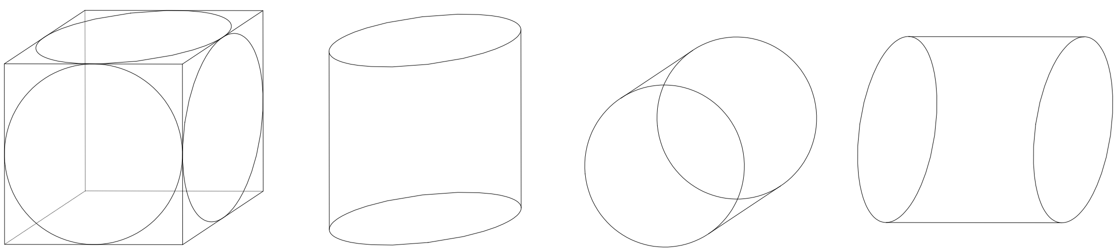


Ugyanannak az alakzatnak a két különböző kavalier axonometrikus képe

Ebben az ábrázolási módban a vetítés iránya szükségképpen ferde, ha ugyanis merőleges lenne, akkor pusztán egy elölnézeti vetületi képet kapnánk, amely természetesen nem elegendő az alakzat egyértelmű megadásához, rekonstruálásához.

A kavalier-axonometria előnye, hogy az (y,z) síkkal párhuzamos helyzetű síkban – mondjuk így: a homloksíkban – fekvő részletek egybevágók az axonometrikus képeikkel. Innen származik az elnevezése is: kiválóan alkalmas épületek olyan – némi térhatást mutató – ábrázolására, ahol az épület elölnézetének – például a várak kiugró díszes homlokzatának, az úgynevezett *kavaliereknek* – a hangsúlyozása volt a cél.

Ez az ábrázolási mód – bár könnyű benne például kockát vagy kockákból álló alakzatokat ábrázolni – olyan képet eredményez, amilyennek valójában soha nem látunk egy kockát. Rajzoljuk meg egy kavalier-axonometriában készült kocka négyzetlapjainak beírt köreit. A homloksíkba rajzolt kör képe kör, a másik kettőé egy-egy olyan ellipszis, melynek konjugált átmérői[5] a kocka szemközti éleinek a felezőpontjait összekötő szakaszok. Ebben az ábrázolási módban készült (kockába írt) egyik hengerről sincs olyan benyomásunk, hogy azok egyenes körhengerek, különösen ha nem látjuk vele együtt a köré írt kockát.



Kockába írt hengerek kavalier axonometriában

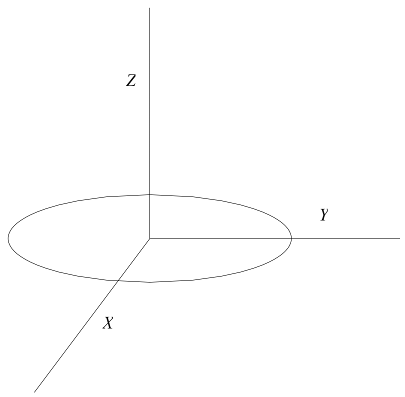
Feladat: *Ábrázoljunk klinogonális axonometriában egy kockát, a lapjaira rajzolt beírt köröket, majd a kocka beírt hengereit.*
Megoldás: *A kocka: 4. fólia*
A kocka a lapok beírt köreivel: 4., 5., 6. 7. fólia
Hengerek: 5. és 8. fólia
vagy: 6. és 9. fólia,
vagy: 7.és 10. fólia.

[5] Egy ellipszis *átmérője* bármely olyan húr, amely illeszkedik az ellipszis középpontjára. *Konjugált átmérőpár*: két olyan átmérő, amelyek egyike párhuzamos a másik végpontjaiba húzott érintőkkel. Ez a két átmérő közötti reláció szimmetrikus.

A kavalier-axonometria túlságosan elterjedt, a tankönyvek legtöbbször ebben az ábrázolási módban mutatnak be minden olyan térgeometriai szituációt, ahol derékszöget (is) kell ábrázolni. Ez pedig rossz irányba fejleszti diákjaink térszemléletét. Talán az ábrák készítésekor is érvényesíteni kellene a tudományos ismeretterjesztésnek (tankönyvírásnak) azt az általános elvét, miszerint szabad ugyan elhallgatni azokat a dolgokat, amelyek megértése mélyebb ismereteket igényelne az elvárhatónál, de félrevezetni az ismeretterjesztés alanyát (a diákot) nem szabad. Márpedig a kavalier-axonometria félrevezető térszemlélet-fejlesztési lehetőség.

Az axonometrikus ábrázolásban kevésbé jártas „alanyokkal” érdemes elvégeztetni az alábbi „kísérletet”:

> Minden előzetes bevezetés nélkül arra kérjük meg őket, hogy rajzoljanak (szabadkézzel) egy térbeli derékszögű koordináta-rendszert. A legtöbben – anélkül, hogy ezt tudatosan tennék – kavalier axonometrikus ábrát készítenek. Ezután megbeszéljük, hogyan szokás elnevezni a tengelyeket ahhoz, hogy *x, y, z* sorrendben jobbsodrású rendszert alkossanak, és abban állapodunk meg, hogy az (*x,y*) sík a „vízszintes sík”. Ezt követően tűzzük ki azt a feladatot, hogy rajzoljanak le ebben a „vízszintes” síkban egy origó középpontú kört. A nagyobb nyomaték kedvéért célszerű rögzíteni, hogy a feladat kitűzője egy térgeometriai szituációról beszél, a papírra viszont ennek a (síkbeli) rajzara kerül. Így a kísérlet résztvevőiben tudatosul, hogy ellipszist „kell” rajzolniuk.
>
> Gyakran keletkeznek az alábbi ábrának megfelelő rajzok.



Egy tipikus rajzolási hiba

Ezt követően tűzzük ki azt a feladatot, hogy húzzanak a körhöz érintőt az *y* tengellyel alkotott metszéspontjába. A feladat ismét egy térgeometriai szituáció, amely az ő rajzukon azt jelenti, hogy egyrészt az *x* tengely képével párhuzamos egyenest kellene rajzolniuk, másrészt a rajzon lévő ellipszis végpontjába kellene érintőt húzni, amelynek merőlegesnek kell lennie az ellipszis nagytengelyére, jelen esetben az *y* tengelyre. Hol a hiba ebben a rajzban? Nyilvánvalóan ott, hogy kavalier axonometriában nem így „kell” kinéznie egy vízszintes síkban fekvő körnek, miközben ha ránézünk egy vízszintes síkban fekvő körre, azt ilyennek „szoktuk” látni.

2.3. *Az ortogonális axonometria*

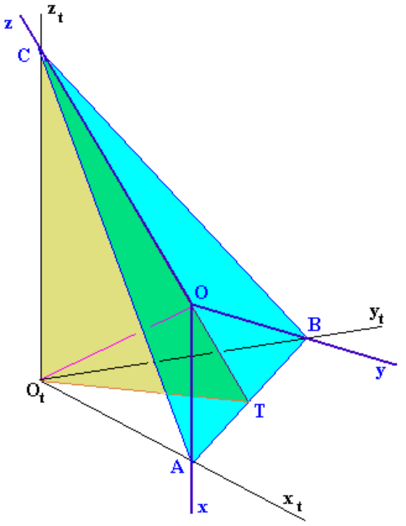
A térgeometriai alakzatok lerajzolására az *ortogonális* (merőleges) axonometria tűnik a legalkalmasabbnak, amely a térbeli tengelykeresztet az abban elhelyezett alakzattal együtt merőlegesen vetíti az axonometrikus képsíkra. Ugyanis ebben az ábrázolási módban –

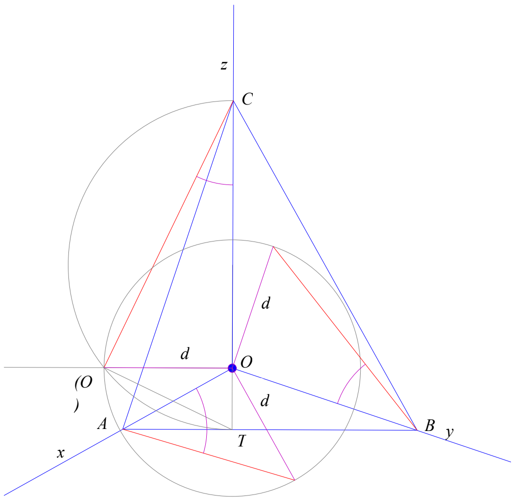
mint minden axonometriában – a párhuzamos és egyenlő szakaszok képei is párhuzamosak és egyenlők, így jól szemléltethetik például egy poliéder élei közötti kapcsolatokat. Ugyanakkor, mivel merőleges vetítéssel készültek a rajzok, ha merőleges irányból tekintünk a képre, majdnem pontosan olyannak látjuk azt, mint magát a térbeli alakzatot látnánk. Azért „majdnem”, mert valójában minden tárgyról *perspektív kép* képződik a szemünkben, amelyen a valóságban párhuzamos szakaszok nem látszanak párhuzamosnak, bár egy nem túl nagy tárgyat kellő távolságból nézve ez az „összetartás” alig észrevehető. Másrészt a két szemünk „térlátást” biztosít, amit egyetlen rajz soha nem tud nyújtani. Erre később fogunk kitérni. Most ismerkedjünk meg az ortogonális axonometriával. Egyrészt azért, hogy magunk is tudjunk ilyen rajzokat készíteni, másrészt azért, mert nem árt szem előtt tartanunk, hogy a számítógépes ábrák jórészt ezzel a módszerrel készülnek, és jó dolog „értő módon” szemlélnünk egy ilyen rajzot.

Ortogonális axonometrikus kép előállítása szerkesztéssel

A keletkező kép szempontjából mindegy, hogy a térbeli tengelykeresztet és az abban elhelyezett alakzatot az axonometrikus képsík elé vagy mögé helyezzük. Most gondoljuk azt, hogy mögötte van, és a koordinátatengelyeket az axonometrikus képsík az *A*, *B* és *C* pontokban metszi, melyek az úgynevezett nyomháromszög csúcsai.

Jelölje x_t, y_t, z_t, O_t a térbeli tengelykeresztet és origóját, x, y, z és O ezeknek az ABC síkra eső merőleges vetületeit. Mivel a vetítés iránya merőleges a képsíkra (az $ABC\Delta$ síkjára), ezért $O_tO \perp ABC\Delta$. Ebből adódóan $CO_tT\Delta \perp ABC\Delta$, ahol $T = CO \cap AB$. Másrészt, mivel $CO_t = z_t \quad \perp \quad (x_t y_t) = ABO_t\Delta$, ezért $CO_tT\Delta \perp ABO_t\Delta$. Így mivel a $CO_tT\Delta$-re mind az $ABC\Delta$, mind az $ABO_t\Delta$ merőleges, így ezek metszésvonala is: ezért $CO_tT\Delta \perp AB$. Ez azt jelenti, hogy a $CO_tT\Delta$ minden egyenese merőleges AB-re, így $CO \perp AB$. Hasonlóan látható be az $AO \perp BC$, valamint az $BO \perp CA$ összefüggés is.





[Tengelyek képsíkszögei ortogonális axonometriában]

Feladat: *Adjunk meg egy ortogonális axonometrikus rendszert az ABC nyomháromszögével. (Ennek hegyesszögűnek kell lennie.)*
Szerkesszük meg a tengelyek képsíkszögeit, ez alapján a rövidüléseket

Javasoljuk a szerkesztési lépések nyomon követését:

Distanc szerkesztése:	*(1. 3. fóla)*
Képsíkszögek szerkesztése	*(1., 3., 4. fólia)*
Rövidülések	*(1., 2., 5. fólia)*
Egy alakzat rajza:	*(2., 6. fólia).*

Eredményünk azt jelenti, hogy az $ABC\Delta$ magasság-egyenesei lesznek a tengelyek merőleges vetületei, magasságpontja az O pont.

Eszerint egy ortogonális axonometrikus rendszert megadhatunk

- a három tengely képével;
- a hegyesszögű ABC nyomháromszöggel;
- a tompaszögű AOB háromszöggel.

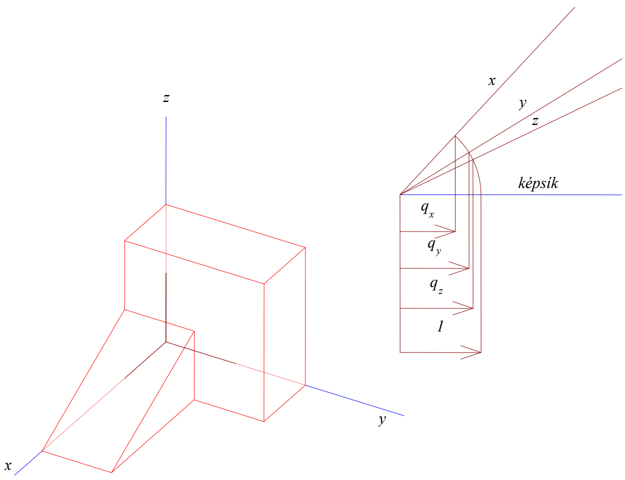
Mindhárom esetben ugyanahhoz az ABC nyomháromszöghöz jutunk, amelynek a magasságpontja O.

Feladatunk az, hogy ezekből az adatokból kiindulva megszerkesszük az ortogonális axonometria rövidüléseit: a térbeli tengelyekre mért egységnyi szakaszok képeit. Ehelyett a térbeli tengelyeknek a képsíkkal bezárt szögeit fogjuk megszerkeszteni, mivel ha egy tetszőleges szakaszt szeretnénk felmérni valamelyik tengelyre, akkor elegendő ezt a szakaszt felmérnünk az adott tengely képsíkszögének az egyik szárára, és ennek a másik szárra eső merőleges vetülete máris a keresett – adott rövidülésű – szakasz lesz.

A z_t tengely képsíkszöge a CO_tT háromszög TCO_t szöge lesz. Ennek a megszerkesztéséhez elegendő a képsíkba (a papírunk síkjába) forgatni a derékszögű $CO_tT\Delta$-et, melynek a CT átfogója, valamint a befogójának az átfogóra eső merőleges vetülete, O már rajta is van a rajzon. A CT Thalész-körének a megszerkesztésével kapott $C(O)T\Delta$ tartalmazza a keresett $(\mathrm{O})\mathrm{CO}$□ -et, másrészt „melléktermékként" megkaptuk a $d=(O)O=O_tO$ távolságot, melyet az ortogonális axonometria *distancának* szokás nevezni.

Ugyanezt a szerkesztést elvégezhetnénk a másik két tengely képsíkszögének a meghatározásához is, de – mivel már a d distanc ismert, könnyen megszerkeszthetjük azokat a derékszögű háromszögeket, melyek egyik befogója AO, illetve BO, a keresett képsíkszögekkel szemközti befogója pedig d.

Mire ezt a szerkesztést elvégeztük, zavaróan sok vonal került az ábránkra ahhoz, hogy még ugyanerre a rajzra zsúfoljuk valamilyen geometriai alakzat axonometrikus képét is. Ezért célszerű egy külön papírra átmásolnunk a tengelyek axonometrikus képeit, valamint az imént megszerkesztett képsíkszögeket. Így már elegendő pusztán a szerkesztendő alakzatra (poliéderre) figyelnünk.



Egy alakzat képe ortogonális axonometriában

A fenti szerkesztés célja lényegében az volt, hogy megszerkesszük a koordináta-tengelyeken képződő rövidüléseket. Ezek ismeretében már ugyanúgy kell egy geometriai alakzatot (poliédert) lerajzolni, mint azt a klinogonális axonometriában tettük, csak az így kapott rajz sokkal „valóságosabbnak" tűnik. Azt, hogy most lényegében a koordináta-tengelyek képsíkszögeit szerkesztettük meg, jól ki tudjuk használni, ha nem csak az egységnyi, hanem egy tetszőleges szakaszt szeretnénk „felmérni" a koordinátarendszer valamelyik tengelyére.

Az ortogonális axonometrikus tengelykereszt rövidüléseit más úton is megkaphatjuk, rövidebb szerkesztéssel, de kissé mélyebb meggondolások árán. Amellett, hogy megszerkesztjük ezeket a szakaszokat, megadunk egy transzformációs képletet is, amellyel kiszámíthatók egy térbeli koordinátáival adott pont axonometrikus képének a (képernyő síkjában vett) koordinátái, így bármely poliéder csúcsainak megadhatjuk az axonometrikus képeit, amelyek alapján a programozásban kissé jártas olvasóink a képernyőn is elő tudják állítani egy poliéder ortogonális axonometrikus képét.

■ Ortogonális axonometrikus kép előállítása számítógéppel

A meggondolás lényege, hogy alkalmas módon elhelyezzük a képsíkhoz képest a térbeli derékszögű koordináta-rendszer három tengelyén felvett egységnyi szakaszát, az O_tX_t, O_tY_t, O_tZ_t szakaszokat, majd megszerkesztjük a képsíkra eső merőleges vetületeiket. Egyben kiszámoljuk e szakaszok végpontjainak a képernyő koordináta-rendszerében vett koordinátáit.

Akkor, amikor egy számítógép képernyőjén látunk mozogni egy térgeometriai alakzatot, vagy éppenséggel mi mozgatjuk azt, arra kell gondolnunk, hogy „mihez képest" mozog ez az alakzat. A számítógépes rajzokat előállító programozók úgy gondolkodnak, hogy van egy a képernyőhöz – mondjuk inkább így: a képsíkhoz – képest rögzített síkbeli koordináta-rendszer, valamint van egy mozgó térbeli koordináta-rendszer, amelyben leírjuk az adott alakzatot – például egy poliédert. Amikor axonometrikus képet állítunk elő (akár szerkesztéssel, papíron, akár számolással a képernyőn) lényegében a „mozgó" térbeli koordináta-rendszerben megadott pontoknak az álló koordináta-rendszerben vett képét kell meghatároznunk.

Legyenek a képsík (álló, rögzített) koordináta-rendszerének a tengelyei u (a vízszintes) és v (a függőleges). Ideiglenesen tekintsük ezt a koordináta-rendszert is térbelinek, legyen a harmadik, a képsíkra merőleges tengelye w, amely felénk mutat, ha az (u, v, w) rendszer jobbsodrású.

Először legyen O_t, X_t és Y_t a papírunk (képernyőnk) síkjában úgy, hogy a két koordináta-rendszer origója essen egybe, az Y_t pont illeszkedjen az u, X_t a v tengelyre. Ekkor – amennyiben a térbeli koordináta-rendszerünk is jobbsodrású – az O_tZ_t vektor ugyancsak a képsíkra merőlegesen áll, és felénk mutat. Ebben a helyzetben a vizsgált pontok koordinátái az (u, v, w) rendszerben:

$$\begin{aligned} X_t &= (\ 0, -1, 0) \\ Y_t &= (\ 1, \ 0, 0) \\ Z_t &= (\ 0, \ 0, 1) \end{aligned}$$

Ekkor még az X_t pont a képsík C, az Y_t pedig a B pontjával esik egybe, ahol A, B, C és D az u, illetve a v tengelynek az origótól egységnyi távolságra lévő pontjai.

Két forgatással elérhető, hogy a térbeli koordináta-rendszer minden olyan tetszőleges helyzetet felvegyen a képsíkhoz képest, amelyben a z tengely képe a képsík függőleges egyenese. Először forgassuk el az így beállított térbeli koordináta-rendszert a saját $z_t = O_tZ_t$ tengelye körül $\vartheta = COX_t\angle$ -gel. Térbeli tengely körüli forgásról lévén szó, kissé nehézkesebb meghatároznunk, hogy milyen a forgás iránya. Állapodjunk meg abban, hogy a forgásirány akkor pozitív, ha a forgástengely irányával – itt az $\overrightarrow{OZ_t}$ iránnyal – ellentétes irányba nézve azt pozitívnak látjuk. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy – amíg a z_t tengelyt nem mozdítjuk meg – ϑ-t növelve azt látjuk a képen, hogy az X_t és vele együtt az Y_t pont is negatív irányban mozdul el. (Azért ezt az irányt és szöget rögzítettük, mert a legtöbb térgeometriai alakzatok számítógépes ábrázolását végző program is ezt teszi.)

Ekkor a térbeli egységvektorok végpontjai:
$$\begin{aligned} X_t &= (-\sin\vartheta, \ -\cos\vartheta, \ 0) \\ Y_t &= (\ \cos\vartheta, \ -\sin\vartheta, \ 0) \\ Z_t &= (\ 0, \ 0, \ 1) \end{aligned}$$

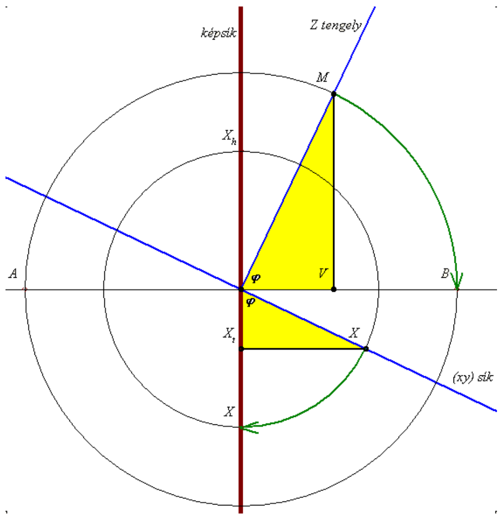
A másik forgatás legyen a képsík $u=OB$ tengelye körüli φ szögű forgatás. Egy ilyen forgatás során a Z_t pont az u tengelyre, így a képsíkra is merőleges körön mozog, amelynek az átmérője CD, az X_t pont egy ezzel párhuzamos síkú $\cos\vartheta$, az Y_t egy $\sin\vartheta$ sugarú X_hX_t, illetve Y_hY_t átmérőjű körön mozog.

Körzővel-vonalzóval vagy például az EUKLIDES dinamikus szerkesztőprogrammal meglepően könnyen megszerkeszthetjük a térbeli koordináta-rendszerünk (ortogonális axonometrikus) képét. Legyen $\varphi = BOM\angle$, ahol az M pont a k kör tetszőleges pontja. A Z_t pont képe – amely a képsík v tengelyére illeszkedik – az M pont CD-re eső merőleges vetülete: Z.

Mivel a z tengellyel együtt forog az (xy) sík is, az (xy) sík minden pontjának a merőleges vetülete olyan arányban kerül közelebb vagy távolabb a képsík u tengelyéhez, mint az M pont u-ra eső merőleges vetülete, V az origóhoz:

$$\frac{X_h X}{XX_t} = \frac{Y_h Y}{YY_t} = \frac{AV}{VB}$$

Mindezt talán világosabbá teszi egy olyan rajz, amelyen „profilból” mutatjuk a képsíkot:



A képernyő síkja és a térbeli derékszögű koordinátarendszer oldalnézeti képe

Ennek megfelelően a térbeli egységvektorok végpontjai az *(u, v, w)* koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} X_t &= (-\sin\vartheta,\ -\cos\vartheta\cdot\cos\varphi,\ \cos\vartheta\cdot\sin\varphi) \\ Y_t &= (\ \cos\vartheta,\ -\sin\vartheta\cdot\cos\varphi,\ \sin\vartheta\cdot\sin\varphi) \\ Z_t &= (\quad 0,\qquad \sin\varphi,\qquad \cos\varphi) \end{aligned}$$

Ezek közül az első két koordináta adja az egységvektorok axonometrikus képeinek a koordinátáit. Ha adott térbeli koordinátáival egy $P_t(x, y, z)$ pont, akkor ennek a pontnak az axonometrikus képét, $P(u, v)$-t az alábbi képlettel számíthatjuk ki:

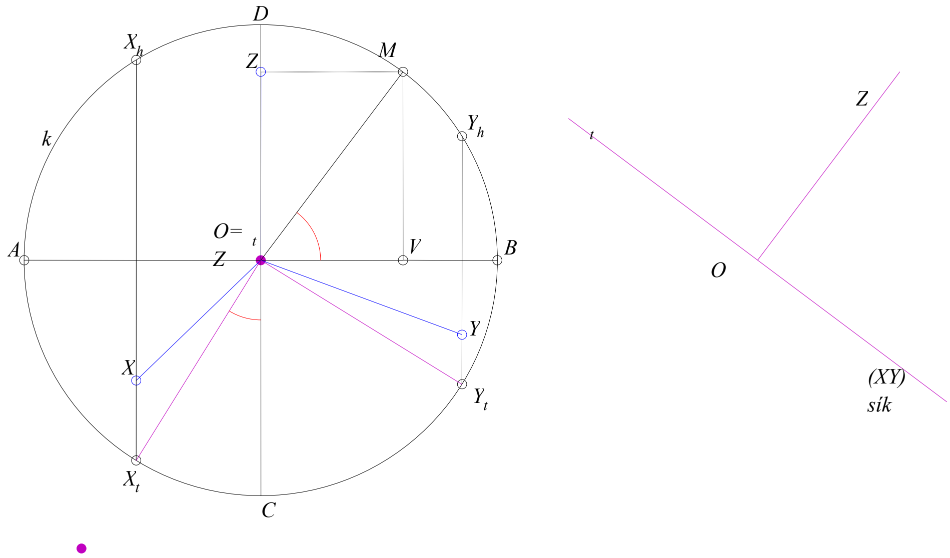
$$\begin{aligned} u &= -x\cdot\sin\vartheta + y\cdot\cos\vartheta \\ v &= -x\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi + z\cdot\sin\varphi \end{aligned}$$

„Melléktermékként” megkaptuk azt is, hogy ez a *P* pont milyen távolra van a képsíktól:

$$w = x\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi + y\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi + z\cdot\cos\varphi$$

Erre az adatra akkor lesz szükségünk, ha majd perspektív képet szeretnénk rajzolni a képernyőre.

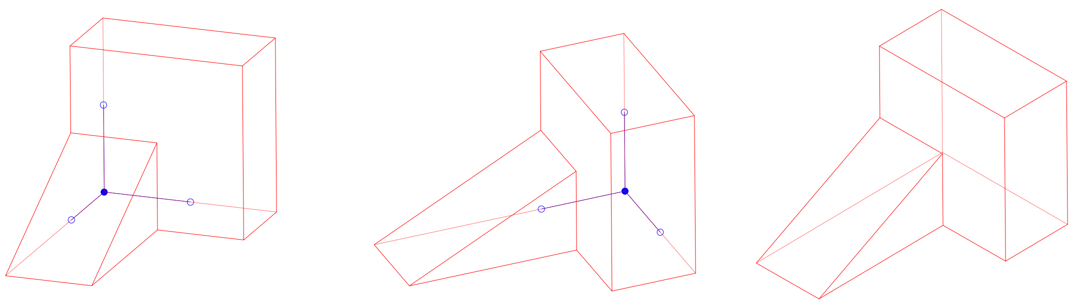
A fenti képletekben szereplő φ és ϑ szögek a földrajzi helymeghatározásban is használt *polár-koordináták.* Tulajdonképpen e polár-koordináták irányából nézve képeztünk ortogonális axonometrikus képet a koordináta tengelyekből és az azokon mért egységnyi szakaszokból.



Rövidülések szerkesztése a vetítési irány polár-koordinátáiból

Feladat: *Adjunk meg egy ortogonális axonometrikus rendszert a z tengely körüli, valamint a képsík vízszintes tengelye körüli forgatásokkal.*
A megszerkesztett tengelyirányokat ill. rövidüléseket a mozgatható F és V pontok vezérlik.
Mivel ortogonális axonometrikus rendszer felvételére ez a legrövidebb és legkönnyebben vezérelhető módszer, az alakzatok (kocka, dodekaéder, ikozaéder) ortogonális axonometrikus képnek a megszerkesztésére ezt a rendszert használjuk, a szerepátadás módszerét alkalmazva.
Beállított animáció: az F pont körbeforgatásával a rendszer a z tengely körül forog.
3. fólia: a rövidülések szerkesztése.

A két változtatható szöget beállító alappontok mozgatásával rendkívül könnyen változtathatjuk az ábrázolandó poliéder helyzetét abban az – animációt is tartalmazó – EUKLIDES programban, amellyel az alábbi ábrák készültek:

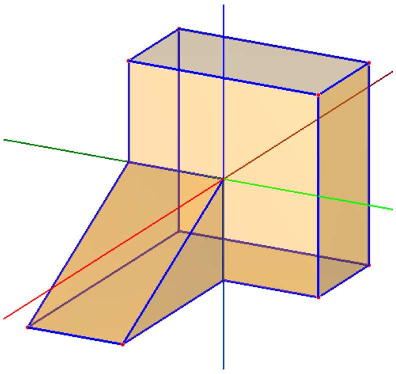


Egy poliéder ortogonális axonometrikus képei

Feladat: *Ábrázoljuk ortogonális axonometriában a korábban klinogonális axonometriában már előállított alakzatot.*
Megoldás: *A feladathoz azt az ortogonális axonometrikus rendszert választottuk, amelyben a mozgatható F és V pontokkal, valamint az e egységvektorral adtuk meg az ortogonális axonometrikus rendszert.*
A az alakzatot a klinogonális axonometrikus rendszerből vettük át, a fájl beszúrása menüponttal, majd áthelyeztük az ortogonális axonometrikus rendszerbe a rendszert meghatározó pontok szerepátadásával.
Animációként beállítottuk a Z tengely körüli forgást.

A mellékékelt két EUKLIDES fájl felhasználói észrevehették, hogy az előbbi fájlban a kapott alakzatoknak a z tengely körüli „forgatását” az F pont mozgatásával, az előre-hátra döntését vagyis a képernyő u tengelye körüli forgatását a V pont mozgatásával értük el. Ehhez az F pontnak csak a vízszintes, V-nek csak a függőleges irányú mozgását használtuk ki. E kettőt össze is lehet vonni. Ezt tettük az utóbbi fájlban, ahol egyetlen M pont mozgatásával értük el ezt a két forgatást.

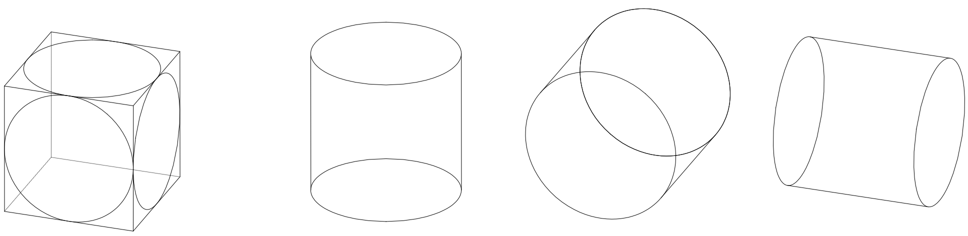
Ez teszi a legtöbb térgeometriai alakzatok ábrázolását végző program, így az Euler3D is, ahol a lenyomott egérgomb pontosan ugyanígy mozgatja a kapott alakzatot.



Egy poliéder ortogonális axonometrikus képe az Euler3D –ben.

A fenti Euler3D rajzot az egérrel mozgatva észrevehetjük, hogy a képernyő ablak alsó sorában két paraméter érték változik. Ezek az értékek e két forgatás szögének (vagyis a vetítési irány polárkoordinátáinak a fokokban mért értékei.

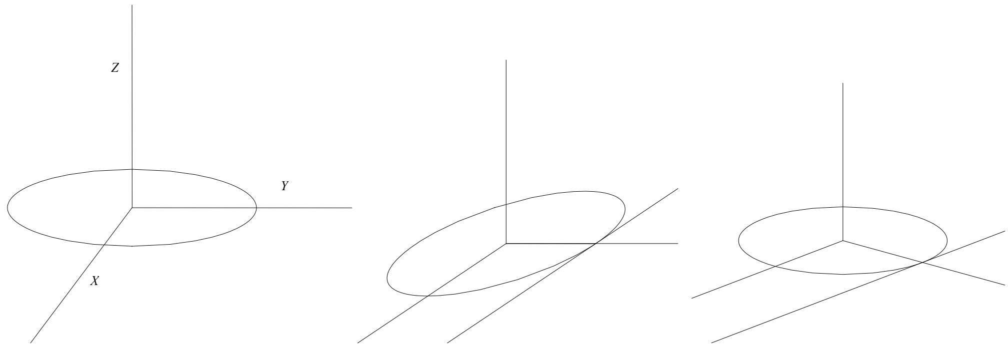
Rajzoljunk most le egy kockába írt egyenes körhengert ortogonális axonometriában. Figyeljük meg, hogy bárhogyan áll is egy ortogonális axonometriában rajzolt egyenes körhenger, a kapott kép úgynevezett kontúr-alkotója minden esetben az alap-, illetve fedőkör képeként kapott ellipszist a nagytengely végpontjaiban érinti.



Kockára rajzolt körök és kocka beírt hengerei ortogonális axonometriában.

Feladat:*Ábrázoljunk egy kockát a lapokra rajzolt beírt körökkel együtt ortogonális axonometriában.*
Megoldás: *Beolvastuk az Ortax2 fájlt, majd a klinog2-t, amelyen a kívánt rajz szerepel klinogonális axonometriában, és szerepátadással átvittük a klinogonális axonometria rövidüléseit meghatározó 4 pontot az ortogonális axonometria rövidüléseit adó pontokba. A fájlban beállított animáció a Z tengely körüli forgás.*

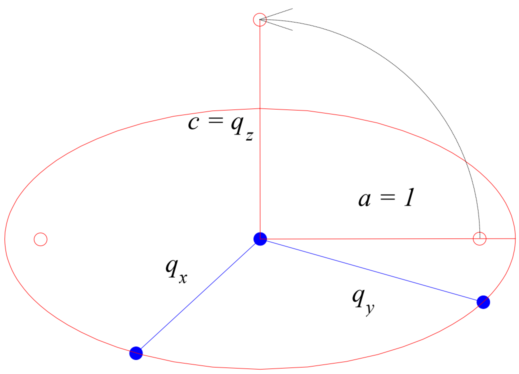
Visszatérve a „hibás” rajzunkra: vagy az (xy) síkban fekvő kört is kavalier-axonometriában kellett volna rajzolnunk, vagy ha vízszintes tengelyű ellipszist szeretnénk kapni, a vízszintes síkban fekvő kör képeként – legalább közelítőleg – ortogonális axonometrikus tengelykeresztet kellett volna felvennünk. (Most derült fény a feladat kitűzőjének a galádságára, hogy előbb a tengelykeresztet rajzoltatta meg, és csak ezt követően a kör képét.)



A hibás rajz és a két javítási lehetősége

Olykor sokkal könnyebb a gombhoz megkeresni a megfelelő kabátot. Most is ez a helyzet. Legyen adott egy tetszőleges – többnyire vízszintes nagytengelyű – ellipszis, amelyet tekintsünk egy ortogonális axonometrikus tengelykereszt (xy) síkjában felvett egységnyi sugarú kör képének. Ehhez keressük meg a tengelyeket, és azokon a megfelelő rövidüléseket.

A z tengely természetesen a nagytengelyre merőleges lesz. Mivel a nagytengely fele: a=1, a kistengely a korábbi jelölésnek megfelelően $b = \cos\varphi$, a z tengelyen lévő rövidülés pedig $q_z = \sin\varphi = \sqrt{a^2 - b^2} = c$, vagyis éppen fókusztávolság fele. Az x és y tengelyeken mért rövidülések végpontjai az ellipszisre illeszkednek, így ezek egyikét tetszőlegesen megadhatjuk az ellipszis egy általános helyzetű (azaz a nagy- és kistengely végpontjaitól különböző) pontjával. A másik tengelyt és ezen a rövidülést az ehhez konjugált átmérő végpontjaként kapjuk. Ezzel az ortogonális axonometria tengelykeresztjének és rövidüléseinek egy újabb, talán a legrövidebb szerkesztési lehetőségéhez jutottunk.



[Az ortogonális axonometrikus rendszer megadható két tengellyel és az azon mért rövidülésekkel.]()

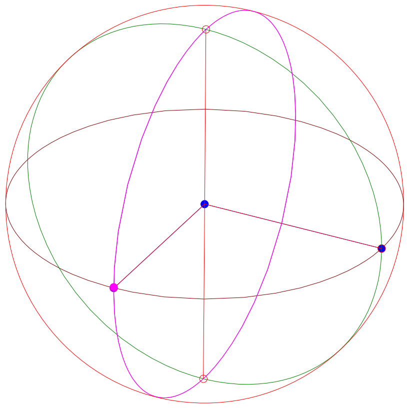
Feladat: *Legyen adott egy ellipszis konjugált átmérőivel. Adjuk meg azt az ortogonális axonometrikus rendszert, amelyben ez az ellipszis egy kör axonometrikus képe.*
Megoldás: *Először a konjugált félátmérőkből szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit, majd a fúkuszpontjait. Ezt t pl. az un Rytz szerkesztéssel kaphatjuk meg.*

1. és 3. fólia.

Henger rajza: 1. és 2. fólia.

A hengeré és a köré írt kocka : 1. 2. 4. fólia

Ha a két tengelyen a rövidülés egy ellipszis két konjugált fél-átmérője, akkor az egység a nagytengely fele, a harmadik tengely iránya a kistengely iránya, ezen a rövidülés az ellipszis fókusztávolságának a fele.



Gömb főkörmetszetei ortogonális axonometriában

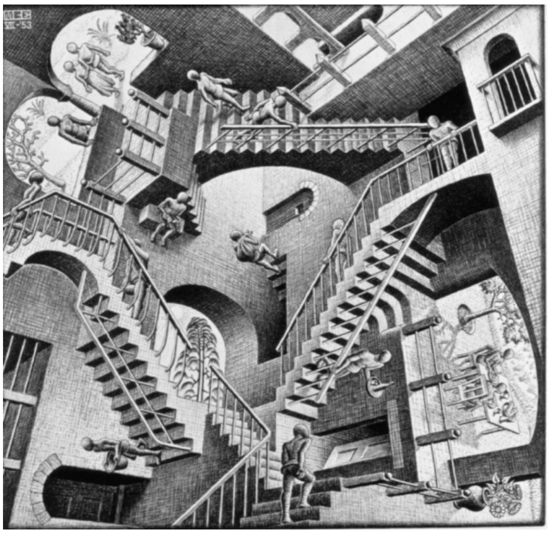
(rövidüléseket), Szerkesszük meg a harmadik tengelyt és azon a rövidülést.
Megoldás: *Lényegében ellipszist kell szerkesztenünk aegy konjugált átmérőpárjából. A harmadik tengely a kistengelyiránya, azon a rövidülés az ellipszis fél-fókusztávolsága.*
(1., 2., 3., 4.fólia)
Ellenőrzésként ugyanezt a szerkesztést elvégezzük a másik két tengelyre, így három, egymásra páronként merőleges, egységsugarú, origó középpontú kör képét kapjuk. A három kör rajzát alkotó ellipszisek nagytengelyei egyenlők, ez az egység. Egy ekkora sugarú kor a gömb ortogonális axonometriában vett kontúrköre.
(4., 5., 6., 7. fólia)
Animáció egy körbe forgó kör képéről: 8. fólia.

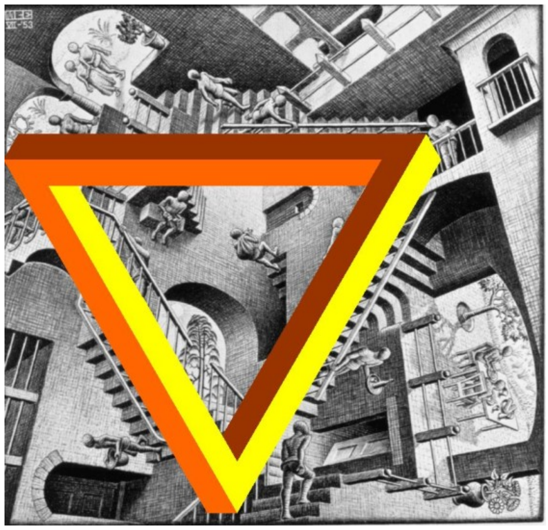
Így – pl. a Rytz szerkesztés[6] felhasználásával – igen könnyen készíthetünk ortogonális axonometrikus képet egy gömbnek a koordinátasíkokkal alkotott főkör-metszeteiről, amelyek mind azonos nagytengelyű ellipszisek.

Az izometrikus (egyméretű) axonometria

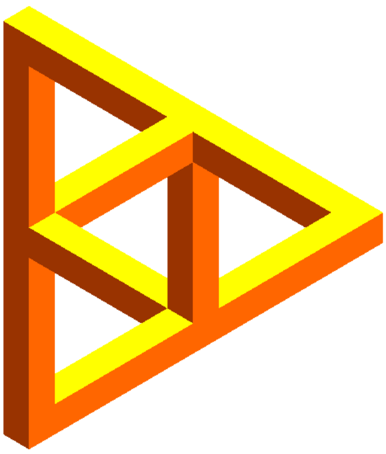
Ortogonális axonometrikus képet szerkesztve majdnem minden beállítás „helyes" rajzot eredményez. Azonban az ortogonális axonometriának is vannak speciális esetei. Legkönnyebb ortogonális axonometrikus képet készíteni az úgynevezett *izometrikus* (egyméretű) axonometriában, amelyben a tengelykereszt képei 120°-os szöget zárnak be egymással, így a rövidülés mindhárom tengelyen ugyanakkora, ezért a rövidülések szerkesztésével nem is kell foglalkoznunk. Ebben az ábrázolási módban például egy kocka legközelebbi és legtávolabbi csúcsának egybeesik a képe, ami ilyen „lehetetlen háromszög" készítésére adhat ötletet, amilyennel Escher művészetében gyakran találkozunk

[6] A műszaki gyakorlatban gyakran használt szerkesztési eljárás, az un. Rytz szerkesztés, amely az ellipszis két, egymáshoz konjugált átmérőjéből állítja elő az ellipszis tengelyeit.





M.C. Escher: Relativitás

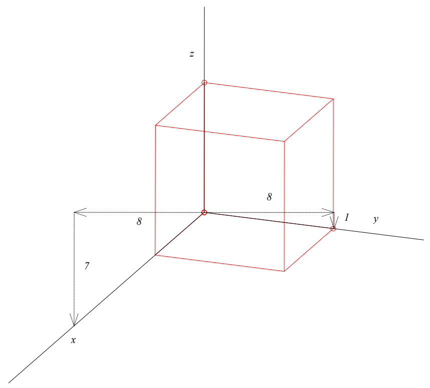


Escher háromszöge és egy kocka izometrikus axonometriában

Azt mondhatjuk, hogy az általános helyzetbe beállított ortogonális axonometrikus kép a legalkalmasabb térgeometriai alakzatok szemléltetésére. Ezzel a kijelentéssel bizonyára olvasóink is egyet fognak érteni, ha összehasonlítják a kocka lapjaira rajzolt körök és a kockába írt hengerek korábbi kavalier-axonometrikus képeit az ortogonális axonometrikus képekkel!

Ilyen rajz készítése elvárható attól „profi" grafikustól, aki például tankönyvi ábrák készítésére vállalkozik, de nem feltétlenül várható el attól a matematikatanártól, akinek nap mint nap fel kell skiccelnie egy-egy kockát vagy bármilyen poliédert a táblára. Lehetne azt tanácsolni, hogy egyszer készítsen el egy „jó" ortogonális axonometrikus rajzot, és azt „sablon"-ként alkalmazza minden olyan alkalommal, amikor igényesebb rajz készítésére van szüksége. Egyszerűbb azonban „műszaki távlatban" rajzolnia. Ez a klinogonális axonometriának egy olyan speciális esete, amely meglepően jól megközelít egy meghatározott irányú tengelyekkel megadott ortogonális axonometrikus képet.

A műszaki távlatban – amelyet helyesebb lenne inkább műszaki axonometriának neveznünk – az x tengely meredeksége $\frac{7}{8}$, az y tengelyé $-\frac{1}{8}$. Ilyen „tengelybeállítás" mellett az ortogonális axonometriában kapott rövidülés az y és z tengelyen majdnem ugyanannyi, az x tengely rövidülése ennek közel a fele. Így nem követünk el nagy hibát, ha rendre: $q_x = \frac{1}{2}$; $q_y = q_z = 1$-nek tekintjük az egy-egy tengelyre eső rövidüléseket.



Kocka ortogonális axonometriában és műszaki távlatban

Példa arra, hogy a kocka ortogonális axonometrikus képe "beállítható" úgy (az F és V pontokkal) , hogy a kaptt kép erősen megközelítse a műszaki távlatban készített képet.
(5. fólia: ortogonális axonometria)
(6. fólia: műszaki távlat.)

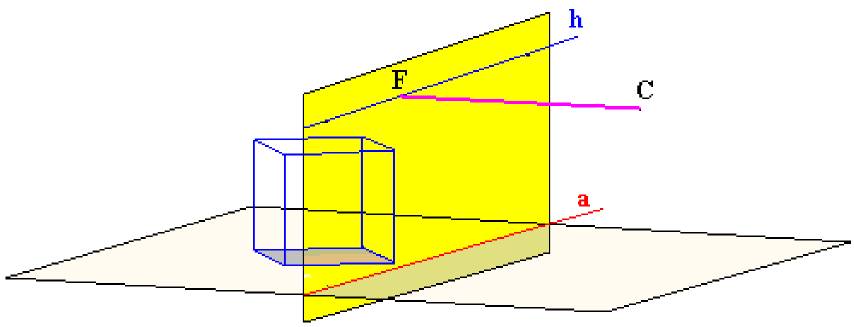
Az ortogonális axonometrikus képpel kapcsolatban legfeljebb az a kritika érhet bennünket, hogy nem „tartanak össze” a valóságban párhuzamos egyenesek, nincs „távlata” a képnek.

Ezt a problémát a perspektív ábrázolás oldja fel. Ismerkedjünk meg vele, ugyancsak az előnyök és hátrányok összevetése céljából.

3. Perspektíva

3.1. Perspektív kép szerkesztése

A perspektív ábrázolás ugyancsak egyetlen *perspektív képsíknak* nevezett képsíkot használó ábrázoló geometriai módszer, amelyben a vetítősugarak a tér egy adott pontjára, a *vetítés centrumára* illeszkednek.

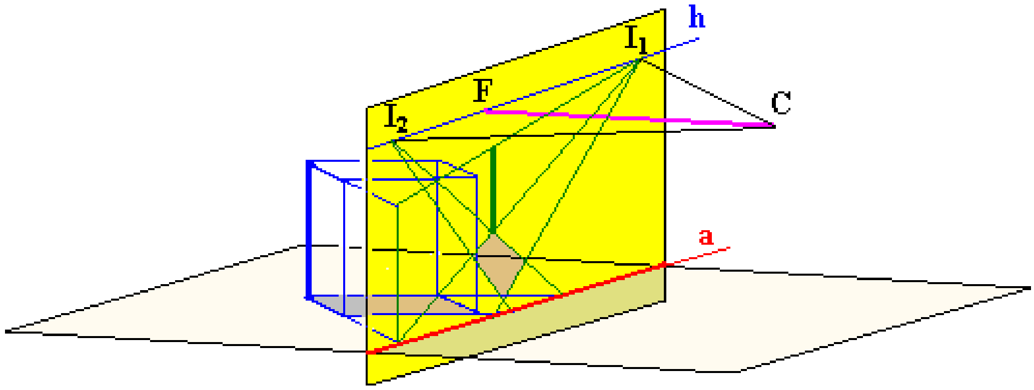


Az ábrázolandó tárgyat a képsíknak a centrummal ellentétes félterében helyezzük el

Tekintsük a π perspektív képsíkot függőlegesnek. Az ábrázolandó tárgyat – jelen esetben egy kockát – helyezzük el egy erre merőleges „vízszintes" síkon, az úgynevezett *alapsíkon*, a képsíknak a centrummal ellentétes félterébe úgy, hogy a képsíkkal ne legyen párhuzamos lapja. Magát a *C* centrumot a képsíkra eső merőleges vetületével, a *főponttal* (*F*) és a képsíktól mért távolságával, a *distanccal* (*CF=d*) , az alapsíkot a képsíkkal alkotott metszésvonalával az *a alapvonallal* adjuk meg. Az alapsíkkal párhuzamos és a centrumra illeszkedő sík a *horizontsík*, ennek a képsíkkal alkotott metszésvonala a *h horizontvonal,* amely párhuzamos az alapvonallal, és illeszkedik a főpontra.

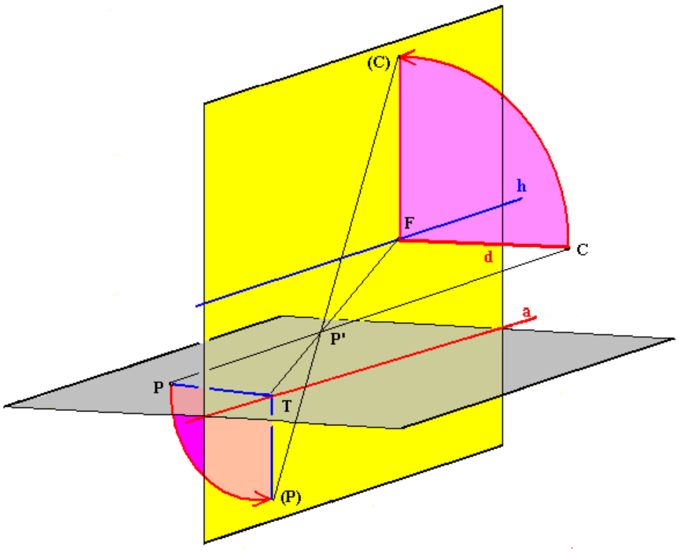
Az alapsíkban fekvő *e* egyenesnek az *e'* képe a (*Ce*) síknak a képsíkkal alkotott metszésvonala. A képsík *e'* egyenesének van egy nevezetes pontja, az úgynevezett *iránypont* (I_1), amelyet a *C* ponton átmenő, *e*-vel párhuzamos $\bar{e}$ egyenes metsz ki a képsíkból: $I_1 = \bar{e} \cap \pi$. A tér összes *e*-vel párhuzamos egyenesének ugyanaz az iránypontja, vagyis az *e*-vel párhuzamos egyenesek képei ebben a pontban metszik egymást. Az alapsíkban fekvő, vagy ezzel párhuzamos egyeneseknek az iránypontjai a *h* horizontvonalra esnek.

Egy kocka élei három különböző irányt határoznak meg, melyek közül most egy párhuzamos a perspektív képsíkkal, ezért ehhez az irányhoz nem tartozik iránypont.



A kocka másik két irányához tartozó iránypont, I_1, I_2 és *C* egy derékszögű háromszöget alkot, amelynek az átfogójához tartozó magassága a *d=CF* distanc.

Forgassuk a perspektív képsíkba (a papírunk síkjába) az alapsíkot az alapvonal körül. Valamint a *C* centrumot tartalmazó horizont síkot egy ugyanilyen irányú forgással a horizont körül. E forgás közben az alapsík valamely *P* pontja leírja a *T* középpontú *P(P)* körívet, a *C* centrum pedig az *F* középpontú *C(C)* körívet. Ezeknek a köríveknek a szárai párhuzamosak: $\mathrm{PT} \| \mathrm{CF}$ és $(\mathrm{P})\mathrm{T} \| (\mathrm{C})\mathrm{F}$ így e két körív <u>hasonló helyzetű</u>. A hasonlósági pontjuk a P pont perspektív képe a $\mathrm{P}' = (\mathrm{CP}) \cap \pi$ pont. Így a *(C), p'* és *(P)* pontok egy egyenesre esnek, azaz *kollineárisak*.



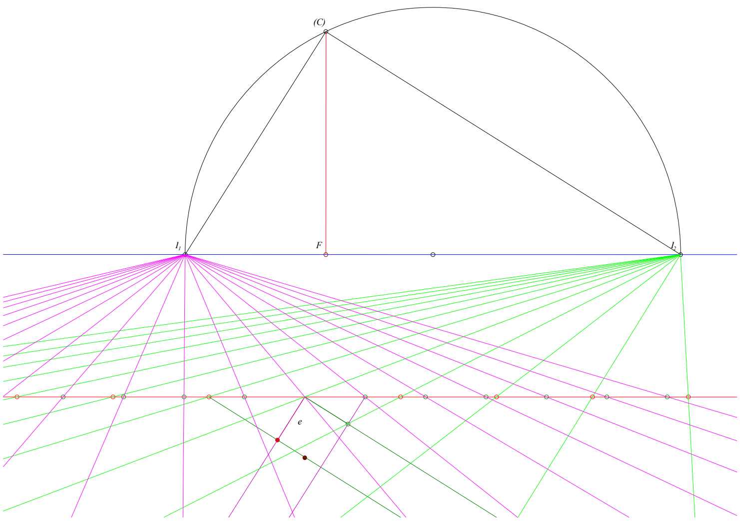
Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az alapsík perspektív képe és az alapvonal körüli leforgatottja között olyan centrális kollineáció[7] áll fenn, melynek centruma a perspektív ábrázolás centrumának a horizont körüli képsíkba forgatottja, tengelye az alapvonal, eltűnési egyenese a horizont vonal.

Megfordítva: ha az alapsík képsíkba forgatottjából, ill. egy oda rajzolt alakzat „valódi" képéből állítjuk elő az alapsík ill. abba rajzolt alakzat perspektív képét, akkor ennek a centrális kollineációnak természetesen az irányegyenese lesz a horizont vonal.

Ez ad lehetőséget arra, hogy egy alapsíkban fekvő négyzet leforgatott képét, valamint a *C* pont *h* horizont körüli leforgatottját megadva megszerkeszthessük az úgynevezett „Möbius[8]-rácsot", amely az alapsíkban fekvő négyzetrács perspektív képe. Ha ugyanis ismerjük a kocka alapsíkban fekvő éleinek a képsíkkal alkotott döféspontjait (az alapvonallal alkotott metszéspontjait), akkor az általuk meghatározott szakaszokkal „beskálázva" az alapvonalat, a kapott pontokat a megfelelő iránypontTal kell csak összekötnünk.

[7] A *centrális kollineáció* egy projektív geometriai transzformáció. Ennek a tárgyalására, gyakorlati alkalmazási lehetőségeire itt nem térünk ki, amely a végtelen távoli térelemekkel kibővített euklideszi síknak egy olyan egyenestartó leképezése, amelyben ez egymásnak megfelelő pontokra illeszkedő egyemesek egy pontra, a *kollineáció centrumára* illeszkednek. Belátható, hogy minden centrális kollienációnak van *tengelye* amelyre az egymásnak megfelelő egyenesek metszéspontjai illeszkednek. A centrális kollineáció *eltűnési egyenes*e az az egyenes, amelynek a képe a projektív sík végtelen távoli egyenese, és *irányegyenese* az az egyenes ,amely a végtelen távoli egyenesnek a képe.

[8] August Ferdinand Möbius (1790–1868). Csillagász, majd a lipcsei egyetem matematikaprofesszora. Neve ma már leginkább a róla elnevezett topológiai konstrukcióról, az úgynevezett Möbius-szalagról ismert.



[Perspektív kép szerkesztése]

Feladat: *Adjunk meg egy perspektív rendszert az alapvonallal, az F főponttal és a d distanccal.*

1. *Rajzoljunk az alapsík képsíkba forgatottjában egy négyzetet, ennek a felhasználásával egy az alapsíkban fekvő négyzetrács képét az un. Möbius- rácsot. (1., 2. fólia.)*
2. *Készítsük el egy poliéder perspektív képét a Möbius-rács felhasználásával. (1.,- ideiglenesen 2. és 3., majd ezeket kikapcsova - 4. fólia.).*

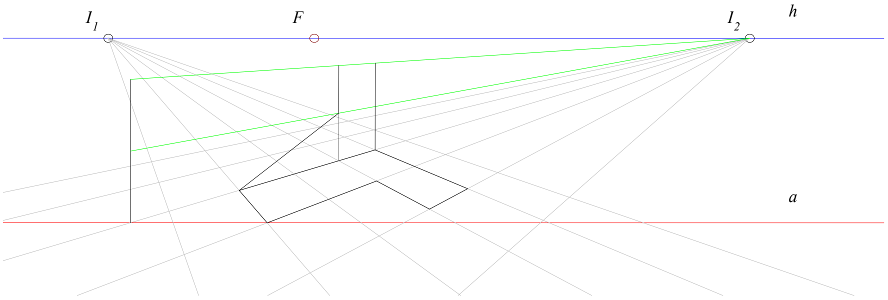
Figyeljük meg, hogy hogyan függ a kapott kép a főpont a distanc, a horizontmagasság megválasztásától.

3. *Szerkesszük meg egy kocka és a kockába írt henger pespektív képét. (1., 6., 8. fólia)*

A Möbius-rács képét – ezzel együtt bármilyen térbeli alakzat képét – az alábbi adatok határozzák meg:

- a főpontnak az alapvonaltól mért távolsága, amely azt befolyásolja, hogy mennyire „látunk rá” az alapsíkra;
- a d=CF distanc, amelyet növelve az iránypontok távolabb, csökkentve közelebb kerülnek egymáshoz;
- az alapsíkban fekvő négyzet oldalainak az alapvonallal bezárt szöge, amely ugyancsak befolyásolja a két iránypont távolságát. (Gondoljuk végig, hogy a CI_1I_2 háromszöget tulajdonképpen az átfogójához tartozó d=(C)F magasságából, valamint egyik befogójának az irányából kell megszerkesztenünk!)

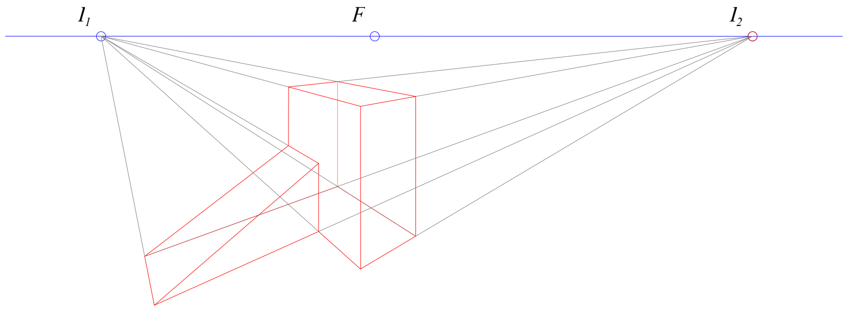
A Möbius-rács elegendően nagy részét megrajzolva könnyen kijelölhetjük az ábrázolandó alakzatunk „alaprajzát”. A megfelelő rácspontokból kiinduló, az alapvonalra merőleges egyeneseken kellene megszerkesztenünk a képsíkkal párhuzamos (függőleges) szakaszoknak a meghatározott módon rövidülő képét. E szakaszokat akkor látjuk valódi nagyságukban, ha éppen benne fekszenek a képsíkban. Ezért a másutt lévő egyeneseket párhuzamos vetítéssel – amely a képen valamelyik iránypontból történő vetítést jelent – „vigyük ki” a képsíkba, ott mérjük fel a szakaszok valódi hosszát, majd vetítsük vissza a Möbius-rács által meghatározott helyére. (Az alapsík pontjai egy ilyen vetítés során az alapvonalra kerülnek, így egy-egy pont alapsíktól mért távolsága a képsíkban az alapvonaltól mért – valódi – távolság lesz.)



A distanc és a főpont szerepe a perspektív ábrázolásban

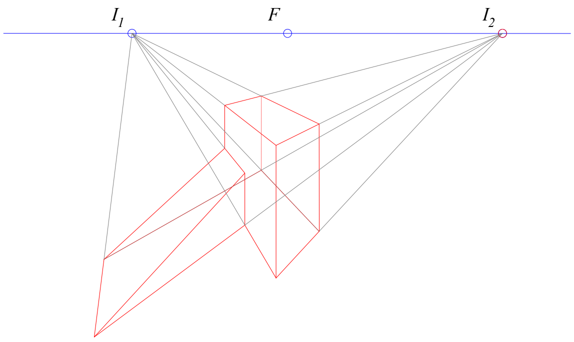
Vizsgáljunk meg néhány perspektív képet, amely ugyanarról a már jól ismert alakzatról készült. A képről könnyen rekonstruálható, hogy valójában hol van a térben az a *C* centrum, ahonnan nézve a rajz készült: az *F* főpont felett, olyan távolságra, ahonnan az I_1I_2 szakasz derékszög alatt látszik. Ez a rajz méretéhez képest nem túl nagy távolság. Akkor látnánk az alakzatot valósághűnek, ha onnan próbálnánk ránézni a rajzra. Olyan közelről viszont már nem is látunk élesen, egyéb kellemetlenségekről nem is beszélve.

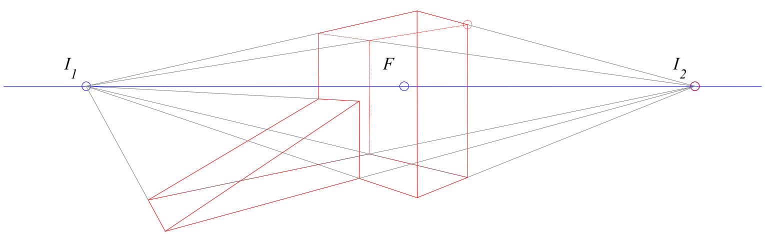
Ez tehát a perspektív ábrázolás legnagyobb hátránya: a legritkábban sikerül a vetítés centrumából néznünk egy perspektív képet. Máshonnan nézve viszont „torz" a perspektíva



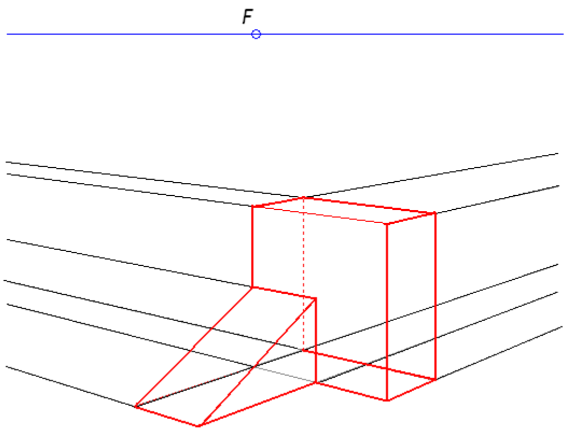
.

A distanc csökkentésével egyre meglepőbb perspektív képeket kapunk, amely persze nem azt jelenti, hogy nem jól szerkesztettük a képet, csak azt, hogy nem onnan nézzük, ahonnan az igényelné.





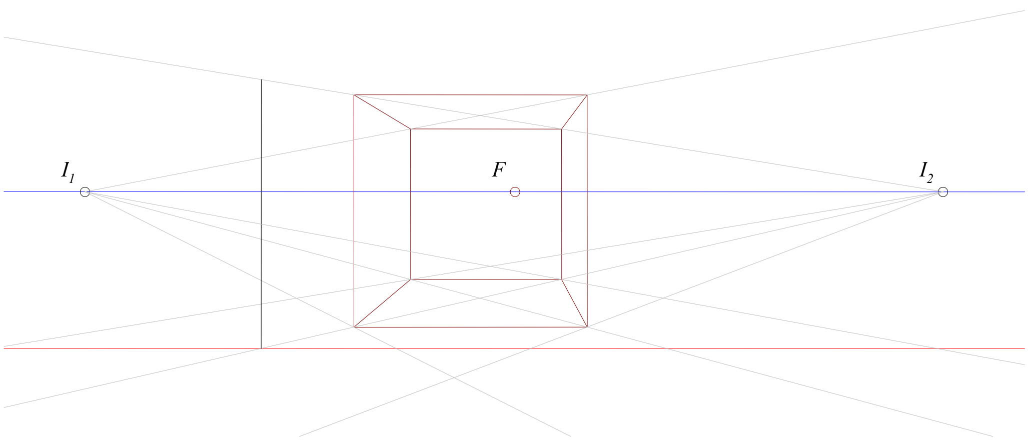
Ha olyan messzire visszük a centrumot a képsíktól, amilyen messziről nézni szoktunk egy rajzot, akkor viszont a keletkező rajz méreteihez képest messzire kerülnek egymástól az iránypontok, így nem férnek el a papírunkon. A rajztanulás egyik fontos kérdése éppen ennek a „tapasztalati távlattannak” az elsajátítása. Itt a mesterségbeli tudást éppen az jelenti, hogy valaki akkor is jól alkalmazza a perspektíva törvényeit, ha nem körzővel-vonalzóval – vagy éppenséggel számítógéppel – szerkeszt ilyen ábrákat, hanem szabadkézi rajzot készít, és megtanulja „helyesen kezelni” az iránypontokat anélkül, hogy azok a rajzlapján lennének.



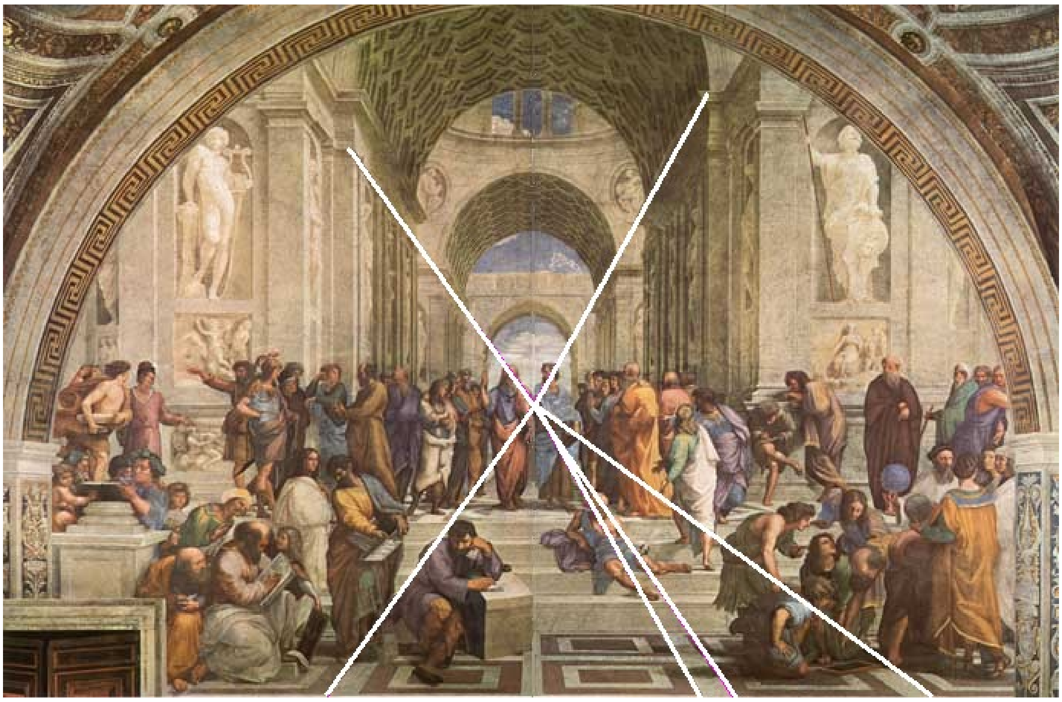
Egy, két és több iránypontos perspektív képek

A fenti rajzok úgynevezett két iránypontos perspektív képek: annak a térbeli derékszögű koordináta-rendszernek, amelyben a lerajzolandó alakzatot elhelyeztük, két tengelye metszi a perspektív képsíkot, a harmadik nem. Tulajdonképpen annyi iránypontot kereshetünk egy perspektív képhez, ahány olyan egyenest tartalmaz az alakzatunk, amely nem párhuzamos a képsíkkal.

Egy iránypontos ábrázolás esetén, amikor például egy kocka egy lapja párhuzamos a perspektív képsíkkal, célszerű a kocka alapsíkban fekvő lapjának az átlóihoz megkeresni az iránypontokat, amelyek egyenlő távol lesznek a főponttól. A 27. ábrán egy, a horizonttávolságnál nagyobb kocka egy iránypontos perspektív képe látható.



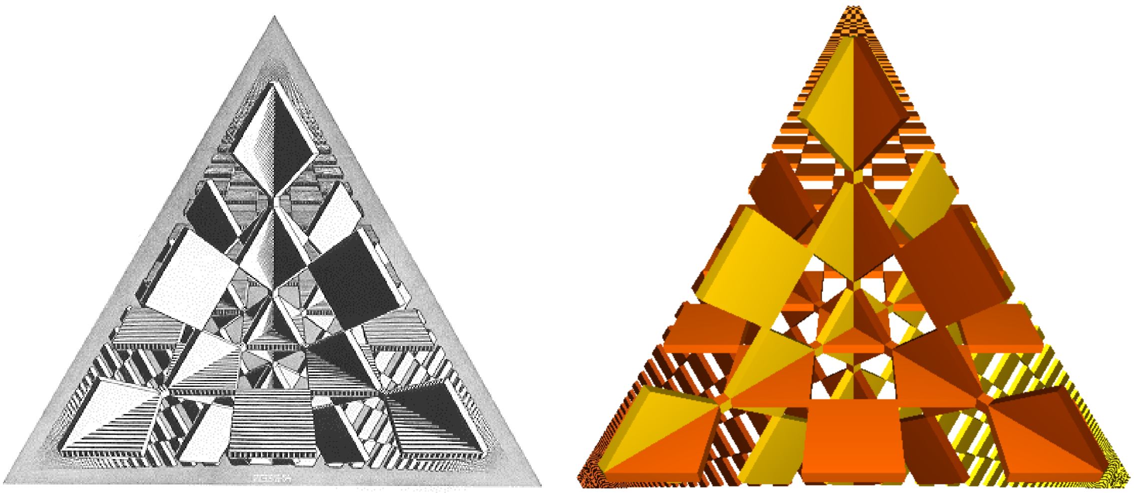
Nem szeretnénk felvállalni a perspektíva képzőművészeti, művészettörténeti szerepének, jelentőségének a taglalását, azonban nem állhatjuk meg, hogy ne mutassunk be egy csodálatos példát az egy iránypontú perspektíva alkalmazására:



Raffaello: Athéni iskola

A freskó egyetlen iránypontja a középen álló két nagy görög filozófus – Platón és Arisztotelész – testének érintkezésénél található.

Másik példánk a három iránypontos perspektívára mutat igen szép példát. Itt érdemes kissé elgondolkoznunk azon, hogy a „Mit ábrázol a kép?” kérdés mellett mennyire fontos a „Milyen ábrázolási módban, honnan nézve látjuk ilyennek?” kérdés is. Escher művészi konstrukciója alapján, számítógéppel készült az alábbi rajz:



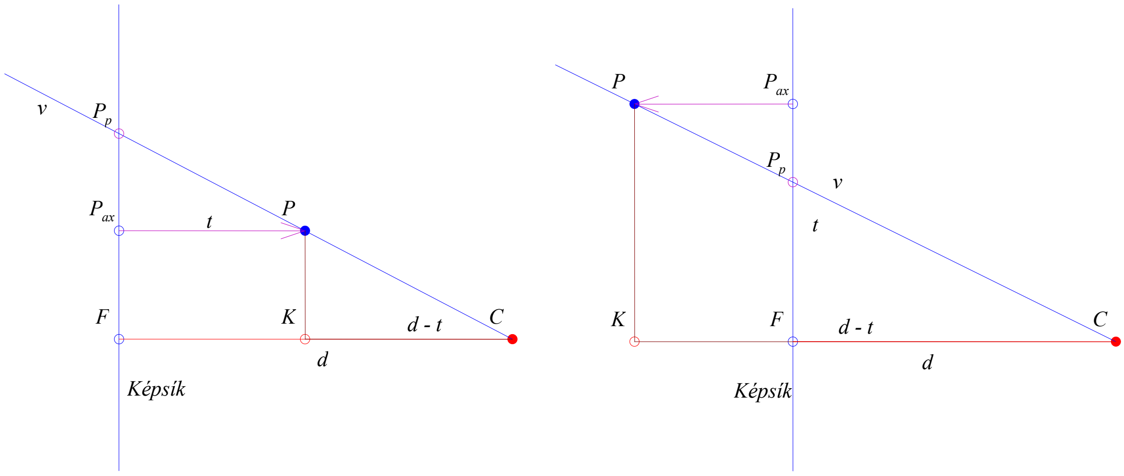
M. C. Escher: Három egymást metsző sík (fametszet)
és az e konstrukciót előállító Euler3D fájl

A műalkotás "titka", hogy a művész igen közeli, nagy látószögű perspektívát alkalmazott..

3.2. Perspektív kép készítése számítógéppel

Vizsgáljuk meg, hogyan készíthetnénk számítógéppel perspektív képet (amennyiben ezt a feladatot nem bízhatnánk egy kész programra)! Miután már elkészítettük egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerbe helyezett pont ortogonális axonometrikus képét, pontosabban kiszámítottuk annak a képernyő koordináta-rendszerében vett koordinátáit, nézzük meg, miként kell ezeket a koordinátákat módosítanunk, hogy perspektív képet kapjunk. Egyelőre szorítkozzunk annak az esetnek a vizsgálatára, amelyben a főpont éppen a térbeli és síkbeli koordináta-rendszer közös origójába esik.

Nézzünk most rá „profilból” a képsíkra! Legyen a *C* centrum és a képsík távolsága (a distanc) *d=CF*, ahol *F* a főpont. A térbeli *P* pontnak a képsíktól mért – előjeles – távolsága legyen *t,* ahol az előjelet akkor tekintsük pozitívnak, ha a *P* pont a képsíknak ugyanabba a félterébe esik, mint a *C* pont. A *P* pont ortogonális axonometrikus képe a képsíkra eső merőleges vetülete: P_{ax}, perspektív képe a *C*-n átmenő vetítősugarának a képsíkkal alkotott metszéspontja: P_p. Ez utóbbi természetesen csak akkor létezik, ha $t<d$, vagyis a *C* kezdőpontú *[CP)* félegyenes metszi a képsíkot. Jelölje még *K* a *P* pontnak a *(CF)* egyenesre eső merőleges vetületét.



A felsorolt pontok egy síkban, a *(CFP)* síkban vannak. Mivel P_pFC és *PKC* háromszögek hasonlók, könnyen felírhatjuk a FP_p és FP_{ax} szakaszai közötti kapcsolatot:

$$\frac{P_pF}{FC}=\frac{PK}{KC}=\frac{P_{ax}F}{KC} \quad\Rightarrow\quad P_pF=P_{ax}F\cdot\frac{d}{d-t}$$

Ez az összefüggés független attól, hogy a *P* pont a képsíknak a *C*-vel egyező vagy ellentétes félterében van-e, mivel *t*-t előjeles távolságként kezeljük.

Mind a szerkesztésből, mind a fenti képletből leolvasható, hogy a képsíkkal párhuzamos és a centrumra illeszkedő síkra, az úgynevezett *eltűnési síkra* illeszkedő pontoknak nem keletkezik (végesben lévő) képe. Ha pedig egy pont és a képsík távolsága nagyobb a distancnál, akkor a pontról úgynevezett virtuális képet kapunk. Ezt az esetet csak úgy kerülhetjük el, ha a centrumot a képsíktól távolabb helyezzük el, mint a pontok koordinátáinak a maximuma.

Felhasználva a *P(x,y,z)* térbeli koordinátákkal adott pont ortogonális axonometrikus vetületére vonatkozó képleteinket (és figyelembe véve, hogy *t*=*w*), ugyanennek a pontnak a perspektív képét az

$$u = \frac{d \cdot \left(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta\right)}{d - \left(x \cos \vartheta \sin \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \varphi\right)}$$

$$v = \frac{d \cdot \left(-x \cos \vartheta \cos \varphi - y \sin \vartheta \cos \varphi + z \sin \varphi\right)}{d - \left(x \cos \vartheta \sin \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \varphi\right)}$$

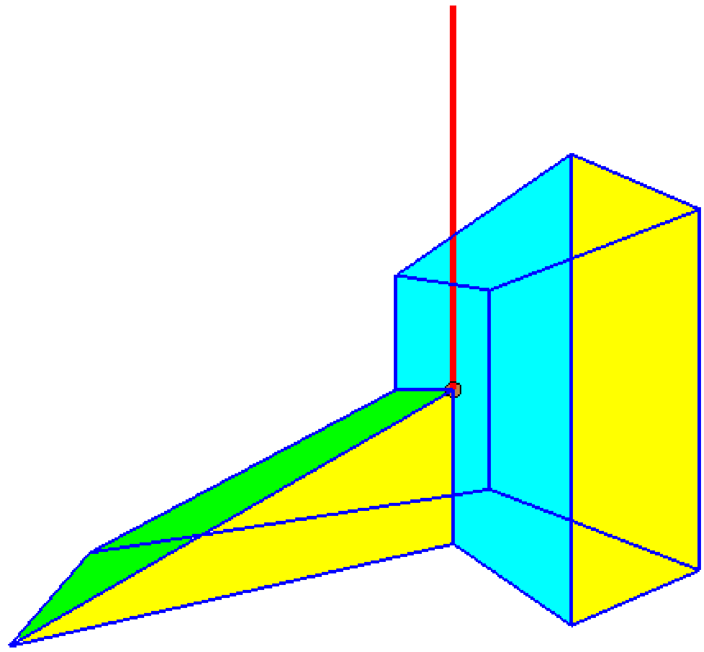
képletekkel számíthatjuk ki, ahol a perspektív ábrázolás centruma az origó „felett", attól *d* távolságra van. Még két paraméterrel, a főpont (síkbeli) koordinátáival bővül a fenti képlet, ha a főpontot át szeretnénk helyezni az origóból a képsík $F(f_u; f_v)$ pontjába. Erre például akkor lehet szükségünk, ha szeretnénk kissé „rálátni" az ábrázolandó alakzatra. Ekkor a *P*(*x*;*y*;*z*) pontot egy $\overrightarrow{OF} = (f_u; f_v)$ vektorral el kell tolnunk a főpontba, majd miután ott kiszámítottuk a pont perspektív képét, az előbbi vektor ellentettjével vissza kell vinnünk az eredeti helyére:

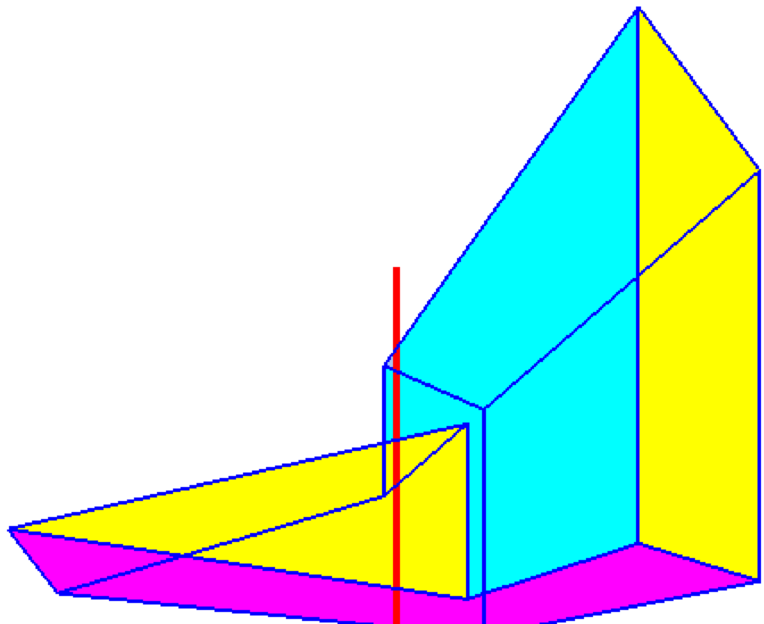
$$u = f_u + \frac{d \cdot \left(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta - f_u\right)}{d - \left(x \cos \vartheta \sin \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \varphi\right)}$$

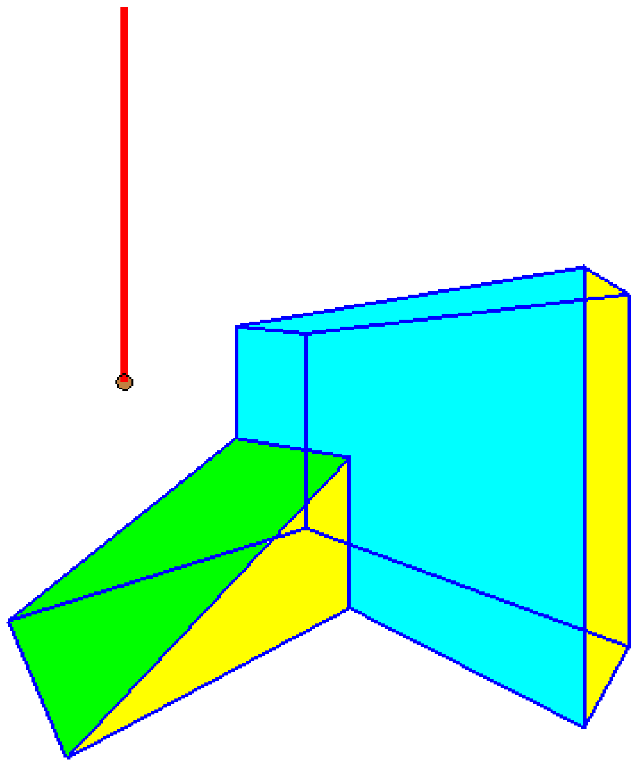
$$v = f_v + \frac{d \cdot \left(-x \cos \vartheta \cos \varphi - y \sin \vartheta \cos \varphi + z \sin \varphi - f_v\right)}{d - \left(x \cos \vartheta \sin \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \varphi\right)}$$

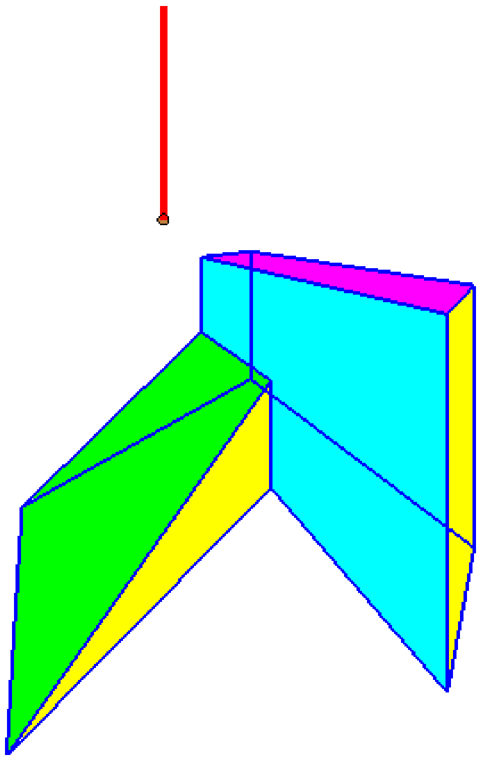
Ezekkel az összefüggésekkel bármilyen poliéderről könnyedén készíthetünk (élvázas) ortogonális axonometrikus vagy perspektív képet minden olyan programmal, amely alkalmas egy végpontjaival adott szakasz megrajzolására.

A térgeometriai alakzatok megjelenítését (is) felvállaló programok – mint például a MAPLE , a MATHEMATICA, vagy az itt használt Euler3D– leveszi a vállunkról ezeknek a számolásoknak a terhét, sőt a poliéder lapjait is megjeleníti, megoldva a láthatóság szerinti ábrázolás kérdését is. Mégsem haszontalan egy olyan program elkészítése, amely ezekkel a képletekkel oldja meg a feladatot. Egy ilyen program ugyanis jó lehetőséget nyújt a kísérletezésre, főként perspektív képek előállítása terén. Könnyen készíthetünk „jó" és „kevésbé jó" perspektív képeket, a főpont és a distanc alkalmas vagy éppenséggel „vad" megválasztásával. Egy-egy ilyen szándékosan kellemetlen helyen felvett nézőpontú képre könnyedén ráfoghatják a perspektív kép rajzolásában jártas ismerőseink, hogy „ilyen perspektíva nincs, erre a rajzra minden rajztanár elégtelen osztályzatot adna". Pedig van. Az alábbi perspektív képeken egy nagyobb pont jelzi a főpont helyét, és egy abból kiinduló függőleges szakasz a distancot. Próbálják ki olvasóink, hogy milyennek tűnik a rajz abból a pontból nézve, amely a főpont felett van, a papír síkjától distancnyi távolságban. (A lapokat – a könnyebb áttekinthetőség kedvéért – kiszíneztük, noha ezt a feladatot nem vállalta fel a program.)





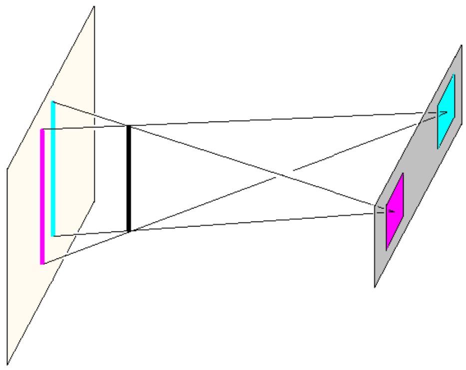




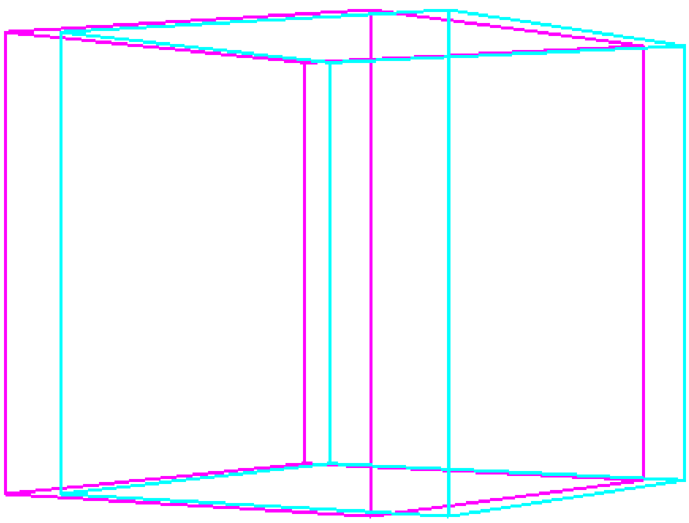
Szereogram: a „térláttatós” rajz

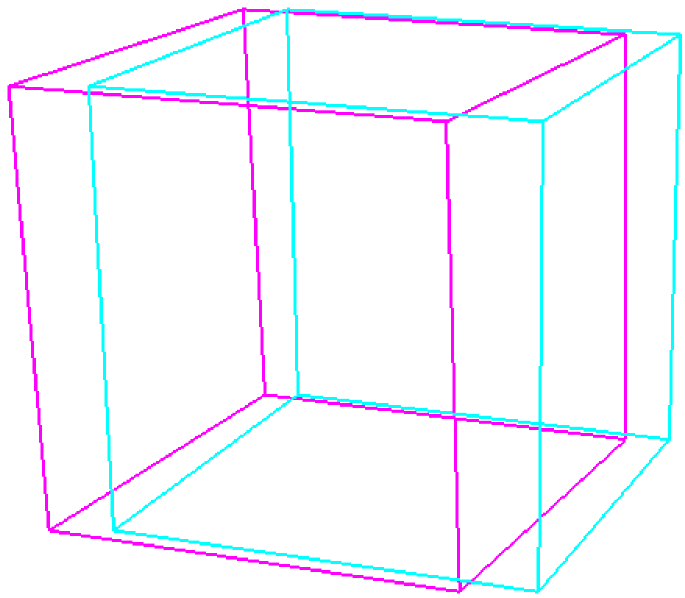
Más „mellékterméke” is lehet ennek a munkának. Ha már tudunk élvázas perspektív képet készíteni, két egymástól megfelelő távolságban elhelyezett centrum felhasználásával könnyen előállíthatunk egy úgynevezett *sztereogrammot,* amely „igazi” háromdimenziós kép előállítását teszi lehetővé.

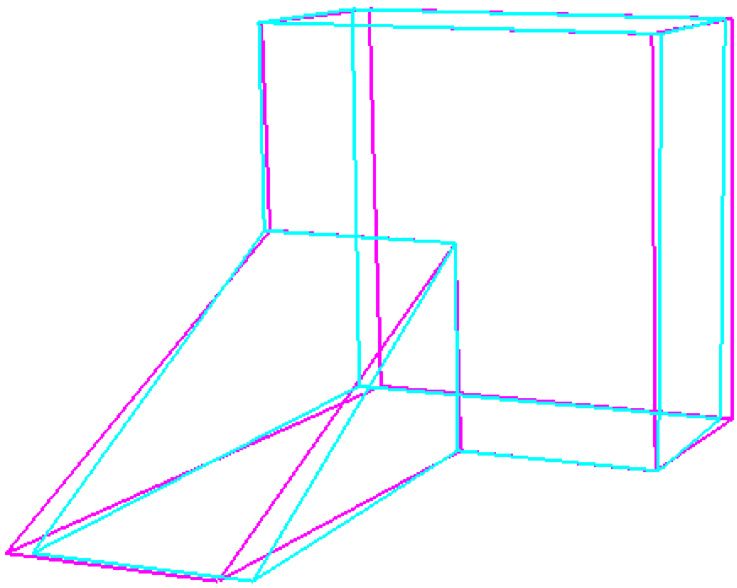
A tárgyakat azért látjuk „térben”, megkülönböztetve a tőlünk távolabbi és közelebbi pontjait, mert a két szemünkben más-más perspektív kép keletkezik, hiszen a két centrum (a két szemünk) mintegy 7-8 cm-re van egymástól. A két kép közötti eltérést – amely közelebbi tárgyakat szemlélve nagyobb, távolabbiakat nézve kisebb – az agyunk fel tudja dolgozni úgy, hogy ezzel érzékeljük a tárgyak szemeinktől mért távolságát. Ha készítünk egyetlen képsíkra egy kék színű perspektív képet az egyik, egy pirosat a tőle meghatározott távolságban elhelyezett másik centrumból, és ezt a rajzot megnézzük egy piros-kék szemüveggel, amely szétválasztja a két perspektív képet úgy, hogy a piros üvegen át csak a kék vonalakat, a kéken át csak a pirosakat látjuk, akkor az agyunk összeállítja számunkra a térbeli alakzatot.

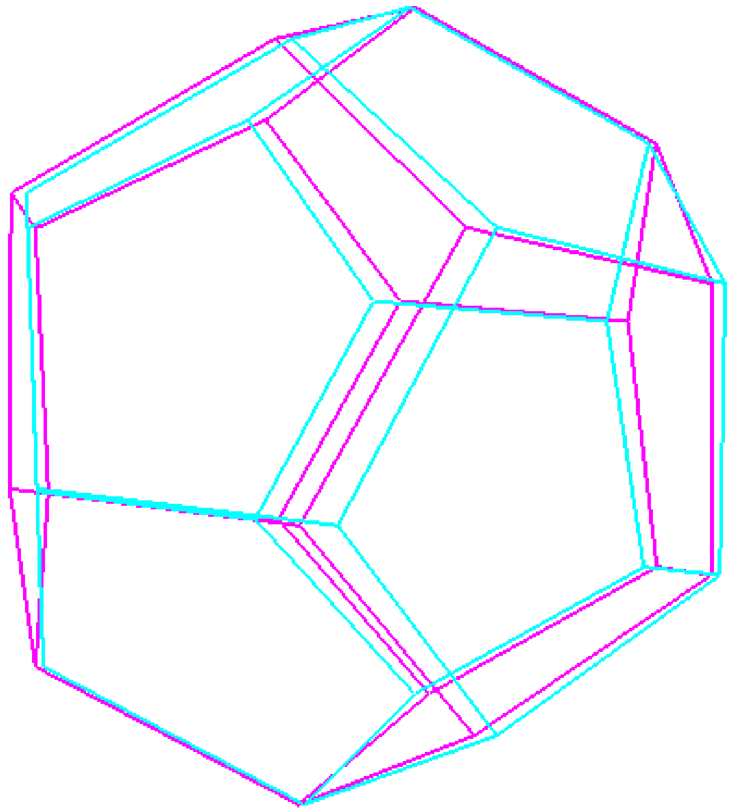


Itt jegyezzük meg, hogy a köznapi szóhasználatban – sajnos – egyre elterjedtebb a „háromdimenziós grafika” kifejezés, ami legfeljebb arra utalhat, hogy a kép háromdimenziós (azaz térbeli) alakzatokról készült. De hát több ezer év óta háromdimenziós dolgokat rajzolnak az emberek. A „háromdimenziós grafika” elnevezést talán helyesebb lenne meghagyni a fenti képek számára, amelyek viszont csak valamilyen eszköz – jelen esetben a piros-kék szemüveg – felhasználásával válnak a néző számára valóban háromdimenziósakká.





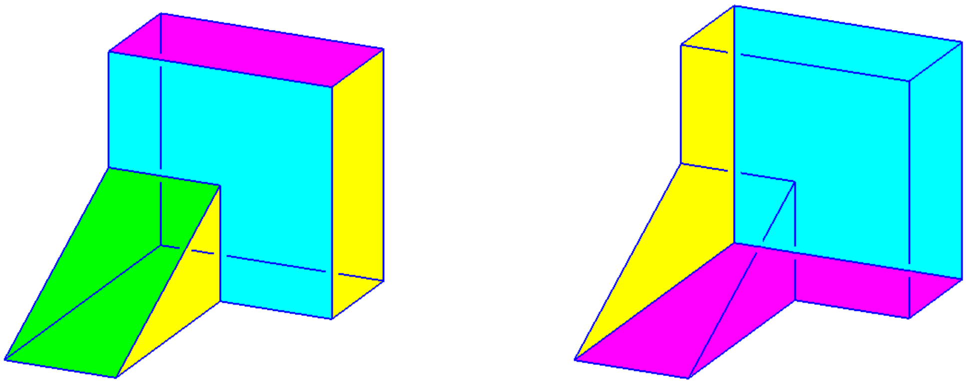




Végezetül bemutatunk egy Pascal-nyelven írt számítógépi programot, amelyen jól tanulmányozhatók az ortogonális axonometrikus és perspektív ábrázolás sajátosságai. A program sztereogrammok készítésére is alkalmas: sztereo.exe. Sajnos ez a - több mint 15 éves - program a Windows7 operációs rendszerben már nem futtatható.

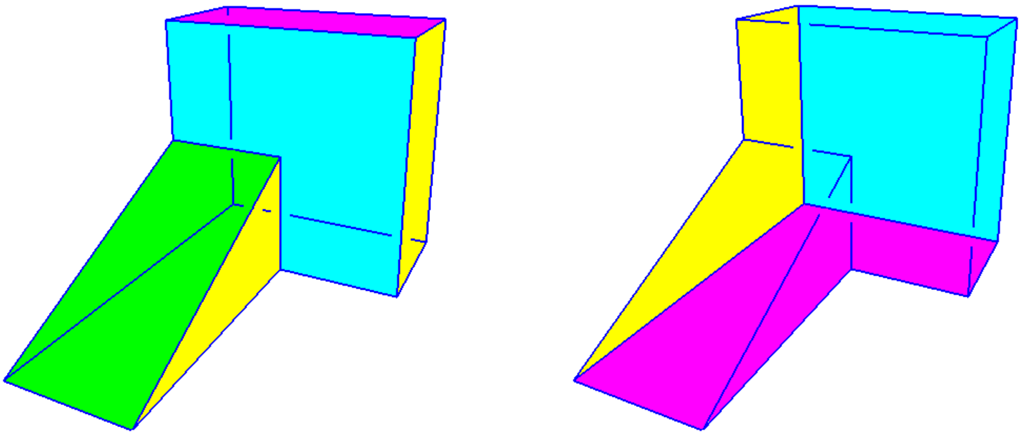
4. Az ábrázolási módok összehasonlítása

Térjünk vissza Pohlke tételéhez. A tétel csak azt mondja ki, hogy *van olyan* kocka, amely három, egy csúcsból kiinduló élének a párhuzamos vetülete a képsíkban megadott három egy csúcsból kiinduló tetszőleges szakasz. Természetesen nem csak egy van, a vetítési irány mentén eltolva minden térbeli tengelykeresztnek (tárgynak) ugyanaz az axonometrikus képe. De ettől eltekintve sem lehet egyértelműen rekonstruálni a térbeli alakzatot az élvázas axonometrikus képe alapján. Ugyanis kétféleképpen is feltüntethetjük az alakzat láthatóságát. Az így kapott két kép nem ugyanazt az alakzatot ábrázolja, hanem egymásnak egy olyan síkra vonatkozó tükörképét, amely merőleges a vetítés irányára. Ez ortogonális axonometriánál maga a képsík is lehet. Egy már megrajzolt (élvázas) rajzon a láthatóság megválasztásával vagy a tengelyek irányának a megadásával tudjuk egyértelműen rekonstruálhatóvá tenni az ábrázolást. A térgeometriai alakzatok megjelenítésével foglalkozó programok, mint Pl. az Euler3D a felhasználó aktív beavatkozása nélkül megoldják a láthatóság kérdését. Ez komoly matematikai (konstruktív geometriai) meggondolásokat igényel.



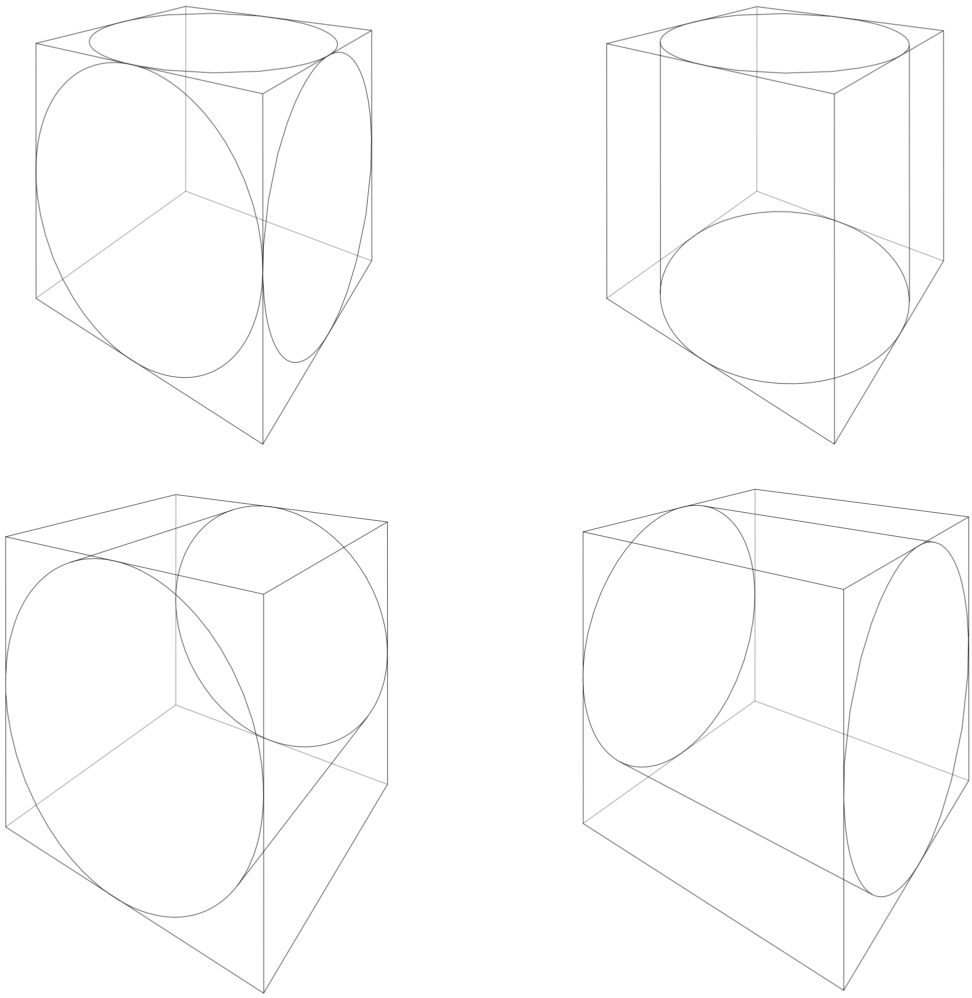
Két alakzat azonos axonometrikus képe.

Ezzel szemben nem dönthetjük el önkényesen a láthatóságot a perspektív képeknél. A perspektív kép már nyújt némi információt arra vonatkozóan, hogy a valóságban párhuzamos és egyenlő szakaszok közül melyik a közelebbi. Ezt ugyanis nagyobbnak látjuk. Ennek ellentmondó láthatóság feltüntetése súlyos szakmai hiba.



A láthatóság szempontjából helyesen ill. hibásan kihúzott perspektív rajz.

Egy eléggé „közeli” perspektívában ábrázolt kockát a lapjaiba írt körökkel együtt, valamint a három kockába írt hengert is hasonlítsuk össze a hengerről készült korábbi, axonometrikus képekkel.



Kockába irt henger perspektív képe.

Feladat: *Adott egy perspektív rendszer az alapvonallal, horizonttávolsággal, főponttal és a distanccal. Ábrázoljunk benne*

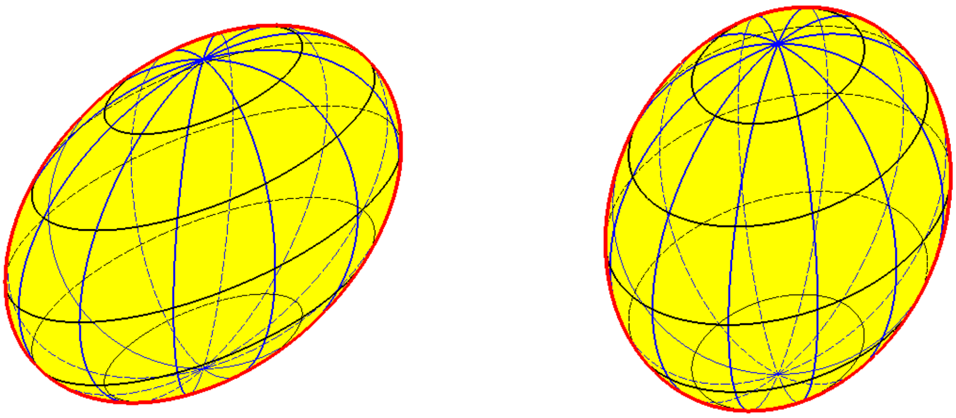
1. egy kockát (1. 2. és 4. fólia) (szerk: 3. fólia)
2. a kocka lapjaira rajzolt köröket. (1., 4., 5., 6., 7., fólia)
3. a kockába írt hengereket:
   a) z tengellyel párhutamos alkotók: (1., 4. 5. 8. fólia)
   b) x tengellyel párhutamos alkotók: (1., 4. 6. 9. fólia)
   c) y tengellyel párhutamos alkotók: (1., 4. 7. 10. fólia)

A körnek nem csak az axonometrikus, hanem a perspektív képe is ellipszis. Megjegyezzük azonban, hogy axonometrikus ábrázolásnál a keletkező ellipszis középpontja lesz a (térbeli) kör középpontjának a képe, perspektív ábrázolásban viszont nem, mivel a kör affin képeként kapott ellipszis középpontja a kör középpontjának a képe, a kör centrális kollineációval – így a perspektív ábrázolás során kapott képe is – olyan ellipszis amelynek a középpontja a kollineáció eltűnési egyenese körre vonatkozó pólusának, tehát nem a középpontjának a képe.

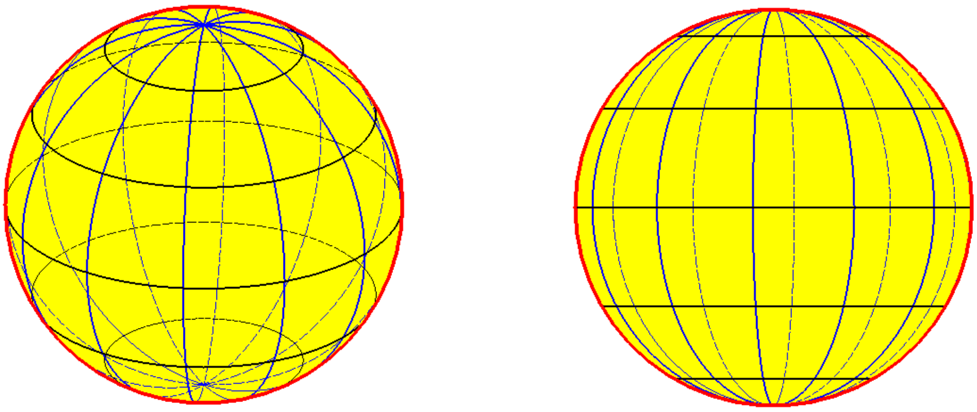
Végül – ugyancsak az összeghasonlítás kedvéért – bemutatjuk egy gömbnek néhány axonometrikus és perspektív képét. Ha az ábrázoló geometria eszköztárára kell szorítkoznunk, akkor egy gömböt – épp úgy mint egy síkot – a rá rajzolt alakzatokkal, jelen esetben földrajzi szélességi és hosszúsági körökkel szemléltetjük. (Az „egyenlítő” lényegében egy gömbi főkör, a szélességi körök a gömbnek az ezzel párhuzamos síkmetszetei, a „hosszúsági körök” az erre merőleges főkörök, amelyek két pontra, a „pólusokra” illeszkednek.)

Ha bárhonnan ránézünk egy „kézbe vehető” gömbre, a kontúrját mindenhonnan körnek látjuk. Vajon a rajzokon is?

A gömb kontúrja kavalier-axonometrikus ábrázolásban szükségképpen ellipszis, mivel a vetítés iránya ferde. (Gondoljunk arra, hogy egy labda árnyéka a vízszintes síkon mindig ellipszis, legfeljebb a baktérítő és ráktérítő közötti gyerekek láthatják körnek az év egy bizonyos – pontosabban két – pillanatában, amikor a nap éppen a fejük felett delel.)

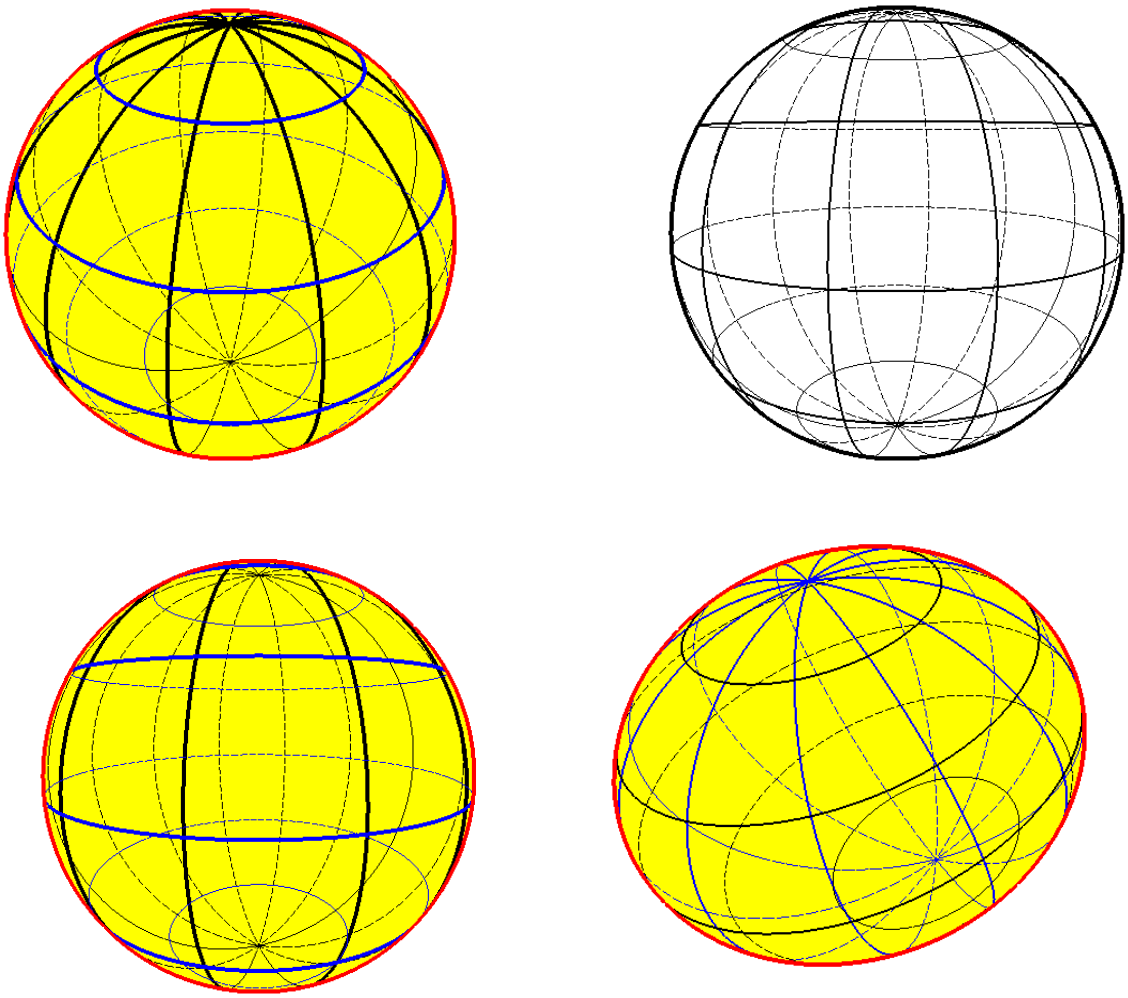


A gömb kavalier axonometrikus képe szükségszerűen ellipszis.



A gömb ortogonális axonometrikus képe a merőleges vetítés miatt minden esetben kör.

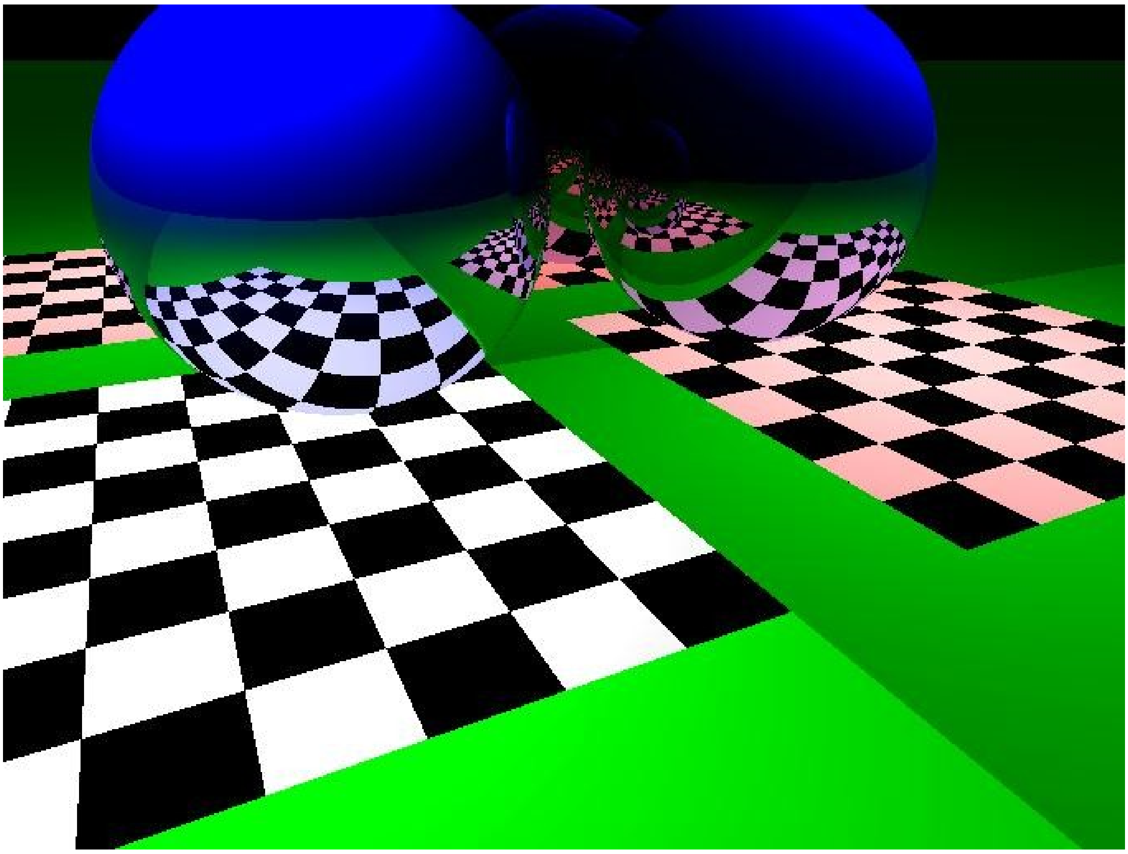
A gömb perspektív képe csak akkor kör, ha az ábrázolt gömb középpontja a főpontra esik. (Néha találkozunk olyan földgömbről készült sematikus rajzzal, amelyben mindkét pólus a rajz kontúrjára esik. Ilyen eset csak ortogonális axonometriában fordulhat elő. Ekkor viszont a szélességi körökre „nem láthatunk rá” azaz a szélességi körök egy-egy szakasznak látszanak.



A *gömb perspektív képe lehet kör és ellipszis is.*

Reméljük, írásunk végére kiderült, hogy tankönyvekben, didaktikai szempontból fontos rajzok készítésekor legkevésbé a klinogonális axonometriát, ezen belül a kavalier perspektívát tartjuk helyesnek. Azt azonban, hogy az ortogonális axonometria, vagy a perspektív ábra közül mikor melyiket célszerű alkalmaznunk, olvasóikra bízzuk.

Nem említettük a térgeometriai alakzatok ábrázolásnak a leghatékonyabb eszközét, a fény-árnyék hatást, vagy a felület tükröződését bemutató művészi, vagy az azt szimuláló computer-grafikai eszközöket, csak az ábrázoló geometria eszköztárára szorítkoztunk. Reméljük azonban, hogy így hozzájárultunk ahhoz, hogy olvasóink értő szemmel tekintsenek az ilyen alkotásokra.



Ajánlott irodalom

KURUSA ÁRPÁD – SZEMŐK ÁRPÁD: *A számítógépes ábrázoló geometria alapjai* POLYGON Szeged, 1999.

PÁL IMRE: *Térláttatós ábrázoló mértan* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1961.

STROMMER GYULA: *Ábrázoló geometria* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.