Geometria I.

Vígh Viktor

Kivonat

Jelen jegyzet az SZTE osztatlan matematikatanár-képzésében szereplő Geometria I. tantárgyhoz íródott. A kurzus a tanulmányok első félévében kötelező. Ezért a tárgyalásban mindenképpen feladatként jelentkezik a hallgatók által a középiskolájukban megszerzett ismeretek felelevenítése és rendszerezése. A matematikaoktatás szempontjából igen heterogén közoktatási intézményrendszerre tekintettel szükséges az előzőeken túl a hallgatók geometriai ismereteinek módszeres felépítéssel olyan szintre hozása, amely az előrehaladást a jelen és későbbi kurzusok szükségleteinek megfelelően lehetővé teszi. A jegyzet a középszintű érettségi követelményeivel lefedett témaköröket lényegesen nem haladja meg, „csupán" a bizonyítások megjelenésével kap még nagyobb hangsúlyt az ismeretek egymásra építése, a fogalmak és állítások kapcsolatainak feltárása, és e kapcsolatok lehetséges demonstrálása. E jegyzettel támogatni kívánjuk a geometriai tanulmányok folytatásához szükséges rutinok kialakítását, bizonyos sémák alkalmazásának készségszintűvé tételét, automatizmusok begyakorlását. Ezeken túlmenően a a kitűzött kapcsolódó feladatok és gyakorlatok már sokkal inkább elméleti jellegűek, lehetőséget kínálnak arra, hogy a megfelelő szintű rutinnal a hallgatók tovább is haladhassanak, és a problémamegoldás eggyel magasabb szintjére is fel-fellépjenek.

1. Térelemek kölcsönös helyzete, illeszkedés

Célok: ismerkedés a sík és a tér alapvető fogalmaival, a geometriai és térszemlélet formálása, kevés lépésből álló bizonyítások gyakorlása.

1.1. Alapismeretek

A síkon

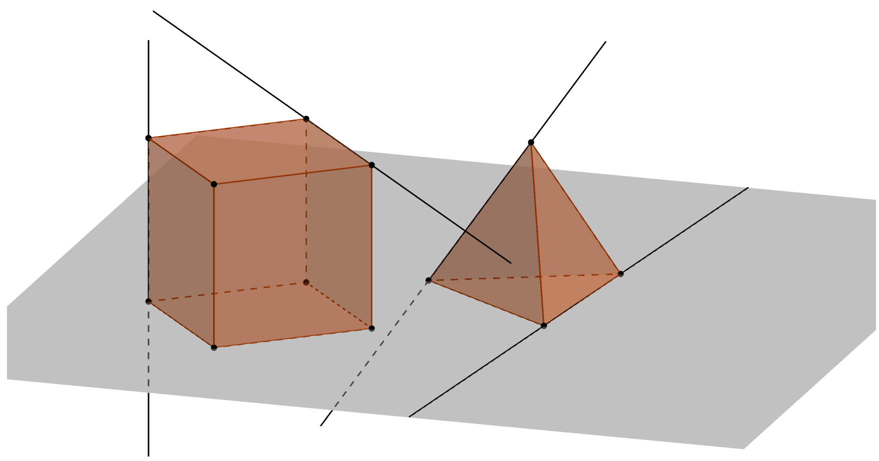
Bármely két különböző pont pontosan egy közös egyenesre illeszkedik. Az egy közös egyenesre illeszkedő pontokat kollineárisnak nevezzük.

Az e és f egyenesek a síkban vagy egybeesnek, vagy egymást pontosan egy pontban metszik, vagy közös pont nélküliek. Ha $e = f$, vagy e-nek és f-nek nincs közös pontja, akkor e-t és f-t párhuzamosnak nevezzük. A párhuzamosság jele $e \| f$. Az e egyenessel bármely P ponton át pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.

A térben

A térben bármely három, nem kollineáris pont pontosan egy közös síkra illeszkedik. A közös síkra illeszkedő pontokat komplanárisnak nevezzük.

A térben két e és f egyenes metsző, ha pontosan egy közös P pontjuk van. Két nem metsző egyenes párhuzamos, ha létezik egy olyan sík, ami mindkettőt tartalmazza. (Az egybeeső egyeneseket ismét párhuzamosnak tekintjük.) Ha két egyenes nem metsző és nem is párhuzamos, akkor kitérő. Az e egyenessel bármely P ponton át pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.



1. ábra. Kitérő élpárok a kockán és a tetraéderen
Nézze és mozgassa meg az ábrát a GeoGebraTube-on!

Az S_1 és S_2 síkok a térben lehetnek metszők, vagy párhuzamosak. Metsző síkok metszete minden esetben egy egyenes, a párhuzamos síkoknak vagy nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek. Az S síkkal bármely P ponton át pontosan egy párhuzamos sík húzható.

Egy e egyenes egy S síkot egy P pontban döf, ha $e \cap S = \{P\}$. Ellenkező esetben e és S párhuzamosak. Ha $e \subset S$, akkor az e sík illeszkedik S-re (és ekkor is párhuzamosnak tekintjük őket).

Egyenesek szögét a térben a következőképpen definiáljuk.

1. Definíció. *Két párhuzamos egyenes szöge* 0. *Két metsző egyenes hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenesek az általuk meghatározott síkban bezár-*

nak. Két kitérő egyenes hajlásszögének nevezzük azt a szöget, amelyet egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek alkotnak.

2. Definíció. *Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges annak minden egyenesére.*

1.1. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy két párhuzamos egyenesre pontosan egy sík illeszkedik.*

1.2. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy két metsző egyenesre pontosan egy sík illeszkedik.*

Az összes egyenes ellenőrzése helyett elegendő a merőlegességet két egyenesre igazolni. Erről szól a síkra merőlges egyenes tétele.

1. tétel (Síkra merőleges egyenes tétele). *Ha egy egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére, azaz merőleges a síkra.*

1.3. feladat. *Igazoljuk a Síkra merőleges egyenes tételét!*

1.2. kitérő egyenesek

1.4. gyakorlat. *Legyenek a és b kitérő egyenesek. Mutassuk meg, hogy ha a' a b-t metsző, a-val párhuzamos egyenes, akkor a párhuzamos az a' és b által kifeszített síkkal, és hasonlóképpen ha b' az a-t metsző, b-vel párhuzamos egyenes, akkor b párhuzamos az a és b' által kifeszített síkkal.*

1.5. gyakorlat. *Tegyük fel, hogy a térben a és b metsző egyenesek, akárcsak az a' és b' egyenesek, továbbá $a \parallel a'$, és $b \parallel b'$. Mutassuk meg, hogy az a és b által kifeszített sík párhuzamos az a' és b' által kifeszített síkkal!*

1.6. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy ha a és b kitérő egyenesek, akkor létezik két olyan párhuzamos sík, amely közül az egyik at-t, a másik b-t tartalmazza!*

1.7. gyakorlat. *Legyen adott két egyenes: a és b. Tekintsük az olyan egyeneseket, amelyek metszik a-t, és párhuzamosak b-vel. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen egyenes egy síkra illeszkedik, amely párhuzamos b-vel!*

1.8. gyakorlat.

1.9. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy bármely két kitérő egyenesnek van pontosan egy normáltranszverzálisa!*

1.3. Három térelem kölcsönös helyzete

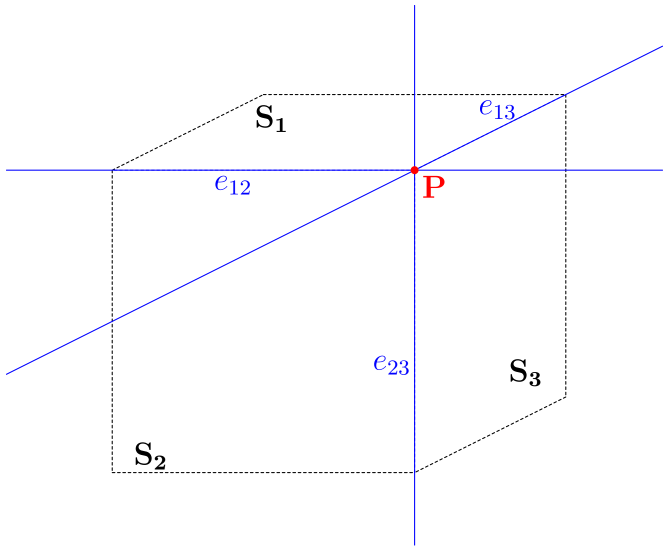
Három térelem kölcsönös helyzetét már feladatokon keresztül dolgozzuk fel.

1.10. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy ha három sík közül bármely kettő egy egyenesben metszi egymást, és a metszetegyenesek közül valamely kettő egy P pontban metszi egymást, akkor a harmadik metszetegyenes is illeszkedik P-re.*

Megoldás. Legyenek S_1, S_2 és S_3 a vizsgált síkok, amelyek közül bármely kettő egy egyenesben metszi egymást. Az $S_1 \cap S_2$, az $S_2 \cap S_3$ illetve az $S_1 \cap \cap S_3$ egyenesek legyenek rendre e_{12} e_{23} és e_{13}. Továbbá legyen $P = e_{12} \cap e_{13}$ a metszéspont. Másképpen, P az a pont, amire $P \in e_{12}$ és $P \in e_{13}$. (Lásd 2. ábra.) Hasonlóan,

1. $P \in e_{12}$ és $e_{12} = S_1 \cap S_2$ miatt $P \in S_2$;
2. $P \in e_{13}$ és $e_{13} = S_1 \cap S_3$ miatt $P \in S_3$.

Következésképpen $P \in S_2 \cap S_3$ is, azaz $P \in e_{23}$. Tehát a P pont rajta van az S_1, S_2 és S_3 síkok által meghatározott metszetegyenesek mindegyikén. $\square$



2. ábra. A síkokat egy kocka lapsíkjaival szemléltethetjük

Az 1.10. gyakorlat megoldását felhasználva oldjuk meg a következő gyakorlatokat önállóan!

1.11. gyakorlat. *Adott 3 páronként egyenesben metsző sík. A három metszésvonaluk közül kettő párhuzamos. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely két metszésvonal párhuzamos!*

1.12. gyakorlat. *A párhuzamos S_1 és S_2 síkokat az S_3 sík rendre e_1 és e_2 egyenesekben metszi. Mutassuk meg, hogy $e_1 \| e_2$!*

1.13. gyakorlat. *Az e egyenes párhuzamos a metsző S_1 és S_2 síkok mindegyikével. Mutassuk meg, hogy e párhuzamos $S_1 \cap S_2$ egyenessel is!*

Megoldás (vázlat). Csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor e nem illeszkedik az adott s_1 és S_2 síkok egyikére sem. A többi eset hasonló, ezek kidolgozását az olvasóra bízzuk.

Legyen $P \in S_1 \cap S_2$ egy tetszőleges pont, és legyen S a P és e által feszített sík. $f_1 = S \cap S_1$ illeszkedik P-re, mivel P mindkét síkon rajta van, másrészt párhuzamos is e-vel, hiszen S síkra f_1 és e is illeszkedik, de közös pontjuk nem lehet $e \| S_1$ miatt. Így f_1 az az egyetlen egyenes, ami P-re illeszkedik, és párhuzamos e-vel. Hasonlóan érvelhetünk $f_2 = S \cap S_2$-re, s így kapjuk hogy $f_1 = f_2 = S_1 \cap S_2$. Mivel $f_1 \| e$, így az állítást beláttuk. $\square$

1.4. Kapcsolódó nevezetes tételek

A következő egyszerű állítás egy nevezetes tételt készít elő.

1.14. feladat. *Adottak a különböző síkokban fekvő $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek. Tudjuk, hogy az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek M_1, A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek M_2, végül a B_1C_1 és B_2C_2 egyenesek M_3 pontokban metszik egymást. Ekkor M_1, M_2 és M_3 pontok kollineárisak.*

Bizonyítási ötlet. Az M_1, M_2 sé M_3 pontok mindegyike illeszkedik $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ síkjainak metszésvonalára. $\square$

Tekintsük és mozgassuk meg a kapcsolódó dinamikus ábrát a GeoGebraTube-on!

A Desargues-tétel a fenti állítást messzemenően tovvábgondolja. A részletekért olvassuk el a Desargues-tételről szóló Wikipédia szócikket!

1.5. Gyakorlatok

1.15. gyakorlat. *Adjunk meg a térben*

1. *három*
2. *n*
3. *végtelen sok*

páronként kitérő egyenest!

1.16. gyakorlat. *Bármely három nem kollineáris pont egyértelműen meghatároz egy síkot. Legfeljebb hány síkot határoz meg*

1. négy
2. öt
3. n
különböző pont? Adjunk példát olyan konfigurációra, amely a maximumot szolgáltatja!

1.17. gyakorlat. *Adott négy sík, melyek közül bármely kettő metszi egymást. Lehet-e a síkok* 6 *metszésvonala közül*
1. pontosan 3
2. pontosan 4
párhuzamos?

1.18. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy két kitérő egyenes bármelyikén át felvehető a másikkal párhuzamos sík.* **(GFGY1699)**

2. A háromszög

Célok: a háromszög elemi geometriájának és nevezetes pontjainak ismétlése, a geometriai szemlélet formálása, bizonyítások gyakorlása

2.1. Alapismeretek

2.1.1. Előzetes ismeretek

Pont, egyenes, félegyenes, szakasz, szög, szög szára, szögtartomány, irányított szög, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, váltószögek; szakasz hosszúsága, szög nagysága; csúcsszögek egyenlő nagyok, derékszög, szögfelező; ponthalmazok távolsága, pont távolsága egyenestől; téglalap és négyzet, paralelogramma; terület, téglalap területe, háromszög területe.

2.1.2. Az ebben a szakaszban felhasznált ismeretek

Tekintsünk három nem kollineáris A, B és C pontot a síkon. Az $\{A, B, C\}$ halmazt *háromszögnek* nevezzük, jelölése: $ABC\triangle$. Az A, B és C pontok a *háromszög csúcsai*, az $c = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$ és $a = \overline{BC}$ szakaszok a *háromszög oldalai.* A $CAB\angle, ABC\angle, BCA\angle$ a *háromszög szögei.* Az *A csúccsal szemközti oldal* a $\overline{BC}$, a *$\overline{BC}$ oldallal szemközti csúcs* az a, és az ezen *oldallal szemközti szög* a $BAC\angle$. A *$BAC\angle$ szöggel szemközti oldal* a $\overline{BC}$ oldal, a *$BAC\angle$ szög melletti oldalak* $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$. A $BAC\angle$ szög a $\overline{AC}$ és $\overline{AB}$ *oldalak közti (vagy általuk közbezárt) szög.* A háromszög szögeinek mellékszögeit a *háromszög külső szögeinek* nevezzük. Egy háromszög külső szögének mellékszögét a háromszög e *külső szög melletti belső szögének* nevezzük.

Ahogy az megszokott, mi is élünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy $\overline{AB}$ a szövegkörnyezettől függően jelölheti magát a szakaszt (mint ponthalmazt), és annak hosszát is. Hasonlóan, a háromszögben a egyszerre jelöli az egyik oldalt (mint szakaszt), és annak hosszát is. A háromszög oldalaira érvényesek a háromszög-egyenlőtlenségek: $a+b > c$, $a+c > b$ és $b+c > a$. Azt mondjuk, hogy egy *szakasz nagyobb (kisebb)*, mint egy másik szakasz, ha hosszúsága nagyobb (kisebb). $b + c > a$. Azt mondjuk, hogy egy *szög nagyobb (kisebb)*, mint egy másik szög, ha nagysága nagyobb (kisebb).

Ha adott egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés két háromszög (csúcsai) között úgy, hogy a megfelelő oldalak egyenlő hosszúságúak, akkor azt mondjuk, hogy a *két háromszög egybevágó*; jelölése: $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Két háromszög egybevágóságának alapesete (bizonyítás nélkül):

1. Állítás (Oldal—szög—oldal-állítás). *Ha két háromszög között van olyan megfeleltetés, hogy a két-két megfelelőoldal hosszúsága és az általuk közbezárt* *szög nagysága megegyezik, akkor a harmadik oldalak hosszúsága is megegyezik, és a megfelelő szögek nagysága is megegyezik.*

Ebből következik, hogy e*gybevágó háromszögeknek a megfelelő szögei egyenlő nagyok.* Ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala, akkor a háromszöget egyenlő szárú háromszögeknek nevezzük. Azokat a háromszögeket, amelyeknek minden oldaluk (és így minden szögük) egyenlő, szabályos vagy egyenlő oldalú háromszögnek hívjuk. Megmutatható, hogy egy háromszögnek két oldala pontosan akkor egyenlő, ha a velük szemben fekvő szögek egyenlőek.

A síkon azokat a leképezéseket, amelyek megőrzik a pontok távolságát, *távolságtartó leképezéseknek* vagy *izometriáknak* nevezzük. Két szöget egyenlő nagyságúnak tekintünk, ha van a síknak olyan izometriája, amely az egyiket a másikba viszi.

Rögzítsünk egy O pontot a síkon, és egy $r > 0$ valós számot. Az O-tól r távolságra lévő pontok halmazát O középpontú r sugarú körvonalnak (néha csak körnek) nevezzük. Az O-tól legfeljebb r távolságra lévő pontok halmazát O középpontú r sugarú körlemeznek (néha csak körnek) nevezzük.

Az e egyenes P-ben érinti az O középpontú r sugarú kört, ha a kör és az egyenes egyetlen közös pontja P. Ismert, hogy ekkor $OP \perp e$. Általában ha adott egy k kör, és $Q \notin k$ külső pont, akkor k-nak két olyan érintője létezik, ami illeszkedik Q-ra. Ha az érintési pontok rendre P_1 és P_2, akkor $\overline{QP_1} = \overline{QP_2}$ szimmetriai okok miatt.

Legyen adott egy ponthalmaz a síkban. Egy olyan görbét, amelynek minden pontja ugyanolyan távolságra van a ponthalmaztól, *ekvidisztáns görbének nevezzük az adott ponthalmazra vonatkozóan.*

2.2. Alapvető összefüggések háromszögekre vonatkozóan

2.2.1. Hosszúság

Alapvető kérdéseink:
(1) Hogyan rendelünk egy szakaszhoz hosszúságot?
(2) Hosszúságuk szerint hogyan hasonlíthatjuk össze a szakaszokat?
(3) Mikor mondjuk, hogy egy szakasz hosszabb vagy rövidebb a másiknál? Illetve mikor ugyanolyan hosszú?

Alapvető válaszok:
(1) Mérnünk kell a szakaszokat.
(2) Mértékük szerint tudjuk összehasonlítani.

Újabb kérdés:
(1) Mit jelent, hogy megmérjük a szakaszt?
(2) Hogyan mérjük meg a szakasz?

Újabb válaszok:

(1) Van mérőeszközünk.

(2) Bármely egyenes mellé odailleszthetjük a mérőszalagot.

(3) Szakaszok hosszának összehasonlításakor nem a szakaszokat mozgatjuk, hanem a mérőszalagot.

Még újabb kérdések:

(1) Hogyan készíthetünk mérőszalagot?

(2) Hogyan tudunk egyenletes skálát felvinni a skálázott vonalzóra?

Válaszok:

(1) A skálázott vonalzó készítéséhez is szükség van a szakaszok összehasonlítására.

(2) Tudnunk kell egységet felvenni, majd azt sokszorozni és felosztani.

(3) Az egész síkon mindenütt egyformán használható skálázott vonalzó elkészíthetőségét valahogyan biztosítani kell.

(4) Valójában a végeredmény számít: bármely két szakasznak meg tudjuk mondani a hosszúságát. Ez azt jelenti, hogy össze tudjuk vetni a vonalszó egy szakaszával, vagyis fedésbe tudjuk hozni őket. Eredményül bármely két ponthoz egy valós számot rendeltünk, a pontok távolságát.

(5) Létezik tehát egy távolságmérés (metrika) a síkon. De nem akárhogyan, olyan tulajdonságokat is elvárunk tőle, amelyek a fizikai tapasztalatainkkal összevágva lehetővé teszik a matematikai absztrakciót.

Következtetés: Szakaszokat hosszúság szerint méréssel összehasonlítani pontosan azt jelenti, hogy a sík egy távolságtartó transzformációjának segítségével kapcsolatba hozzuk őket.

A szögek összehasonlíthatósága az izomteriákon múlik. Ha két szöget mint egy-egy háromszög szögét tekintjük, nagyságuk egyenlőségét a háromszögek összevetésével tudjuk megvizsgálni. Alapvető szerepet játszik az alakzatok egybevágósága.

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ alakzat és a $\mathcal{B}$ alakzat egybevágóak (jelben: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), ha van olyan $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijekció a két halmaz között, amelyik megőrzi a pontok távolságát.*

Meg lehet mutatni, hogy az alakzatok egybevágósága szoros összhangban van a sík izometriáival.

2. tétel. *Ha $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ két alakzat egybevágósága, akkor van a síknak olyan Φ izometriája, amelynek az $\mathcal{A}$ halmazra megszorítása éppen φ: vagyis $\Phi|_{\mathcal{A}} = \varphi$.*

Az egybevágóság definíciójából két háromszög egybevágóságára azonnal adódik a következő igaz állítás. Valójában ez azt mutatja, hogy a *háromszögek egybevágóságának* fogalma az alakzatok egybevágóságának általánosabb fogalmát fejezi ki három pontból álló halmazokra.

3. tétel. *Két háromszög egybevágó, ha csúcsaik között van egy olyan*

$$\varphi\colon A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$$

bijekció, amelyre

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}, \quad \overline{CA} = \overline{C'A'},$$

azaz ha megfelelő oldalaik egyenlő hosszúságúak.

Tekintettel a 2. Tételre, egybevágó háromszögeknek a megfelelő szögei is egyenlő nagyságúak.

A későbbiekben vizsgálni fogjuk háromszögek egybevágóságának további eseteit.

,

4. tétel. *Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlő nagyságúak.*

Ennek a tételnek a megfordítása is igaz.

2.1. gyakorlat. *Egy háromszögben egyenlő nagyságú szögekkel szemben egyenlő hosszúságú oldalak vannak, tehát az ilyen háromszög egyenlő szárú.*

2.2. gyakorlat. *Egy derékszögű háromszög átfogója hosszabb a befogóinál.*

5. tétel. *Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságban vannak, egy egyenes, amely a szakaszt a felezőpontjában merőlegesen metszi.*

Az $\overline{AB}$ szakasz *szakaszfelező merőlegese* azon pontok halmaza a síkon, amelyek A-tól és B-től egyenlő távolságra vannak.

6. tétel. *Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ olyan, hogy $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, valamint $BAC\angle > B'A'C'\angle$, akkor $\overline{BC} > \overline{B'C'}$.*

2.3. gyakorlat. *Egy háromszögben bármelyik külső szög nagyobb, mint a nem mellette fekvő belső szögek bármelyike.*

2.4. gyakorlat. *Egy háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van.*

2.5. gyakorlat. *Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.*

7. tétel. *Ha két háromszög megfelelő oldalainak hosszúsága megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó.*

Két metsző egyenes négy szöget határoz meg, amelyek között van két csúcsszögpár, és két mellékszögpár. Két egyenest két különböző A és B pontban metsző harmadik egyenes egyik oldalán az $\overrightarrow{AB}$ szárú és másik oldalán a $\overrightarrow{BA}$ szárú szöget *belső alternáló szögpárnak nevezzük* (két ilyen szögpár van).

2.6. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha három egyenes által meghatározott egyik belső alternáló szögpár egyenlő nagy, akkor a másik is az.*

2.7. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy ha két egyenest egy harmadik egyenlő nagyságú belső alternáló szögekben metsz, akkor a két egyenes párhuzamos.*

A geometriánkban minden háromszög szögeinek összege megegyezik, nevezetesen:

8. tétel. *A háromszögek szögeinek összege* $180°$.

2.8. gyakorlat.

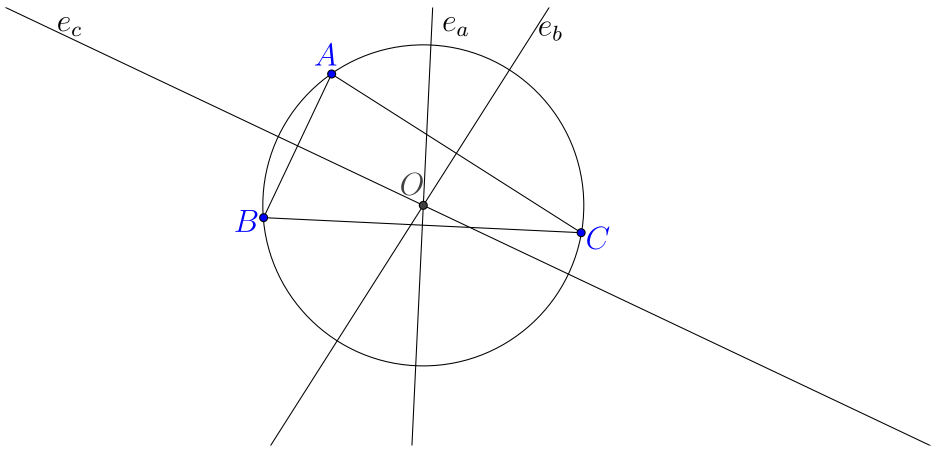
2.3. A háromszög nevezetes pontjai

2.3.1. A körülírt kör középpontja

9. tétel. *Az $ABC\triangle$ háromszög oldalfelező merőlegesei egy O pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög mindhárom csúcsától ugyanakkora távolságra van. (3. ábra.)*

Mozgassuk meg az ábrát a GeoGebraTube-on! Mit tapasztalunk, ha a háromszög egyik szögét elkezdjük növelni?

Bizonyítás. Jelölje az oldalfelező merőlegeseket rendre e_a, e_b és e_c. Legyen O az e_a és az e_b egyenesek metszéspontja: $O = e_a \cap e_b$. Definíció szerint az O pont egyenlő távolságra van B és C pontoktól (mivel rajta van e_a-n), valamint O egyenlő távolságra van A és C csúcsoktól (mivel rajta van e_b-n). Így az O pont egyenlő távolságra van az A és B csúcsoktól is, így rajta van az e_c oldalfelező merőlegesen. Valóban, az e_a , e_b és e_c oldalfelező merőlegesek



3. ábra. A háromszög köré írt kör középpontja

egy pontban metszik egymást, méghozzá az O pontban, amely mindhárom csúcstól ugyanakkora távolságra van. $\square$

Tekintsük a 9. Tételben szereplő $ABC\triangle$ háromszöget, és az O pontot, valamint legyen $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$. Az O körüli, R sugarú körvonal tartalmazza az A, B és C pontok mindegyikét, ezért a háromszög körülírt körének nevezzük. A körülírt kör az egyetlen mindhárom csúcsot tartalmazó körvonal.

2.3.2. A beírt kör középpontja

2.9. feladat. *Mutassuk meg, hogy egy pont távolsága egy rajta át nem menő egyenestől a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hossza.*

Tekintsünk két különböző e és f egyenest a síkon.

Ha $e \| f$, akkor az e-től és f-től egyenlő távolságra lévő pontok halmaza egy egyenes, az e és f középpárhuzamosa.

Ha $e \cap f = \{M\}$, akkor az e-től és f-től egyenlő távolságra lévő pontok két egymásra merőleges egyenesen helyezkednek el, amelyek M pontban metszik egymást. Ezek az egyenesek felezik az e és f által meghatározott megfelelő szögeket, ezért őket az e és f szögfelezőinek nevezzük.

10. tétel. *Bármely $ABC\triangle$ háromszög belső szögfelezői egy I pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög minden oldalától egyenlő távolságra van.*

A tétel bizonyítása nagyon hasonló a 9. Tétel bizonyításához, próbáljuk meg önállóan! Ellenőrzésként megtekinthetjük a GeoGebraTube-on.

Tekintsük a 10. Tételben szereplő $ABC\triangle$ háromszöget, és az I pontot, valamint legyen $d(I,a) = d(I,b) = d(I,c) = r$. Könnyű látni, hogy az I középpontú, r sugarú kör minden oldalt egy belső pontban érint, ezért a háromszög beírt körének nevezzük. A beírt kör az egyetlen olyan kör, ami a háromszög mindhárom oldalát belső pontban érinti. Az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek a megfelelő oldalakra.

2.3.3. A magasságpont

A háromszög egyik csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsájtott merőleges egyenest a háromszög magasságvonalának nevezzük. A magasságvonal és az oldalegyenes metszéspontja a magasság talppontja. A csúcsot a talpponttal összekötő szakaszt a háromszög magasságának nevezzük. A magasság szó gyakran ennek a szakasznak a hosszát is jelenti. Ez másképp mondva a csúcs távolsága a szemközti oldalegyenestől.

A magasság fogalmának bevezetését a háromszögre érvényes legelső területformulánk motiválhatja. Ha a háromszög A csúcsával szemközt a hosszú oldala van, és a hozzájuk tartozó magasság m_a, akkor a *háromszög területe*

$$T_\triangle = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

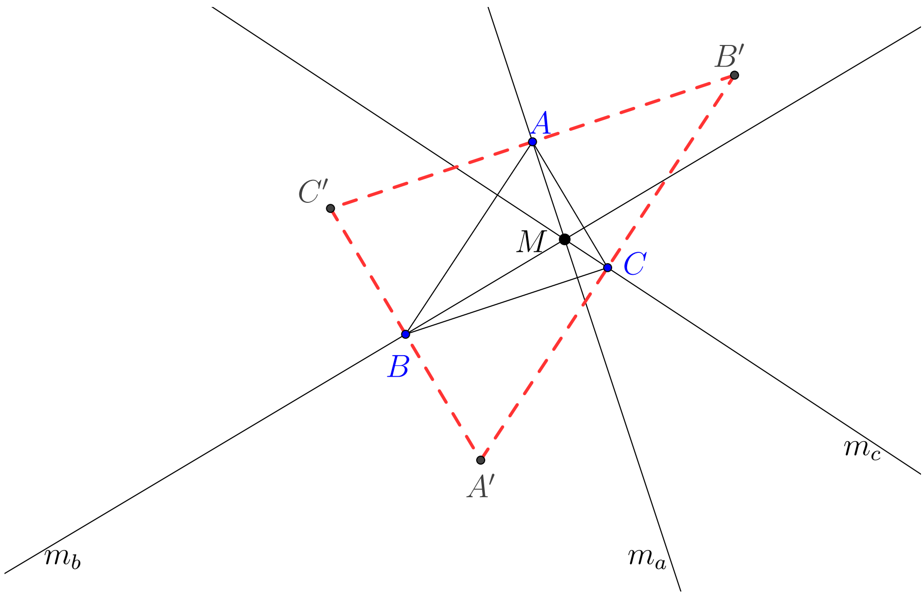
11. tétel. *A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a háromszög magasságpontjának nevezzük.*

Tekintsük meg a GeoGebraTube-on a vonatkozó dinamikus ábrát!

A bizonyítás előtt ismételjük át a paralelogramáról tanult alapvető ismereteinket a Wikipédia alapján!

Bizonyítás. Tekintsük a 4. ábrát. Jelölje a magasságvonalakat rendre m_A, m_B és m_C. Húzzunk párhuzamost a-val A-n keresztül, b-vel B-n keresztül, és c-vel C-n keresztül. Ezek az egyenesek meghatároznak egy nagyobb háromszöget, ennek csúcsait jelölje A', B' és C' az ábra szerint. A $C'BCA$ négyszög paralelogramma, mivel $BC \parallel AC'$ és $BC' \parallel AC$. Hasonlóan kapjuk, hogy $ABCB'$ négyszög is paralelogramma. Így $\overline{AC'} = \overline{BC} = \overline{AB'}$. Ezért A pont felezi $B'C'$ szakaszt. Továbbá, $m_A \perp BC$, valamint $C'B' \parallel CB$, így $m_A \perp C'B'$. Kaptuk, hogy m_A a $B'C'$ szakasz felező merőlegese. Hasonlóan megmutatható, hogy m_C az $A'B'$ szakasz felező merőlegese, míg m_B az $A'C'$ szakasz felező merőlegese. Az m_A, m_B és m_C egyenesek az $A'B'C'\triangle$ oldalfelező merőlegesei, így valóban egy pontban metszik egymást. $\square$

2.10. gyakorlat. *Legyen $ABC\triangle$ magasságpontja M. Mi az $ABM\triangle$ magasságpontja?*



4. ábra. A háromszög magasságpontja

2.11. gyakorlat. *Vezessük be az $ABC\triangle$ félkerületére az $s = (a + b + c)/2$ jelölést, továbbá legyen r a beírt kör sugara. Mutassuk meg, hogy az $ABC\triangle$ területére $T = s \cdot r$.*

2.3.4. A súlypont

A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük. A súlyvonal névadó tulajdonsága, hogy ha a háromszöglemezt a súlyvonala mentén alátámasztjuk, akkor egyensúlyban marad, és nem „billen le” az alátámasztásról.

2.12. gyakorlat. *Készítsünk dinamikus ábrát GeoGebrával a háromszög súlyvonalairól!*

12. tétel. *A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja. A súlypont minden súlyvonalat harmadol, mégpedig úgy, hogy a súlypont a súlyvonalak csúcsoktól távolabb eső harmadolópontja.*

2.13. feladat. *Mutassuk meg a háromszög területformulájának felhasználásával, hogy a súlyvonalak egy ponton mennek át!*

Megoldás. Először azt vizsgáljuk meg, hogy az $ABC\triangle$ háromszög $\overline{BD}$ súlyvonala milyen arányban osztja a $\overline{AE}$ súlyvonalat.

Mivel D felezőpont, $t_{ABD\triangle} = \frac{1}{2} t_{ABC\triangle}$, és mivel E is felezőpont, $t_{BED\triangle} = = \frac{1}{2} t_{BCD\triangle} = \frac{1}{4} t_{ABC\triangle}$. Ezért e két közös $overline BD$ alapú háromszög magasságának aránya $m_1 : m_2 = 2 : 1$. Így a közös $\overline{DS}$ alapú $DSA\triangle$ és $DSE\triangle$ háromszögek területének aránya $2 : 1$. E háromszögek esetén az $\overline{AS}$, illetve $\overline{SE}$ alapot véve (a magasságuk közös), ezek aránya is $2 : 1$.

Ha most azt vizsgálnánk meg, hogy a harmadik súlyvonal milyen arányban osztja az $\overline{AE}$ súlyvonalat, ugyanezt az arányt kapnánk.

Egy adott szakaszt adott arányban pedig pontosan egy pont oszt, és ez bizonyítja az állítást. $\square$

A súlypontjában alátámasztott háromszöglemez egyensúlyban marad, nem billen le. Ugyanezt tudjuk, a súlyvonalakról. Valójában tetszőleges, a súlyponton áthaladó egyenes mentén alátámasztva a háromszöglemezt, az nem billen le.

A súlypont létezéséről szóló tétel bizonyítására a kurzus folyamán visszatérünk.

2.14. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy a súlyvonalak a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztják.*

2.15. feladat. *Melyek azok a súlypontra illeszkedő egyenesek, amelyek a háromszöget két egyenlő területű részre osztják?*

A 2.15. feladat a KöMaL B. 3295. példája.

A háromszögre vonatkozó alapismeretek rövid összefoglalója található itt és itt. (Sok részlet a kurzus folyamán később előkerül valamilyen formában.)

2.4. Gyakorlatok

2.16. gyakorlat. *Mi lesz a háromszög talpponti háromszögébe írható körének középpontja?*

2.17. gyakorlat. *Adott a síkban három pont. Szerkesszünk háromszöget, melyben ezek a magasságok talppontjai!*

2.18. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy egyenes ekvidisztáns görbéje egyenes!*

2.19. gyakorlat. *Határozzuk meg egy egyenes összes ekvidisztáns görbéjét!*

2.20. gyakorlat. *Határozzuk meg egy kör ekvidisztáns görbéit!*

2.21. gyakorlat. *Határozzuk meg egy két párhuzamos egyenesből álló ponthalmaz ekvidisztáns görbéit!*

2.22. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy két metsző egyenes ekvidisztáns görbéi a szögfelező egyenesek.*

2.23. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy szög szögfelező egyenesei merőlegesek.*

3. Derékszögű háromszög

Célok: a derékszögű háromszög elemi geometriájának áttekintése, önálló bizonyítások gyakorlása.

3.1. Alapismeretek

Az $ABC\triangle$ derékszögű, ha valamely két oldala merőleges. A szokásos jelölés szerint a derékszögű csúcs C, a derékszöget bezáró a és b oldalakat befogóknak, a c oldalt átfogónak nevezzük.

A magasság definíciója miatt világos, hogy az a oldalhoz tartozó magasság éppen b (és viszont, a b-hez tartozó magasság a), ezért $T = ab/2$.

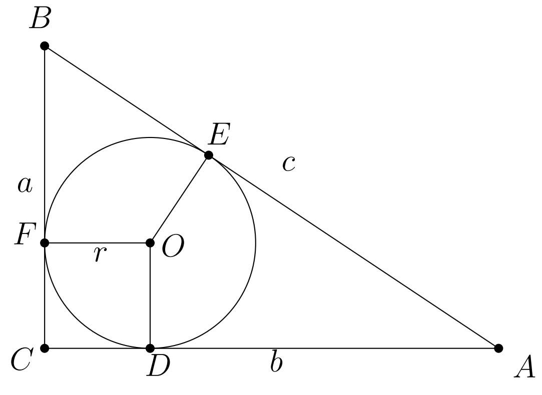
3.1. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara*

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Megoldás. A 2.10. gyakorlat területétképletét a $T = ab/2$ formulával összevetve azonnal adódik az állítás. □

3.2. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara*

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$



5. ábra. A derékszögű háromszög beírt köre

Megoldás. Használjuk az 5. ábra jelöléseit. $CDOF$ négyszögben C-nél, D-nél és F-nél derékszög van, ezért $CDOF$ téglalap. $\overline{OF} = \overline{OD} = r$ miatt

$CDOF$ egy r oldalú négyzet, és így $\overline{CF} = \overline{CD} = r$. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért $\overline{BF} = \overline{BE}$ és $\overline{AE} = \overline{AD}$. Valamint nyilvánvaló, hogy $\overline{BE} + \overline{AE} = c$. Ezek alapján

$$a+b+c = \overline{CF}+\overline{FB}+\overline{BE}+\overline{EA}+\overline{AD}+\overline{DC} = 2r+2(\overline{BE}+\overline{AE}) = 2r+2c.$$

Az egyenlőségsorozat két végét összevetve azonnal kapjuk az állítást.

3.2. Pitagorász-tétel

Talán az egész matematika leghíresebb tétele a következő.

13. tétel (Pitagorász-tétel). *Derékszögű háromszögben az átfogó négyzete megegyezik a befogók négyzeteinek összegével:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

A tételre (állítólag) több mint 200 féle különböző bizonyítás ismert. Mi az előkészületeink után kényelmes helyzetben vagyunk.

Bizonyítás. A 3.1. és 3.2. gyakorlatok alapján felírhatjuk a beírt kör sugarát kétféleképpen:

$$\frac{ab}{a+b+c} = r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Felhasználva, hogy $(a+b+c)(a+b-c) = a^2+b^2-c^2+2ab$, a tétel következik a fenti egyenlőségből, ha mindkét oldalt megszorozzuk $2(a+b+c)$-vel. □
Tekintsük meg a tétel egy látványos szemléltetését a youtube-on.

3.3. gyakorlat. *Számítsuk ki az a oldalhosszúságú szabályos háromszög területét!*

A tétel megfordítható, a megfordítást később igazoljuk:

14. tétel (Pitagorász-tétel megfordítása). *Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.*

3.3. Nevezetes tételek derékszögű háromszögekre

15. tétel (Thalész-tétel). *Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körív A-tól és B-től különböző tetszőleges C pontjával, akkor az $ABC\triangle$ C-nél lévő szöge derékszög lesz.*

Bizonyítás. Tekintsük 6. ábrát. Az $AOC\triangle$ és $BOC\triangle$ háromszögek egyenlőszárúak, hiszen $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = r$ a kör sugara. Ezért az alapon fekvő szögek egyenlőek $\alpha = CAO\angle = ACO\angle$ ill. $\beta = CBO\angle = BCO\angle$. Kihasználva, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, kapjuk, hogy $2\alpha + 2\beta = 180°$, s így $ACB\angle = \alpha + \beta = 90°$ valóban.□

16. tétel (Thalész-tétel megfordítása). *A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.*

A megfordítás igazolását az érdeklődő olvasóra hagyjuk.

17. tétel (Magasságtétel). *Az $ABC\triangle$ derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó m magasság az átfogót két, x és y hosszú darabra bontja. Ekkor $m^2 = xy$.*

18. tétel (Befogótétel). *Az $ABC\triangle$ derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó m magasság talppontja legyen T, $\overline{AT} = y$ és $\overline{BT} = x$. Ekkor $a^2 = cx$ és $b^2 = cy$.*

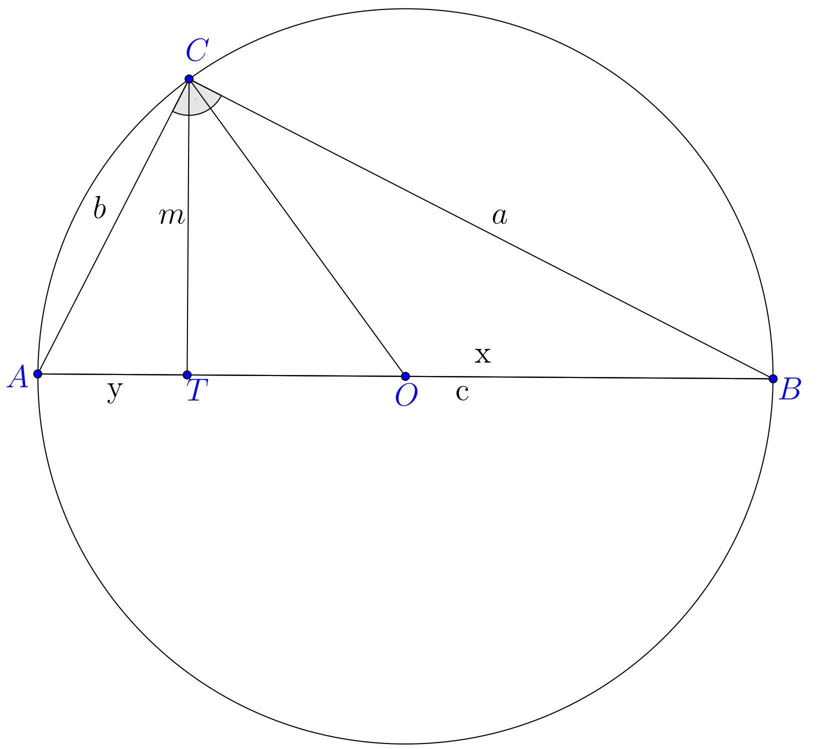
3.4. gyakorlat. *Bizonyítsuk be a 17. és 18. tételeket a Pitagorász-tétel segítségével!*

A 17. és 18. tételeket a kurzus folyamán később más úton is igazoljuk.

3.5. gyakorlat. *Bizonyítsuk be a Thalész-tételt a Pitagorász-tétel és megfordítása segítségével!*

Megoldási tipp: írjuk fel a Pitagorász-tételt a 6. ábrán szereplő derékszögű háromszögekre, majd rendezzük a kapottakat.

Kapcsolódó Wikipédia-szócikkek: Pitagorász-tétel, Thalész-tétel és megfordítása.



6. ábra. Derékszögű háromszög

4. Háromszögek egybevágósága, párhuzamos szelők

Célok: távolságtartó és hasonlósági transzformációk előkészítése.

4.1. Alapismeretek

Alakzatok egybevágóságára mindenkinek van szemléletes fogalma: két síkidom egybevágó, ha őket kivágva papírból, a két papírdarab egymással tökéletes fedésbe hozható. Pontosabb definíciót a következő leckében adunk. Az egybevágóság jele $\cong$.

A fenti eljárás szerint bárki meggyőződhet a következő tételről.

19. tétel (Háromszögek egybevágóságának alapesetei). *Két háromszög egybevágó, ha*

- *oldalaik hossza páronként egyenlő;*
- *két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők;*
- *egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő;*
- *két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és a két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.*

Most már be tudjuk bizonyítani a Pitagorász-tétel megfordítását is.

20. tétel (Pitagorász-tétel megfordítása). *Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a^2 + b^2 = c^2$ teljesül egy háromszög a, b, c oldalaira. Tekintsünk egymásra merőleges a ill. b hosszúságú szakaszokat, amelyeknek az egyik végpontjuk közös. Ez a két szakasz meghatároz egy derékszögű háromszöget, aminek a harmadik oldala a Pitagorász-tétel miatt éppen c. Az így kapott derékszögű háromszög tehát egybevágó az eredeti háromszöggel - hiszen mindhárom oldaluk hossza páronként egyenlő -, ami a tételt igazolja. $\square$

4.1. gyakorlat. *Adjunk példát két olyan háromszögre, amelyeknek van két egyenlő oldalpárjuk, és egy egyenlő szögük, de a két háromszög nem egybevágó.*

Megoldás. Vegyünk fel egy tetszőleges $\overline{AB}$ szakaszt, és rajzoljunk A középponttal egy kört $r < \overline{AB}$ sugárral. Most húzzunk egy félegyenest B-ből, ami a kört két különböző, C és D pontokban metszi. Az $ABC\triangle$-nek és az $ABD\triangle$-nek az AB oldala közös, a szerkesztés miatt $\overline{AC} = \overline{AD}$, valamint a B-nél lévő szög is közös, a két háromszög mégsem egybevágó. $\square$

Kisérletezzünk a GeoGebraTube-on! Miért fontos, hogy $r < \overline{AB}$?

4.2. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy $ABC\triangle$ egyenlő szárú háromszögben ($\overline{AC} = \overline{BC}$) a C csúcsból induló súlyvonal, magasságvonal és szögfelező egybeesik!*

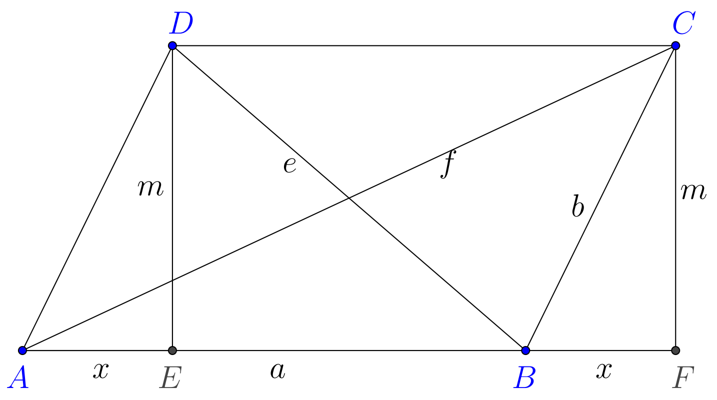
4.3. gyakorlat. *Legyenek az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai E, F és G. Mutassuk meg, hogy $T_{ABC} = 4T_{EFG}$. (Ahol T_{XYZ} az $XYZ\triangle$ területét jelöli, értelemszerűen.)*

4.4. feladat. *Igaz-e, hogy ha két háromszög magasságai páronként egyenlőek, akkor a két háromszög egybevágó?*

Végül egy nevezetes tételt tűzünk ki gyakorlatként, ami a Pitagorász-tétel következménye.

21. tétel (Paralelogramma-tétel). *Mutassuk meg, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege, megegyezik az átlóinak négyzetösszegével! Azaz, ha egy paralelogramma oldalai a és b, átlói pedig e és f, akkor*

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2.$$



7. ábra. Paralelogramma-tétel

Bizonyítás. Írjuk fel a Pitagorász-tételt a 7. ábrán látható derékszögű háromszögekre: $BFC\triangle$-re kapjuk, hogy $x^2 + m^2 = b^2$. $AFC\triangle$-re $(a + x)^2 + m^2 = f^2$, míg $EBD\triangle$-re $(a - x)^2 + m^2 = e^2$.

Utóbbi kettőt összeadva, és a négyzetreemeléseket elvégezve, egyszerűsítve adódik, hogy $2a^2 + 2x^2 + 2m^2 = e^2 + f^2$. Végül ebbe a legelső Pitagorász-tételt beírva kapjuk a paralelogramma-tételt: $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$ $\square$

Paralelogramma-tétel a GeoGebraTube-on.

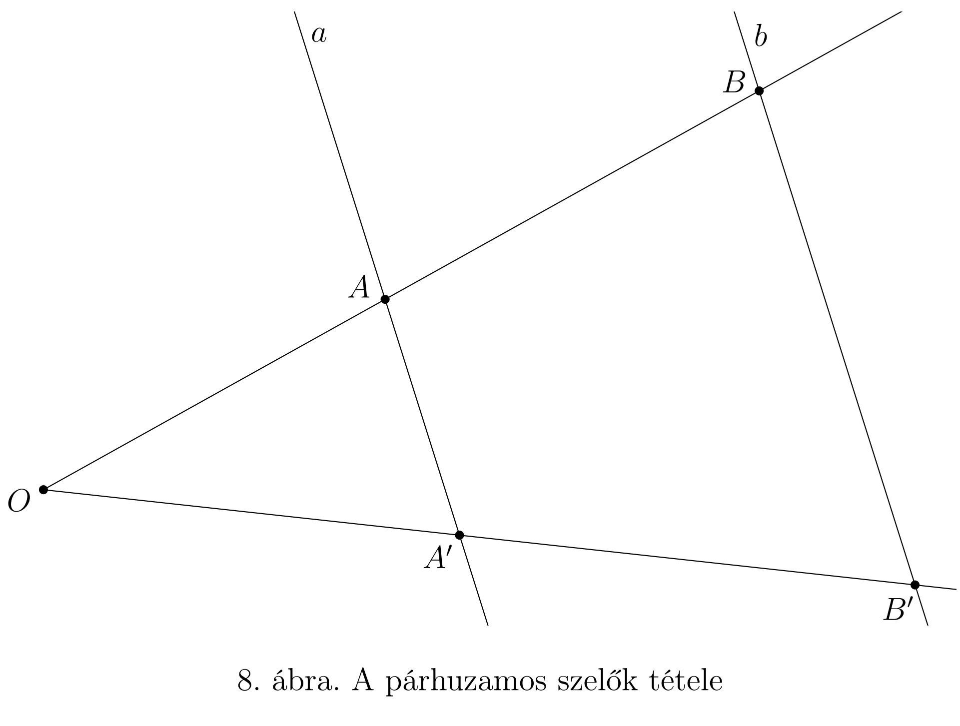
4.5. gyakorlat. *Egészítsük a paralelgrammatételre adott bizonyításunkat, és mutassuk meg, hogy* $\overline{AE} = \overline{BF}$.

4.2. Párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele

A következő tétel kulcsfontosságú elméleti jelentőségű.

22. tétel (Párhuzamos szelők tétele). *Egy O csúcsú szög szárait messék a párhuzamos a és b egyenesek rendre A és A', ill. B és B' pontokban. (Lásd 8. ábra.) Ekkor*

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}.$$



8. ábra. A párhuzamos szelők tétele

Bizonyítás. Az $OA'A\triangle$ és az $OB'A\triangle$ A-ból induló magassága megegyezik, jelölje ezt m_A. Így

$$\frac{T_{OA'A}}{T_{OB'A}} = \frac{\frac{\overline{OA'}\cdot m_A}{2}}{\frac{\overline{OB'}\cdot m_A}{2}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}.$$

Hasonlóan indokolhatunk $OA'A\triangle$ és $OA'B\triangle$ esetén, és így nyerjük, hogy

$$\frac{T_{OA'A}}{T_{OA'B}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Belátjuk, hogy $T_{OA'B} = T_{OB'A}$, így a tétel a fenti két egyenlőségből azonnal következik. Ehhez vegyük észre, hogy $T_{AB'B} = T_{B'BA'}$, hiszen $\overline{BB'}$ alap közös, és a hozzá tartozó magasság a két háromszögben egyenlő $a\|b$ miatt. Így

$$T_{OA'B} = T_{OB'B} - T_{B'BA'} = T_{OB'B} - T_{B'BA} = T_{OB'A}.$$

□

4.6. gyakorlat. *Készítsünk a párhuzamos szelők tételét szemléltető dinamikus ábrát.*

A tételt felhasználva bizonyítsuk a következő, általánosabb alakot.

4.7. gyakorlat. *Egy O csúcsú szög szárait messék a párhuzamos a, b, c és d egyenesek rendre A és A', B és B', C és C', ill. D és D' pontokban. Ekkor*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

Ötlet. A párhuzamos szelők tételének előbb igazolt alakja szerint létezik valamilyen $\lambda > 0$ valós szám, hogy $\overline{OX} = \lambda \cdot \overline{OX'}$, ahol X helyén állhat A, B, C vagy D. □

Az $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, stb. szakaszokat szokás szelőszakaszoknak is nevezni. Ezek hosszáról is állíthatunk hasonlót, mint az előbbi tételekben.

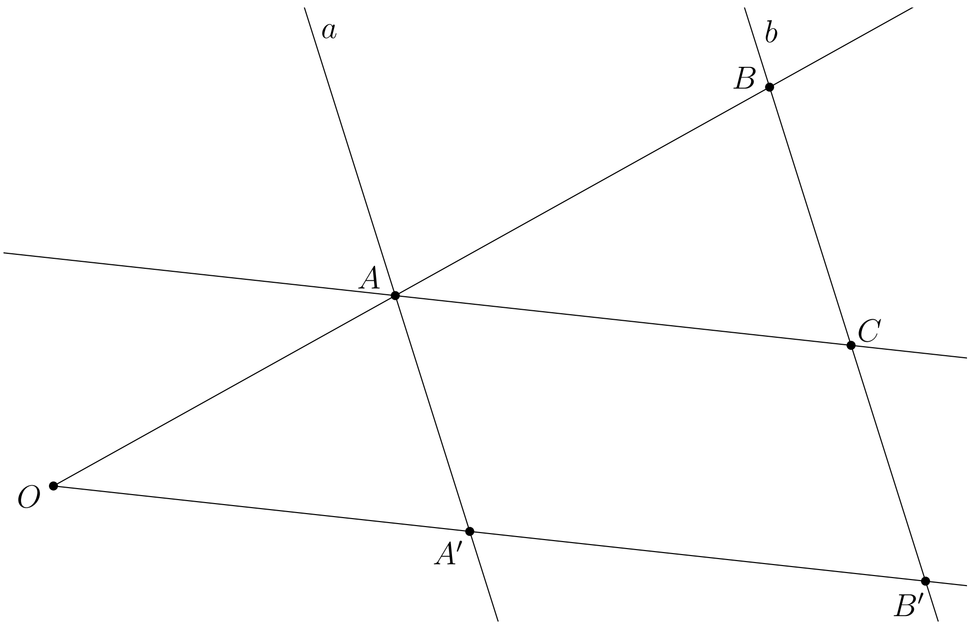
23. tétel (Párhuzamos szelőszakaszok tétele). *Egy O csúcsú szög szárait messék a párhuzamos a és b egyenesek rendre A és A', ill. B és B' pontokban. (Lásd 8. ábra.) Ekkor*

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

Bizonyítás. Húzzunk párhuzamost A-n keresztül OA'-vel, és messe ez b-t C-ben, lásd 9. ábra. A párhuzamos egyenespárok miatt $AA'B'C$ paralelogramma, ezért $\overline{AA'} = \overline{B'C}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének erősebb alakját (4.7. gyakorlat) a B csúcsú $OBB'\angle$ szögre, és az AC és OA' egyenesekre:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}},$$

ahogy állítottuk. □



9. ábra. A párhuzamos szelőszakaszok tétele

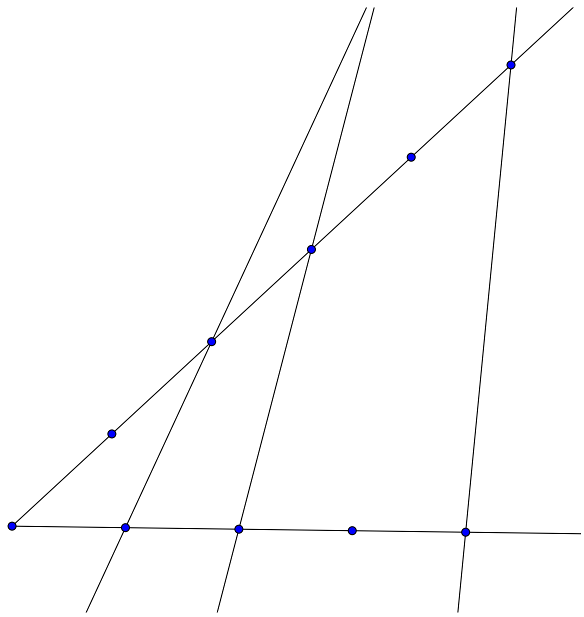
A tételek megfordíthatóak.

24. tétel (Párhuzamos szelők tételének megfordítása). *Egy O csúcsú szög szárait messék az a és b egyenesek rendre A és A', ill. B és B' pontokban. (Lásd 8. ábra.) Tegyük fel, hogy*

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}.$$

Ekkor a és b párhuzamosak.

Bizonyításvázlat. Húzzunk a' párhuzamost A keresztül b-vel, messe ez az a' egyenes OA' szögszárat A''-ben. Felírva a párhuzamos szelők tételét a'-re és b-re, valamint felhasználva a feltételt, $A' = A''$ azonnal adódik.□



10. ábra. A párhuzamos szelők tételének megfordításával vigyázzunk!

Vigyázat! A párhuzamos szelők tételének erősebb alakja lényegében nem fordítható meg. Ehhez tekintsük a 10. ábrát!

4.8. gyakorlat. *Fordítsuk meg a párhuzamos szelőszakaszok tételét! Igaz-e a megfordítás? Ha nem sikerül válaszolni, kutakodjunk a könyvtárban vagy az Interneten!*

Tipp: Tekintsük újra a 8. ábrát. Van-e olyan B'' pont az OA' szögszáron, amire $\overline{BB'} = \overline{BB''}$?

4.3. Gyakorlatok

4.9. gyakorlat. *Egy háromszög egyik oldalának P pontjából párhuzamost húzunk a másik két oldallal, és az így kapott D és E pontokat összekötjük (D az $\overline{AC}$, E pedig a $\overline{BC}$ oldalon fekszik). Igazoljuk, hogy a $PDE\triangle$ területe mértani közepe az $APD\triangle$ és a $PEB\triangle$ területének!* **(GFGY1322)**

4.10. gyakorlat. *Milyen arányban metszik egy trapéz átlói egymást?*

4.11. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy trapéz átlóinak metszéspontján keresztül az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakaszát az átlók metszéspontja felezi.*

4.12. gyakorlat. *A trapéz átlóinak metszéspontján keresztül az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakaszának hosszát fejezzük ki az alapok hosszúságával!*

4.13. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!*

4.14. gyakorlat. *Egy $\overline{AB}$ szakasz C pontjában állítsunk merőlegest a szakaszra, majd vegyük fel ezen a merőlegesen a D és E pontokat úgy, hogy $\overline{CD} = \overline{CA}$ és $\overline{CE} = \overline{CB}$ legyen. Szerkesszük meg az $ACDF$ és a $CBGE$ négyzeteket! Igazoljuk, hogy $\overline{AG}$ és $\overline{FB}$ a $\overline{CE}$ oldalon metszik egymást!*

4.15. gyakorlat. *Egy paralelogramma szemközti oldalainak felezőpontjait kössük össze a szemközti oldal végpontjaival! Határozzuk meg e négy egyenes által határolt négyszög és a paralelogramma területének arányát!*

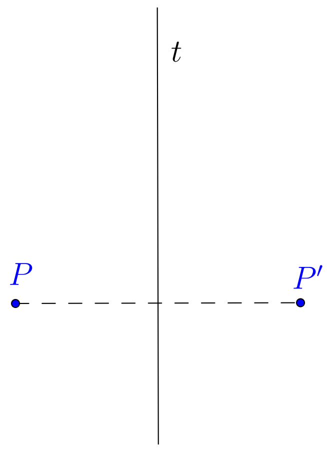
4.16. gyakorlat. *Egy háromszög egy oldalával húzzunk párhuzamost úgy, hogy az a háromszöget két egyenlő területű síkidomra bontsa!*

5. Távolságtartó transzformációk

Célok: Ismerkedés a síkizometriákkal, síkizometriák osztályozása.

5.1. Tengelyes tükrözés

Rögzítsünk egy e egyenest a síkon, és tekintsünk egy tetszőleges P pontot. Ekkor pontosan egy olyan P' pont létezik, hogy e a PP' szakaszfelező merőlegese. (Ha $P \in e$, akkor megállapodás szerint $P' = P$.) A P' pontot a P pont e-re vonatkozó tükörképének nevezzük. Azt a transzformációt, amely minden ponthoz hozzárendeli az e-re vonatkozóz tükörképét, az e-re vett tengelyes tükrözésnek nevezzük.



11. ábra. Tengelyes tükrözés

Dinamikus ábra a tengelyes tükrözésről a GeoGebraTube-on.

Használjuk fel a szakaszfelező merőleges korábbi definícióját, valamint a háromszögek egybevágóságának tanult alapeseteit, és ezek segítségével igazoljuk az alábbi állítást.

5.1. gyakorlat. *Ha a P és Q pontok e-re vonatkozó tükörképei rendre P' és Q', akkor $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.*

Megoldásvázlat. Tegyük fel, hogy PQ egyenes M pontban metszi az e tengelyt, továbbá legyen $N \in e$ egy M-től különböző pont a tengelyen. Mutassuk meg, hogy $PMN\triangle \cong P'MN\triangle$ és $QMN\triangle \cong Q'MN\triangle$. Ebből az állítás következik. (Miért?) Mi a helyzet, ha $PQ \| e$? $\square$

A fenti állítást úgy is mondjuk röviden, hogy a tengelyes tükrözés távolságtartó, hiszen ha tekintünk két tetszőleges pontot, akkor tükörképeik távolsága megegyezik az eredeti pontok (őspontok) távolságával. A következő állításban összefoglaljuk a tengelyes tükrözés legfontosabb tulajdonságait.

25. tétel (A tengelyes tükrözés alaptulajdonságai). *A tengelyes tükrözés*

1. *távolságtartó;*
2. *szögtartó;*
3. *területtartó;*
4. *a tengely pontjait fixen hagyja;*
5. *a tengelyhez tartozó két (nyílt) félsíkot felcseréli;*
6. *involúció, azaz kétszer egymás után végrehajtva minden pont visszakerül eredeti helyére;*
7. *a tengelyre merőleges egyeneseket önmagukba viszi.*

5.2. gyakorlat. 1. *Piroska a nagymamához készül. Mi a legrövidebb út, ha közben még a folyóparton a korsóját is meg kell töltenie friss vízzel? (Piroska és a nagymama egy-egy pont, a folyó egy egyenes által határolt félsík, ami nem tartalmazza Piroskát és a nagymamát.)*

2. *Egy hegyesszögtartományban adott egy P pont. Mi a legrövidebb út, ami a szög mindkét szárát érinti, majd visszatér P-be?*
3. *Egy hegyesszögtartományban adottak A és B pontok. Mi a legrövidebb A-ból B-be vezető út, ami a szög mindkét szárát érinti?*

Megoldás.

a) Jelölje P Piroskát, N a nagymamát, f a folyót. Legyen P f-re vonatkozó tükörképe P', és messe NP egyenes f-t X-ben. Egy tetszőleges $Y \in f$ pontra

$$\overline{PY} + \overline{YN} = \overline{P'Y} + \overline{YN} \geq \overline{P'N} = \overline{P'X} + \overline{XN} = \overline{PX} + \overline{XN}.$$

Ez mutatja, hogy a $\overline{PX}$ és $\overline{XN}$ szakaszokból álló (töröttvonal) séta a legrövidebb.

b) (Vázlat.) Tükrözzük P-t a szögszárakra, és a kapott pontokat kössük össze egy egyenessel. Ez az egyenes messe a szögszárakat X-ben és Y-ban. PXY háromszög alakú séta a megoldás, az indoklás hasonlóan történhet az a) részhez.

c) (Vázlat.) Az A pontot az egyik, B-t a másik szögszárra tükrözzük, majd a b) résszel analóg módon indoklunk. Vigyázat! Ez esetben kettő lehetőséget kapunk, amik közül a rövidebbet kell majd választanunk. (Nem mindegy, hogy az A-ból induló séta először melyik szögszárat látogatja meg.) □

5.2. Alapismeretek

Legyen φ a sík transzformációja, vagyis egy a sík pontjaihoz a sík pontjait kölcsönösen egyértelműen rendelő leképezés. A φ transzformáció távolságtartó, vagy idegen szóval izometrikus, ha két tetszőleges pont távolsága megegyezik φ melletti képeik távolságával, azaz bármely P és Q pontokra, valamint P' és Q' φ melletti képeikre $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Durván szólva az izometriák azok a transzformációk, amik a sík „minden geometriai tulajdonságát" megőrzik. Épp ezért alapos megértésük alapvető fontosságú. Legegyszerűbb példa az identitás, vagyis az a transzformáció, ami minden ponthoz önmagát rendeli, valamint a már megismert tengelyes tükrözés.

Azokat a pontokat, amiket a φ izometria helyben hagy, a φ fixpontjainak nevezzük; vagyis a P pont a φ fixpontja, ha $\varphi(P) = P$. Az identikus transzformációnak minden pont fixpontja. Tengelyes tükrözés esetén pontosan a tengely pontjai fixek.

5.3. gyakorlat. *Tegyük fel, hogy φ izometriának P fixpontja, valamint Q pont φ melletti képe $Q'(\neq Q)$. Mutassuk meg, hogy P rajta van a $\overline{QQ'}$ szakaszfelező merőlegesén.*

Megoldás. Mivel φ izometria, így $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, de P fix, $P' = P$, s így $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$, vagyis P valóban egyenlő távolságra van a Q és a Q' pontoktól.□

A következő tétel alapvető fontosságú.

26. tétel. *Tegyük fel, hogy a φ izometriának van három különböző, nem kollineáris fixpontja. Ekkor φ az identitás.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik egy Q pont, ami nem fix: $Q' \neq Q$. Ekkor az 5.3. gyakorlat szerint minden fixpont rajta van a $\overline{QQ'}$ szakaszfelező merőlegesén, ami ellentmond annak, hogy a három adott fixpont nem kollineáris. Így eredeti feltevésünk hibás, vagyis φ minden pontot fixen hagy, azaz az identitás.□

A következő feladatot érdeklődő hallgatóknak ajánljuk.

5.4. feladat. *Ha a φ izometriának van két különböző $P_1 \neq P_2$ fixpontja, akkor φ vagy az identitás, vagy a P_1P_2 egyenesre vonatkozó tükrözés.*

A feladat megoldásához szükséges ötlet segítségével igazolható a következő tétel.

27. tétel (Síkizometriák klasszifikációja). *Minden φ síkizometria az alábbiak valamelyike:*

– *identitás;*

– *tengelyes tükrözés;*

– *pont körüli forgatás;*

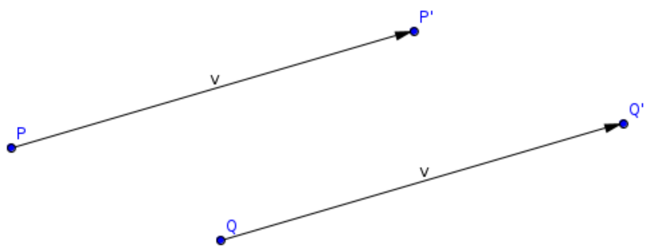
– *eltolás;*

– *csúsztatva tükrözés.*

Az eddig nem tárgyalt síkizometriákat a következő szakaszokban mutatjuk be.

5.2.1. Eltolás

Szemléletesen „eltolásnál minden pontot ugyanabba az irányba, ugyanannyival mozgatunk el”. Így elegendő egyetlen P pontot és P' képét megadni, hogy leírjuk az eltolást. Precízebben: rögzítsük P és P' pontokat. A φ eltolást a következőképpen definiáljuk: $\varphi(P) = P'$, továbbá bármely $Q \notin PP'$ pont képe az a Q', amire $PQQ'P'$ négyszög - ebben a sorrendben - paralelogramma (vagyis $PQ \| P'Q'$ és $PP' \| QQ'$, lásd 12. ábra).



12. ábra. Eltolás

Ha Q rajta van PP' egyenesen, többféleléppen is teljessé tehetjük a definíciót. Legkényelmesebb azt mondani, hogy tekintsünk egy $R \notin PP'$ pontot, és annak (már definiált) R' képét. A Q képe az a Q', amire $RQQ'R'$ négyszög ebben a sorrendben paralelogramma.

A definíció így is némileg körülményes, és az is meggondolásra szorul, hogy helyes-e. (Például az utolsó lépésben nem függ-e Q' az R választásától, stb..)

A definíció is erősen motiválja, hogy bevezessük a vektor fogalmát. Ezt a kurzusban csak érintőlegesen tesszük meg: ha φ egy eltolás (az előbb definiált értelemben), akkor minden P pontra igaz, hogy a $\overline{PP'}$ szakasz ugyanolyan hosszú és ugyanolyan irányú. Ezt a tényt ragadjuk meg a vektor fogalmával, s azt mondjuk, hogy az eltolás vektora $\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'}$. A vektor definíciójára felsőbb matematikai tanulmányaink során még többször is vissza fogunk térni.

Tekintsük meg a GeoGebraTube-on az eltolásról készült dinamikus ábrát!

5.5. gyakorlat. *Az előző szakaszok, valamint középiskolai tanulmányaink alapján gyűjtsük össze az eltolás minél több ismert tulajdonságát!*

Látogassunk el a vonatkozó Wikipédia oldalra!

5.6. gyakorlat. *A síkon végrehajtunk egymás után két eltolást* $\mathbf{v_1}$ *és* $\mathbf{v_2}$ *vektorokkal. Egyetlen transzformációval hogyan helyettesíthető ez a művelet?*

5.7. gyakorlat. *Kisérletezzünk a GeoGebrával! Helyettesíthető-e egy eltolás két ill. három tengelyes tükrözés egymásutánjával?*

Tipp: mi történik, ha két egymással párhuzamos tengelyre tükrözünk egymás után?

5.2.2. Pont körüli forgatás

Rögzítsünk egy O pontot és egy α szöget. Az O pontot a forgatás fixen hagyja. Egy P pont képe az a P' pont, amire $\overline{OP} = \overline{OP'}$, valamint $POP'\angle = \alpha$. Ez az eljárás még általában kettő pontot szolgáltat. Az egyértelműséghez szükséges a szög irányításának fogalma is. Ezt egyelőre csak szemléletesen tesszük meg: általában a megegyezés szerint pozitívnak az óramutató járásával ellentétes irányt tekintjük, és ha mást nem mondunk külön, akkor ebbe az irányba forgatunk.

Tekintsük meg a GeoGebraTube-on a forgatásról készült dinamikus ábrát is!

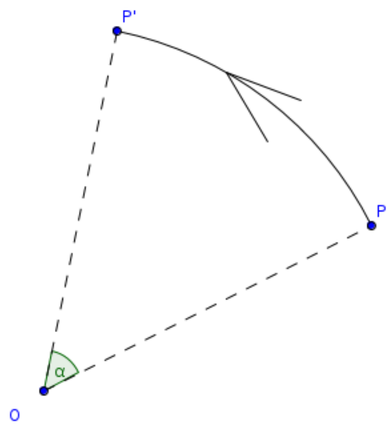
Speciálisan, a 180°-os forgatásokat középpontos tükrözésnek nevezzük.

5.8. gyakorlat. *Az előző szakaszok, valamint középiskolai tanulmányaink alapján gyűjtsük össze a forgatás minél több ismert tulajdonságát!*

Látogassunk el a vonatkozó Wikipédia oldalra!

5.9. gyakorlat. *Kisérletezzünk a GeoGebrával! Helyettesíthető-e egy forgatás két ill. három tengelyes tükrözés egymásutánjával?*

Tipp: mi történik, ha két egymást O pontban metsző tengelyre tükrözünk egymás után?



13. ábra. Pont körüli forgatás pozitív irányba

5.2.3. Csúsztatva tükrözés

Hajtsunk végre egymás után egy e egyenesre vonatkozó tükrözést, majd egy az e-vel párhuzamos $\mathbf{v}$ vektorral történő eltolást. Az így kapott transzformációt csúsztatva tükrözésnek nevezzük. Ha egyenesen sétálunk a hóban, akkor lábnyomaink egymás csúsztatva tükrözött képei.

Tekintsük meg a GeoGebraTube-on a csúsztatva tükrözésről készült dinamikus ábrát!

5.10. gyakorlat. *Az előző szakaszok, valamint középiskolai tanulmányaink alapján gyűjtsük össze a csúsztatva tükrözés minél több ismert tulajdonságát!*

Látogassunk el a vonatkozó Wikipédia oldalra!

5.3. Gyakorlatok

5.11. gyakorlat. *Adottak az $ABCD$ trapéz $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ oldalhosszúságai. Szerkesszük meg a trapézt!*

5.12. gyakorlat. *A folyó egy egyenes szakaszának két oldalán lévő A és B város között kell utat és hidat építeni úgy, hogy a költség a lehető legkisebb legyen. Hogyan kell megtervezni a híd helyét?*

5.13. gyakorlat. *Egy téglalap alakú biliárdasztalon lévő fehér golyóval kell eltalálnunk úgy a fehéret, hogy az ütközés előtt a szomszédos falakon sorban legyen egy-egy érintés. Milyen irányban kell ellökni a fehér golyót?*

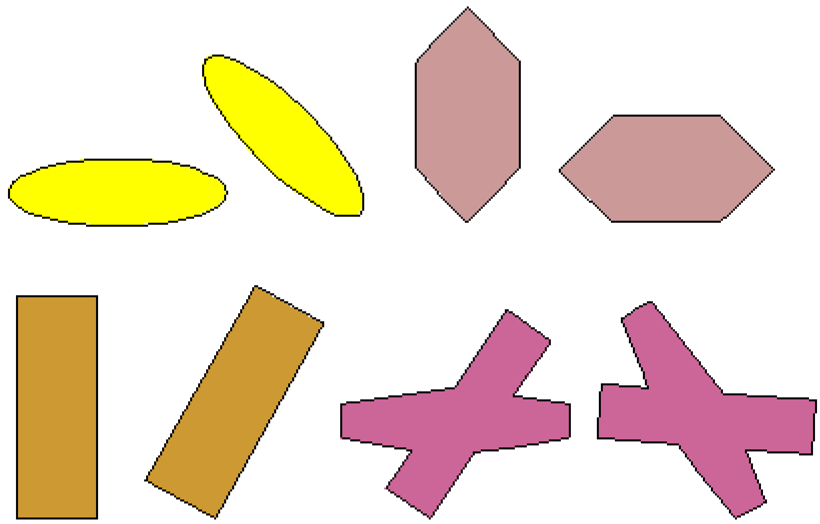
5.14. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek körül a talpponti háromszög területe a minimális!*

6. Egybevágóság és szimmetria

Célok: egybevágóságok és szimmetriák fogalmának tisztázása, transzformációk szorzatának naív bevezetése.

6.1. Egybevágóság

Két alakzat egybevágó, ha létezik olyan távolságtartó transzformáció, ami egyiket a másikba viszi, vagyis K és L egybevágó, ha létezik φ izometria úgy, hogy $\varphi(K) = L$. Jele: $K \cong L$. Ez indokolja, hogy a távolságtartó transzformációkat sokszor egybevágósági transzformációknak, vagy röviden egybevágóságoknak is szokás nevezni.



14. ábra. Egybevágó alakzatok

Háromszögek egybevágóságáról már korábban szóltunk. A legegyszerűbb felmerülő kérdés a következő.

6.1. gyakorlat. *Igaz-e, hogy két négyszög egybevágó, ha oldalaik páronként egyenlőek?*

Megoldás. Könnyen konstruálhatunk ellenpéldát, pl. négyzet és ugyanolyan oldalhosszúságú rombusz. □

Általános négyszögek ill. sokszögek egybevágóságának vizsgálata általában nehéz probléma. A következő tétel a háromszögekről tanultak egyszerű következménye.

28. tétel. *Két sokszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik és* megfelelő *átlóik egyenlő hosszúak.*

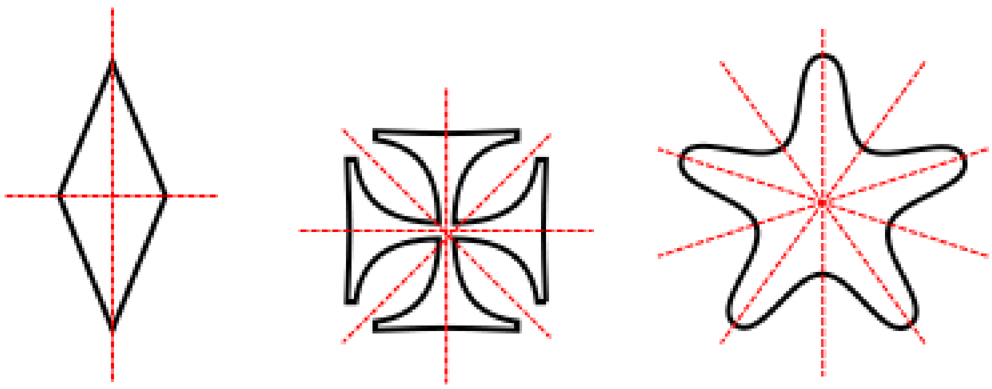
Hogy mennyire lényeges a fenti tételben a *megfelelő* szó, arra a következő feladat világít rá.

6.2. feladat. *Adjunk példát két olyan (konvex) négyszögre, amik oldalainak és átlóinak a mérőszáma páronként egyenlő (oldalak az oldalakkal, átlók az átlókkal), de a két négyszög mégsem egybevágó!*

Ötlet. A feladat precíz megoldása nem is olyan könnyű. Az alábbi dinamikus ábra azonban meggyőző erejű, ha d oldal hosszát 4,33 körül változtatjuk, a két jelölt átló nagyságrendi viszonyai megváltoznak, tehát valamilyen speciális (4,33-hoz közeli) d értékre egyenlőek lesznek, s ekkor a két négyszög „szemmel láthatóan" nem egybevágó. □

6.2. Szimmetria

Az izometriákhoz szorosan kapcsolódó másik nagyon fontos fogalom a szimmetria. Azt mondjuk, hogy egy K alakzatnak a φ nem identikus izometria szimmetriája, ha $\varphi(K) = K$. Másképpen mondva φ szimmetriája K-nak, ha K invariáns alakzata φ-nek. Például ha négyzetet tükrözünk az egyik átlóegyenesére, akkor önmagát kapjuk vissza. Hasonlóan egy kört önmagába visz bármilyen, a középpontján átmenő egyenesre vonatkozó tükrözés, ill. bármely, a középpontja körüli forgatás.



15. ábra. Szimmetriák

6.3. gyakorlat. *Határozzuk meg egy e egyenes összes szimmetriáját.*

Megoldás. Nézzük végig az összes tanult típust, és válogassuk ki, amelyek megfelelnek. A tengelyes tükrözések közül megfelelő az e-re vonatkozó tengelyes tükrözés, ill. minden e-re merőleges egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés. Az eltolások közül pontosan azok hagyják e-t invariánsan, amelyek vektora párhuzamos e-vel. A forgatások közül azok felelnek meg, amelyeknek a középpontja illeszkedik e-re, szögük pedig $180°$ (ha forgásszögekkel dolgozunk, akkor $180° + k \cdot 360°$). Végezetül minden olyan csúsztatva tükrözés is jó, aminek a tengelye e (hiszen a csúsztatva tükrözés eltolásvektora szükségképpen párhuzamos a tengelyével). □

6.4. gyakorlat. *Határozzuk meg egy*

1. *négyzet*
2. *szabályos hatszög*

összes szimmetriáját.

6.3. Tengelyes szimmetriák

6.5. feladat. *Egy K korlátos alakzat tengelyesen szimmetrikus az e és f egyenesekre vonatkozóan is. Igaz-e, hogy ekkor szimmetrikus az e' egyenesre is, ahol e' az e egyenes f-re vett tükörképe? Indokoljunk részletesen, vagy adjunk ellenpéldát!*

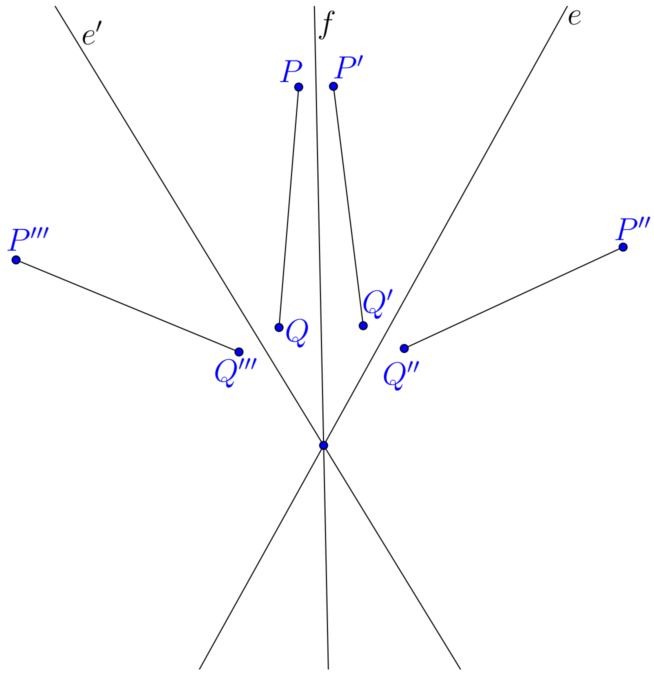
Megoldás. Legyen P pont tetszőleges. Tükrözzük P-t először f-re, a kapott pontot tükrözzük e-re, majd a kapott pontot újfent tükrözzük f-re. Azt állítjuk, hogy az így kapott pont éppen P e'-re vonatkozó tükörképe. Ennek a ténynek az igazolását az olvasóra bízzuk (16. ábra ill. a vonatkozó dinamikus ábra).

Ebből viszont a kérdésre pozitív válasz következik, hiszen az e'-re vonatkozó tükrözés helyettesíthető három tükrözés egymásutánjával (rendre f-re, e-re majd f-re tükrözünk), amelyek külön-külön mind invariánsan hagyják K-t. K korlátossága nem lényeges feltevés.□

6.6. feladat.

1. *Egy K korlátos alakzatnak pontosan két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy ezek egymásra merőlegesek!*
2. *Egy L korlátos alakzatnak páros sok szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy L középpontosan szimmetrikus! (Vagyis van egy középpontos tükrözés szimmetriája.)*

Megoldás. a) Legyen a két szimmetriatengely $e \neq f$. Legyen e tükörképe f-re e'. A 6.5. feladat szerint e' is szimmetriatengely, így vagy $e' = f$, de akkor $e = f$, ami ellentmond feltevésünknek, vagy $e' = e$, amiből $e \perp f$ azonnal következik.



16. ábra. Tengely tükrözések konjugálási szabálya

b) Részletes megoldást nem adunk, csak a lényeges gondolatokat közöljük. Ismét csak a 6.5. feladatot használjuk. Válasszuk ki f szimmetriatengelyt. A maradék szimmetriatengelyek f-re szimmetrikus párokba rendeződnek, de mivel páratlan sokan vannak, így valamelyiknek, mondjuk e-nek nem jut pár. Az a) részhez hasonlóan következik, hogy $e \perp f$. Ha van két egymásra merőleges szimmetriatengely, akkor az alakzat középpontosan is szimmetrikus. □

A következő feladatot érdeklődő olvasóink figyelmébe ajánljuk.

6.7. feladat. *Egy K korlátos alakzatnak legalább két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy az összes szimmetriatengely egy közös ponton halad keresztül!*

Ötlet. Ha K-nak e szimmetriatengelye, akkor K-nak e mindkét félsíkjába esik pontja (vagy e tartalmazza K-t). Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és a 6.5. feladat segítségével konstruáljunk olyan szimmetriatengelyt, amire ez nem teljesül. Jegyezzük meg, hogy ha K nem korlátos, akkor az állítás nem igaz, lásd például az egyenest.

6.8. feladat. *Van-e olyan korlátos alakzat, amelynek 1-nél több szimmetriacentruma van?*

6.9. feladat. *Van-e olyan véges alakzat, amelynek van egy szimmetriatengelye és egy arra nem illeszkedő szimmetriacentruma?*

6.10. feladat. *Tegyük fel, hogy egy alakzatnak C egy szimmetriacentruma, t egy szimmetriatengelye. Igaz-e, hogy ekkor t tükörképe C-re is szimmetriatengelye az alakzatnak?*

6.11. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy alakzatnak E és F különböző szimmetriacentrumai, akkor $\tau_F(E)$ is szimmetriacentruma!*

6.12. feladat. *Írjuk fel a téglalap szimmetriáinak szorzótábláját!*

6.13. feladat. *Írjuk fel a négyzet szimmetriáinak szorzótábláját!*

7. I. ellenőrző dolgozat

7.1. feladat. *Legyen e egy adott kocka egyik éle, s tekintsük a kocka e-hez kitérő éleit. Hány olyan egyenes van, ami ezen élek mindegyikét metszi?*

7.2. feladat. *Egy derékszögű háromszög derékszögű csúcsából induló magasságvonal és súlyvonal a derékszöget három egyenlő részre bonntja. Mekkorák a derékszögű háromszög szögei?*

7.3. feladat. *Az $ABC\triangle$-ben a beírt kör sugara r, a magasságok rendre m_a, m_b és m_c. Igazoljuk, hogy*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}!$$

7.4. feladat. *Egy egyenlőszárú háromszög oldalai a, a és b. Mennyi a területe?*

7.5. feladat. *Számítsuk ki annak a szabályos háromszögnek a területét, aminek körülírt körének sugara R!*

7.6. feladat. *Tegyük fel, hogy $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok egyenlő hosszúak. Mutassuk meg, hogy van olyan távolságtartó transzformáció, ami A-t C-be, B-t pedig D-be képezi!*

8. Hasonlóságok

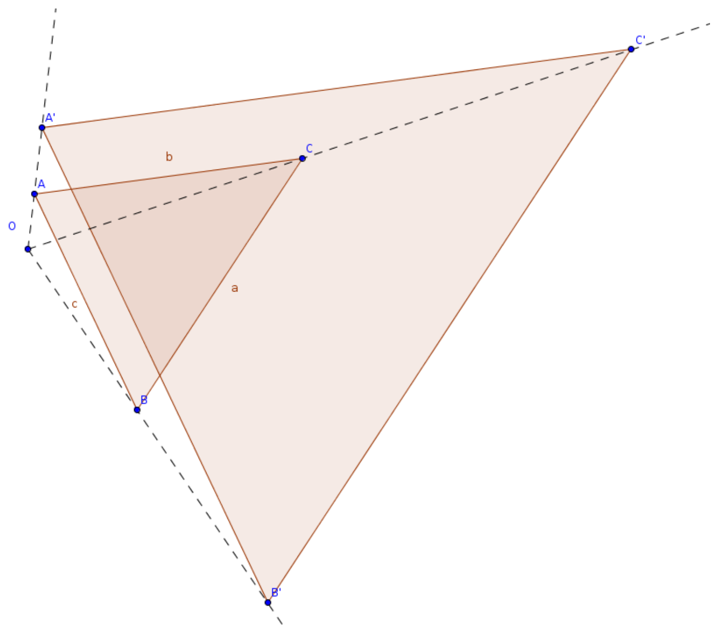
Célok: hasonlóságok fogalmának bevezetése, hasonló háromszögek alkalmazásai.

Találós kérdés: Mi az, ami nagyítón keresztül nézve is ugyanakkora marad?

Válasz: egy szög.

8.1. Középpontos hasonlóság

Adott egy O pont (középpont), és egy $\lambda > 0$ valós szám (arány). Az O középpontú, λ arányú középpontos hasonlóságot a következőképpen definiáljuk: O pont képe önmaga, minden más P pont képe az a P' pont az OP félegyenesen, amire $\overline{OP'}/\overline{OP} = \lambda$.



17. ábra. A centrális hasonlóság (hasonló háromszögek)

Tekintsük meg a középpontos hasonlóságot szemléltető dinamikus ábrát a GeoGebraTube-on.

A következő tételben összegyűjtöttük a középpontos hasonlóság legfontosabb tulajdonságait. Ez a tétel lényegében a párhuzamos szelőkről és szelőszakaszokról a 4.2. szakaszban elmondottak következménye.

29. tétel. *A középpontos hasonlóság*

1. *aránytartó, egy a hosszúságú szakasz képe λa;*
2. *szögtartó;*
3. *párhuzamos egyenesekpárokat párhuzamos egyenespárokba visz;*
4. *a középpontra illeszkedő egyeneseket invariánsan hagyja.*

Ha $\lambda > 1$ (középpontos) nagyításról, $0 < \lambda < 1$ esetén (középpontos) kicsinyítésről beszélünk. Szokás értelmezni a középpontos hasonlóságot $\lambda <$ < 0 arány esetén is, ilyenkor először végrehajtunk egy $|\lambda|$ arányú középpontos hasonlóságot a korábban leírtak szerint, majd tükrözünk középpontosan O-ra.

A kerület, terület és a középpontos hasonlóságok kapcsolatát vizsgálja a következő feladat.

8.1. gyakorlat. *1. Egy négyzet oldalait kétszeresére növeljük. Hogyan változik a kerülete és a területe?*

2. Egy négyzet oldalait λ-szorosára növeljük. Hogyan változik a kerülete és a területe?

Megoldás. a) A kerület kétszeresére, a terület négyszeresére nő. b) A kerület λ-szorosára, a terület λ^2-szeresére változik. Tekintsük meg az illusztráló dinamikus ábrát. □

A fentiek alapján világos, de precízen már azért nehezebben igazolható a következő tétel.

30. tétel. *Ha egy K lemezt λ-szorosára nagyítunk/kicsinyítünk, kerülete λ-szorosára, területe λ^2-szeresére változik.*

A térbeli analógia is világos.

8.2. gyakorlat. *1. Egy kocka éleit háromszorosára növeljük. Hogyan változik a felszíne és a térfogata?*

2. Egy kocka éleit λ-szorosára növeljük. Hogyan változik a felszíne és a térfogata?

3. Egy testet λ-szorosára nagyítunk/kicsinyítünk, hogyan változik a felszíne és térfogata?

8.2. Alapismeretek

Egy φ transzformációt hasonlósági transzformációnak, vagy röviden hasonlóságnak nevezünk, ha létezik egy $\lambda > 0$ valós szám, a hasonlóság aránya, úgy, hogy minden A, B pontpárra $\overline{\varphi(A)\varphi(B)} = \lambda \cdot \overline{AB}$ teljesül, vagyis szakasz képe egy λ-szor olyan hosszú szakasz.

Példa hasonlóságra az előző szakaszban tárgyalt középpontos hasonlóság.

Vegyük észre, hogy ha végrehajtunk egymás után egy $\lambda > 0$ arányú hasonlóságot, majd egy $1/\lambda$ arányú középpontos hasonlóságot, az eredmény távolságtartó lesz, hisz minden szakasz hossza $\lambda \cdot 1/\lambda = 1$-szeresére változik. Így valójában ha jól megismerjük az izometriákat, és a középpontos hasonlóságokat, akkor az összes hasonlóságot megérthetjük. Speciálisan, a középpontos hasonlóságok és az izometriák közös tulajdonságait örökli minden hasonlóság.

31. tétel. *Minden hasonlóság*

1. *szögtartó;*
2. *párhuzamos egyenespárokat párhuzamos egyenespárokba visz.*

8.3. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy kör hasonlóság melletti képe kör.*

Megoldás. Legyen a k kör középpontja O, sugara $r > 0$. Legyen φ tetszőleges $\lambda > 0$ arányú hasonlóság és $\varphi(O) = O'$. Tetszőleges $P \in k$ pont P' képe O'-től definíció szerint λr távolságra van, így k képe az O' középpontú, λr sugarú kör lesz. □

Két alakzat hasonló, ha létezik olyan hasonlóság, ami egyiket a másikba viszi. Precízebben K és L hasonló, ha létezik φ hasonlóság úgy, hogy $\varphi(K) = L$. Jele: $K \sim L$.

8.4. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy bármely két kör hasonló.*

Ötlet. Legyen a két kör k_1 és k_2, középpontjaik O_1 és O_2, sugaraik r_1 sé r_2. Tekintsük azt a transzformációt, amit egy $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorú eltolás és egy O_2 középpontú, $\lambda = r_2/r_1$ arányú középpontos hasonlóság egymás után alkalmazásával kapunk. Ez a transzformáció hasonlóság, és a k_1 kört k_2-be viszi. □

Háromszögek egybevágóságának alapeseteinek mintájára kimondhatjuk a következő tételt.

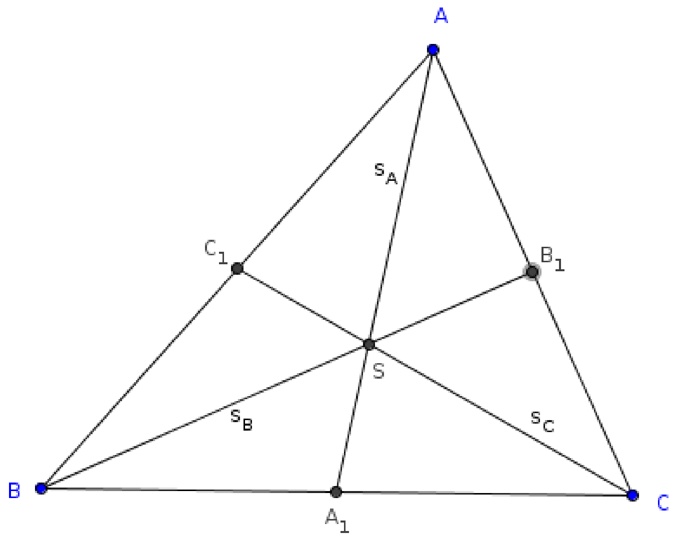
32. tétel (Háromszögek hasonlóságának alapesetei). *Két háromszög hasonló, ha a következők valamelyike teljesül:*

1. *megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő;*
2. *két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek egyenlők;*
3. *szögeik páronként egyenlőek;*
4. *két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközt lévő szögek egyenlők.*

8.3. Nevezetes tételek

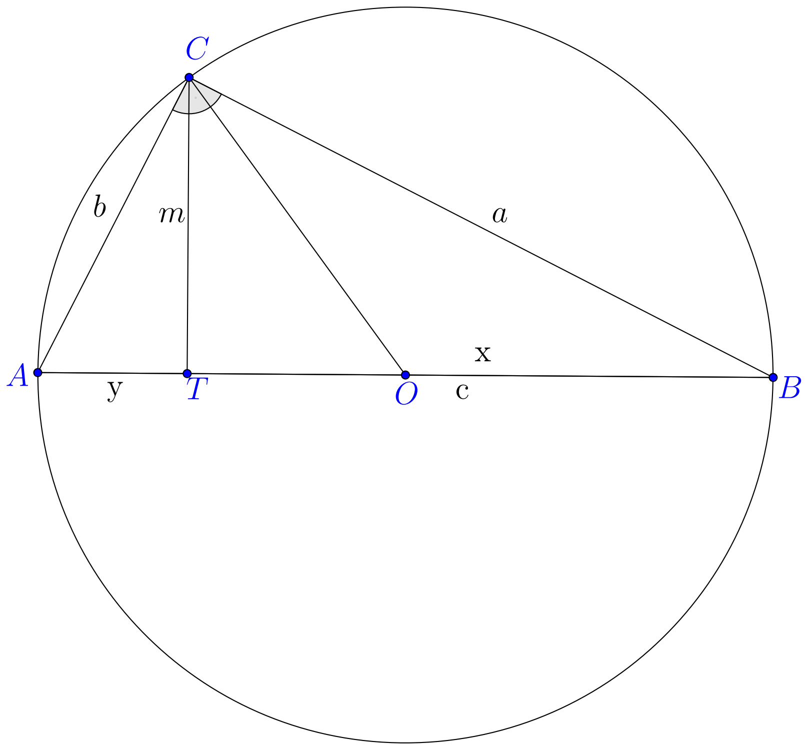
Néhány korábbi mulasztásunkat pótoljuk.

33. tétel. *A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a háromszög súlypontjának nevezzük. A súlypont a súlyvonalakat* $2:1$ *arányban osztja, mégpedig úgy, hogy a hosszabb osztási szakasz mindig a csúcs felé esik..*



18. ábra. A háromszög súlypontja

Bizonyítás. Tekintsük a 18. ábrát. Húzzuk meg az A és B pontból az AA_1 és BB_1 súlyvonalakat. A két súlyvonal metszéspontja legyen S pont. $CA_1B_1\triangle$ háromszög hasonló $ABC\triangle$ háromszöghöz az alapesetek b) pontja szerint, a hasonlóság aránya $\lambda = 1/2$, ezért A_1B_1 szakasz párhuzamos az AB oldallal, és fele akkora. Az $A_1B_1S\triangle$ hasonló az $ABS\triangle$-gel, mert szögeik egyenlőek: $A_1SB_1\angle = ASB\angle$ (mert csúcsszögek) és $SA_1B_1\angle = BAS\angle$ (mert váltószögek), s így a harmadik szögük is egyenlő. Mivel A_1B_1 szakasz fele az AB szakasznak, ezért a $A_1B_1S\triangle$ és $ABS\triangle$ hasonlósági aránya szintén $1/2$. Ebből következik, hogy $\overline{A_1S} : \overline{SA} = 1 : 2$ és $\overline{B_1S} : \overline{SB} = 1 : 2$. Az S metszéspont tehát $2 : 1$ arányban osztja a súlyvonalakat, mégpedig úgy, hogy a hosszabb osztási szakasz a csúcs felé esik. A fenti gondolatmenetet AA_1 és CC_1 súlyvonalakra megismételve kiderül, hogy ezek metszéspontja AA_1-t szintén $2 : 1$ arányban osztja, mégpedig úgy, hogy a hosszabb osztási



19. ábra. A magasság- és befogótétel

szakasz a csúcs felé esik. Ebből következik, hogy AA_1 és CC_1 is épp S-ben metszi egymást. Az eddigiekből a tétel állításai következnek.□

34. tétel (Magasság- és befogótétel). *Az $ABC\triangle$ derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó m magasság talppontja legyen T, $\overline{AT} = y$ és $\overline{BT} = x$. Ekkor $m^2 = xy$, $a^2 = cx$ és $b^2 = cy$.*

Bizonyítás. Tekintsük a 19. ábrát, az $ABC\triangle$ hegyesszögeit jelölje α és β a szokásoknak megfelelően. Az $ATC\triangle$-ben van egy α szög és egy derékszög, így $ACT\angle = \beta$, és $ATC\triangle \sim ABC\triangle$. Hasonlóan kapjuk, hogy $BTC\triangle \sim \sim ABC\triangle$, s így természetesen $ATC\triangle \sim BTC\triangle$ is. A három hasonlóságban a megfelelő oldalak arányának egyenlőségéből kapjuk rendre, hogy $b/c = y/b$, $a/c = x/a$ és $y/m = m/x$. Ezeket átrendezve a tétel állításai következnek. □

A hasonlóságok elemi alkalmazásainak egyik legszebb tétele a következő.

35. tétel (Feuerbach-kör). *Egy (hegyesszögű) háromszögben a magasságok talppontjai, az oldalfelező pontok, és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai mind illeszkednek egy körre!*

Az érdeklődő olvasók a hasonlóságokon alapuló bizonyítást megtalálhatják például itt.

36. tétel (Euler-egyenes). *Egy háromszög magasságpontja, súlypontja és körülírt körének középpontja egy egyenesen vannak.*

8.5. feladat. *Egy háromszögben a súlypont* $2:1$ *arányban osztja a magasságpontból a körülírt kör középontjába húzott szakaszt.*

37. tétel (Heron-képlet). *Egy* a, b, c *oldalakkal rendelkező háromszög területe* $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$*, ahol* s *a háromszög kerületének fele.*

8.4. Gyakorlatok

A következő gyakorlathoz szükségünk van a mértani hely fogalmára. Mértani helyen valamilyen adott tulajdonsággal rendelkező pontok halmazát értjük. Figyeljünk oda, hogy nem elég megmutatni, hogy a keresett halmaz valaminek a részhalmaza, mindig törekedjünk a halmaz pontos leírására, pl.: "A keresett mértani hely az EF egyenes, kivéve az X és Y pontokat".

8.6. gyakorlat. *Adott egy* k *kör, és rajta [a körvonalon] egy* A *pont. Határozzuk meg az* A *pontra illeszkedő húrok felezéspontjainak mértani helyét!*

8.7. feladat (A Feuerbach-körhöz). *Mutassuk meg, hogy egy háromszög beírt körének középpontja fele olyan távol van egy oldaltól, mint a magasságpont az oldallal szemközti csúcstól (segítségül lásd az ábrát)!*

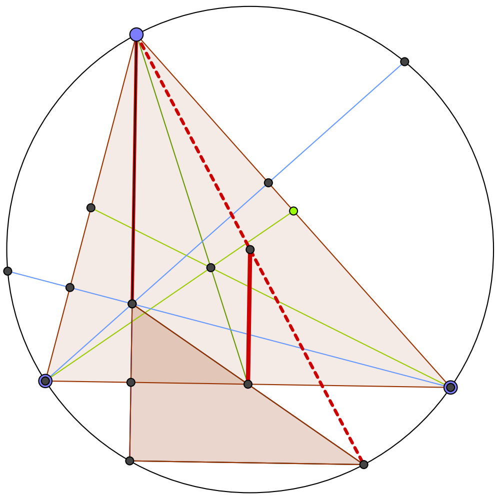
Az alábbi feladatok mindegyikének alapötlete, hogy keressünk hasonló háromszögeket az ábrán.

8.8. feladat. *Az* ABC *háromszög* AD *súlyvonalának felezőpontja* F*. A* CF *egyenes az* AB *oldalt az* M *pontban metszi. Határozzuk meg az* $AM : AB$ *arányt!*

8.9. feladat. *Az* $ABCD$ *trapéz átlói* M *pontban metszik egymást, alapjai* a *és* c *hosszúak.Az alapokkal párhuzamos,* M*-re illeszkedő egyenes a szárakat* X *és* Y *pontokban metszik. Fejezzük ki* a *és* c *segítségével az* MX *és* MY *szakaszok hosszát!*

8.10. feladat. *Egy trapéz két alapja* a *és* c*. Az alapokkal párhuzamosan, egy* $\sqrt{ac}$ *hosszú szakasszal a trapézt két kisebb trapézra vágjuk. Igaz-e, hogy a két kisebb trapéz hasonló egymáshoz?*

8.11. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a trapéz száregyeneseinek metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait!*



20. ábra. Segédábra a 8.7. feladathoz

9. Kör

Célok: A kör és részeinek megismerése, az alapvető összefüggések meghatározása.

9.1. Alapismeretek

Háromszögek, derékszögű háromszögek, Thálesz-tétel, hasonlóság, háromszögek hasonlósága, szögek szinusza.

9.2. Kör kerülete és területe

A kör kerületének kiszámítása. Kerületi szög, középponti szög fogalma. Körív arányos a középponti szögével. Körív hossza. Körcikk területe.

9.3. Középponti és kerületi szögek

38. tétel. *Egy ívhez tartozó kerületi szög nagysága fele a középponti szögének.*

39. tétel. *Azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.*

4. Definíció. *Egy négyszög húrnégyszög, ha írható köré kör.*

40. tétel. *Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögeinek összege* $180°$.

Bizonyítás.

5. Definíció. *Kör érintője egy egyenes, ha egy közös pontja van a körrel. Egy egyenes a kör szelője, ha két közös pontja van a körrel.*

9.4. Pont körre vonatkozó hatványa

6. Definíció. *Legyen az* a *egyenes a* k *kör szelője, és rajta legyen* P *egy pont. Ha* $a \cap k = \{A, B\}$, *akkor* $\overline{PA}$ *és* $\overline{PB}$ *a pontból húzott szelőszakaszok.*

41. tétel (Szelőszakaszok szorzatára vonatkozó tétel). *Adott egy* k *kör, egy* P *pont és egy* a *tetszőleges szelő,* $a \cap k = \{A, B\}$. *Ekkor a* $h = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ *érték független az* a *szelő megválasztásától, csak* k*-tól és* P*-től függ.*

7. Definíció. *A* P *ponthoz és* k *tartozó szorzatértéket lássuk el előjellel:* h *pozitív, ha* $\vec{PA}$ *és* $\vec{PB}$ *azonos irányú, és negatív, ha ellentétes irányú. A* h *értéket a* P *pont* k *körre vonatkozó hatványának nevezzük.*

42. tétel. *Külső pontra a hatvány értéke pozitív, belső pontra negatív, a kör pontjaira* 0. *A* h *hatvány külső pontra egyenlő a pontból a körhöz húzható érintő hosszának négyzetével.*

43. tétel. *Ha egy* P *pont az* R *sugarú kör középpontjától* d *távolságra van, akkor* $h(P) = d^2 - R^2$

8. Definíció. *Két kör hatványvonala azon pontok halmaza, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik.*

44. tétel. *Két nem koncentrikus kör hatványvonala egyenes, amely merőleges a két kör centrálisára.*

9. Definíció. *Ha három vagy több kör esetén van olyan pont, amelynek a hatványa mindegyik körre vonatkozóan ugyanaz, akkor ezt a pontot a körök hatványpontjának nevezzük.*

45. tétel. *Ha három kör középpontjai nem kollineárisak, akkor létezik pontosan egy hatványpontjuk.*

9.1. feladat. *Számítsuk ki a $P(2;-3)$ pontnak a $K: x^2+y^2-2x+4y-12=0$ körre vonatkozó hatványát!*

9.2. feladat. *Számítsuk ki a $P(7;8)$ pontból az $x^2+y^2-4x-6y-1=0$ körhöz húzott érintőszakasz hosszát!*

9.3. feladat. *Számítsuk ki a $x^2+y^2+2x-2y-4=0$ és $x^2+y^2+6x+5=0$ körök hatványvonalának egyenletét!*

9.4. feladat. *Írjuk fel azon pontok mértani helyének az egyenletét, amely pontokból a $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ és $x^2+y^2-10x-8y+31=0$ körökhöz egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható!*

9.5. feladat. *Három kör hatványpontja melyik középpontjához van a legközelebb?*

9.6. feladat. *Adott két körhöz szerkesszünk mindkettőt érintő harmadikat úgy, hogy az elsőt egy előre adott pontban érintse!*

10. Koordinátageometria

Célok: Megérteni a kapcsolatot a geometriai problémák és algebrai interpretációjuk között. Alkalmazni a koordinátageometriai ismereteket geometriai problémák megoldására. A vektorok alkalmazásának gyakorlása.

10.1. Alapismeretek

Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer felvételével a síkot azonosíthatjuk a rendezett valós számpárok halmazával. Ezt az eljárást koordinátázásnak nevezzük. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

Az alakzatokat ponthalmazoknak gondolva egy pont adott alakzathoz tartozása egy összefüggésnek felel meg a pont koordinátái között. Az alakzatot megadó definíciónak (vagy azzal ekvivalens módon az alakzatot egyértelműen jellemző tulajdonságnak) így algebrai összefüggés (összefüggések rendszere) felel meg.

Pontnak számpár, egyenesnek kétismeretlenes lineáris egyenlet, félsíknak kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenség, körnek speciális kétismeretlenes másodfokú egyenlet felel meg.

A relációknak algebrai feltételek felelnek meg. Pontok kollinearitásának az, hogy a megfelelő koordináták kielégítik ugyanazt a lineáris másodfokú egyenletet; egyenesek metszésének az, hogy egy lineáris egyenletrendszernek van megoldása; különböző egyenesek párhuzamosságának az, hogy nincsen megoldás.

Így az euklideszi geometriát algebrai nyelvre tudjuk lefordítani.

A koordinátázásban és az összefüggések megállapításában jó szolgálatot tesznek a vektorok.

A vektorok skaláris szorzata koordinátákkal is megfogalmazható.

10.2. Gyakorlatok

10.1. feladat. *Számítsuk ki az egyenesek hajlásszögét, ha egyenletük:*

1. $3x - y - 1 = 0, \quad x + 3y - 4 = 0$*;*

2. $x - 2y + 2 = 0, \quad 3x - y - 7 = 0.$

10.2. feladat. *Írjuk fel az* $A(1; -4)$ *ponton áthaladó és a* $2x - 4y + 5 = 0$ *egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!content...*

10.3. feladat. *Írjuk fe a* $2x + 3y - 5 = 0$ *és a* $4x + 2y - 6 = 0$ *egyenesek metszéspontján áthaladó, és a* $3x+4y+12 = 0$ *egyenessel párhuzamos egyenes egyetnletét!*

10.4. feladat. *Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely áthalad a* $P_0(4;-$ $-3)$ *ponton, és a* $4x+y-5=0$ *egyenesre merőleges?*

10.5. feladat. *Számítsuk ki a* $P(7;-7)$ *pontnak a* $3x-4y+1$ *egyenesre vonatkozó tükörképének koordinátáit!*

10.6. feladat. *Tükrözzük a* $2x-3y+6=0$ *egyenest a* $P(2;-3)$ *pontra, és írjuk fel a tükörkép egyenletét!*

10.7. feladat. *Elválasztja-e a* $2x-4y+5=0$ *egyenes az* $(0;-2)$ *és* $B(1;-4)$ *pontokat?*

10.8. feladat. *Az* $\ell_1 : 15x-8y-51=0$ *és* $\ell_2 : 4x+3y+35=0$ *egyenesek közül melyik egyeneshez van közelebb a koordinátarendszer kezdőpontja?*

10.9. feladat. *Számítsuk ki a következő két párhuzamos egyenes távolságát:* $3x+4y-15=0$ *és* $3x+4y+20=0$.

10.10. feladat. *Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a* $P(2;-1)$ *ponton és az* $\ell_1 : 2x-3y+3=0$, $\ell_2 : 4x+y-6=0$ *egyenesek metszéspontján!*

10.11. feladat. *Egy ponton mennek-e át az* $x-y+5=0$, $2x-2y+3=0$, $x-2y=0$ *egyenesek?*

10.12. feladat. *Írjuk fel az* A, B, C *pontokon átmenő sík egyenletét, ha*
1. $A(1;2;-1)$, $B(2;-2;3)$, $C(1;0;-2)$;
2. $A(0;0;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(0;0;0)$.

10.13. feladat. *Adott két pont:* $A(0;-1;3)$, $B(1;3;5)$. *Írjuk fel az* A *ponton áthaladó és az* AB *egyenesre merőleges sík egyenletét!*

10.14. feladat. *Számítsuk ki két sík hajlásszögét, ha egyenletük:*
1. $2x+y-2z-4=0$, $3x+6y-2z-12=0$;
2. $2+y+z-2=0$, $x+2y-z-1=0$.

10.15. feladat. *Írjuk föl a* $P(1;-2;3)$ *pontra illeszkedő és a* $3x-4y+5z-$ $-3=0$ *síkkal párhuzamos sík egyenletét!*

10.16. feladat. *Határozzuk meg a* $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$, $3x+y-4z+6=0$ *síkok közös pontját!*

10.17. feladat. *A* $\Sigma : 2x+2y-z-2=0$ *sík elválasztja-e az* $A(2{,}1{,}1)$ *és a* $B(2{,}1{,}3)$ *pontokat?*

10.18. feladat. *Számítsuk ki a* $P(2;1;1)$ *pontnak a* $\Sigma : x+y-z+1=0$ *síktól mért távolságát!*

10.19. feladat. *Szamítsuk ki a* $\Sigma_1 : x-2y+z-1=0$ *és* $\Sigma_1 : 2x-4y+$ $+2z-1=0$ *síkok távolságát!*

10.20. feladat. *Írjuk fel a* $2x-2y-z-3=0$ *síktól* 5 *egységnyi távolságra haladó sík egyenletét!*

10.21. feladat. *Írjuk fel a* $P(2;-3;1)$ *ponton áthaladó és* $\mathbf{v}(1;2;3)$ *irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenletét!*

10.22. feladat. *Írjuk fel a* $P(1;0;3)$ *ponton áthaladó és* $\mathbf{v}(1;2;-4)$ *irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenletét!*

10.23. feladat. *Írjuk fel a* $P(2;-3;1)$ *ponton áthaladó és* $\mathbf{v}(1;2;3)$ *irányvektorú egyenes egyenletrendszerét!*

10.24. feladat. *Írjuk fel a* $P(1;0;3)$ *ponton áthaladó és* $\mathbf{v}(1;2;-4)$ *irányvektorú egyenes egyenletrendszerét!*

10.25. feladat. *Írjuk fel a* $P(1;4;1)$ *és* $Q(1;3;-2)$ *pontokra illeszkedő egyenes egyenletrendszerét!*

10.26. feladat. *Írjuk fel a* $P(1;-3;1)$ *ponton áthaladó és az* $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{3}$ *egyenletrendszerű egyenesel párhuzamos egyenes egyenletrendszerét!*

10.27. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha a és b kitérő egyenesek, akkor pontosan egy olyan párhuzamos* α, β *síkpár létezik, melyek közül* α *az a egyenest,* β *a b egyenest tartalmazza!*

10.28. feladat. *Írjuk fel az* $\frac{x-3}{2}=y+4=\frac{2-z}{3}$ *egyeneshez illeszkedő és az* $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ *egyenessel párhuzamos sík egyenletét!*

10.29. feladat. *Számítsuk ki az* $e : x+1=\frac{y-1}{3}=z$ *és* $f : \frac{x+1}{3}=-y+1=$ $=\frac{z+1}{3}$ *egyenesek normáltranszverzális-egyenesének az egyenletrendszerét!*

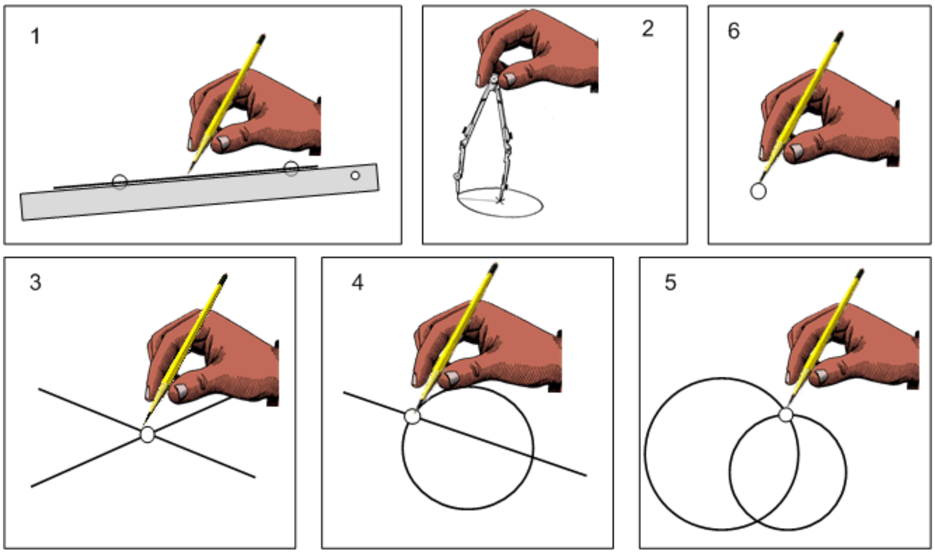
11. Euklidészi szerkesztések

Célok: euklidészi alapszerkesztések megismerése, begyakorlása.

11.1. Alapismeretek

Euklidészi szerkesztésnek nevezzük a körzővel és (egyélű, egyenes) vonalzóval elvégezhető szerkesztéseket. A vonalzó két adott pontot összekötő egyenes szerkesztésére alkalmas (21. ábra, (1)), a körzővel nyílásba vehetjük két tetszőleges pont távolságát, majd adott középponttal rajzolhatunk ilyen sugarú kört (21. ábra, (2)). A szerkesztés folyamán keletkezett alakzatok metszéspontjai ismertek (21. ábra, (3-4-5)), valamint tetszőlegesen kijelölhetünk további segédpontokat is (21. ábra, (6)).

A szerkesztés feladata általánosan így fogalmazható meg: adva van bizonyos számú pont és olyan ponto(ka)t kell szerkeszteni, amely(ek) az adott pontokkal (és egymással) meghatározott viszonyban van(nak).



21. ábra. Az alapszerkesztési lépések

Természetesen általában a feladatokat nem akarjuk az alaplépésekre visszavezetni, ezért ebben a szakaszban megismerkedünk néhány alapszerkesztési feladattal, amik összetettebb problémáknál sűrűn felbukkannak. Az itt felsorolt gyakorlatokat ajánlot - a szó eredeti jelentése szerint -papíron, körzővel és vonalzóval begyakorlni, valamint a szerkesztéseket GeoGebrában önállóan is elvégezni. (Noha néhány esetben a megoldás GeoGebra fájlját ismertetjük, erősen javasoljuk az önálló elkészítést is.)

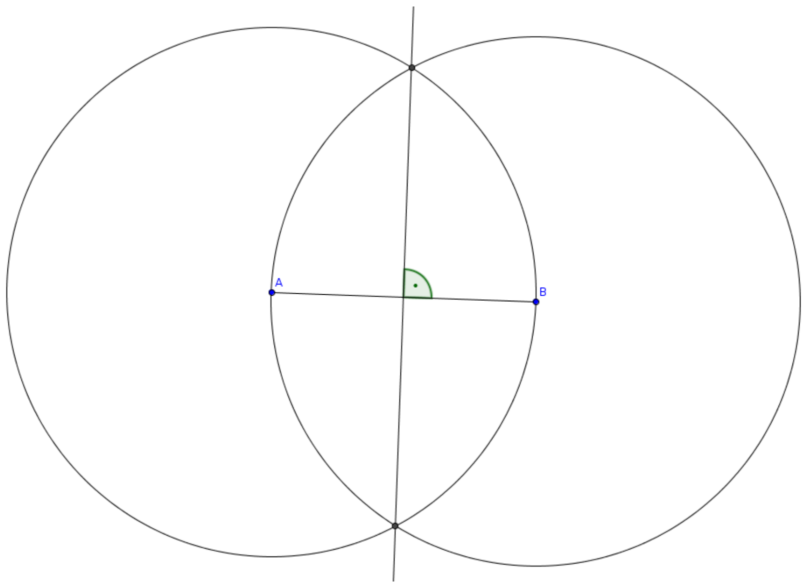
11.2. Euklidészi alapszerkesztések

11.1. gyakorlat. *Szerkesszük meg egy adott $\overline{AB}$ szakasz szakaszfelező merőlegesét!*

Megoldás. Ismétlésül idézzük fel a szakaszfelező merőleges fogalmát: azon pontok halmaza a síkon, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak. Tudjuk, hogy a keresett alakzat egy egyenes, ezért elég lenne két pontját megszerkeszteni. Ilyeneket viszont könnyen találunk, ha A és B körül is rajzolunk egy-egy $\overline{AB}$ sugarú kört, akkor ezek metszéspontjai nyilvánvalóan rajta lesznek a keresett szakaszfelező merőlegesen. Ezek alapján a szerkesztés részletes menete (lásd 22. ábra):

1. szúrjuk A-ba a körzőt, nyissuk ki $\overline{AB}$ nyílásra, és rajzoljuk meg az A körüli $\overline{AB}$ sugarú kört;
2. hasonlóan rajzoljuk meg a B körüli $\overline{AB}$ sugarú kört;
3. a két kör metszéspontjait összekötő egyenes a keresett szakaszfelező merőleges.

Elemzés: a feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.□



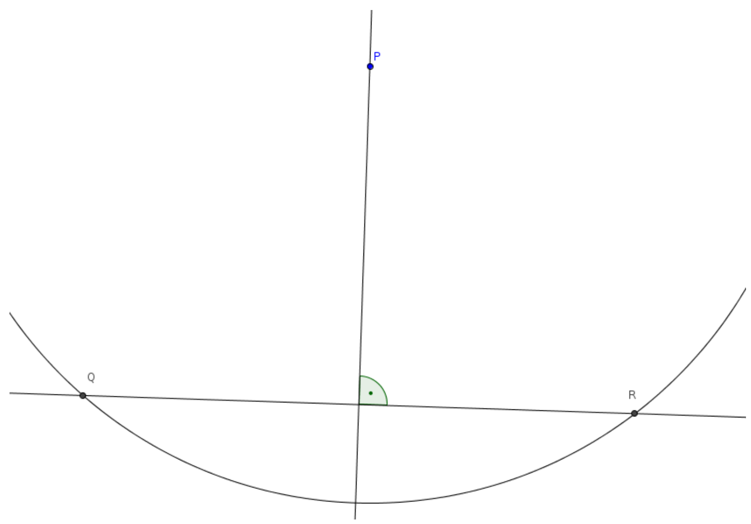
22. ábra. Szakaszfelző merőleges szerkesztése

11.2. gyakorlat. *Adott az e egyenes és egy P pont. Szerkesszük meg azt az e-re merőleges egyenest, ami illeszkedik P-re!*

Megoldás. Visszavezetjük a feladatot előzőre. Elég lenne kijelölnünk egy olyan szakaszt e-n, aminek a szakaszfelező merőlegese átmegy P-n. Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha P a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra van. Ezek alapján a szerkesztés menete (23. ábra):

1. jelöljünk meg e-n egy (P-től különböző és távoli) tetszőleges Q pontot;
2. rajzoljunk P körül $\overline{PQ}$ sugarú kört;
3. legyen a kör és e egyenes Q-n kívüli második metszéspontja R;
4. szerkesszünk meg $\overline{QR}$ szakaszfelező merőlegesét, ez illeszkedik P-re, és merőleges e-re.

Elemzés: a feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.



23. ábra. Merőleges bocsájtása pontból egyenesre

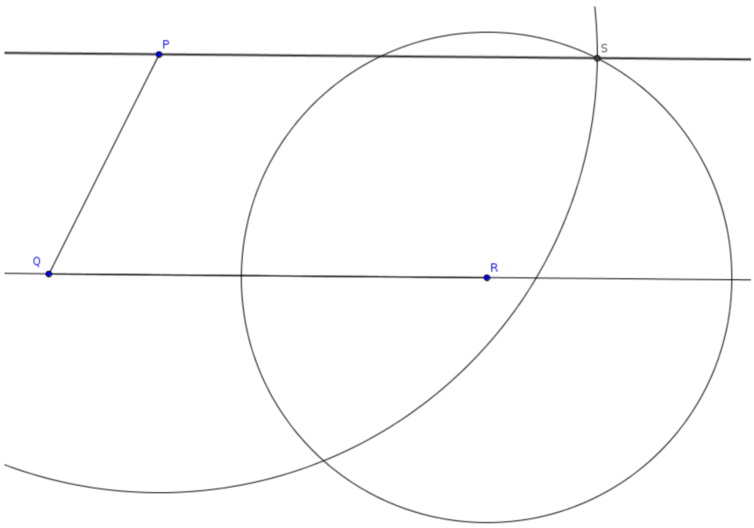
Megjegyzés: előfordulhat, hogy a rajzolt segédkör csak Q-ban metszi e-t, ilyenkor éppen PQ a keresett egyenes. A szerkesztési feladatok megoldásánál általában feltesszük, hogy a választott pont nem speciális. (Ez egyébként jogos feltevés, hiszen ha véletlenül speciális pontot választottunk, újrakezdjük az eljárást új segédpontot használva. Illetve kimutatható, hogy a nem speciális segédpont is szerkeszthető, de ennek részletezése csak körülményessé tenné a leírást, és gyakorlati jelentősége igazából nincs.)□

11.3. gyakorlat. *Adott az e egyenes és egy P pont. Szerkesszük meg azt az e-vel párhuzamos egyenest, ami illeszkedik P-re!*

I. megoldás. Kétszer alkalmazva az előzőeket célba érhetünk. Először szerkesszünk egy tetszőleges f egyenest, ami merőleges e-re. Majd szerkesszünk

P-re illeszkedő, f-re merőleges egyenest, ez megoldása a feladatunknak.□ .
II. megoldás. Az I. megoldásban adott módszer szükségtelenül hosszadalmas - kihasználva a paralelogrammáról tanultakat, gyorsabban célba érhetünk. Ha sikerül egy olyan paralelogrammát szerkeszteni, aminek egyik csúcsa P, és egy P-re nem illeszkedő oldalegyenese e, akkor készen vagyunk. A szerkesztés menete (24. ábra):

1. jelöljünk meg e-n két tetszőleges Q és R pontokat;
2. rajzoljunk P körül $\overline{RQ}$ sugarú kört;
3. rajzoljunk R körül $\overline{PQ}$ sugarú kört;
4. a két kör Q-n kívüli második metszéspontja legyen S, PS egyenes megfelelő.



24. ábra. Párhuzamos egyenes szerkesztése

Elemzés: a két kör két pontban metszi egymást, de az egyik metszéspont hamis megoldást ad, feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.□

11.4. gyakorlat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott három oldalának hossza.*

Megoldás. Keressük $ABC\triangle$ háromszöget, ha adottak a, b és c oldalai. Jelöljük ki B és C csúcsokat egymástól a távolságra egymástól. Az A csúcs B-től c, C-től b távolságra van, így előállítható két kör metszéspontjaként. A szerkesztés menete:

1. a tetszőleges B pont körül szerkesszünk a sugárral kört, majd a körvonalon jelöljönk ki tetszőleges C pontot;
2. rajzoljunk B körül c sugarú kört;

3. rajzoljunk C körül b sugarú kört;
4. a két kör második metszéspontjai szolgáltatják a keresett A csúcsokat .

Elemezés: B pont helyzete és a BC oldalegyenes tetszés szerint kijelölhető. Ezután a szerkesztés két különböző C csúcsot, és mindegyikhez két különböző A csúcsot szolgáltathat. C csúcs mindig szerkeszthető, vegyük azonban észre, hogy A-t adó körök nem feltétlen metszik egymást. Könnyű meggondolni, hogy a metszés feltétele, hogy a háromszög oldalaira az $a < b + c$, $b < a + c$ és $c < a + b$ háromszög-egyenlőtlenségek egyszerre teljesüljenek. Világos azonban, hogy ha létezik megoldás, akkor a háromszögek egybevágóságának alapesetei miatt az összes kapott megoldás egybevágó, ezek között nem szokás különbséget tenni: a feladatnak pontosan egy megoldása van, ha az adatok kielégítik az $a < b+c$, $b < a+c$ és $c < a+b$ háromszög-egyenlőtlenségeket. Ha valamelyik esetben szigorú egyenlőtlenség helyett egyenlőség teljesül, akkor elfajuló megoldásként három kollineáris pontot kapunk, ezt mi nem tekintjük háromszögnek. □

11.5. gyakorlat. *Adott egy α nagyságú szög, egy O pont, és egy O kezdőpontú e_+ félegyenes. Szerkesszünk O kezdőpontú f_+ félegyenest úgy, hogy e_+ és f_+ által bezárt szög az adott α szöggel egyenlő legyen.*

Megoldás. Válasszunk az adott α nagyságú stög szárain tetszőleges P és Q pontokat, csúcsát jelölje R. A $PQR\triangle$ $R\angle$ szöge éppen α. Az előbbiek szerint tudunk $PQR\triangle$-lel egybevágó háromszöget szerkeszteni, amelynek egyik csúcsa O, erre illeszkedő oldalegyenese e, és O-nál α szöge van. A részleteket az olvasóra bízzuk. □

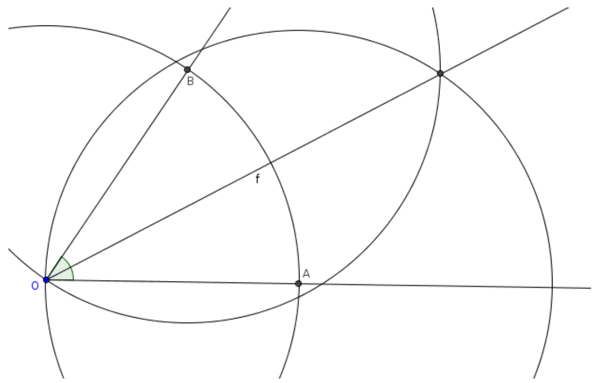
11.6. gyakorlat. *Szerkesszük meg egy adott szög (belső) szögfelezőjét.*

Mielőtt a feladat megoldását megismerjük, ismételjük át a rombuszról tanultakat!

Megoldás. A szögfelező értelemszerűen illeszkedik a szög csúcsára, így elég lenne még egy pontját megkeresni. Segítségül hívjuk a rombuszról tanultakat: a rombusz átlói felezik a belső szögeit. Ezek alapján a szerkesztés menete (25. ábra):

1. legyen az adott szög csúcsa O, és jelöljünk ki egy tetszőleges a hosszúságú szakaszt;
2. szerkesszünk O körül a sugarú kört, ez messe a szögszárakat A-ban és B-ben;
3. szerkesszünk A körüli a sugarú, és B körüli a sugarú kört;
4. a két kör O-tól különböző, második metszéspontja illeszkedik a keresett szögfelezőre.

Elemzés: pontosan egy megoldás van. □



25. ábra. Szögfelező szerkesztése

11.3. További alapvető euklidészi szerkesztések

Ebben a szakaszban néhány további alapvető fontosságú szerkesztést ismertetünk feladatokon keresztül. Ezek megoldását nem, vagy csak vázlatosan ismertetjük.

11.7. gyakorlat. *Adott egy $\overline{AB}$ szakasz.*

1. *Osszuk fel $\overline{AB}$-t két olyan darabra, amik hosszai úgy aránylanak egymáshoz, mint $a : b$. (Ahol a és b két adott szakasz.)*
2. *Osszuk fel $\overline{AB}$-t n egyenlő részre!*

Megoldás. Csak az a) rész megoldását ismertetjük. Húzzunk egy tetszőleges A kezdőpontú segédfélegyenest, és ezen vegyük fel P és Q pontokat úgy, hogy $\overline{AP} = a$ és $\overline{PQ} = b$. Szerkesszünk QB-vel párhuzamost P-n keresztül. Ez a párhuzamos szelők tétele miatt $\overline{AB}$ szakaszt egy olyan X belső pontban metszi, amire $\overline{AX} : \overline{XB} = a : b$. A részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk, lásd 26. ábra. □

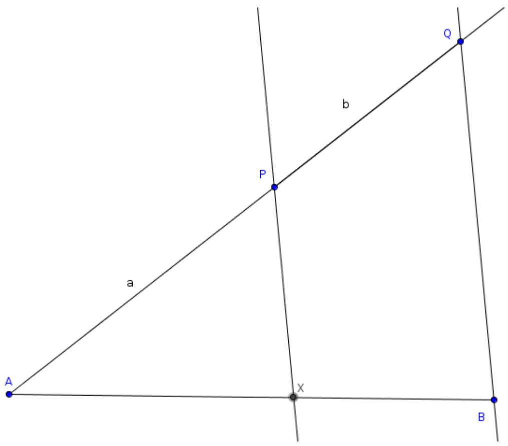
A 11.7. gyakorlat alapján oldjuk meg a következő feladatot:

11.8. gyakorlat. *Szerkesszük meg egy P pont O középpontú, a/b arányú középpontos hasonlóság melletti képét, ahol a és b adott szakaszok!*

11.9. gyakorlat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott*

1. *egy oldala, és rajta fekvő két szöge.*
2. *két oldala, és a közbezárt szögük.*
3. *két oldala, és egy tetszőleges szöge.*

Megjegyzés. A feladat megoldását az olvasóra bízzuk. Felhívjuk azonban a figyelmet a következőkre: az a) résznek pontosan akkor van megoldása, ha



26. ábra. Szakasz arányos osztása

a megadott két szög összege kisebb, mint 180°, és ilyenkor (izometria erejéig) pontosan egy megoldás van. A b) résznek mindig pontosan egy megoldása van (izometria erejéig). A c) résznek lehet egy vagy két megoldása is!

11.10. gyakorlat. *Adott egy a és egy 1 hosszúságú szakasz. Szerkesszünk $\sqrt{a}$ hosszúságú szakaszt!*

Megoldás. Vegyük fel egy egyenesre egymás után az adott a hosszúságú, és 1 hosszúságú szakaszukat úgy, hogy $\overline{AT} = a$ és $\overline{TB} = 1$. Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja legyen F, s állítsunk e merőlegest T-ben AB-re. Messe e az $\overline{AB}$ átmérőjű, $(1+a)/2$ sugarú kört M és N pontokban. A Thalész-tétel szerint $AMB\angle$ derékszög, és így $AMB\triangle$-re érvényes a magasság-tétel: $\overline{TM}^2 = 1 \cdot a$, vagyis $\overline{TM} = \sqrt{a}$. $\square$

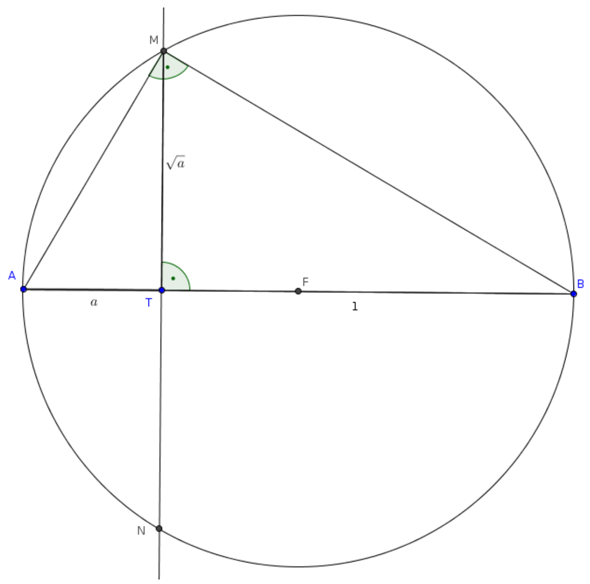
Megjegyzés. Ha egy derékszögű háromszög átfogója $a + 1/4$, egyik befogója $a - 1/4$, akkor a Pitagorász-tétel szerint a másik befogóra $\sqrt{a}$ adódik. A szerkesztés ez alapján is elvégezhető.

11.11. gyakorlat. *Szerkesszünk 90°-os, 75°-os, 60°-os, 45°-os és 30°-os szögeket!*

11.12. gyakorlat. *Szerkesszük meg egy P pont, egy e egyenes és egy k kör*

1. *adott t tengelyre vonatkozó tükörképet;*
2. *adott $\mathbf{v}$ vektorral vett eltoltját;*
3. *adott O pont körüli, adott α szöggel való elforgatottját!*

11.13. feladat. *Szerkesszünk szabályos ötszöget!*



27. ábra. $\sqrt{a}$ hosszú szakasz szerkesztése

Tekintsük meg a szabályos ötszög szerkesztéséről készült videót a youtubeon!

Megjegyzés. A szabályos ötszög belső szögei 108°-osak, ennek és a fentiek segítségével szerkeszthető 3° minden egész számú többszöröse. (Hogyan?) Mély matematikai eszközökkel kimutatható, hogy más egész fokos szögek nem szerkeszthetőek körzővel és vonalzóval.

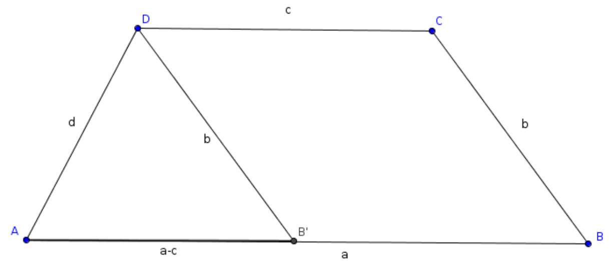
12. Szerkesztések és transzformációk

Célok: a tanult ismeretek alkalmazása, komplex feladatok.

12.1. Alapfeladatok

12.1. gyakorlat. *Szerkesszünk trapézt, ha adott a négy oldala!*

Megoldás. Induljunk ki a megoldásból, és tegyük fel, hogy $ABCD$ a keresett trapéz, aminek oldalai rendre a, b, c és d, a 28. ábra szerint. Feltesszük, hogy $c < a$, az $a = c$ eset vizsgálatát az olvasóra bízzuk. Toljuk el $\overline{BC}$ szárat $\overrightarrow{CD}$ vektorral: C pont képe nyilvánvalóan D lesz, B pont képét jelöljük B'.vel. A feltevések szerint $B'DA\triangle$ oldalai rendre $a - c$, b és d, ezért szerkeszthető. Ezután B pont szerkesztése egyszerű, AB' egyenesből egy B' középpontú, c sugarú kör metszi ki, végül C pontot D pont $\overrightarrow{B'B}$-ral való eltoltjaként kapjuk.



28. ábra. Trapéz szerkesztése négy oldalából

Elemzés: ha $B'DA\triangle$ szerkeszthető, akkor egyértelmű a megoldás. $\square$

12.2. gyakorlat. *Adott egy k kör, egy l egyenes és egy A pont. Szerkesszünk olyan e egyenest A ponton keresztül, hogy a l-lel és k-val vett (egyik) metszéspontja által meghatározott szakaszt az A pont felezze.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy e és k (egyik) közös pontja K, $L = e \cap l$, valamint hogy A felezi $\overline{KL}$ szakaszt. Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy K illeszkedik az l egyenes A-ra vonatkozó l' középpontos tükörképére! Ezek alapján a szerkesztés egyszerűen elvégezhető: tükrözzük l-t A-ra, s keressük meg az l' tükörkép k-val való metszéspontjait. Ezeket A-val összekötve kapjuk a keresett egyenest vagy egyeneseket.

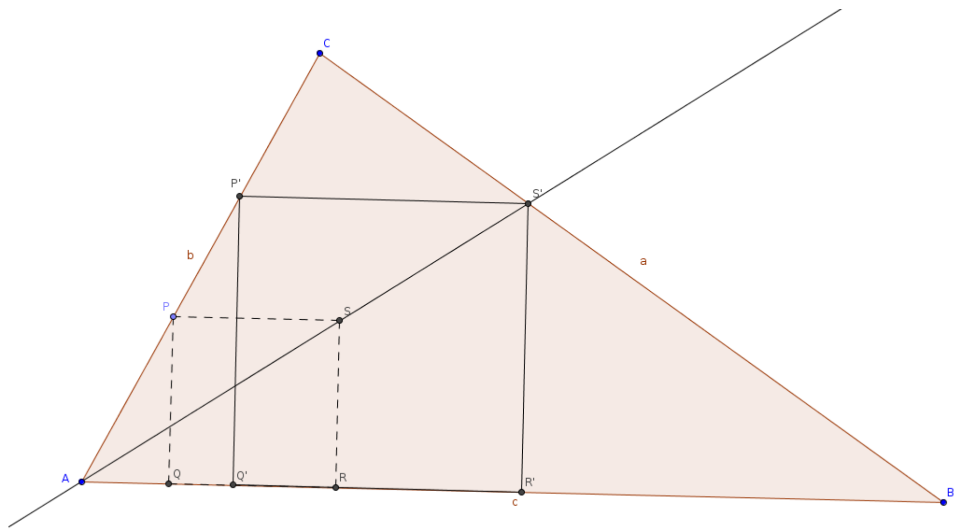
Elemzés: a k körnek és l' egyenesnek 0, 1 vagy 2 metszéspontja lehet, e szerint a feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lesz.$\square$

12.3. feladat. *1. Írjunk az adott ABC háromszögbe négyzetet, aminek két csúcsa a háromszög AB oldalára, egy-egy csúcsa pedig a háromszög AC ill. BC oldalára illeszkedik!*

2. Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, aminek oldalai párhuzamosak az adott ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3 egyenesekkel. (Az ABC háromszög minden oldalára illeszkedik a beírt háromszögg egy-egy csúcsa.)

3. Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan téglalapot, amely oldalainak aránya $2 : 3$.

Megoldás. Csak az a) pontot részletezzük, a másik két alfeladat megoldása analóg módon történik. Tekintsük a 29. ábrát. Jelöljük ki AC oldal tetszőleges P pontját, a P-ből AB-re bocsájtott merőleges talppontja legyen Q. Szerkesszük meg R pontot AB-n úgy, hogy $\overline{PQ} = \overline{QR}$ az ábra szerint. Végül szerkesszük meg S pontot, hogy $PQRS$ négyszög négyzet legyen. Természetesen S pont általában nem illeszkedik BC oldalra, ezért $PQRS$ nem megoldása a feladatnak.



29. ábra. Négyzet szerkesztése adott háromszögbe

Messe AS egyenes a BC oldalt S'-ben. Alkalmazzunk $PQRS$ négyszögre A középpontú, $\lambda = \overline{AS'}/\overline{AS}$ arányú középpontos hasonlóságot; ez természetesen S-t, S'-be viszi. Legyen $PQRS$ képe $P'Q'R'S'$. A középpontos hasonlóság szögtartó, ezért $P'Q'R'S'$ téglalap, valamint aránytartó is, ezért $P'Q'R'S'$ minden oldala egyenlő. Így $P'Q'R'S'$ négyzet. A konstrukció miatt $S' \in BC$, a középpontos hasonlóság megadása miatt pedig $P' \in AC$ és $Q', R' \in AB$, ezért $P'Q'R'S'$ a feladat megoldása.

Elemzés: ha $ABC\triangle$ hegyesszögű, akkor pontosan egy megoldás van. (Miért?) Gondoljuk meg mi történik, ha $ABC\triangle$ tompaszögű.

Tekintsük meg a vonatkozó dinamikus ábrát!

A b) és c) részeknél hasonlóan járjunk el, szerkesszünk egy a keresetthez hasonló alakzatot, ami „majdnem jó", vagyis egy kivételével csúcsai illeszkednek a megfelelő oldalakra, majd nagyítsuk fel középpontosan. □

12.2. Gyakorlatok

12.4. gyakorlat. *Adottak a koncentrikus k_1 és k_2 körök. Szerkesszünk olyan ℓ egyenest ami a két körvonalat A, B, C és D pontokban metszi (az egyenesen ebben a sorrendben), és $AB = BC = CD$.*

Vázlat. Vegyük észre, hogy pl. B pont tetszőlegesen kijelölhető. Ha kiindulunk a megoldásból, akkor A pont B-re vett tükörképe éppen C. Így C illeszkedik k_1 B-re vett középpontos tükörképére. A szerkesztés 12.2. gyakorlathoz hasonlóan végezhető el. Hány megoldás lesz? Mennyiben térnek el ezek egymástól? □

12.5. gyakorlat. *Adott egy k kör, és rajta [a körvonalon] három pont A, B és C. Szerkesszük meg azt az AX húrt, amelyet a BC húr felez.*

Ötlet. Ha BC húrt A pontból középpontosan kétszeresére nagyítjuk, a nagyított képnek tartalmazni kell X pontot. 0, 1 vagy 2 megoldás lehet.□

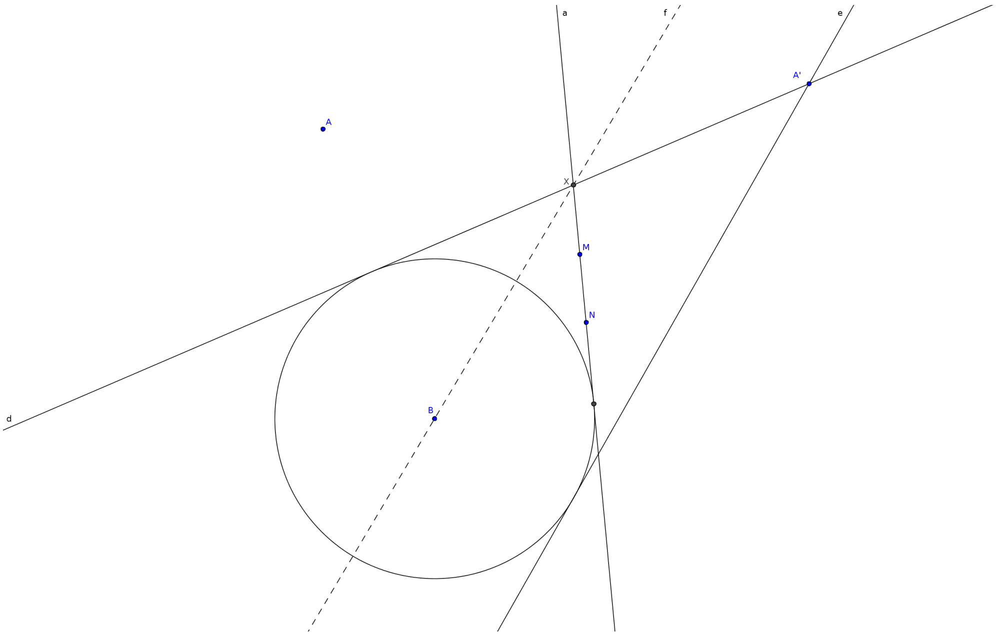
12.6. gyakorlat. *Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az egyik hegyesszöge és befogóinak összege!*

Vázlat. Legyen az adott hegyesszög α, a befogók adott összege s. Szerkesszünk tetszőleges derékszögű háromszöget, aminek egyik hegyesszöge α, ennek befogói legyenek a és b. Nagyítsuk ezt a derékszögű háromszöget $\lambda = s/(a+b)$ arányban. Egy megoldás van.□

12.7. gyakorlat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX és BX egyenesek ugyanakkora szöget zárnak be MN egyenessel.*

Ötlet. Legyen A pont MN egyenesre vett tükörképe A'. Az A', B és a keresett X pontok kollineárisak. Egy megoldás van. □

A leckét néhány nehezebb feladattal zárjuk.



30. ábra. A 12.8. feladat megoldása

12.8. feladat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX egyenes kétszer akkora szöget zár be MN egyenessel, mint a BX egyenes.*

A megoldás lényegében leolvasható a 30. ábráról.

Az utolsó feladatot csak érdeklődő olvasóknak ajánljuk.

12.9. feladat. *Adott az ℓ_1 egyenesen az A pont, és az ℓ_2 egyenesen a B pont. Szerkesszünk ℓ egyenest, ami olyan X ill. Y pontokban metszi az ℓ_1 ill. ℓ_2 egyeneseket, amikre $AX = BY$ és*

1. *ℓ párhuzamos egy adott e egyenessel.*
2. *ℓ áthalad egy rögzített M ponton.*
3. *az XY szakasz adott hosszúságú.*
4. *egy adott f egyenes felezi az XY szakaszt.*

Ötletek. Minden alrész megoldása a következő állításon múlik.

Legyenek $\overline{AX} = \overline{BY}$ két egyenlő hosszú, nem párhuzamos, egymással α szöget bezáró szakaszok. (Szakaszok szögét az őket tartó egyenesek szögeként értelmezzük.) Ekkor létezik egy olyan O pont, hogy az O körüli α vagy $180° - \alpha$ szögű forgatás A-t B-be, X-t pedig Y-ba viszi.

Ennek igazolása nem túl nehéz, az O pont az $\overline{AB}$ szakaszfelező merőlegesének és $\overline{XY}$ szakaszfelező merőlegesének metszéspontjában kell legyen. A feltétel miatt $AOX\triangle$ és $BOY\triangle$ egybevágóak, hiszen oldalaik páronként egyenlőek, amiből $AOB\angle = XOY\angle$ következik. (Hogyan?) A forgatás nyilvánvalóan AX egyenest BY-ba viszi, ezért a forgatás szöge α vagy $180° - \alpha$.

Esetünkben ismert A és B valamint α is, ezért (minden lehetséges) O pont megszerkeszthető.

a) Legyen az e egyenes O körüli megfelelő elforgatottja e', és $Z = e \cap e'$. OZ egyenes kimetszi ℓ_2-ből Y-t. Miért?

b) Legyen M megfelelő elforgatott képe M'. Az MM' szakasz α (vagy $180° - \alpha$) szögű látóköríve kimetszi ℓ_2-ből Y-t. Miért?

c) Mivel $\overline{XY}$ hossza ismert, így $\overline{OX}$ hossza szerkeszthető. Fejezzük be a gondolatmenetet!

d) S-ből Y-t egy ismert szögű és ismert arányú forgatva nyújtással kaphatjuk. Hogyan? $\square$

13. Illeszkedés, a sík és a tér feldarabolása

Célok: bonyolultabb bizonyítások struktúrálása, indirekt bizonyítás és teljes indukció megismerése, ízelítő a kombinatorikus geometriából.

13.1. A Sylvester-Gallai tétel

Ebben a szakaszban egy nevezetes illeszkedési tételt ismerünk meg, amely Erdős Pál egyik kedvenc feladata volt.

Olvassunk utána Erdős Pál életútjának az interneten!

46. tétel (Sylvester-Gallai tétel). *Adott $n \geq 3$ pont a síkon. Ekkor vagy az összes adott pont illeszkedik egy egyenesre, vagy van egy olyan egyenes, amire közülük pontosan kettő illeszkedik!*

A tételt Sylvester tűzte ki az 11851-es problémaként 1893-ban a The Educational Times-ban. Sokan a kombinatorikus geometria egyik kiindulópontjának tekintik. A teljes megoldás meglepően sokáig váratott magára, 1944 környékén oldotta meg Erdős Pál közeli barátja, Lovász László későbbi témavezetője, Gallai Tibor. A problémának a mai napig aktív utóélete van. Később a tételre több különböző bizonyítás született, az alábbi Kelly nevéhez fűződik.

Bizonyítás. Legyenek az adott pontok $P_1, \dots, P_n$, és tekintsük az összes olyan egyenest, amire az adott pontok közül legalább kettő illeszkedik: $e_1, \dots, e_m$. (Ilyen egyenesből valóban csak véges sok van.)

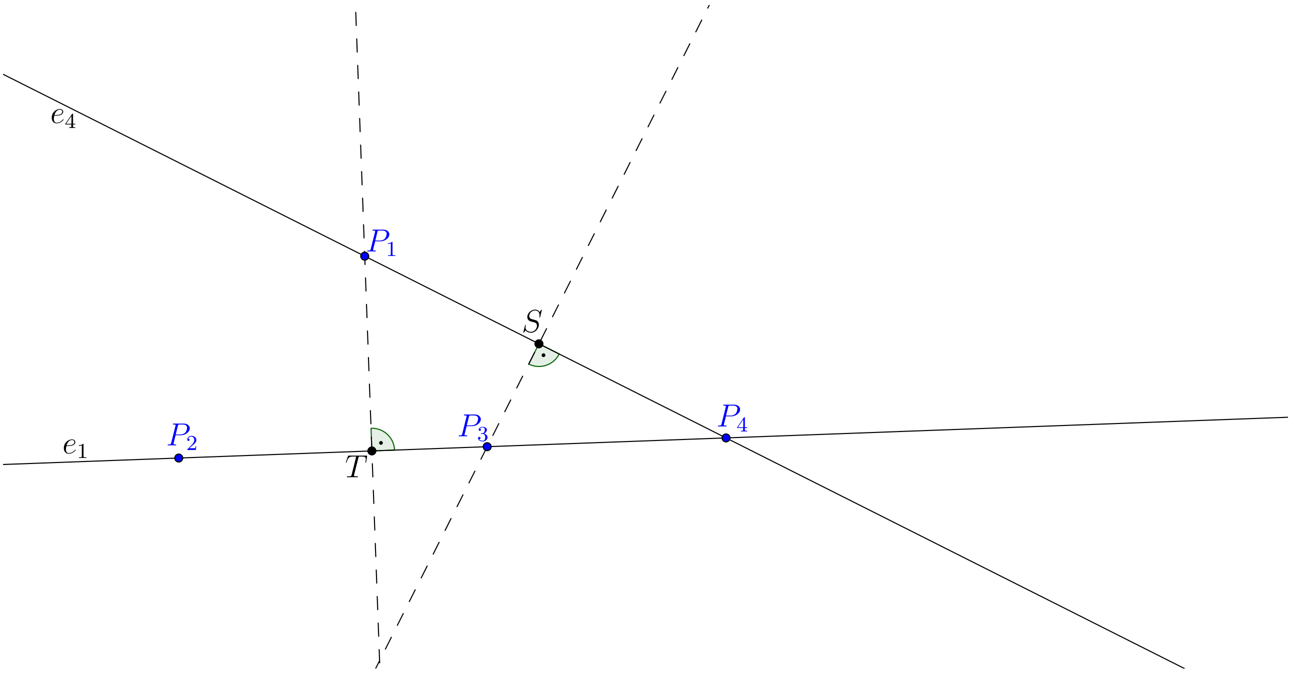
A bizonyítást **indirekt** végezzük. Az indirekt bizonyítás lényege, hogy feltesszük a bizonyítandó állítás tagadását, és ebből ellentmondásra jutunk a kiindulási feltételekkel.

Olvassuk el a Wikipédia szócikkét az indirekt bizonyításról!

Az állítás tagadása esetünkben azt mondja, hogy a $P_1, \dots, P_n$ pontok nem kollineárisak, **és** nincs olyan egyenes, amire közülük pontosan kettő illeszkedik.

Utóbbi feltételt jelöléseinkkel úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $e_1, \dots, e_m$ egyenesek mindegyikére legalább három pont illeszkedik.

Tekintsük az összes lehetséges (P_i, e_j) párt, ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$. Minden ilyen párra lemérjük a P_i pont és az e_j egyenes $d(P_i, e_j)$ távolságát. Ha $P_i \in e_j$, akkor természetesen $d(P_i, e_j) = 0$. Mivel azonban a feltevésünk szerint a $P_1, \dots, P_n$ pontok nem kollineárisak, így létezik olyan pár, amire a távolság szigorúan pozitív. Tekintsük az egyik olyan párt, amire a távolság pozitív, de az ilyenek között a lehető legkisebb, minimális. Ilyen pár



31. ábra. Keressünk kisebbet a minimális $\overline{P_1T}$ távolságnál!

van. (Esetleg több is, ilyenkor szabadon válasszunk egyet.) A jelölések esetleges újraindexelésével elérhetjük, hogy a választott minimális távolságú pár a (P_1, e_1) legyen. Formulával röviden ez így írható:

$$d(P_1, e_1) = \min_{P_i \notin e_j} d(P_i, e_j).$$

Tekintsük a 31. ábrát! Legyen T a P_1-ből e_1-re bocsájtott merőleges talppontja. Az indirekt feltevés szerint az e_1 egyenesre legalább három adott pont illeszkedik. Feltehetjük, hogy P_2, P_3 és P_4 három e_1-re ebben a sorrendben illeszkedő pont, az ábra szerint. Feltehető továbbá az is, hogy T nem választja el P_3-t és P_4-t. (Ha elválasztja, vagyis T a $\overline{P_2P_4}$ szakasz belső pontja, akkor P_4 szerepét P_2 veszi át.) A P_1P_4 egyenest felsoroltuk, feltehetjük, hogy épp e_4-gyel jelöltük. Végül, legyen S a P_3-ból e_4-re bocsájtott merőleges talppontja.

A bizonyítás következő lépését az olvasóra bízzuk.

13.1. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy a fenti jelölésekkel $\overline{P_1T} > \overline{P_3S}$!*

A 13.1. gyakorlatból a tétel azonnal következik. Kaptuk ugyanis, hogy $d(P_3, e_4) < d(P_1, e_1)$, ami ellentmond annak, hogy $d(P_1, e_1)$ a lehető legkisebb.

Ezzel az indirekt bizonyítást befejztük, ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevésünk szükségképpen hamis, tehát a tétel állítása igaz. □

A Sylvester-Gallai tétel egyik legismertebb következménye a következő feladat.

13.2. feladat. *Adott $n \geq 3$ nem kollineáris pont a síkon. Mutassuk meg, hogy legalább n olyan egyenes van, amire az adott pontok közül legalább kettő illeszkedik!*

Megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A teljes indukciós bizonyításokban általában egy olyan állítást bizonyítunk, amelyik függ az n természetes számtól. Lényege, hogy először az n kis értékeire az állítást külön igazoljuk. Majd második lépésként azt mutatjuk meg, hogy ha az állítás valamilyen n-re igaz, akkor $(n+1)$-re is teljesül.

Olvassuk a teljes indukcióról szóló Wikipédia szócikket!

Visszatérve a feladat megoldására, az $n = 3$ esetén az állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk $n = 3, \ldots, k$ esetén, és most bizonyítsuk $n = k + 1$-re.

Tekintsük a $P_1, \ldots, P_{k+1}$ nem kollineáris pontokat. A Sylvester-Gallai tétel szerint feltehetjük, hogy $P_k P_{k+1}$ egyenesre a $P_1, \ldots, P_{k-1}$ pontok egyike sem illeszkedik. Két eset lehetséges.

Ha a $P_1, \ldots, P_k$ pontok kollineárisak, akkor a feltevés szerint P_{k+1} erre az egyenesre nem illeszkedik, így P_{k+1}-t a $P_1, \ldots, P_k$ pontok mindegyikével összekötve éppen k különböző egyenest kapunk, a $P_1 P_2$ egyenes pedig ezektől is különböző, így valóban megvan a $k + 1$ meghatározott egyenes.

Ha a $P_1, \ldots, P_k$ pontok nem kollineárisak, akkor az indukciós feltevés szerint meghatároznak legalább k különböző egyenest. Ezek között $P_k P_{k+1}$ biztosan nem szerepel, hiszen $P_k P_{k+1}$ egyenesre a $P_1, \ldots, P_{k-1}$ pontok egyike sem illeszkedik. Így az állítás ebben az esetben is teljesül $n = k + 1$-re. Ezzel az indukciós lépést befejeztük, és a bizonyítás teljes. □

A Sylvester-Gallai tétel duálisa a következő feladat, amit a téma iránt érdeklődő hallgatóknak ajánlunk.

13.3. feladat. *Adott n egyenes síkon úgy, hogy nincsen köztük két párhuzamos, és nem illeszkednek egyetlen pontra. Ekkor létezik olyan pont, ami az adott egyenesek közül pontosan kettőre illeszkedik.*

A feladat megoldása valamint egészen aktuális kutatási eredmények találhatóak Jonathan Lechner (angol nyelvű) PhD disszertációjában.

13.2. A seprűegyenes

47. tétel. *n általános helyzetű egyenes a síkot $(n^2+n+2)/2$ darabra bontja.*

Bizonyítás. Jelölje az adott egyeneseket $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Mivel az egyenesek általános helyzetűek, így bármely kettő metszi egymást, és semelyik három nem illeszkedik közös pontra. Így metszéspontjaik száma annyi, ahány egyenespárt kiválaszthatunk az n egyenes közül. A pár első tagjára n, második tagjára $n-1$ választási lehetőségünk van, de a kiválasztás sorrendje lényegtelen, így a metszéspontok száma $k = n(n-1)/2$. Legyenek a metszéspontok $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Tekinsünk egy ℓ egyenest, ami nem párhuzamos a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ által meghatározott egyenesek egyikével sem, valamint a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontok mind ℓ ugyanazon oldalára esnek. (Egy ponthalmaz meghatároz egy egyenest, ha a ponthalmaz legalább két pontja illeszkedik az egyenesre.)

Az ℓ egyenes az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egyenesek mindegyikét egy-egy pontban metszi. Ha ℓ egyenesen „végigsétálunk", pontosan akkor lépünk át egy síkrészből egy másikba, amikor áthaladunk egy ilyen metszésponton, így az ℓ egyenes pontosan $n+1$ létrejött síkrészt metsz.

Most képzeletben seperjünk végig az ℓ egyenessel a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontokon, vagyis toljuk el párhuzamosan ℓ-t folytonosan addig, míg az összes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pont át nem kerül ℓ másik oldalára. Az ℓ speciális választása miatt a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontokon egyesével „haladunk át". Egy ábrával könnyen meggyőződhetünk róla, hogy minden egyes ilyen áthaladáskor ℓ elhagy egy korábban metszett síkrészt, és helyette egy új síkrészbe metsz bele.

A leírtakból következik, hogy a létrejött síkrészek száma megegyezik a kezdetben metszett síkrészek számának és a metszéspontok számának összegével, vagyis $(n+1) + n(n-1)/2 = (n^2+n+2)/2$, ahogy állítottuk. $\square$

A fenti módszer a térben is működik. A gondolatmenetet lemásolva oldjuk meg a következő feladatot!

13.4. feladat. *Legfeljebb hány részre oszthatja a teret n sík?*

Egy érdekes variánst kapunk a térben, ha feltesszük, hogy a síkok mind illeszkednek az origóra.

13.5. feladat. *Legfeljebb hány részre oszthatja a teret n origóra illeszkedő sík?*

A téma iránt érdeklődőknek ajánljuk *Hatvani László: A tér darabolása síkokkal* (Polygon XX. évf. 1. szám (2011), 101–106) című cikkét, amiben a fenti két feladat megoldása is megtalálható.

13.3. Gyakorlatok

13.6. gyakorlat. *Hány részre osztják a teret egy*

1. *szabályos tetraéder*
2. *kocka*

lapsíkjai?

13.7. gyakorlat. *Lehet-e egy kocka síkmetszete*

1. *szabályos ötszög?*
2. *szabályos hatszög?*

13.8. gyakorlat. *Adott a térben négy körvonal, amik közül bármely három illeszkedik egy gömbfelületre. Mutassuk meg, hogy mind a négy illeszkedik egy gömbfelületre!*

14. II. ellenőrző dolgozat

14.1. feladat. *Adjunk példát olyan háromszögre, ami egy csúcsára illeszkedő egyenessel felbontható két olyan háromszögre, amelyek mindketten hasonlóak az eredeti háromszöghöz!*

14.2. feladat. *Határozzuk meg egy szabályos ötszög összes szimmetriáját!*

14.3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást!*

14.4. feladat. *Valaki felrajzol nekünk egy* $20°$*-os szöget. Szerkesszünk ennek segítségével egy* $1°$*-os szöget!*

14.5. feladat. *Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget, ha adott egyik szöge és a kerülete! Elemezzük a feladatot!*

14.6. feladat. *Tekintsünk egy kockát a körülírt gömbjével (azaz azzal a gömbbel, ami a kocka mind a 8 csúcsát felszínén tartalmazza). Hány részre darabolják szét a kocka lapsíkjai a körülírt gömbjét?*

15. Nevezetes tételek, egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok

Célok: nehezebb tételek önálló feldolgozása; lehetséges témák referáláshoz, kiselőadáshoz.

A kurzus zárásaként összegyűjtöttünk néhány közismert, nevezetes elemi geometriai feladatot és tételt egyfajta csemegeként. Legtöbb esetben az állítás kimondása után csak szakirodalmi referenciát adunk.

15.1. feladat (Izogonális pont, Fermat-Toricelli pont). *Adott ABC hegyesszögű háromszögben keressük meg azt pontot, aminek a csúcsoktól mért távolságösszege minimális! Mutassuk meg, hogy ez a pont egyértelmű, belőle minden oldal ugyanakkora szög alatt látszik!*

A feladatra több megoldás is ismert, ezeket gyűjtötte össze Szmerka Gergely 2008. áprilisi KöMaL-cikkében.

A Fermat-Torricelli pontról bővebben az alábbi prezentációban olvashatunk.

15.2. feladat (Fagnano feladata, talpponti háromszög). *Adott a hegyesszögű $ABC\triangle$ háromszög, egy H háromszöget az $ABC\triangle$-ba írtnak mondunk, ha H egy-egy csúcsa illeszkedik ABC egy-egy oldalára. Tekintsük az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai által meghatározott háromszöget. Mutassuk meg, hogy az ABC-be írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb!*

A feladat megoldása megtalálható például itt.

Szintén a talpponti háromszög fenti tulajdonságával foglalkozik H. S. M. Coxeter - S. L. Greitzer: Az újra felfedezett geometria c. könyvének 4.5. szakasza.

48. tétel (Euler-féle formula és a sugáregyenlőtlenség). *Legyen egy (hegyesszögű) háromszög beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R, a beírt és körülírt körök középpontjainak távolsága d. Ekkor*

1. $d^2 = R^2 - 2Rr$. (Euler-féle formula)

2. $R \geq 2r$. (sugáregyenlőtlenség)

Természetesen a sugáregyenlőtlenség azonnal következik az Euler-féle formulából, hiszen $d^2 \geq 0$.

Az Euler-féle formula elemi bizonyítása megtalálható a Wikipédián.

Inverziót is használó bizonyítás, illetve némi kitekintés a témában található ebben a prezentációban.

49. tétel (Ptolemaiosz-tétel, Ptolemaiosz-egyenlőtlenség). *Egy konvex négyszög oldalai a körüljárás szerint a, b, c és d, átlói e és f. Ekkor*

$$ac + bd \geq ef,$$

egyenlőség pontosan húrnégyszögekre teljesül.

A Ptolemaiosz-tételt sokszor csak egyenlőség formájában mondják ki húrnégyszögekre. A vonatkozó Wikipédia szócikk is ezt a formát bizonyítja. Az általános egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható pl. Reimann István: Nemzetközi matematikai olimpiák (1959-2003) c. könyv 7. fejezetének [24] szakaszában.

50. tétel (Erdős-Mordell egyenlőtlenség)). *Legyen P az $ABC\triangle$ belső vagy határpontja, az oldalegyenesktől mért távolságai rendre x, y és z, míg a csúcsoktól mért távolságai u, w és v. Ekkor*

$$u + v + w \geq 2(x + y + z),$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha P az $ABC\triangle$ szabályos háromszög középpontja.

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség az elemi háromszöggeometria egyik legmélyebb eredménye. Sok szép következménye ismert, például a korábban látott sugáregyenlőtlenség is következik belőle. Számtalan kapcsolódó szakirodalom létezik, ezek közül mi melegen ajánljuk Kubatov Antal vonatkozó cikkét. (Pdf formátumban elérhető itt.) Szintén olvashatunk az Erdős-Mordell tételről Reimann István: Nemzetközi matematikai olimpiák (1959-2003) c. könyv 7. fejezetében.